5.06(451)12
cop.

Library

LIBRARY
OF THE
AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

ATTI

DELLA

5.06(451)T2
CR

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMONONO

1913-1914

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1914

Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

LIBRARY
OF THE
AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1913.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Boselli (S. E. Paolo), P.° Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Presidente dell'Istituto Storico Italiano, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Presidente del Consiglio Centrale della Società " Dante Alighieri ", Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Membro del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ❋ e ⊞, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa*, 3.

Rieletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

Vice-Presidente

Camerano (Lorenzo), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Presidente del Club Alpino Italiano, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, Socio Onorario dell'Accademia dei Zelanti di Acireale, ✻, Comm. ☒. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Rieletto alla carica il 22 giugno 1913 — 11 luglio 1913.

Tesoriere

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore di Geologia e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Presidente della Società Geologica Italiana, Presidente della Commissione per lo studio agrologico della Tripolitania, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Comm. ✻ ☒. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Rieletto alla carica il 27 novembre 1910 — 15 dicembre 1910.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✻, Comm. ☒. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

Rieletto alla carica il 22 gennaio 1911 — 5 febbraio 1911.

Segretario

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge e della Società Matematica di Londra, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ⊞. — *Torino, Corso Vittorio Eman., 85.*

Rieletto alla carica il 16 novembre 1913.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Comm. ⊞, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ✻, e ⊞. — *Torino, Via Lagrange, 2.*

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), *predetto.*

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), *predetto.*

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ⊞. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nel R. Politecnico, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Uff. ⊞. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Presidente della Commissione Reale per l'educazione fisica, ecc., ecc., Uff. ✻, Comm. ⊞. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore ordinario e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica ed incaricato di Chimica bromatologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, già Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Membro d'onore della R. Accademia delle Scienze di Romenia (Bucarest); Membro onorario della *Verein Chemiker-Coloristen*; Socio Onorario dell'Associazione Chimica Industriale di Torino; Socio della *Deutsche Gesellschaft f. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. ⊞, ⚒. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei

materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Comm. ⊞, Uff. ❋. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale nella R. Università di Torino, Comm. ⊞. — *Torino, Via Bidone, 36.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), *predetto.*

15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, della Società Antonio Alzate di Mexico, ecc., Comm. ⊞, *Officier du mérite agricole. — Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*

10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Membro della Commissione superiore Metrica al Ministero di Agricoltura, Ind. e Comm., Membro del Consiglio Superiore dei servizi elettrici al Ministero delle Poste e Telegrafi, Uff. ❋, Comm. ⊞. — *Torino, Via Cernaia, 40.*

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della Società italiana delle scienze (detta dei XL) e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione. — *Corso Vinzaglio, 10.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell'Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ❋ e ⊞. — *Via Baretti, 45.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Balbiano (Luigi), Dottore in chimica e Professore ordinario di Chimica organica nel R. Politecnico di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di medicina di Roma, Socio onorario delle Società di Farmacia di Torino, di Parigi e di Liegi, Uff. ✻. — *Via Po, 22.*

15 maggio 1910 — 12 giugno 1910.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stockholm, Dottore onorario in Fisica della Clark University di Worcester, Mass., Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma, Professeur agréé à la Sorbonne (1912), Louis Clark Vanuxem lecturer (1912) all'Università di Princeton N. J., uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro straniero della Società Reale di Londra, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella classe di matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Membro onorario straniero della Società Reale di Edimburgo, Membro straniero dell'Accademia nazionale delle Scienze (Stati Uniti d'America, Washington), Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Gottinga, Membro corrispondente straniero dell'Accademia Ungherese delle scienze di Budapest, Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle scienze di Pietroburgo, Membro onorario dell'Accademia Rumena di Bucarest, Socio corrispondente della Società medico-fisica di Erlangen, Membro dell'Accademia Imperiale Leopoldina Carolina di Halle, Membre du Bureau della Società matematica di Francia, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, Membro corrispondente della Società Scientifica di Buenos Aires, Vice-Presidente del R. Comitato Talassografico Italiano, ✠, ✻, ⚭. — *Roma, Via in Lucina, 17.*

3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Professore emerito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Gr. Uffiz. ❋, Gr. Croce ⊞. — *Napoli, Via dei Mille, 74.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ❋, ⊞, ⊜. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa e incaricato di Analisi infinitesimale, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e Presidente della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, Socio ordinario non residente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli nella Sezione di Scienze matematiche, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena, dell'Accademia di scienze naturali di Catania e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle scienze (Roma), della R. Società delle scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario delle Università di Christiania e di Glasgow, Comm. ❋, Gr. Uff. ⊞, ⊜. — *Via S. Martino, 32. Pisa.*

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologiè* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di

Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Comm. ✻ ⊞, Cav. ⊕.

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Lorenzoni (Giuseppe), Dottore negli Studi d'Ingegnere civile ed Architetto, Professore emerito di Astronomia nella R. Università e Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze ed Arti di Modena, Membro della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, ecc., Uff. ✻, Comm. ⊕. — *Padova, Osservatorio astronomico.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Noether (Massimiliano), Professore nell'Università di Erlangen. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Baeyer (Adolfo v.), Professore nell'Università di München. — Id. id.

Thomson (John Joseph), Professore nell'Università di Cambridge. — Id. id.

Suess (Edoardo), Professore nell' Università di Vienna. — Id. id.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1854.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.

Enriques (Federico), Professore nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.

Guccia (Gio. Batt.), Professore nell'Università di Palermo. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.

Celoria (Giovanni), Senatore del Regno, Direttore dell'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.

Cerulli (Vincenzo), Direttore dell'Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.

Boussinesq (Valentino), Membro dell'Istituto, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.

Levi-Civita (Tullio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Roiti (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.

Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.

Lorentz (Enrico), Professore dell'Università e Curatore del Laboratorio Teyler di Haarlem. — 14 Giugno 1903.

Battelli (Angelo) Professore nell'Università di Pisa. — 15 maggio 1910.

Garbasso (Antonio), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.

Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.

Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.

Cantone (Michele), Professore nell'Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.

Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.

Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — Id. id.

Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.

Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.

Ciamician (Giacomo), Senatore del Regno, Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.

Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 Marzo 1905.

Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.

Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 Maggio 1910.

Willstätter (Richard). Professore Kaiser Wilhelm Institut, Berlin. — Id. id.

Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.

Meyer (Ernesto v.), Professore nella R. Scuola superiore tecnica in Dresda. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.
Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.
Capellini (Giovanni), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 12 Marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.
Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica, Londra. — 3 Dicembre 1893.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — Id. id.
Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 Marzo 1905.
Suess (Francesco Edoardo), Professore " Deutsche Technische Hochschule " di Praga. — Id. id.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 Maggio 1910.
Kilian (Carlo), Professore nell' Università di Grenoble. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Saccardo (Andrea), Professore nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.
Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — Id. id.
Wiesner (Giulio), Professore nell'Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — Id. id.
Belli (Saverio), Professore, Torino. — Id. id.
Baccarini (Pasquale), Professore nell' Istituto di Studi superiori in Firenze. — 15 Maggio 1910.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.
Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.
Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.

Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School " di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.

Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — Id. id.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Weismann (Augusto), Professore nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — Id. id.

Dastre (Alberto Giulio), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.

Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 Maggio 1910.

Metchnikoff, Vice Direttore dell' Istituto Pasteur in Parigi. — Id. id.

Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

Ehrlich (Paolo), Professore, Direttore dell'Istituto sperimentale di terapia in Frankfurt a. M. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Direttore della R. Scuola superiore di studi applicati al Commercio in Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Membro del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, del Consiglio superiore per l'Istruzione commerciale, agricola, industriale, della Commissione Reale per la riforma del Diritto privato, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche, Comm. ✻, ⊞. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*

Eletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

Segretario.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neolatine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Deputazione Veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della Deputazione municipale ferrarese di storia patria, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova, dell'Ateneo Veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✻, Comm. ⊞. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*

Eletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

ACCADEMICI RESIDENTI

Manno (Barone D. Antonio), Senatore del Regno, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M. (Incaricato), Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ⊞, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ⊞, Uff. ✻, Comm. ⊞. — *Torino, Via Principi d'Acaia, 5.*

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Boselli (Paolo), *predetto.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria e della R. Deputazione Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della Società Storica Friulana, Comm. ⊞. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 10.*

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Renier (Rodolfo) *predetto.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 30 ottobre 1901.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, della Società Reale di Napoli, ✻, ⊞. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro, *predetto*).

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900. — Pensionato 20 maggio 1897.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ⊞. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Rettore della R. Università di Torino, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere,

Professore di diritto ecclesiastico, ❋, Comm. ⊞. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina e Direttore della Biblioteca della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Peloritana di Messina, dell'Ateneo di Brescia e dell'Accademia Virgiliana di scienze, lettere ed arti di Mantova e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Direttore della Rivista di Filologia e d'Istruzione classica, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, Uff. ❋, Comm. ⊞. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*

20 Maggio 1906 - 9 giugno 1906.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ❋, Gr. Uff. ⊞. — *Corso Siccardi, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, Uff. ❋, Comm. ⊞. — *Torino, Via Montebello, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Sforza (Conte Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena, per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza, e della Toscana, Socio onorario della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Ateneo di Brescia, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie,* Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione Senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia e della Colombaria di Firenze, Consigliere del Comitato Piemontese per la Storia del Risorgimento italiano, Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Soprintendente del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè, Uff. ❋ e Comm. ⊞. — *Via S. Dalmazzo, 24.*

17 Febbraio 1907 - 19 aprile 1907,

Einaudi (Luigi), Dottore in legge, Professore di Scienza delle finanze e Diritto finanziario della R. Università di Torino ed incaricato di eco-

nomia e legislazione industriale nel R. Politecnico di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e di quella dei Georgofili. — *Piazza Statuto, 16.*

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Dottore in Legge, Soprintendente alle Gallerie ed ai Musei medioevali, ecc. del Piemonte e della Liguria, Direttore della R. Pinacoteca di Torino, Vice Presidente della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie. — *Via dei Mille, 54.*

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Schiaparelli (Ernesto), Dottore in lettere, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, corrispondente del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro onorario dell'Istituto Khediviale egiziano e della Società Asiatica di Francia, della Società di Archeologia biblica di Londra, Direttore del R. Museo di Antichità di Torino, Uff. ✻, Comm. ☒.

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (S. E. Pasquale), Senatore del Regno, Socio dell'Istituto Storico di Roma, Presidente del Consiglio degli Archivi, Professore di Propedeutica Storica e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Università di Pisa, Cav. dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ☒, Cav. ☒, Cav. del Merito di Prussia, Membro del Consiglio dell'Ordine Civile di Savoia e del Consiglio dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, ecc.

16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto

Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* delle Università di Oxford e di Cracovia, Uff. ✻, Comm. ⊞, Cav. ⊕. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*

20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell'Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca, Doct. Philosoph. (honoris causa) dell'Università di Berlino, Cav. della Legione d'Onore, Cav. ⊕, Gr. Uff. ✻, Comm. ⊞. — *Firenze, Piazza Savonarola, 2.*

20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 120.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Gr. Uffiz. ✻, ⊞. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore " honoris causa " dell'Università di Giessen, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio ordinario della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, della Società Dantesca americana, della " New Language Association of America ", della " Société néophilologique " dell'Università di Pietroburgo, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, dell'Ateneo Veneto, della Società Reale di Napoli, della R. Accademia di Palermo, della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della R. Società delle Scienze di Göttingen, dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles-Bettres), della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese, ⊕, Uff. ✻, Gr. Uff. ⊞. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Kerbaker (Michele), Dottore in lettere, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e incaricato di Sanscrito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della Società Reale di Napoli, della R. Accademia Pontaniana, Membro della Società Asiatica italiana di Firenze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Accademico corrispondente della Sezione di Scienze storiche e filologiche dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, Comm. ✻ e ▭. — *Napoli, Vomero, Via Scarlatti, 60.*

26 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Guidi (Ignazio), Dottore, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ⊕, Uff. ✻, ▭, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*

12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Direttore dei Musei Preistorico e Etnografico, Professore nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Via del Collegio Romano, 26.*

12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Maspero (Gastone), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di Bonn, Comm. ✻. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Duchesne (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Francese in Roma. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.
Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.
Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 Giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 Giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.
Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Torino. — 15 Marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 Maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — Id. id.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano. — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.
Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra. Firenze. — 3 Marzo 1889.
Barnabei (Felice), Roma. — 28 Aprile 1895.
Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.

Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 Maggio 1908.

Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 21 Giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.

Amélineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.

Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.

Lasinio (Fausto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.

Parodi (Ernesto Giacomo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.

Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.

Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 21 Giugno 1903.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — id. id.

Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — id. id.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — id. id.

Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona. — id. id.

Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Torino. — id. id.

Vitelli (Gerolamo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 Maggio 1908.

Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Fraccaroli (Giuseppe), Professore. Milano. 26 Febbraio 1911.

Sabbadini (Remigio), Professore nella R. Accademia scientifico letteraria di Milano. Id. id.

Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Università di Palermo. — Id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1912 al 31 Dicembre 1913.

ELEZIONI

SOCI

De Sanctis (Gaetano)
Sforza (Giovanni)
Ruffini (Francesco)

Eletti nell'adunanza del 2 marzo 1913 della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche per comporre la Commissione del premio Gautieri per la Storia (triennio 1910-1912).

Naccari (Antonio)
Camerano (Lorenzo)
Fusari (Michele)
Guareschi (Icilio)
Foà (Pio)
Ruffini (Francesco)
Renier (Rodolfo)
De Sanctis (Gaetano)
Stampini (Ettore)
Sforza (Giovanni)

Eletti nell'adunanza a Classi Unite del 13 aprile 1913 per comporre la 2ª Giunta del XVIII premio Bressa, quadriennio 1909-1912 (Nazionale).

Boselli (S. E. Paolo) rieletto a Presidente dell'Accademia nell'adunanza a Classi Unite del 18 maggio 1913 e approvata l'elezione con R. Decreto 5 giugno 1913.

Chironi (Giampietro) eletto a Direttore di Classe nell'adunanza del 18 maggio 1913 della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, approvata l'elezione con R. Decreto 1913.

Renier (Rodolfo) eletto a Segretario di Classe id. id.

Camerano (Lorenzo) rieletto a Vice-Presidente dell'Accademia nell'adunanza a Classi Unite del 22 giugno 1913 ed approvata l'elezione con R. Decreto 11 luglio 1913.

MORTI

30 Maggio 1913.

Graf (Arturo), Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filosofiche.

24 Giugno 1913.

Allievo (Giuseppe), id. id.

27 Giugno 1913.

Sclater (Filippo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1913.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio: quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aberdeen** University. Studies. N. 52-62, vol. I.

* **Acireale**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti. Atti e Memorie. — Memorie della Classe di scienze, ser. 3ª, vol. VI.

— R. Stazione Sperimentale di Agrumicoltura e Frutticoltura. Annali, vol. I.

* **Aix**. Université. Annales de la Faculté de Droit, T. IV, 3-4; V, 1-4. — Annales de la Faculté des Lettres, T. IV, 3-4; V, 1-4.

* **Alba**. Società di Studi storici ed artistici. Alba Pompeia. Rivista bimestrale, ann. V, 1-4.

* **Albuquerque**. University of New Mexico. Bulletin. Chemistry Ser., vol. I, 1.

America. American Philological Association. Transactions and Proceedings, vol. XLII, 1911.

* **Amsterdam**. Royale Académie des sciences. Verhandelingen Afd. Natuurkunde, Iᵉ Sect., Dl. XVII, 1; Letterkunde, N. R., Dl. XII, 2, 3; XIII, 1. — Verslagen, Natuurkunde, vol. XX, 1, 2. — Proceedings (Section of Science), vol. XIV, 1, 2, Jaarboek. 1911. — Prijsvers Thalhssa.

* — Wiskundig Genootschap. Nieuv Archief., Dl. X, 3, 4. — Wiskundige Opgaven met Oplossing Elfde, Deel 1-5.

* **Angers**. Société d'Études Scientifiques; Bulletin, Nouv. Sér., XLIᵉ an., 1911.

Atene. Observatoire National. Annales, T. VI

Austin. Texas Academy of Science. Transactions, vol. XIII.

* **Baltimore**. Johns Hopkins University. American Journal of Mathematics, vol. XXXIV. — American Chemical Journal, vol. XLVI, 6; XLVII; XLVIII, 1-4. — American Journal of Philology, XXXII, 4; XXXIII, 1-3. — Studies historical and political Science, Ser. XXIX, 1; XXX, 1-2. — Circular, 1911, 9, 10; 1912 Summer session N. 1-3, 5, 7.

Baltimore. Peabody Institute. Forty-Sixth annual Report, May 31, 1913.

* **Barcelona**. Real Academia de Ciencias y Artes. Memorias, 3ª época, vol. X, 13-23. — Boletin, 3ª época, vol. III, 4. — Nomina del Personal Académico, 1912-1913.

* **Basel**. Naturforschende Gesellschaft. Verhandlungen, Bd. XXIII.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno IX, N. 4; X, 1-4.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Oudheidkundig Verslag, 1912, 4 kwartaal, 1913, 1-3. — Dagh-Register Casteel Batavia, 1680. — Supplement to the Catalogue of the arabic manuscripts. — Tijdschrift, Deel LV, Afl. 1-6. — Notulen, Deel L, 3-4; LI, 1-2. — Verhandelingen, Deel LX, 1. — Rapporten van de Commissie in Nederlandisch.-Indië von Oudheidkundig onderzoek op Java cu Madoera, 1912. — Nadere bijdrage tot de kennis van het Talavetsch door Dr. K. G. F. Steller.

— R. Magnetical and Meteorological Observatory. Observations, vol. XXXII, 1909. — Appendix, vol. XXIX, 1906. — Regenwaarnemingen in Nederlandisch-Indié, 1910, Deel II.

* **Bergen**. Bergens Museums. Aarbog, 1912, 1; 3; 1913, 1, 2. — Aarsberetning for 1912. — An account of the Crustacea of Norway, vol. VI, Copepoda, Cyclopoida, p. 1ª e 2ª.

* **Berkeley**. University of California. Chronicle an Official record. vol. XIV, 1-4. — Memoirs, vol. I, 2. — Agricultural sciences, I, 1. — American Archaeology and Ethnology, X, 4; XI, 1. — Botany, IV, 15; V, 1-2; XIV, 12-14. — Geology, VII, 1-8. — Modern Philology, II, 4-5; III, 1. — Pathology, II, 4-10. — Physiology, IV, 8-17. — Zoology, VII, 9-10; VIII, 3, 8, 9; IX, 1-8; X, 1-8; XI, 1, 2.

* **Berlin**. K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Classe Abhandlungen, 1912, 1913, N. 1. — Philosophisch-historische Classe. Abhandlungen, 1912, 1913, 1-7. — Sitzungsberichte, 1913, I-XL. — Acta Borussica. Münzwesen. Munzgeschichtlichen Teil. IV Bd.

— Association Géodésique internationale. Comptes Rendus de la Dix-septième Conférence réunie à Hamburg du 17 au 27 septembre 1912, 1 vol. 4ᵉ.

** — Historischen Gesellschaft. Jahresberichte der Geschichtswissenschaft, XXXIV, 1911.

* **Bern**. Naturforschende Gesellschaft. Mitteilungen aus dem Jahre 1911-12.

* **Bologna**. Istituto di Bologna. R. Accademia delle Scienze. Classe di Scienze fisiche. Rendiconto, N. S., vol. XVI (1911-1912). Memorie, ser. VI, t. IX. — Classe di Scienze morali. Rendiconto, ser. 1ª, vol. VI. Memorie. Sez. di Scienze giuridiche, ser. I, t. VII. Sez. di Scienze storico-filologiche, ser. I, t. VII.

— Osservatorio della R. Università. Osservazioni meteorologiche dell'annata 1912.

* — Società Medico-Chirurgica. Bullettino, ser. IX, vol. I, fasc. 1-12.

* — Biblioteca Comunale. L'Archiginnasio, An. VIII, 1-4.

* **Bordeaux**. Société des Sciences Physiques et Naturelles. Procès-verbaux 1910-11, 1911-12. — Observations météorologiques 1910.

* **Bordeaux**. Faculté des Lettres et des Universités du Midi. Revue des Études anciennes, t. XV, n. 1-3. — Bulletin hispanique, t. XV, n. 1-4. — Bulletin italien, t. XIII, n. 1-4.

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Proceedings, vol. XLVI, 25; XLVII, 22; XLVIII, 1-17.

* **Boston**. Boston Society of Natural History. Memoirs, vol. VII. — Proceedings, vol. XXXIV, 9-12.
— Massachusetts General Hospital Publications. Medical and Surgical Papers, vol. IV, n. 1.
* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1912.
* **Bruxelles**. Académie Royale des Sciences. Annuaire 1913. — Classe des sciences. Bulletin, 1912, 8-12; 1913, 1-3. Mémoires, Collection in 8°, 2e sér., t. III, 4. — Mémoires, Collection in 4°, 2e sér., t. IV, 1, 2.
* — Musée Royal d'Histoire naturelle de Belgique. Mémoires, t. VI. — La Faune Conchyliologique du terrain houiller de la Belgique. — La Faune du Gedinnien inférieur de l'Ardenne.
* — Société Royale d'Archéologie. Annuaire, t. XXVI, 1913; Annales, t. XXVI, 3, 4; XXV années d'activité, 1887-1912. — Tables des publications (Annales-Annuaires), 1887-1911.
* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, t. XXXI, 4; XXXII, 1-3.
* — Société Royale Botanique de Belgique. Bulletin, an. 1912, t. XLIX, 1-4; XLI (vol. jubilaire).
* — Société Entomologique de Belgique. Annales, t. LVI. — Mémoires, t. XXI.
* — Société Géologique de Belgique. Annales, t. XXXIX, 4; XL, 1-2. — Publications relatives au Congo Belge et aux Régions voisines, an. 1912-1913, fasc. 1-3.
* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Bulletin. Procès-Verbal, 1-8. — Mémoires, t. XXVI, 1, 2.
* — Observatoire Royal de Belgique. Description des installations du service de l'heure. — Annales. Nouv. sér. Physique du Globe, t. V, 3. — Annuaire météorologique pour 1913.
— Jardin Botanique de l'État. Conspectus Floræ Africæ ou énumeration des plantes d'Afrique par Th. Durand et Hans Schinz, vol. 1° (2e part.), vol. V, Bruxelles, 1905-1908, 2 vol. 8°.
* **Bucarest**. Academia Romānā. Bulletin de la Section scientifique, 1e an., n. 1-6; II, 1-5.
* — Société Roumaine des Sciences. Bulletin, an. XXI, n. 6; XXII, 1-3.
— Observatorul Astronomic şi Meteorologic. Buletinul lunar, an. XXII, n. 1-12.
* **Budapest**. K. Ungarische Geologische Reichsanstalt. Jahresberichte, 1910-11. — Földtani Intézet évi Jelentése, 1911, röl. — Mitteilungen, XIX Bd., 6; XX, 1-7; XXI, 1.
* — Ungarische geologische Gesellschaft. Geologische Mitteilungen, XLII, 9-12; XLIII, 1-3.
* **Buenos Aires**. Museo Nacional de historia natural. Anales, t. XXIII.
* — Sociedad Científica Argentina. Anales, t. LXXIV, 4-6; LXXV, 1-6; LXXVI, 1-3.
* — Sociedad Química Argentina. Anales, t. I, n. 1-3.
— Dirección General de Estadística. Boletín, an. XIII, 144-146. — Annuaire statistique de la ville de Buenos Aires, an. XX et XXI, 1910 e 1911.
— Ville de Buenos Ayres. Bulletin mensuel de Statistique Municipale, 1912, n. 11-12; 1913, 1-9.

* **Calcutta**. Asiatic Society of Bengal. Memoirs, vol. III, 5-7. — Journal and proceedings, vol. LXXV, 1; parte II, VI, 12; VII, 4-11 e n. extra; VIII, 1-10. — Index to Numismatic Supplements, I-XVI. — Index to rare Mughal coins noticed in Numismatics suppl., I-XV.

* — Geological Survey of India. Records, vol. XLIII, 1-2. — Memoirs, vol. XXXIX, 2; XL, 1; XLI.

— Board of Scientific Advice for India. Annual Report of the year 1911-12.

— Agricultural Adviser to the Government of India. Report on the Progress of Agriculture in India for 1911-12.

* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. Proceedings, vol. XVII, p. 1-3. — Transactions, vol. XXII, 2-3.

* — **Cambridge** (Mass.). Museum Comparative Zoology at Harvard College, vol. LIII, 10. — Bulletin, vol. LIV, n. 15-18, 20, 21; LV, 2; LVII, 2. — Memoirs, vol. XXXIV, 4; XXX, 4; XL, 4, 5; XLIV, 1.

* **Cape-Town**. Royal Society of South-Africa. Transactions, vol. III, p. 1-2.

* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, ser. 5ª, vol. V. - Bollettino delle Sedute, fasc. 24-27.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, vol. II, ser. 2ª, Disp. 1-12. — Indice generale delle Memorie, vol. I-XL (1872-1911).

* **Chambéry**. Société Savoisienne d'histoire et d'archéologie. Mémoires et Documents, t. LII.

* **Charleroi**. Société Paléontologique & Archéologique, t. XXXIII.

* **Charlottenburg**. Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Tätigkeit Jahr., 1912.

* **Cherbourg**. Société Nationale des Sciences naturelles et mathématiques. Mémoires, t. XXXVIII.

* **Chicago**. Field Museum of Natural History. Report Series, vol. IV, 2. — Anthropological Ser., vol. VII, 4; X; XI, 12. — Ornithological Ser., vol. I, 7. — Botanical Ser., vol. I, 5. — Zoological Ser., vol. VI, 12; X, 5, 6, 9; XI.

— John Crerar Library. Annual Report (18°) for the year 1912.

* **Cincinnati**. Lloyd Library. Bibliographical Contribution, 1912, n. 7-10.

* **Concarneau**. Laboratoire de Zoologie et de Physiologie maritimes. Travaux scientifiques, t. III; IV, 1-7.

* **Copenhague**. Académie R. des sciences et des lettres. Bulletin, 1913, 1-5. — Mémoires, Section des Sciences, t, IX, 2; X, 2-4; XI, 1.

* **Cracovie**. Académie de Sciences. Bulletin international. Classe des sciences mathématiques et naturelles, 1912: *A*, n. 9-10, 1913, 1, 3; *B*, n. 8-10, 1913, 1, 2. — Classe de Philologie. Classe d'histoire et de Philosophie. Bulletin, 1912, 1-10. — Rozprawy wyd., ser. II, t. XXX.

De Bilt. Konink. Nederlandsch Meteorologisch Institut. Mededeelingen en Verhandelingen, 15-16.

* **Delft**. Bibliotheek der Technische Hoogeschool. 7 Tesi.

* **Dorpat**. Imp. Universitatis Jurievensis (olim Dorpartensis). Acta et Commentationes, 1911, t. XIX, XX, XXI, 1-6.

* **Dublin**. Royal Irish Academy. Proceedings, Section A, vol. XXXII, 1;

Section B, vol. XXX, p. 3-5, XXXII, 1-2; Section C, vol. XXX, p. 14-21, XXXII, 1-5. — Proceedings, vol. XXXI, 3, 32, 42, 45, 48-50, 55, 61, 62.

Dublin. Royal Dublin Society. Scientific Proceedings, vol. XIII, 27-39; XIV, 1-7. — Economic Proceedings, vol. II, 6.

* **Edinburgh.** Royal Society. Proceedings, vol. XXXII, p. 5; XXXIII, 1-4. Transactions, vol. XLVIII, p. 3, 4; XLIX, 1ª, 2ª.

* — Royal Physical Society. Proceedings, vol. XIX, 1-3.

* **Erlangen.** Physikalisch-medizinische Sozietät. Sitzungsberichte, 44 Bd., 1912.

* **Firenze.** R. Accademia della Crusca. Atti, 1911-1912.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, ser. 5ª, vol. X, 1-4.

* — R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento. Sezione di Scienze fisiche e naturali, fasc. 31. — Sezione di Filosofia e Filologia: G. Gianelli, " Il sacerdozio delle Vestali Romane ", 1913.

* **Fiume.** Deputazione Fiumana di Storia patria. Bollettino, vol. III.

Formosa. Bureau of Productive Industries. Icones plantarum formosanarum necnon et Contributiones ad Floram Formosanam, by B. Hayata. Taihku. Fasc. 2°.

* **Freiburg i. Br.** Naturforschende Gesellschaft. Berichte, XX Bd., 1.

* **Gap.** Société des Études des Hautes-Alpes. Bulletin, 3ᵉ sér., 40 (1911); 41-44 (1912).

* **Genève.** Institut National Genevois. Bulletin, t. XL. — Mémoires, t. XXI.

* — Société de Physique et Histoire naturelle. Compte rendu des Séances, XXIX, 1912.

— Observatoire. Quelques anomalies climatiques à Genève: hivers chauds; années très-humides et très-sèches, par R. Gautier. — Résumé météorologique de l'année 1911 pour Genève et le Grand Saint-Bernard, par R. Gautier. — Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1911, par R. Gautier et H. Duhaime.

* **Genova.** Museo civico di Storia naturale. Annali, ser. 3ª, vol. V.

* — Società Ligure di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti, an. XL, 1-5.

* — R. Scuola Navale superiore. Relazione del Consiglio Direttivo sull'andamento della Scuola nell'anno scol. 1911-12; 8°.

— Istituto Idrografico della R. Marina. Annali Idrografici, vol. VIII. — Tavole logaritmiche a cinque decimali.

* **Göttingen.** K. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch physikalische Klasse. — Abhandlungen, N. F. Bd. VIII, n. 5; IX, 4. — Nachrichten, 1912, n. 5; 1913, 1-3. — Philologisch-historische Klasse. — Abhandlungen, N. F. Bd. XIV, 3-5. — Nachrichten, 1912, Heft 3-4; 1913, 1. Beiheft. — Geschäftliche Mitteilungen, 1912, Heft 2; 1913, 1.

* **Granville.** Denison University. Scientific Laboratories. Bulletin, vol. XVII, art. 1-4.

Halifax. Nova-Scotian Institute of Science, vol. XII, p. 4.

* **Halle.** Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum Nova Acta, t. XCVI-XCVII. Leopoldina, 1912, XLVIII.

* **Hamburg**. Hamburgische Wissenschaftliche Anstalten. Jahrbuch XXIX, 1911; Beiheft XXIX, 1911.

* **Harlem**. Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, Sér. III A (Sciences exactes), t. III, 1-2.

* — Fondation de P. Teyler van der Hulst. Verhandelingen-Teyler's twede Genootschap, N. Reeks, VIII Dl. — Archives des Musées Teyler, sér. III, vol. I.

* **Heidelberg**. Naturhistorisch-Medicinischer Vereines Verhandlungen, N. F., XII Bd., 2-3 Heft.

* **Helgoland**. Biologische Anstalt. Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen, N. F., X Bd., Abth. Helgoland 2; N. F., XV Bd., Abth. Kiel.

* **Helsingfors**. Societatis Scientiarum Fennicae Acta, t. XXXVIII; XLI, 8; XLII, 3. — Öfvergit. LIV, B. — Bidrag. LXXI, 3; LXXII, 1; LXXVI, 1.

— Meteorologische Zentralanstalt. Meteorologisches Jahrbuch für Finnland, Bd. VII-IX (1907-1909). — Schnee- und Eisverhältnisse in Finland im Winter 1898-1899.

* **Jena**. Medizinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft. Jenaische Zeitschr. für Naturwissenschaft, N. F., XLII, 3, 4; XLIII, 1-4. — Denkschriften, Bd. IV; V, 2.

* **Jowa City**. University of Jowa. Bulletin, N. S., n. 44 (Bull. Laborat. of Natural history, vol. VI, 3). — Bulletin, n. 53, vol. I, 5 (Contributions from the Physical Laboratory).

* **Kasan**. Société Physico-Mathématique. Bulletin, 2e sér., t. XVIII, 1, 2.

* **Kharkow**. Société mathématique. Communications, t. XIII, 6; XIV, 1-2.

Kodaikánal. Observatory. Bulletin, n. XXVII-XXXI, XXXIII. — Annual Report of the Director Kodaikanal and Madras Observatories for 1912.

* **Königsberg**. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft. Schriften, LIII.

* **Kyōto**. Imperial University. College of Sciences and Engineering. Memoirs, vol. IV, 1, 2; V, 1-8.

* **Lawrance**. University of Kansas. Science Bulletin, vol. XIII, 2, 3.

* **Leipzig**. K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse: Abhandlungen, XXXII, Bd. 7. — Berichte, 1912, 5-7; 1913, 1-3. — Philologisch-historische Klasse. Abhandlungen, XXIX, 8, 9; XXX, 1. — Berichte, 64 Bd., 4-5; 1913, 1, 2.

* — Gesellschaft für Erdkunde. Mitteilungen für das Jahr 1912.

— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft. Jahresbericht 1913 (März). — Preisschriften XXV der geschichtlich-ökonomischen Sektion.

Léopol. Société Polonaise pour l'avancement des sciences. Bulletin, XII, 1913.

* **Liège**. Société Géologique du Belgique. Annales, t. XXXIX, 3-4; XL, 1, 2. Mémoires, an. 1911-1912, 1, 2.

* — Société Royale des Sciences. Mémoires, 3e sér., t. IX.

Lima. Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perú. Boletín, 78.

** **Lipsiae**. Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum. Nicolaus Progymnasmata Procopius.

* **Lisbonne**. Société Portugaise des sciences naturelles. Bulletin, vol. V, 2; VI, 1.

* **London**. British Association for the advancement of science. Report of the Meeting. Dundee 1912, 1 vol. 8°.

* — Royal Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXXIII, n. 3-9; LXXIV, 1. — Memoirs, vol. LX, 3.

* — Chemical Society. Journal, 1913, January-November. Indexes, 1912. — Proceedings, vol. 29, n. 409-421. — Index, vol. 1912 (XXVIII).

* — Geological Society. Quarterly Journal, vol. LXIX, p. 1-3, List of Fellows, 1913.

* — Royal Institution of Great Britain, vol. XX, 1

* — Linnean Society. List of Fellows, 1913-14. — Journal: Botany, vol. XLI, 282, 283; Zoology, vol. XXXII, 215, 216. — Transactions, 2nd Ser.: Botany, vol. VII, 19, 20; VIII, 1, 2; Zoology, vol. XI, 11, 12; XV, 2-4; XVI, 1. — Proceedings, November 1912 to June 1913. — Catalogue of Papers in the Transactions from 1791-1905.

* — Royal Society of Literature. Transactions, 2nd ser., vol. XXXII, 1, 2. — List of Fellows, 1913.

* — London Mathematical Society. Proceedings, 2nd ser., vol. XII, p. 1-7; XIII, 1.

* — Royal Microscopical Society. Journal 1913, part. 1-5.

* — British Museum (Natural History). History of the Collection, vol. II, Appendix. — Catalogues: of Mammal of Western Europe; Hume Collection of Indian Horns; Birds Eggs, vol. V; Ichneumonidae, part II; Moths, vol. XII (Lepidoptera Phalaenae and Plates); Chaetopoda, part I, Arenicolidae; Marine Reptiles of the Oxford Clay, part II. — Guide to Anthropology, 2nd edition. — Guide to Domesticated Animals, 2nd edition. — The House-Fly as a Danger to Health. — Catalogue of the Library, vol. IV; Ungulate, vol. I; British species of Pisidium; South Nigerian Plants. — Special Guide, n. 6, Flight Exhibition.

* — Royal Society. Proceedings: Ser. A, vol. 88, n. 600-606; 89, 607-611 - Ser. B, vol. 86, n. 585-591; 87, 592-593. — Transactions: Ser. A, vol. 212 - Ser. B, vol. 203. — National Antartic Expedition Meteorology, part. II. — International Catalogue of scientific literature, 1912, 16 vol. 8°. — The celebration of the two hundred and fiftieth Anniversary, July 15-19, 1912, 1 vol. 8°.

** — Royal Society. Index to the Proceedings (Old Series), vol. 1-75 (1800-1905), 1 vol. 8°.

* — University College. Catalogue of the periodical publications including the serial publications of Societies and Gouvernments, Oxford, 1912, 1 vol. 8°.

* — Zoological Society. List of Fellows. — Proceedings, 1913, part. 1-3. — Transactions, XX, 3, 4.

* **Louvain**. Université catholique. Annuaire, 1913. — G. Kisselstein, Les dons et legs aux fabriques d'églises paroissiales en Belgique. Étude juridique. Louvain, 1912. — L. De Lichtervelde, Les méthodes budgétaires d'une démocratie. Étude sur le budget suisse. Bruxelles, 1912. — L. Deckers. De Landbouwers van den noordbrabantschen zandgrond. Eindhoven, 1912. — G. Sap, Le régime légal des bourses en Allemagne.

Louvain, 1912. — G. Testaferrata, La questione delle classi medie. Roma, 1912. — J. Laferrière, Étude sur Jean Duvergier de Hauranne, abbé de Saint-Cyran (1581-1643). Louvain, 1912.

* **Lugano**. Società Ticinese di scienze naturali. Bollettino, an. VII.

* **Lund**. Universitatis Lundensis (Acta), N. S. Årsskrift. Ny Fölid. Medicin samt matematiska, naturvetenskapliga ämnen, VIII, 1912. — Teologi, juridik och humaniska ämnen, VIII, 1912.

* **Lyon**. Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts: Mémoires, Sciences et Lettres, 3e sér., t. XIII.

* — Société d'Agriculture, Sciences et Industrie. Annales, 1911.

* — Société Linnéenne. Annales, nouv. sér., t. LIX.

* — Université. Annales; I. Sciences, Médecine, fasc. 31-33; II, Droit, Lettres, fasc. 23-25.

* — Diocèse de Lyon. Bulletin historique, 1911, n. 78-83.

* **Madrid**. Real Academia de la Historia. Boletín, t. LXII, quad. 1-6 LXIII, 1-6.

* — Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Anuario, 1913. — Revista, t. XI, n. 1-12.

* — Sociedad Matemática Española. Revista, an. 2°, n. 13, 14, 16-22.

* **Mantova**. R. Accademia Virgiliana. Atti e Memorie, n. ser., vol. V, p. 1-2.

* **Marseille** Faculté des Sciences. Annales, t. XVIII, XX et Supplément.

México. Escuela Nacional preparatoria. Boletín, t. IV, 3,

* — Sociedad Científica " Antonio Alzate ". Memorias y Revista, t. XXX, 7-12; XXXI, 1-12; XXXII, 1-6.

* — Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Anuario 1913. — Boletín, n. 3.

— Observatorio Meteorológico Magnético Central. Boletín mensual, 1912, Julio-Diciembre; 1913, Enero-Febrero.

* **Milano**. Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, ser. II, vol. XLV, fasc. 19-20; XLVI, 1-15. — Memorie, vol. XXII, 9.

* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico. Atti, vol. LI, 3, 4; LII, 1.

— R. Osservatorio Astronomico di Brera. Anno 1914. Articoli generali del Calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano. Con Appendice. — L'eclisse totale di sole del 20-21 agosto 1914.

— Università Commerciale Luigi Bocconi: Annuario 1911-1912.

— Collegio degli Ingegneri ed Architetti. Atti, an. XLVI, n. 1.

— Città. Bollettino statistico 1912, dicembre; 1913, gennaio-ottobre. — Riassunto dei Bollettini mensili, 1912. — Dati statistici a corredo del Resoconto dell'Amministrazione comunale.

Minneapolis. Geological and Natural History Surwey of Minnesota. The Leeches of Minnesota, Zoological, ser. V.

— University of Minnesota Studies in Chemistry, n. 1.

* **Modena**. Regia Accademia di scienze, lettere ed arti. Memorie, ser. III, vol. X, parte 2a.

Monaco. Institut Océanographique. Bulletin, n. 253-273, 275. — Résultats des Campagnes scientifiques par Albert Ier Prince de Monaco, fasc. XLI, XLIV.

Moncalieri. Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto. Osservazioni meteorologiche, 1912 dicembre, 1913 gennaio-novembre. — Osservazioni sismiche, 1912, n. 12; 1913, 1-6, 8-12.

Montevideo. Instituto Nacional Fisico-Climatologico. Boletín mensual, 1911, vol. IX.

* **Montpellier**. Académie des sciences et lettres. Bulletin mensuel, 1913, n. 1-7. — Mémoires: de la Section de Médecine, 2e sér., t. II, 4; de la Section des Sciences, 2e sér., t. IV, 3-5; de la Section des Lettres, 2e sér., t. V, 3.

* **Moscou**. Société Impériale des Naturalistes. Bulletin, 1911, 4.

* **München**. Kgl. Bayerische Akademie der Wissenschaften. Jahrbuch 1912. — Sitzungsberichte, Mathematisch physikalische Klasse, 1912, 3; 1913, 1, 2. Register, 1860-1910. — Abhandlungen, XXVI Bd., 2-6. — Beiträge zur Naturgeschichte Ostasiens Abh. d. II Kl., II Suppl. Bd., 9 Abth. — Sitzungsberichte, Philologisch-philosophische und historische Klasse, 1912, 6-8, Schlussheft, 1; 1913, 1-8. Register, 1860-1910. — Abhandlungen, XXVI, 4-5. — Monumenta Boica, XLVIII, LIII. — Physik u. Technik auf dem Wege zum absoluten Nullpunkte der Temperatur, Festrede, von Dr. Carl v. Linde.

* — Ornithologische Gesellschaft in Bayern. Verhandlungen, Bd. XI, 2-4.

* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires, 1911-1912, 6e sér., t. IX.

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 3e sér., t. II, 1r-4e trimestre 1912.

* **Napoli**. Società Reale. Annuario 1913. — R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche: Rendiconto, vol. XVIII, fasc. 10-12; XIX, 1-10. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti: Memorie, II (1913); Rendiconto, nuova ser., an. XXVI. — Accademia di scienze morali e politiche: Atti, vol. XLII; Rendiconto, an. LI.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, ser. 6a, vol. LXIV, 1912.

* — Società di Naturalisti. Bollettino, vol. XXV (1911-12).

* — R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte. Contributi astronomici, n. 1-3. — Saggio di determinazione della estinzione atmosferica per Capodimonte. — Osservazioni meteoriche, 1912. — La Cometa periodica 1906 IV Kopff nella sua prima apparizione.

* — Zoologischen Station. Mittheilungen, XX, 4; XXI, 1-5.

* **Neuchâtel**. Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Bull., t. XXXIX.

* **New-York**. American Mathematical Society. Transactions, vol. XIV, n. 1-4. Bulletin, vol. XIX, n. 4-10; XX, 1-3. — Annual Register, January 1913.

* — New York Academy of Sciences. Annals, vol. XXI, pp. 177-263; XXII, pp. 1-337.

— Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. Seventh Annual Report of the President and of the Treasurer, 1912; Medical education in Europe. — Bulletin, n. 6, 1912.

* — New York Public Library. Bulletin, vol. XVII, n. 1-11. — Memorial Meeting in honor of the late Dr. John Shaw Billings, April 25, 1913.

* **Nürnberg**. Naturhistorische Gesellschaft. Abhandlungen, XX Bd. — Beilage zu Festschrift-Pädagogik der Tami Mitteilungen, 1909, 2; 1910, 1, 2.

Oberlin. Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin, vol. XXIV, n. 4; XXV, 1-3.

Odessa. Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Impériale. Annuaire 1911-12.

Ottawa. Ministère des Mines. Division de la Commission Géologique, n. 116, 188, 1215, 1216. — Mémoires, n. 16-E, 24-E, 27. — Bulletin, 4. — Rapport sur les Dépôts de fer chromé des cantons de l'est de la province de Quebec. — Rapport sur les minéraux de Tungstene du Canada. — Minéraux industriels et Industries minières.

— Department of Mines. Mines Branch. — Report on the Building and Ornamental Stones of Canada, vol. I. — Pyrites in Canada, n. 167. — Tourbe et Lignite, ecc., n. 188. — Report (Preliminary) on the Mineral production of Canada during Year 1912. — The Nickel industry: with special reference to the sudbury Region Ontario. — Economic Minerals and Mining Industries of Canada. — Annual Report on the Mineral production of Canada, 1911, n. 201. — The Magnetic Iron sands of Natashkwan, 145.

* — Royal Society of Canada. Proceedings and Transactions, 3ª ser., VI.

* **Padova**. R. Università degli Studi. Annuario 1912-13.

* — Museo Civico. Bollettino, an. XIII, 1911.

* **Palermo**. Circolo Matematico. Rendiconti, t. XXXV, fasc. 1-3; XXXVI, 1-3. — Verbali, vol. VII, n. 5-6; VIII, 1-6. — Henri Poincaré, A l'occasion du premier anniversaire de la mort, 17 juillet 1913.

* **Paris**. Ministère de l'Instruction Publique et Beaux-Arts. Musée Guimet. — Annales, Bibliothèque d'Étude, t. XXIV, 2.

— Ministère de l'Instruction Publique et des Beaux-Arts. Œuvres complètes De Laplace, t. XIII, XIV.

— Ministère de l'Instruction Publique. Catalogue des Thèses et Écrits académiques, fasc. XXVIIIe. an. scolaire 1910-11, 1911-12.

— Ministère de l'Instruction Publique. Inventaire sommaire des Archives départementales: *Allier*, Ar. post. 1790, sér. L, t. I. — *Alpes Maritimes*, Répertoire numérique, sér. I; sér. C Administration provinciale. — *Ardennes*, Personnel et Administration générale, sér. M. — *Ariège*, Répertoire numérique, sér. N. — *Aube*, Archives civiles, sér. E, t. III. — *Aude*, Travaux publics, sér. S. — *Cantal*, Répert. numér., sér. L, Période révolut., t. I. — *Charente Infr.*, Répert. num., sér. X. — *Corrèze*, Répert. num., sér. A, B, C, D, E; E suppl.; G et H, Q (Domaines). — *Corse*, Répert. num., sér. L. — *Dordogne*, Répert. num., sér. V. — *Doubs*, Répert. num., sér. L. Ville de Besançon, Arch. Communale ant. 1790, sér. BB, t. L, (8 B) et (3 E). — *Gironde*, Répert. num. Ville de Bordeaux, Archives municip., Période révolut., t. III. — *Hérault*, Ville de St.Pons. — *Indre et Loire*, Arch. civiles, sér. E. — *Loire*, Répert. num., sér. Q. — *Loiret*, Répert. num., sér. K. — *Lozère*, Répert. num., sér. K et L. — *Manse*, Répert. num., ser. G et V. Arch. Eccl., sér. H, t. III. — *Meurthe et Moselle*, sér. E, t. IX, suppl. t. III. — *Meuse*, Réper. num., sér. X. — *Morbihan*, sér. E, t. IV, Table générale. — *Orne*, Répert. num., sér. V. — *Pas-de-Calais*, Répert. num., sér. V. Arch. Eccl., sér. H,

t. III. — *Saône (Haute)*, Répert. num., sér. T. — *Savoie*, Répert. num. du Fonds Sarde (1814-1860) et du Fonds de l'annexion de 1860. — *Savoie (Haute)*, Répert. num., sér. U, Y et R. — *Seine et Oise*, Répert. num., sér. C. — *Seine Inférieure*, Arch. Eccl., sér. G, t. VII; Arch. civiles, sér. C et D. Ville de Havre, Répert. num. des Archives anciennes et révolutionnaires. — *Sèvre (Deux)*, Répert. num., sér. K et V. — *Tarne et Garonne*, Répert. num., sér. L et V. — *Vandée*, Répert. num., sér. V. — *Vosges*, Répert. num., sér. S. — *Yonne*, Arch. de la Révolut., sér. L.

* **Paris**. Ministère des Travaux Publics, des Postes, etc. Annales des Mines, XIe sér., t. II, 12e livrs., 1912, III, 1-6; IV, 7-10. — Tables des matières de la Xe sér., 1902-1911.

** — Bureau des Longitudes. Annuaire 1913.

* — Institut de France. Annuaire 1913. — Académie des Sciences. Procès-Verbaux des séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835. Tome II, an. VII-XI (1800-1804), 1 vol. fol.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Bulletin, 4e trimestre 1912; 1^r^-3e trimestre 1913. — Mettensia, VI, Mémoires et documents, fasc. 4. — Mémoires, 8e sér., t. II (1912).

* — École Polytechnique. Journal, 2e sér., 16e cahier.

* — Société de Géographie. La Géographie. Bulletin, XXV, 3-6; XXVI, 1-6; XXVII, 1-4.

* — Société Géologique de France. Bulletin, 4e sér., t. IX, 9, t. X, 7-9; XI, 1-9; XII, 1-6.

* — Muséum d'histoire naturelle. Bulletin, an. 1911, 6, 7; 1912, 1-7. — Catalogue de la Collection de Lépidoptères. — Nouvelles Archives, 5e sér., t. III, 1, 2; IV, 1, 2.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, t. XLI, 1, 2.

* — Société Philomathique. Bulletin, sér. X^e^, t. IV, n. 3; V, 1, 2.

* — Société de Spéléologie. Bulletin et Mémoires, t. IX, n. 70.

* — Société Zoologique de France. Bulletin, t. XXXVI, XXXVII. — Mémoires, t. XXIV, XXV.

* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, an. XIII, 1-2.

* **Perugia**. R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, an. XVIII, 1-3.

* — Università degli Studi. Annali, Facoltà di Medicina, ser. IV, vol. II, fasc. 4; III, 1-3. — Facoltà di Giurisprudenza, ser. III, vol. II, 2; III, 1-4.

* **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Proceedings, vol. LXIV, p. 1-3. — Journal, 2nd ser., vol. XIV, XV.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. LI, 204-207. — Transactions, vol. XXII, N. S., p. 2, List of Fellows, 1912.

* — Wagner Free Institute of Science. Annual Announcement, 1912-13.

* **Pisa**. Società Toscana di scienze naturali. Atti. Memorie, vol. XXVIII. — Processi verbali, vol. XXII, 1-4.

* — R. Università. Annuario per l'anno accademico 1912-1913. — Annali delle Università Toscane, t. XXXII.

* — R. Scuola Normale superiore. Annali. Filosofia e Filologia, vol. XXIV, XXV.

* **Porto**. Academia Polytecnica. Annaes scientificos, vol. VII, n. 4; VIII, 1-3.

Potsdam. K. Preuss. Geodätischen Instituts Veröffentlichungen, N. F., 57, 58.

* **Prag**. Kgl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Jahresbericht 1912. — Zu d. Problem der Vererbungsträger, Von Prof. Dr. F. Veidowsky, Prag, 1911-1912, 1 vol. fol. — Sitzungsberichte: Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, 1912; Klasse für Philosophie, Geschichte und Philologie, 1912.

Prag. K. K. Sternwarte. Magnetische und Meteorologische Beobachtungen, 73 Jahrg.

* **Praze**. Céska Akademie Císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a uměni. Almanach, Ročnik XXIII. — Rozpravy, Třida I, Číslo 46-48; Třida II, Ročnik XXI. — Historicky Archiv, 36, 38. — Sbirka pramenův, Skupina II, 17. — Sborník filologicky, Ročnik II. — Bibliografie České Historie. Dil *Paty*, II Zpracovaini. — Vestník, Ročnik XXI. — Biblioteka klassikü řeckych a rimskych, Číslo 20, 21. — Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine, XVIIe an. (1912).

Princeton. University Observatory, n. 2.

* **Pusa**. Agricultural Research Institute. Memoirs Department of Agriculture in India. Report, 1911-12. — Bacteriological Ser., vol. I, n. 1-2. — Botanical Ser., vol. V. 2-5; VI, 1-3, 5. — Chemical Ser., vol. II, 6; III, 1-4. — Entomological Ser., vol. IV, 5.

* **Reims**. Académie Nationale. Travaux, 130e vol.

* **Rennes**. Société Scientifique et Médicale de l'Ouest. Bulletin, t. XX, 4; XXI, 1-4.

* **Riga**. Naturforscher-Vereins. Korrespondenzblatt, LVI.

* **Rio de Janeiro**. Bibliotheca Nacional. Regolamento.

* — Museu Nacional. Archivos, vol. XIV, XV. — E. Goeldi, Monographia Brasileiras, I. Os Mammiferos do Brasil; II. As Aves do Brasile, 1^a e 2^a, 3 vol. 8°. — C. M. Delgado de Carvalho, Le Brésil méridional (Étude économique), Paris, 1910, 1 vol. 8°.

— Observatorio Nacional. Annuario 1913.

* **Rochester**. Academy of Science. Proceedings, vol. V, pp. 39-58.

* **Roma**. Senato del Regno. Biblioteca. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto, 1913, an. IX, 1-4.

* — Camera dei Deputati. Commissione Reale per studi e proposte relative ad opere d'irrigazione. Seconda Relazione, 1913, 4°.

* — Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Annuario statistico italiano, 2^a ser., vol. II, 1912. — Statistica delle cause di morte nell'anno 1910. — Statistica della emigrazione italiana per l'estero negli anni 1910 e 1911 con un'appendice di confronti internazionali. — Annali di Statistica, ser. 5^a, vol. 5, 6. — Movimento della popolazione secondo gli Atti dello Stato civile nell'anno 1911.

— Ministero delle Finanze. Movimento commerciale del Regno d'Italia, 1911,

parti 1ª-3ª; 1912, 1ª. — Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, 1912 dicembre, 1913 gennaio-ottobre. — Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale, 1912 novembre-dicembre, 1913 gennaio-agosto. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1911, vol. I, p. 2ª, Tavole analitiche, II. Tavole riassuntive.

* **Roma.** Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti. Atti della Commissione di statistica e legislazione. Relazioni e verbali delle discussioni della Sessione di febbraio 1912. — Statistica della criminalità per l'anno 1908.

— Ministero dell'Interno. Statistica delle carceri e delle colonie per domiciliati coatti, 1911. — Statistica dei Riformatorî, 1911.

** — Ministero dell'Interno. Calendario generale del Regno per l'anno 1913 (An. LI).

* — Ministero dei Lavori Pubblici. Seconda relazione della Commissione incaricata di rivedere le norme edilizie obbligatorie per i Comuni colpiti dal terremoto, 1913.

* — R. Accademia dei Lincei. Annuario 1913. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali: Rendiconti, vol. XXII, 1° e 2° semestre 1913; Memorie, ser. 5ª, vol. IX, fasc. 7-14. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche: Rendiconti, vol. XXII, 1-10; Notizie degli scavi di antichità, vol. IX, fasc. 7-12 e supplemento X, 1-4; Memorie, ser. V, vol. XIV, 7; Rendiconto dell'adunanza solenne del 1° giugno 1913.

* — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Atti, an. LXVI, Sessioni 1ª-7ª (1912-13). — Memorie, vol. XXX.

* — Imperiale Istituto Archeologico Germanico, Bullettino, vol. XXVIII, fasc. 1-4.

* — Istituto di Diritto Romano. Bollettino, an. XXV, 2-4.

* — R. Comitato Geologico. Memorie per servire alla descrizione della Carta Geologica d'Italia, vol. V, p. 2ª. — Bollettino, vol. XLIII, 2-4.

— R. Commissione Geodetica italiana. Processi verbali delle sedute tenute in Padova nel giugno 1912. — Differenza di longitudine fra Bologna (Osservatorio della R. Università) e Firenze (Istituto Geografico militare).

* — R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica. Il clima di Roma. Esame delle osservazioni meteorologiche eseguite dal 1782 al 1910.

* — R. Osservatorio Astronomico al Collegio Romano. Memorie ed Osservazioni, ser. III, vol. VI, parte 1ª.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, an. XVIII, 1-25.

* — Società italiana delle scienze (detta dei XL). Memorie, ser. 3ª, t. XVIII.

— " Mathesis ". Società Italiana di matematica. Bollettino, an. IV, 9; V, 1, 2.

* — Biblioteca Nazionale centrale " Vittorio Emanuele ". Bollettino delle Opere moderne e straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative, an. 1912, ser. IV, 2998-5761. — Indice alfabetico per autori, 1901-1910.

— Scuola di Roma. Bollettino della Direzione centrale, fasc. 2.

* **Rovereto.** I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Agiati. Atti, ser. 3ª, vol. XVIII, fasc. 3 4; ser. 4ª, vol. I.

* **Saint-Louis.** Missouri Botanical Garden. Twenty-Third Annual Report.

* **St-Pétersbourg**. Académie Imp. des sciences. Bulletin, 1913, n. 1-8. — Mémoires, VIIIe sér., t. XXVI, 3; XXX, 9-11; XXXI, 1.

* — Comité Géologique. Bulletins, t. XXX, 6-10; XXXI, 1, 2. — Mémoires, N. S., livrs. 58, 63-65, 69, 75, 78, 81.

* — Commission sismique permanente. Comptes-rendus des séances, t. V, livrs. 2, 3; VI, 1. — Seismometrische Beobachtungen in Baku und Balachany in der Zeit vom 1 Januar bis 31 Dezember 1910.

* — Musée Géologique Pierre le Grand. Bulletin, t. VI, n. 4-7; VII, 1-3.

* — Société Physico-Chimique, t. XLV, 1-6.

* **San Francisco**. California Academy of Sciences. Proceedings, Fourth ser., vol. I, pp. 431-446; III, pp. 187-264.

* **Santiago de Chile**. Instituto Central Meteorológico y Geofísico de Chile. Observaciones en la Mina Águila 5.200 m. (Cordillera de Quinza Cruz, Bolivia) dal 26 de abril hasta el 12 de septiembre de 1909, n. 1. — Anuario meteorológico de Chile, 1911, n. 3.

* **Sendai**. Tōhoku Imperial University. Sciences Reports: 1ª ser., Mathematics, Physics, Chemistry, vol. I, 5; II, 1, 2. - Second ser., Geology, vol. I, 2, 3.

* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, vol. VI, 1-10.

* — R. Università degli Studi. Annuario accademico 1912-1913.

* — Circolo Giuridico della R. Università. Studi Senesi, vol. XXIX, 3-5.

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte u. Alterthumskunde. Monatsblätter, Jahrg. 1911, 1912. — Baltische Studien, N. F., Bd. XV, XVI (dono del prof. G. Piolti).

* **Stockholm**. Kungl. Svenska Vetenskapakademiens. Handlingar, Bd. XLVIII, 3; L, 1. — Arkiv för Matematik, astronomi och fisik. Bd. IX, 1, 2. — Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. IV, 4, 5. — Arkiv för botanik, Bd. XIII, 1. — Arkiv för zoologi, Bd. VII, 4. — Meteorologiska iakttagesler i Sverige, Bd. LIV. — Meddelanden från K. Vetenskapsakad Nobilinstitut Accessionskatalog 1896-1905.

— Kungl. Biblioteket. Sveriges offentliga bibliotek Stockholm, Uppsala Lund, Göteborg. Accessions-Katalog 27.

Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological, Magnetical and Seismological Observations, 1912.

Strassburg. Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt, Veröffentlichungen. Jahrg. 1910, Heft 10-12; 1911, 1-12.

* **Stuttgart**. Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Jahreshefte, Jahrg. 1913.

* **Svizzera**. Geologische Kommission der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft. — Beiträge zur Geologischen Kart der Schweiz, II sér., livrs. 36-39. — Speciale Carte, Nos. 65-68.

* — Schweizerische Naturforschenden Gesellschaft. Verhandlungen: 94. Jahresversammlung vom 30 Juli bis August 1911 in Solothurn, Bd. I, II; 95. vom 8-11 September 1912 in Altdorf, I, II Teil. — Nouveaux Mémoires. Sciences naturelles, vol. XLVII.

* — Catalogue des Écrits académiques Suisses 1911-12.

* **Sydney**. Royal Society of New South Wales. Journal and Proceedings, Vol. XLV, p. 4; XLVI, 1, 2; XLVII, 1.

— University Library. Reprints of Papers from science Laboratories... 1908-9 to 1911-12 A. From the department of Mathematic, Physics, Chemistry and Engineering, 1 vol. 4°.

* **Tananarive**. Académie Malgache. Bulletin, vol. X, 1912.

Teddington. National Physical Laboratory. Report for the Year 1912.

* **Tōkyō**. Imperial Academy. Proceedings, vol. I, n. 1, 2.

* — Imperial University. College of Sciences. Journal, vol. XXXII, 8-10 XXXIII, 1.

* — K. Universität. Medizinische Fakultät. Mitteilungen, X, 3, 4; XI, 1.

* — Imp. Earthquake Investigation Committee. Bulletin, vol. V, n. 2, 3. — The contents of the Publications of the Imp. Earthquake Investigation Committee.

* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, vol. LV.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, an. LXXV, n. 12; LXXVI, 1-5.

* — R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia. Biblioteca di Storia italiana recente, vol. IV. — Le Campagne di guerra in Piemonte (1703-1708) e l'assedio di Torino (1706), vol. VI. — Bibliografia Storica degli Stati della Monarchia di Savoia compilata da A. Manno, vol. IX. — Miscellanea di Storia patria, ser. 3ª, vol. IV.

— Società Astronomica italiana. Rivista di Astronomia e scienze affini, an. I (1907); VII, 1-12 (1913). (Omaggio del Socio corrispondente V. Cerulli, Presidente della Società).

* — Società degli Ingegneri ed Architetti. Atti, an. 1912, 3, 4; 1913, 1, 2.

* — Società Meteorologica italiana. Bollettino bimensile, ser. III, vol. XXXI, n. 9-12; XXXII, 1-6.

* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, vol. XXXII, n. 1-12. — Bollettino pel 1911-1912, vol. XLI. — L'opera del Club Alpino italiano nel primo suo cinquantenario 1863-1913, 1 vol. 4°.

— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino, vol. XXVII.

— Associazione " Pro-Torino ". Pro-Torino, pubblicazione mensile illustrata, an. VIII, n. 5.

— Scuola Professionale per gli orefici. Relazione della Direzione, anno scolastico 1912-1913.

— Scuole officine serali. Bollettino bimestrale, an. I, II (1911-12).

* — Consiglio Provinciale. Atti, an. 1912.

* — Municipio. Servizio d'igiene. Bollettino statistico, an. XLI, n. 9-13; XLII, 1-4. — Annuario 1911-12. — Atti, 1911. — Statistica demografica-sanitaria e servizi dell'Ufficio d'igiene, 1911-1912. — Onoranze a G. B. Bodoni. Esposizione delle edizioni bodoniane.

— Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1912; 4°.

* **Toronto**. Canadian Institute. Transactions, vol. IX, p. 3.

* — University. Studies: Review of historical publications relating to Canada, vol. XVII. — Philological ser., n. 2.

* **Tortosa**. Observatorio del Ebro. Boletín mensual, vol. III, n. 4-12; IV, 1-2.
* **Toulon**. Société d'Histoire Naturelle. Annales, 1912, 3.
* **Toulouse**. Université. Annuaire 1912-1913 et Livret de l'étudiant. Rapport annuel du Conseil de l'Université et Comptes-rendus des Travaux des Facultés, etc. — Annales de la Faculté des sciences, 3e sér., t. II. — Faculté des Lettres, Bibliothèque Méridionale, 1e sér., t. XV; 2e sér., t. XIV, XV.
* — Université. Annales du Midi. Revue de la France méridionale, an. XXIV, 93-97.
* **Trieste**. Società di Minerva. Archeografo Triestino, III ser., vol. VII, 1.
* **Tufts College**. Tufts College studies, vol. III, 2 (scient. ser.).
* **Udine**. Società Storica friulana. Memorie storiche forogiuliesi, an. IX, 1-4.
* **Upsala**. R. Societatis Scientiarum Upsaliensis Nova Acta, ser. 4a, vol. III, fasc. 1.
* — Upsala Universitets. Årsskrift, 1912.
* — Observatoire météorologique de l'Université. Bulletin mensuel, vol. XLIV, 1912.
* — Kgl. Humanistika Vetenskaps-Samfundet Skrifter, Bd. 14.
— Wilhelm Ekmans Universitetsfond. Arbeiten, 13, 14.
* **Urbana**. Illinois State Laboratory of Natural History. Bulletin, vol. IX, art. 6-10.
Utrecht. K. Nederlandsch Meteorologisch Institut, n. 93 (Liste de publications).
Valence. Société d'Archéologie de la Drome. Ulysse Chevalier: Son Œuvre scientifique. Sa Bio-Bibliographie. Nouvelle édition.
Valle di Pompei. Calendario del Santuario di Pompei, 1913.
* **Venezia**. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti, t. LXXII. 1-9.
* — R. Magistrato alle Acque. Bollettino mensile, 1912, 5-12; 1913, 1-9. — Pubblicazioni, n. 46, 47, 54-56. — Notices sur le Bureau Hydrographique et sur quelques-unes des principales systémations fluviales en cours dans la Vénétie.
* **Vercelli**. Società Vercellese di Storia e d'Arte. Memorie e Studi, an. IV, 1, 2, 4; V, 1, 2.
* **Verona**. Museo civico. Bollettino, an. VI, fasc. 24; VII, 25-27.
* **Vicenza**. Accademia Olimpica. Atti, nuova serie, vol. III.
* **Warzawa**. Towarystwa Naukowego Warszawskiego. Sprawozdania z posiedzen z, Rok. V, 8, 9. — Prace Wydzialu I: Jezykoznawstwa i literatury, 3. — Prace Wydzialu II: Nauk antropologicznych, spotecznych, historyi i filozofii, 8, 9.
Washington. Library of Congress. Report; Publications... issued since 1897.
* — U. S. Geological Survey (Department of Interior). Geological Atlas of the U. States, fol. 174-184, 186. — Bulletins, 471, 485, 492, 494, 496-503, 506-510, 513, 520, 521, 523, 524. — Wather-Supply Paper, 259, 279-285, 289, 291, 293, 294, 296-298, 300, 301, 304, 310, 311, 313, 316. — The publications of the U. S. Geological Survey, april 1, 1912. — Professional Paper, 69, 71, 74, 77. — Mineral Resources, 1911, p. 1, 2. — Annual Report, 33.

* **Washington**. Coast and Geodetic Survey. Report of the Superintendent... for the Fisical Year ended June 30, 1912.

— Department of Commerce and Labor. Coast and Geodetic Survey. Geodesy. Special publication, n. 11, 12.

* — Department of Commerce. Bureau of Standards, Bulletin, vol. IX, 2, 3.

* — Smithsonian Institution. Publications available for distribution. 1912. — Miscellaneous Collections, t. LVII, 9, 10; LVIII, 2; LIX, 1, 6-18, 20; LX, 1-29. — Index to the Genera and Species of the Foraminifera, P. I. A. to Non., n. 856. — Annual Report of the Board of Regents.

* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Bulletin, 52.

* — Smithsonian Institution. United States National Museum. Proceedings, vol. XLI, XLII. — Bulletin, 79-81. — Contributions U. S. National Herbarium. vol. XVI, 2-9, 12; XVII, 1-3. — Report on the Progress and condition of the U. S. National Museum for the Year ending June 30, 1912.

* — Carnegie Institution. Publications, n. 74 VI, 90 A, I, 85 (2 vol.). 149 II, 152, 153, 159, 166, 167, 170, 171, 174-176. — Year Book, n. 11 (1912). — Ayala B., De Jure et Officiis Bellicis et Disciplina Militari. Washington, 1912, 2 vol. 4°. — Grotius H., De Jure Belli ac Pacis Libri Tres, in quibus Jus Naturae & Gentium, item Juris Publici praecipua explicantur. Editio Nova. Washington, 1913, 1 vol. 4°.

* — National Academie of Sciences. Memoirs, vol. X.

Weltevreden. K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandisch Indie. Natuurkundig Tijdschrift, Deel LXX, LXXI.

* **Wien**. K. Akademie der Wissenschaften. Almanach 1912. — Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Denkschriften, LXXV, Bd. 1, Heft, LXXXVIII. — Sitzungsberichte: CXXI. Bd., Abth. I, Heft 8-10; II *a*, 8 10; II *b*, 7-10; III, 4-10; CXXII. Bd., Abth. I, 1, 2; II *a*, 1-4; II *b*, 1-5; III, 1-3. — Erdbeben-Kommission, Mitteilungen, N. F., n. XLV, XLVI.

* — K. Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-Historische Klasse. Denkschriften, Bd. LV, 2-4; LVI, 3, 45. — Sitzungsberichte, 170 Bd., 2, 4, 6, 10; 171, 1; 172, 1, 4-6; 173, 1, 2, 4; 174, 1. — Register zu den Bd. 161 bis, 170 (XVII).

* — K. Akademie der Wissenschaftlichen. Historischen Kommission Archiv österreichische Geschichte, CII. Bd., Erst Hälft; CIII, 1, 2. — Prähistorischen Kommission, Mitteilungen, II, Bd. 2, 1912.

* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Verhandlungen, 1912, 16-18; 1913, 1-12. — Jahrbuch, Jahrg. 1912, LXII Bd., 3, 4; LXIII, 1, 2. — Abhandlungen, Bd. XVI, 4; XXII, 2.

— Österreichische Commission für die internationale Erdmessung. Verhandlungen. Protocolle über die 5 April–19 October 1911.

* — K. K. Zoologisch-Botanischen Gesellschaft. Verhandlungen, LXII Bd.

* **Würtzburg**. Physikalisch-Medicinische Gesellschaft. Sitzungs-Berichte, 1912, n. 1-7; 1913, 1-2. — Verhandlungen, N. F., Bd. XLII, 3.

* **Zagreb**. Società archeologica Croata. Vjesnik, N. S., Sveska XII.

* — Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Ljetopis, 27 svezak. — Rad Knjiga 194, 196, 197 (Razredi historicko-filologicki i filozoficko-juridicki), 81-83. — Monumenta spectantia historiam Slavorum meridio-

nalium, vol. XXXIII. — Zbornik za narodni život i obicaje juznih slavena Kng. XVII, 3; XVIII, 1. — Grada za provijest hnijzevnost, Kng. 7. — Djela, Knjiga XXIV. — Diplomaticki zbonik (Codex diplomaticus) kraljevine Hrvatske, Dalmacije i Slavonije. Svz. X, 1332-1342. — Riečnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Svz. 31, 2 Naci-Nakon. — Prinosi za hrvatski pravno-povjestni Rječnik. Svz. III (Gradi-Kanat).

* — Hrvatsko prirodoslovno društvo (Societas scientiarum naturalium croatica). Glasnik, God. XXIV, 4; XXV, 1-3.

* — K. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskoga-Vjesnik... Zemaljskoga Arkiva. Godina XV, 1-3.

* **Zürich.** Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift, Jahrg. 1911, 4; 1912, 3, 4.

* — Commission géologique Suisse. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse. Livrs. 41 et 42 de la IIe sér. 1 Carte, textes expl., n. 12 et 13. — Spezialkarten, n. 67 u. 69.

PERIODICI 1913.

* **Acta** mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.

** **Almanacco** italiano. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. Firenze; 16°.

American Chemical Journal.

American Journal of Mathematics.

American Journal of Phylology.

** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.

** **Annales** de biologie lacustre publiées sous la direction du dr. E. Rousseau.

** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.

** **Annales** scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris; 4°.

* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.

** **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.

** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.

** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.

** **Archiv** für Protistenkunde. Jena; 8°.

** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.

** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.

* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.

* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.

* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania, 8°.

* **Archivum** Franciscanum historicum. Ad Claras Aquas; 8°.

* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.

** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.

* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.

** **Berliner** philologische Wochenschrift. Berlin; 8°.

** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Milano; 8°.

Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Stockholm; 8°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica. Berlin; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
* **Brixia Sacra**. Bollettino bimestrale di Studi e documenti per la Storia Ecclesiastica bresciana. Brescia; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
* **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** Ἐφημερὶς ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθήναις. 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana. Göteborg; 8°.
** **Euphorion**, Zeitschrift für Literaturgeschichte. Leipzig; 8°.
** **Fortschritte** der Physik. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Gegenbaurs** Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini Milano; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana. La Spezia; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues) für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1909, I. II. Beil. Bd. VIII, 1, 2. Stuttgart; 8°.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. Berlin; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.

** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
** **Minerva**. Jahrbuch d. gelehrten Welt. Strassburg; 16°.
** **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
* **Morphologisches** Jahrbuch. Leipzig; 8°.
** **Moyen Age** (Le). Bulletin mensuel d'histoire et de philol. Paris; 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Navigazione** (La) aerea: Rivista italiana di aeronautica.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica**. Beiträge zur Naturgesch. der Vorzeit. Stuttgart; 4°.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. Gotha; 8°.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di filosofia. Continuazione della *Rivista Filosofica*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
** **Scientia**. Rivista di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica Bologna, 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.

** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.
* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.
** **Vegetation** (Die) der Erde. Leipzig; 8°.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.
** **Zeitschrift** für Gletscherkunde für Eiszeitforschung und Geschichte des Klimas. Berlin; 4°.
* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio:
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 22 Giugno al 16 Novembre 1913.

Agassiz (G. R.). Letters and Recollections of Alexander Agassiz with a sketch of his life and work. London, Boston and New-York, 1913; 1 vol. 8° (*dal sig. G. R. Agassiz*).

Angelitti (F.). Sugli accenni danteschi ai segni, alle costellazioni ed al moto del cielo stellato da occidente in oriente di un grado in cento anni. Nota II. Torino, 1913; 8° (*dall'A.*).

Berlese (A.). Intorno alle metamorfosi degli insetti. Firenze, 1913; 8° (*Id.*).

Catalogo analitico per soggetto in ordine alfabetico delle opere, atlanti, carte e periodici della Biblioteca Centrale del Ministero della Marina. Roma, 1913; 1 vol. 4° (*dono del Ministero della Marina*).

Cavazzi (G.). Forza e lavoro in Cinematica pura. Pensieri e proposte. Milano, 1913; 8°.

— Circa l'attrazione universale e la gravità terrestre. Milano, 1913; 8° (*dall'A.*).

Colonnetti (G.). Sulla teoria dei sistemi reticolari triplamente iperstatici. Roma, 1913; 8° (*Id.*).

Euleri (L.). Opera omnia. Ser. I: Opera mathematica, vol. X, XI, XXI.

Gay (Fr. P.). A Method of correlated teaching of Pathology and Bacteriology in the second Year of medical instruction. Baltimore, 1912; 8° (*dall'A.*).

— and **Robertson** (T. B.). A comparison of paranuclein spilt from casein with a synthetic paranuclein, based on immunily reaction. Baltimore, 1912; 8° (*dal sig. Gay*).

Guerrieri (E.). Stelle variabili da osservarsi in Italia durante l'anno 1913. Torino, 1913; 8°.

— Sulla variazione di luce della Nova (18 . 1922) Geminorum 2. Catania, 1913; 4° (*dall'A.*).

Guidi (C.). Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro. Roma, 1912; 8°.

— Sulla attendibilità di certi calcoli statici. Roma, 1913; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Helmert (F. R.). Die Bestimmung des Geoids im Gebiete des Harzes. Berlin, 1913; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Hübner (E.). Beitrag zur Theorie der isostatischen Reduction der Schwerebeschleunigung. Leipzig, 1913; 8° (*dall'A.*).

Issel (A.). Naturalisti e viaggiatori liguri nel secolo XIX. Roma, 1913; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Lazzarino (O.). Osservazioni fotometriche della variabile RZ Cassiopeiae eseguite nel 1912 nel R. Osservatorio di Capodimonte. Catania, 1913; 8° (*dall'A.*).

Molinari (E.) e **Quartieri** (F.). Notizie sugli esplodenti in Italia. Milano, 1913; 1 vol. 8° (Pubblicazione della Società italiana prodotti esplodenti. *Dono della medesima*).

Nobile (V.). Sul carattere di universalità della legge Newtoniana. Catania, 1913; 4° (*dall'A.*).

Onoranze alla Memoria di Lagrange: Annali di matematica pura e applicata, Ser. III, XX-XXI (1 e 2 della Raccolta di scritti per le Onoranze). Milano, 1913; 2 vol. 4° (*dono della Direzione*).

Puig y Soler (D.). Dinámica atmosférica y Barografía de Europa. Barcelona, 1913 (*dall'A. pel XIX premio Bressa*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe: I. Fauna palaeartica, livrs. 104, 105. — II. Fauna Exotica, livrs. 149-151, 154-164.

Shiraki (T.). Acrididen Japans. Tokyo, 1910; 8°.

— Monographie der Grylliden. Taihoku, 1911; 8° (*dall'A.*).

Soler (E.). Primi esperimenti con la bilancia di Eötvös appartenente al Gabinetto di Geodesia della R. Università di Padova. Venezia, 1913; 4° (*Id.*).

Vilip (J.). Un opuscolo in lingua russa di argomento astronomico. Pietroburgo, 1913; 4° (*Id.*).

Webb (W. L.). Brief biography and popular account of the Unparalleled discoveries of T. J. J. See ecc. Lynn (Mass. U. S. A.); 1 vol. 8° (*Id.*).

Dal 21 Giugno al 23 Novembre 1913.

Bargoni (A.). Memorie di Angelo Bargoni. Milano, 1911; 1 vol. 8° (*dono del socio residente Renier*).

Bernardi (F.). Fiori pallidi. Napoli, 1913; 8° (*dall'A.*).

Bertolini (C.). Bibliografia dell'antico diritto greco e romano. VI. Roma, 1913; 8° (*Id.*).

Billia (L. M.). Della vita e del pensiero di Vincenzo Gioberti. Firenze, 1903; 8°.

— L'unité de la philosophie et la théorie de la connaissance. Genève 1904; 8°.

— Per la dignità della Scuola. Tetralogia. Torino, 1905; 16°.

— L'oggetto della psicologia. Milano, 1905; 16°.

— Une illusion de Taine. Rome, 1905; 8°.

— Carità e Giustizia. Torino, 1907; 8°.

Billia (L. M.). L'idéalisme n'est-il pas chrétien? Montligeon (Orne), 1907; 8°.
— Le idee morali nella dottrina di un psicologico scandinavo. Pavia, 1908; 8°.
— La Philosophie c'est l'unité morale. Heidelberg, 1908; 8°.
— Has the Psychological Laboratory proved helpful? Chicago, 1909; 8°.
— A quoi servent les laboratoires de psychologie. Paris, 1909; 8°.
— La psychologie est plus qu'une science. Genève, 1909; 8°.
— Les quatre règles inexactes du Syllogisme. Berlin, 1910; 8°.
— Rompicapi del Parmenide e la tragedia del pensiero. Genova, 1911; 8°.
— Fénelon giudicato da un pedagogista moderno. Voghera, 1911; 8°.
— Un economista greco del secolo VI. Firenze, 1911; 8°.
— Contro la profanazione dello spirito. Milano, 1911; 8°.
— L'esilio di Sant'Agostino. 2ª ediz. Torino, 1912; 1 vol. 8°.
— Pourquoi le Libre-Échange n'est pas populaire. Paris, 1912; 8° (*Id.*).
Bonelli (G.). Ludwig Traube e gli studi paleografici. Torino, 1913; 8°.
Bourgeois (H.). Petite grammaire Judéo-Allemande. Paris, 1913; 8° (*Id.*).
Cagiati (M.). Supplemento all'opera " Le monete del Reame delle Due Sicilie da Carlo d'Angiò a Vittorio Emanuele II „. An. III, 5-10. Napoli, 1913; 8° (*Id.*).
Casaretto (P. F.). I problemi dell'espansione urbana nelle città tedesche. Utili confronti. Genova, 1912; 8° (*Id.*).
** **Litta**. Famiglie celebri italiane (2ª Ser.). Fasc. LXI, LXII. Carafa di Napoli.
** Monumenta Germaniae historica. Scriptorum rerum Merovingicarum. T. VI. Auctorum antiquissimorum. V. XV, p. 1.
** **Muratori** (L. A.). Archivio Muratoriano. Studi e ricerche in servigio della nuova edizione dei " Rerum Italicarum scriptores „. N. 11, 12.
** Rerum italicarum scriptores. Fasc^i 114-119; fasc^i 1, 2 (ultimo), T. XXIV, p. 4; 5 T. XXX, p. 1; T. IX, 1-3, p. II.
Pagliaini (A.). Catalogo generale della letteratura italiana dall'anno 1900 a tutto il 1910; 1° Suppl. Vol. II, 1-3.
Rasi (P.). Bibliografia Virgiliana (1910-1911). Mantova, 1913; 8° (*Id.*).
Rassegna Universitaria catanese. Vol. VIII, N. 1-2 (*dono del Direttore prof. A. Zocco-Rosa*).
Regesto dell'antica Badia di S. Matteo de Castello o Servorum Dei pubblicato a cura de' Monaci di Montecassino. Montecassino, 1914; 1 vol. 8° (*dono dei Monaci*).
Sforza (G.). Veronica Cybo. Spezia, 1913; 8° (*dall'A. socio residente dell'Accademia*).
Soyez-Le-Roy (Tib) (S.). Amour et Vaillance. 3ª édit. Lille, 1913; 1 vol. 8° (*dall'Autrice*).
Tordi (D.). La Chiesa dei Santi Michele e Jacopo di Certaldo e le sue filiali. Orvieto, 1913; 8° (*dall'A.*).
— Orvieto. Perugia, 1913; 16 (*Id.*).

Dal 16 Novembre al 14 Dicembre 1913.

Bertarelli (L. V.). Relazione finale al Consiglio del Touring Club Italiano sulla " Carta d'Italia ". Milano, 1913; 4° (*Dono del Touring Club Italiano*).

Coblentz (W. W.). The diffuse reflecting power of various substances. Washington, 1912; 8° (*dall'A.*).

Fileti (M.). Guida alla analisi chimica qualitativa. 16ª ediz. Torino, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Guareschi (I.). Ascanio Sobrero nel centenario della sua nascita. Bruxelles, 1913; 8° (*Id.*).

Sasse (E.). Fermat's Gleichung $x^n = y^n + z^n$ unlösbar, wenn n ungerade prim, x, y, z relativ prim. Kolberg, 1913; 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. Fauna Exotica, livrs. 165-174.

Tavani (F.). Principles of a new theory of the Series. Kingsway, 1913; 8° (*dall'A.*).

Zappa (G.). La Cometa periodica 1906 IV Kopff nella sua prima apparizione. Roma, 1913; 4°.

Dal 23 Novembre al 7 Dicembre 1913.

Bertacchi (C.). La Geografia nella scienza, nella scuola e nella vita sociale. Roma, 1913; 8° (*dall'A. socio corrispondente dell'Accademia*).

Bruno (F.) e **Noberasco** (F.). Il crepuscolo della libertà savonese e l'opera di Giulio II. — Lettere e documenti. San Pier d'Arena, 1913; 8° (*dagli Autori*).

Carle (G.). Per la Filosofia della Storia nella R. Università di Roma. Roma, 1913; 8° (*dall'A. socio residente dell'Accademia*).

** Corpus agrimensorum romanorum. Vol. 1, fasc. 1. Lipsiae, 1913; 8°.

Galati di Riella (A.). Alcuni uomini politici del mio tempo. Vol. I. Firenze, 1914; 8° (*dall'A.*).

** Miracula S. Georgii. Lipsiae, 1913; 8°.

Nei Parentali di G. B. Bodoni. Saluzzo, 1913 (*dal Sig. Gio. Lobetti-Bodoni*).

Orsier (J.). Notes et documents inédits pour servir à l'histoire d'Eustache Chapuys d'Annecy, Ambassadeur de Charles-Quint. Paris, 1912; 8°.

— La Duchesse de Gênes et Ferdinand de Savoie. Paris, 1913; 8°.

— Le Meunier, son fils et l'âne en patois savoyard et ses origines littéraires. Paris, 1913; 8° (*dall'A.*).

Pansa (G.). Un decreto di Ferdinando I d'Aragona per la tutela dei ripostigli monetali. Napoli, 1912; 8°.

— Saggio di una bibliografia analitica della zecca medioevale degli Abruzzi. Napoli, 1912; 8°.

— Documenti inediti relativi alle zecche abruzzesi nei secoli XV e XVI. Napoli, 1913; 8° (*Id.*).

** **Pasolini** (G.). Adriano VI. Saggio storico. Roma, 1913; 1 vol. in-8°.

Sacerdoti (A.). Rapport présenté à la Sixième Commission d'étude de l'Institut de droit international.

— Inchiesta monetaria tenuta dal Consiglio Superiore del Commercio di Francia e deposizione fatta nel seno del medesimo. Padova. 1871; 8°.

— Sul titolo IX, capo I, del progetto di riforma del Codice di Commercio intorno alle cambiali; osservazioni. Bologna, 1874; 8°.

— Il contratto di assicurazione. Padova, 1874-1878; 2 vol. 8°.

— Teoria e Teorica nell'odierno diritto mercantile. Padova, 1879; 8°.

— Le projet définitif du Code de commerce pour le Royaume d'Italie. Gand, 1880; 8°.

— Del fallimento. Teoria fondamentale. Verona-Padova, 1881; 8°.

— L'art. 417 del Codice di commercio italiano e la teoria del contratto di assicurazione. Pisa, 1883; 8°.

— Diritto dei creditori per gli atti compiuti dal fallito anteriormente alla dichiarazione di fallimento. Verona-Padova, 1885; 8°.

— Contro un Codice unico delle obbligazioni. Padova, 1890; 8°.

— Osservazioni sul progetto della Commissione ministeriale per il concordato preventivo. Padova, 1897; 8°.

— Le colleganze nella pratica degli affari e nella legislazione veneta. Venezia, 1899; 8°.

— Dell'assicurazione e di altri provvedimenti per il caso di sciopero involontario. Venezia, 1901; 8°.

— Sulle convenzioni fatte durante il pericolo per l'assenza ed il salvataggio in materia marittima. Milano, 1903; 8°.

— Cenni sulle tavole di vitalità composte dal professore Don G. Toaldo edite in Padova nel 1787. Padova, 1903; 8°.

— Sul privilegio dei venditori di macchine secondo l'art. 773 n. 3 del Codice di commercio. Milano, 1907; 8°.

— Conflitti di leggi in materia di perdita del possesso dei titoli al portatore. Firenze, 1907; 8°.

— La Legge Imperiale Germanica sul contratto d'assicurazione del 30 maggio 1908. Venezia, 1909; 8°.

— Progetto preliminare d'una convenzione internazionale sull'unificazione del diritto relativo alla lettera di cambio e al biglietto d'ordine. Venezia, 1911; 8°.

— Il Codice svizzero delle obbligazioni del 30 maggio 1911. Milano, 1912; 8°.

— Sulla prescrizione in materia di Società. Milano, 1912; 8°.

— Delle obbligazioni decadute o prescritte col diritto cambiario uniforme. Milano, 1913; 8°.

— La convenzione cambiaria internazionale nei riguardi del bollo. Padova, 1913; 8° (*dall'A.*).

Statuti (Gli) Marittimi Veneziani fino al 1255, editi per cura di R. Predelli e A. Sacerdoti. Venezia, 1903; 1 vol. 8° (*dall'avv. A. Sacerdoti*).

** **Tamassia** (N.). La famiglia italiana nei secoli decimoquinto e decimosesto. Milano; 1 vol. 8°.

Dal 14 Dicembre 1913 all'8 Febbraio 1914.

Angelitti (F.). La forma della terra secondo Aristotele nel trattato " De Caelo ". Torino, 1913; 8°.

— Le antiche misure della lunghezza del meridiano terrestre. Torino, 1913; 8° (*dall'A.*).

Bottino Barzizza. L'eclisse totale di sole del 20-21 agosto 1914. Milano, 1913; 8° (Dal R. Osservatorio di Brera).

Coblentz (W. W.). Constants of spectral radiation of a uniformly heated inclosure, or so called black body, I. Washington, 1913; 8° (*dall'A.*).

Corsini (A.). Il primo congresso degli scienziati. Roma, 1913; 8° (*Id.*).

Ferrari (R.). Teorema de Euclides. Buenos Aires, 1913; 8° (*Id.*).

Franceschi (F.). Colture attuali e colture probabili in Libia. Novara, 1913; 8° (*Id.*).

Guidi (C.). Alcune formole per il calcolo dei solai. Roma, 1913; 8° (*dall'A. socio residente dell'Accademia*).

Negri (G.). Appunti di una escursione botanica nell'Etiopia meridionale (marzo-agosto 1909).

— Contributo alla Briologia dell'isola di Rodi. Roma, 1913; 8° (*dall'A.*).

Panetti (M.). Le prove dei motori leggeri nel laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino. Roma, 1913; 8°.

— Note illustrative sui calcoli delle costruzioni stabili alle azioni sismiche. Roma, 1913; 8° (*Id.*).

Scanavino (E.). ...de Euclides. Buenos Aires, 1913; 8° (*Id.*).

****Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. Parte I, N. 106, 108; Parte II, N. 175-177.

Silvestri (F.). Viaggio in Africa per cercare parassiti di mosche dei frutti. Portici, 1913; 1 vol. 8°.

— Descrizione di un nuovo ordine di insetti. Portici, 1913; 8°.

— Novi generi e specie Koenemidae. Portici, 1913; 8° (*Id.*).

Taramelli (T.). Sul lembo pliocenico di S. Bartolomeo presso Salò. Pavia, 1913; 8°.

— Ricordo dello Spallanzani come vulcanologo. Pavia, 1913; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 7 Dicembre 1913 al 1° Febbraio 1914.

Abello (L.). *Della locazione,* nella serie: Il diritto civile italiano secondo la dottrina e la giurisprudenza. Napoli-Torino, 1908-1913; 3 vol. 8° (*dall'A.*).

Ansidei (V.). Resti di un antico sconosciuto edificio esistenti in Norcia. Perugia, 1913; 8° (*Dono della Deputazione di Storia patria dell'Umbria*).

** **Caggese** (R). Firenze dalla decadenza di Roma al Risorgimento italiano. Firenze, 1912-1913; 8°.

** **Carcereri** (L.). Il Concilio di Trento. Bologna, 1910; 1 vol. 8°.

** **Cardinali** (G.). Studi Graccani. Genova, 1912; 1 vol. 8°.

Ceulencer (A. de). La dernière Cène de Balthasar Mathysens à la Soperga. Bruges, in fol. (*Dono del Socio A. Baudi di Vesme*).

Crucé (Émeric) [Émeric La Croix]. Le Nouveau Cynée ou Discours d'estat représentant les occasions et moyens d'establir une paix générale et la liberté du commerce par tout le monde. Paris, 1623; 1 vol. 4°. Con traduzione di fronte in lingua inglese dell'editore T. W. Balch. Ristampato in Philadelphia, 1909.

Eguia Lis (J.). Informe acerca de las labores de la Universitad Nacional de Mexico, durante el periodo de septiembre de 1910 á septiembre 1912 á la Secretaría de Instrucción Pública y Bellas artes. Mexico, 1913; 8° (*dall'A.*).

Gonella (E.). Relazione statistica dei lavori compiuti dalla Corte di Cassazione di Torino nell'anno 1912-1913. Torino, 1913; 8° (*Id.*).

Manacorda (G.). Storia della Scuola in Italia. Vol. 1, Il Medio evo. Palermo, R. Sandron; 2 vol. 16° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).

Martin (M.). Almanacco scientifico cristiano sociale. Padova, 1914 (*dall'A.*).

Mastropasqua (O.). Assedi e battaglie memorabili dai tempi più recenti al 476 d. Cr. con brevi cenni critici di storia civile navale-militare. Molfetta, 1910; 1 vol. 8° (*Id.*).

Mattianda (B.). Di alcuni errori gravissimi sulla Storia e la Lingua dei Liguri. Savona, 1913; 8° (*Id.*).

Mininni (C. G.). Pietro Napoli Signorelli. Vita, opere, tempi, amici, con lettere e documenti. Città di Castello, 1914; 1 vol. 8° (*dal sig. S. Lapi, editore*).

** *Monumenta Germaniae historica.* Necrologia Germaniae. T. V. — Legum sectio IV. Constitutiones et Acta publica. Imperatorum et Regum. T. V, parte 3ª.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. T. XVIII, p. 1, fasc. 8 (120); T. XXXII, p. 1, fasc. 10, 11 (121, 122).

** *Philodemus* De ira liber. Lipsiae, M.CM.XIV; 1 vol. 16°.

Scalvanti (O.). Di un documento inedito su Benedetto Bonfigli. Perugia, 1912; 8° (*Dono della R. Deputazione di Storia Patria dell'Umbria*).

Silva (P.). Il Governo di Pietro Gambacorta in Pisa e le sue relazioni col resto della Toscana e coi Visconti. Pisa, 1911; 1 vol. 8° (*dall'A. per il Concorso al premio Gautieri per la Storia*).

Studii critici offerti da antichi discepoli a Carlo Pascal nel suo XXV anno d'insegnamento. Catania, 1913; 1 vol. 8° (*Dono del prof. C. Pascal*).

** **Tamassia** (N.). La famiglia italiana nei secoli XV e XVI. Milano-Palermo-Napoli, 1910.

Dall'8 Febbraio al 10 Maggio 1914.

Angelitti (F.). Sugli accenni danteschi ai segni, alle costellazioni ed al moto del cielo stellato da occidente in oriente di un grado in cento anni. III. Torino, 1913; 8° (*dall'A.*).

Boccardi (G.). Observations de latitude faites à Pino Torinese (Italie). Paris, 1913; 8° (*Id.*).

Chelli (F.). Sur la latitude et ses variations périodiques. Kiel, 1913; 4° (*Id.*).

Cossavella (G.). L'astronomo Giovanni Schiaparelli. Torino, 1914; 8° (*Id.*).

Eulero (L.). Opera omnia. Sez. I. Opera mathematica, vol. XII.

Favaro (G. A.). Sulla flessione del piccolo meridiano Bamberg del R. Osservatorio di Torino. Torino, 1912; 8°.

— Sulle correzioni alle letture dei cerchi fatte col microscopio micrometrico (Correzioni di Run). Roma, 1913; 8°.

— Sulla distribuzione degli errori di chiusura fra i gruppi di coppie stellari osservate nelle Stazioni Internazionali di latitudine. Kiel, 1913; 4°.

— Declinazioni per il 1900,0 di 121 stelle di riferimento per il Catalogo Astrofotografico di Catania. Catania, 1913; 4° (*Id.*).

Grassi (G.). Impressioni e desideri di un vecchio insegnante di elettrotecnica. Roma, 1914; 8°.

— Corso di elettrotecnica. Vol. 1°, 3ª ediz. Torino, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Guareschi (I.). Neue sehr scharfe auch in Gegenwart anderer Halogene brauchbare Reaktion des Broms. Wiesbaden, 1913; 8°.

— Ueber die Verbreitung des Broms in der Natur und über seinen Nachweis, besonders in organischen Substanzen. Wiesbaden, 1913; 8°.

— Neue Beobachtungen über meine neue charakteristische und scharfe Reaktion auf Brom. Wiesbaden, 1913; 8° (*Id.*).

Guidi (C.). Sul calcolo della lastra rettangolare. Roma, 1914; 8°.

— Prove di resistenza sulla ghisa. Roma, 1914; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Guye (Ph. A.). Rapport sur l'unification des abréviations bibliographiques dans les Mémoires de Chimie. Genève, 1914; 8° (*dall'A.*).

Lacroix (A.). Les latérites de la Guinée et les produits d'altération qui leur sont associés. Paris, 1914; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Lussana (S.). La termodinamica dei gas e dei liquidi in rapporto alle applicazioni pratiche. Roma, 1914; 8° (*dall'A.*).

Meyer (E. v.). Geschichte der Chemie von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Zugleich Einführung in das Studium der Chemie. 4ª ediz. Leipzig, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Noether (M.). Paul Gordan. Leipzig, 1914; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Roggero (H.). Formules pour la détermination de la polodie d'après les observations systématiques de latitude. Paris, 1913; 8° (*dall'A.*).

Serkowski (St.). Les Opsonines et les Bactériotropines au point de vue des expériences personnelles et la critique de la théorie de Wright. Paris, 1914; 8° (*Id.*).

Taramelli (T.). Il paesaggio della " Gioconda „ e l' " uomo pliocenico di Castenedolo „.

— Giovanni Riva Palazzi. Commemorazione (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 1° Febbraio al 17 Aprile 1914.

** *Archivio* Muratoriano. Studi e ricerche in servigio della Nuova edizione dei *Rerum italicarum scriptores*: N. 13.

Biagini (R.). Scripta latina. Lucae, 1912; 1 vol. 8°.

Bianchi (D.). L'opera letteraria e storica di Andrea Alciato. Milano, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Brondi (V.). La trasformazione degli Istituti equiparati e l'iniziativa locale (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

** *Catalogo* generale della libreria italiana: 1° Supplemento; vol. II, 4-7.

Congrès (1er) de Police-Judiciaire international. Avant-programme. Principauté de Monaco, 14-20 avril 1914; 8°. Monaco – Monte-Carlo.

Donadoni (E.). Antonio Fogazzaro. Napoli, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la letteratura*).

Donati (A.). Gabriele D'Annunzio. Milano-Roma-Napoli, 1912; 1 vol. 8° (*Id.*).

Falchi (L.). Studi di poesia cristiana. Roma, 1914; 1 vol. 8°.

— Nuove osservazioni sul sentimento civile del Leopardi. Roma, 1913; 8° (*Id.*).

Inaugurazione del nuovo anno accademico dell'Istituto di Storia del diritto romano della R. Università di Catania. Catania, 1914; 8°.

Meninni (C. G.). Pietro Napoli Signorelli: vita, opere, tempi, amici; con lettere, documenti ed altri scritti inediti. Città di Castello, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la letteratura, 1911-1913*).

** *Monumenta* Germaniae historica: Legum Sectio IV. Constitutiones et Acta publica Imperatorum et Regum. T. VI, part. prior., fasc. 1.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 2 e ultimo del T. XVI, p. 3ª; fasc. 1 del T. III, p. 1ª.

** **Narducci** (H.). Catalogus manuscriptorum praeter graecos et orientales Angelica de Urbe. Indice; 16 pp. 4°.

Pettine (P. S.). Lettera e replica ad una Signora protestante tedesca in merito di religione. Aquila, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Sacerdoti (A.). Nuovo progetto di legge sulla responsabilità degli albergatori. Milano, 1914; 8°.

Savio (F.). L'apparizione della Croce e la conversione di Costantino Magno. 2ª ediz. Roma, 1913; 1 vol. 8°.

— La lite per i corpi dei SS. Vittore e Satiro a Milano. Milano-Roma-Napoli, 1913.

— La realtà storica dell'invenzione della Croce. Monza, 1913; 8°.

— La realtà del viaggio di S. Paolo nella Spagna. Roma, 1914; 8°.

— San Calogero e i monasteri di Albenga e di Civate. Roma, 1914; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente*).

Seneca. Ad Lucilium epistolarum moralium quae supersunt. Lipsiae, 1914, vol. III.

Sforza (G.). La caduta della Repubblica di Venezia ne' dispacci inediti della Diplomazia piemontese. Venezia, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Venturi (A.). Storia dell'Arte italiana. La pittura del quattrocento. Vol. VII, parte 3ª. Milano, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispond. dell'Accad.*).

Dal 10 Maggio al 14 Giugno 1914.

Arctowski (H.). On some climatic changes recorded in New York City. 1913; 8°.

— Studies on Climate and crops corn crops in the United States. 1912. (*dall'A.*).

Bassani (F.). Commemorazione del professore Giuseppe Mercalli. Napoli, 1914 (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Guareschi (I.). Discorso storico-critico preliminare alle Memorie di Ascanio Sobrero. Torino, 1914 (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

— Sulla legge della dilatazione dei gas di Volta. Notizie storiche. Lipsia, 1914; 8° (*Id.*).

Helmert (F. R.). Die isostatische Reduktion der Lotrichtungen. Berlin, 1914; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Mangin (L.). Sur la flore planctonique de la rade de Saint-Vaast-la-Hougue, 1908-1902. Paris, 1914; 4° (*dall'A. Socio corrisp. dell'Accad.*).

Medaglie commemorative degli XI Congressi degli Scienziati italiani. Raccolte e riprodotte per cura di Giuseppe Ardizzone. Firenze, 1914 (*dono del cav. G. Ardizzone*).

Modigliani (E.). Viaggio in Malesia. Riassunto generale dei risultati zoologici. Genova, 1909; 8° (*dall'A.*).

Morse (H. N.). The Osmotic pressure of aqueous solutions. Washington, 1914 (*dall'A. per il concorso al premio Avogadro*).

Parona (C.). Giacomo Doria e l'opera sua. Genova, 1914; 8° (*dall'A.*).

Sánchez Perez (J. A.). Los inventos de Torres Quevedo. Madrid, 1914; 8° (*dall'A.*).

Sasse (E.). Die orthosymmetrische Determinante der Fermat'schen Gleichung. Kolberg, 1914; 1 c.

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe: I. Fauna palaeartica, livr. 100, 110-114. — II. Fauna exotica, livr. 152, 155, 173, 179, 186-190.

Serkowski (St.). Bacillus s. Granulobacillus putrificus nov. sp. Varszawor, 1913; 8° (*dall'A.*).

Sobrero (A.). Memorie scelte pubblicate dall'Associazione Chimica Industriale di Torino con Discorso storico-critico ed Annotazioni di Icilio Guareschi. Torino, 1914; 1 vol. 4° (*dono dell'Assoc. Chim. Ind.*).

Dal 17 Aprile al 21 Giugno 1914.

A Paolo Boselli. Il Comitato savonese per le Onoranze. Savona, 1913; 1 vol. 8°.

Arnò (C.). La " bonorum possessio sine re „. Il problema dell'origine. Modena, 1914; 4° (*dall'A.*).

Biadego (C.). Piazza delle Erbe [Verona]. Cenni storici. Verona, 1 v. (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Bollea (L. C.). In memoria del conte Antonio Cavagna Sangiuliani di Gualdana nel primo anniversario della sua morte, 5 aprile 1913. Pavia, 1914; in 4° (*Id.*).

Caviglione (C.). Morale e Filosofia. Novi Ligure, 1914; 4° (*Id.*).

Dalla Vedova (G.). Scritti geografici. Pubblicati a cura di un Comitato di Geografi in occasione dell'80° Genetliaco dell'A. Novara-Roma, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

D'Ercole (P.). L'antico Egitto e la Caldea come precursori dell'ebraismo e del cristianesimo in morale e religione. Bologna, 1913; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Desmaison (J. J. P.). Dictionnaire Persan-Français, publié par ses neveux. Vol. 2-4. Rome, 1910-1914; 3 vol. in-4° gr. (*Dono della Sig. Marguerite Buffa di Perrero-Reymond*).

Discorsi pronunziati per la inaugurazione della Scuola Tecnica pareggiata Paolo Boselli [in Carmagnola] e per il XXV anniversario della regificazione del Liceo-Ginnasio 23 novembre 1913. Carmagnola, 1913; 4° (*Omaggio della città di Carmagnola*).

Einaudi (L.). Corso di scienza delle Finanze, 2ª ediz. curata dal Dr. Achille Necco. Torino, 1914 (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Gastaldi (E.). La soluzione della questione sociale. Genova, 1914; 8° (*dall'A.*).

****Hecker** (O.). Nuovo dizionario tedesco-italiano e italiano-tedesco ricavato dalla parlata vivente delle due lingue. Brunswick e Berlino, 1913-1915, 2 vol. 8°.

Koser (R.). Jahresbericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica. Berlin, 1914; 8° (*dall'A.*).

Manacorda (G.). Storia della Scuola in Italia. Vol. I, p. 1ª e 2ª. Milano-Palermo-Napoli, 1914; 2 vol. 8° (*Id.*).

Passamonti (E.). Il Giornalismo Giobertiano in Piemonte nel 1847-1848. 1 vol. 8°.

— Una Memoria di Cesare Balbo a Carlo Alberto nell'ottobre 1847. Torino, 1914; 8°.

— Gioberti e il popolo piemontese nel dicembre 1848; Roma, 1913; 8° (*dall'A.*).

Pellegrini (C.). Luigi Pulci. L'uomo e l'artista. Pisa, 1912; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura 1911-1913*).

Ruffini (F.). Camillo Cavour e Mélanie Waldor. Torino, 1914; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Salas (C. P.). Elementos par el estudio de la demografía de la provincia de Buenos-Aires. La Plata, 1913; 8° (*dall'A.*).

Santarem (2° Visconde de). Ineditos (Miscellanea). Colligidos, coordenados e annotados para Jordão de Freitas e Trazidos à publicidade pelo 3° Visconde de Santarem. Lisboa, 1914 (*Dono del 3° Visconde de Santarem*).

***Sextus Empiricus*. Opera recensuit H. Mutschmann. Vol. II. Lipsiae, MCMXIV. 1 vol. 16°.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Novembre 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe, Naccari, ed i Soci Salvadori, D'Ovidio, Peano, Foà, Guareschi, Fileti, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, Balbiano, e Segre, Segretario.

Il Socio Jadanza scusa l'assenza, per indisposizione. La Classe gl'invia i suoi voti di rapida e completa guarigione. — Anche il Socio Guidi scusa la propria assenza.

Si legge e si approva il verbale dell'ultima adunanza.

Il Presidente, riprendendosi oggi i lavori accademici, dà un cordiale saluto ai Colleghi. Indi partecipa la morte del Socio corrispondente Sclater, avvenuta il 17 giugno scorso. Apparteneva all'Accademia dal 1885. Si dà incarico al Socio Salvadori di commemorarlo in una prossima adunanza.

Il Presidente rileva, fra le pubblicazioni pervenute all'Accademia, le seguenti:

Letters and Recollections, di Alessandro Agassiz, che fu nostro Socio straniero. Le invia in omaggio il figlio G. R. Agassiz.

Die Bestimmung des Geoids im Gebiete des Harzes, del Socio straniero Helmert.

Naturalisti e viaggiatori liguri nel secolo XIX, del Socio corrispondente Issel.

E. Molinari ed E. Quartieri, *Ricorrendo il centenario della nascita (1812-1912) e il 25° anno (1888-1913) della morte di Ascanio Sobrero scopritore della nitroglicerina (Notizie sugli esplodenti in Italia)*. Omaggio della Società Italiana prodotti esplodenti. —

Il Vice-Presidente Camerano, a nome del Club Alpino italiano, presenta un volume pubblicato da questo intorno alla propria opera nel primo cinquantennio.

Il Socio Segre a nome della Direzione e degli Editori degli " Annali di Matematica „ presenta il secondo dei volumi dedicati alla memoria di Lagrange per iniziativa dell'Accademia.

Sono presentate per l'inserzione negli *Atti*, le seguenti Note:

L. Tonelli, *Sul valore di un certo ragionamento*, dal Socio Peano;

I. Guareschi, *Ricerca dei bromuri in presenza dei solfocianati e dei ferrocianuri; azione dell'acido cromico sul bromuro di cianogeno*. Nota VI;

R. Regè, *Ricerche anatomiche sui tessuti corticali del rizoma di alcune Iris*, dal Socio Mattirolo;

E. Bompiani, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, dal Socio Segre (*);

E. Laura, *Sopra le deformazioni per distorsione dei solidi elastici, isotropi di rivoluzione*, dal Socio Somigliana.

Lo stesso Socio Somigliana legge la *Commemorazione del Socio straniero Enrico Poincaré*. Essa viene accolta con plauso dalla Classe. Sarà pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Guareschi presenta una sua Memoria, contenente: *Notizie storiche intorno a Giulio Usiglio ed all'acqua del mare*.

(*) Questa Nota uscirà in una prossima dispensa.

La Classe unanime ne delibera l'accoglimento nei volumi delle *Memorie*.

Per gli stessi volumi vengono offerti i seguenti lavori:

Dal Socio Naccari, *Declinazioni di 121 stelle di riferimento per il Catalogo Astrofotografico di Catania* (zona da + 46° a + 48°) *osservate al Cerchio meridiano Reichenbach di Torino e ridotte al 1912,0 da* G. A. Favaro;

Dal Socio Foà, *Ricerche sperimentali sulla meningo-encefalite sifilitica*, del Dott. F. Vanzetti.

Vengono incaricati di riferire sul primo i Soci Naccari e Jadanza, sul secondo i Soci Foà e Fusari. —

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata, si procede alla votazione per l'elezione del Segretario della Classe, ed è riconfermato in detta carica, per un nuovo triennio, il Socio Segre, salvo l'approvazione Sovrana.

LETTURE

Sul valore di un certo ragionamento.

Nota di LEONIDA TONELLI.

Un ragionamento ormai classico, per la dimostrazione diretta dell'esistenza del minimo (o massimo) in problemi di Calcolo delle Variazioni, è quello che, partendo da una successione minimizzante, conduce a determinare una nuova successione, estratta dalla precedente e convergente ad un elemento limite, ed a mostrare poi che questo elemento dà in realtà il minimo per l'integrale di cui si tratta. La successione minimizzante, come è noto, è una successione di curve o superfici (a seconda della natura del problema) per le quali l'integrale da render minimo tende al suo limite inferiore; e sulla sua esistenza reale non si crede generalmente di soffermarsi a esitare (*); anzi, per soprammercato, si aggiunge comunemente che di tali successioni ne esistono, non una sola, ma infinite. E in questa abbondanza la mente dei più si è sempre adagiata soddisfatta. Peraltro — e in omaggio almeno al carattere odierno dell'analisi, che è quello di una continua e non troppo comoda diffidenza — non è del tutto ozioso il domandarsi se di successioni minimizzanti ne esiste sempre veramente per lo meno una. E la domanda è tanto più legittima in quanto, nel caso generale, non sembra possibile rispondervi in modo affermativo.

Vediamo di chiarire la difficoltà.

A giustificazione della tacita ipotesi, fatta di solito, dell'esistenza di una successione minimizzante stanno le seguenti considerazioni. Sia i il limite inferiore dell'integrale I da minimizzare e che, per fissare le idee, supporremo esteso a curve. Esistono certamente, per la definizione stessa di i, delle curve per le quali

(*) Il primo a formulare la critica, che ha dato origine alla presente Nota, fu il Carathéodory, *Ueber die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen* (" Math. Ann. ", 62 Band).

è $I < i + 1$. Sia C_1 una di esse. Ne esistono poi di quelle che rendono $I < i + \frac{1}{2}$: indichiamone una con C_2. E così via. In generale, potremo dire che esistono di sicuro curve per le quali è $I < i + \frac{1}{n}$, e una di queste la potremo indicare con C_n. Se allora consideriamo le infinite curve

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots \tag{1}$$

abbiamo una successione minimizzante.

Tutto sta ora a vedere se tale giustificazione ha il valore di una vera e propria dimostrazione, vale a dire se raggiunge quel grado di rigore al quale ci siam venuti abituando.

Cominciamo da quest'osservazione. L'elemento C_n della (1) cosa rappresenta effettivamente? Indica una qualsiasi delle curve per le quali è $I < i + \frac{1}{n}$; oppure una curva determinata di questa famiglia? Nel primo caso, C_n è un elemento variabile e la (1) non può rappresentare una successione di curve, tutto al più potrebbe rappresentare la successione degli insiemi W_n di tutte le curve che soddisfano alla $I < i + \frac{1}{n}$. Nel secondo, si ha realmente una successione di curve. Senonchè, perchè ci si trovi davvero in questo caso, è necessario *determinare* la C_n, vale a dire, dare un modo per distinguerla, per sceglierla fra tutte le altre della sua categoria. E questo più sopra non si è fatto. Se la classe a cui appartiene la C_n fosse costituita di un numero finito o di un'infinità numerabile di elementi, si potrebbe, con molta facilità, stabilire un criterio di discernimento; il male è che risulta costituita di un'infinità non numerabile di enti. Ci troviamo così alle prese con la scelta di infiniti elementi arbitrari, contro la quale ha valore la famosa obbiezione di Peano (*). E allora, ci domandiamo, il ragionamento classico cui abbiamo

(*) G. Peano, *Démonstration de l'intégrabilité des équations differentielles ordinaires* (" Math. Ann. „, 1890, pag. 210) e " Rivista di Math. „, t. 8, p. 145.

Sul modo di evitare l'uso della relazione selettiva, senza nuocere alla maggiore eleganza e semplicità della teoria dei limiti dei valori di una data funzione, vedi Michele Cipolla, *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni* (" Atti della Acc. Gioenia di Catania „, VI, 1913).

accennato in principio, e le conseguenze che ne derivano, precipitano inesorabilmente o, per lo meno, sono condannati a restare circondati da legittima diffidenza? È quanto vogliamo esaminare qui.

In modo preciso vogliamo mostrare che *in tutti quei casi in cui l'integrale da render minimo è una funzione semicontinua inferiormente della linea d'integrazione, è possibile dare un criterio per la scelta della curva* C_n, *vale a dire, esiste effettivamente almeno una successione minimizzante* (*).

La quistione è tutta qui: estendere alle varietà non numerabili quei criteri che assicurano l'esistenza di un ente limite almeno per una successione di curve. Questi criteri sono tutti basati sul concetto di uguale continuità e sul teorema relativo alle successioni di funzioni ugualmente continue, dovuti all'Ascoli (**). E sull'estensione del teorema dell'Ascoli noi dovremo portare perciò la nostra attenzione.

1. — Richiamiamo alcune definizioni, limitandoci, per semplicità, alle funzioni di una sola variabile (reale). Sia data una varietà $W(f)$ di funzioni f, definite tutte in uno stesso intervallo (a, b). Le funzioni della varietà si dicono *ugualmente continue* in (a, b) se, preso arbitrariamente un numero positivo ϵ, è possibile determinare almeno un δ in modo che, essendo x' e x'' due punti qualsiasi di (a, b), dalla disuguaglianza

$$|x' - x''| < \delta,$$

e qualunque sia la funzione f di W, scenda l'altra

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Una funzione F, definita in (a, b), si dice *funzione limite* della varietà W se, preso l'ϵ, esiste sempre qualche f, distinta da F, che soddisfa, in tutto (a, b), alla

$$|F - f| < \epsilon.$$

(*) L'esistenza di una successione minimizzante è dunque pienamente giustificata in tutti i casi considerati nei miei lavori sul Calcolo delle Variazioni, ed anche, per es. (passando dal piano allo spazio), nel problema di Dirichlet e in quello di Plateau.

(**) G. Ascoli, *Le curve limiti di una varietà data di curve.* " Mem. R. Acc. dei Lincei " (1883-84).

Data una successione $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ di insiemi di funzioni, definite in (a, b), diremo che F è *funzione limite della successione* se, preso il solito ϵ, esistono infiniti insiemi W_n che hanno almeno una funzione f_n soddisfacente in tutto (a, b) alla

$$|F - f_n| < \epsilon.$$

Diremo poi che la successione scritta *converge uniformemente in* (a, b) *verso* F, se, preso l'ϵ, è possibile determinare un indice $\overline{n}$ in modo che, per ogni $n > \overline{n}$, e per qualsiasi funzione f_n di W_n sia verificata la disuguaglianza precedente.

2. — Ciò premesso, dimostriamo che

se W(f) *è una varietà di funzioni ugualmente continue e ugualmente limitate* (*) *in* (a, b), *esiste per essa almeno una funzione limite* (*necessariamente continua*) (**).

Sia

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

una successione di punti di (a, b) uniformemente densi in tutto l'intervallo (p. es. l'insieme dei punti razionali) e

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n, \ldots \tag{3}$$

una successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero. L'insieme numerico I_1 dei valori che tutte le funzioni f assumono in x_1 ha almeno un punto limite (***). Considero il maggiore e lo indico con $F(x_1)$. Se k è un numero di cui rimangono inferiori i moduli di tutte le f, è $|F(x_1)| \leq k$. Considero poi,

(*) Ugualmente limitate = a tutte, in modulo, inferiori *ad un numero fisso*.

(**) Questa diventa la proposizione dell'Ascoli, sopra ricordata, supponendo che la $W(f)$ sia una successione di funzioni. Nella forma generale del testo fu dimostrato dall'Arzelà (*Sulle serie di funzioni*, " Mem. Acc. di Bologna ", 1899-1900) con la tacita ammissione del principio della libera scelta, che è appunto quanto qui si vuol evitare.

(***) Se infinite funzioni di W ammettono in x_1 uno stesso valore, questo valore deve riguardarsi come punto limite di I_1.

per ogni n, l'insieme $W_{1,n}$ di tutte le funzioni di W che soddisfano alla disuguaglianza

$$|f(x_1) - F(x_1)| \leq \epsilon_n .$$

Ogni $W_{1,n}$ contiene necessariamente infinite funzioni ed è, a sua volta, contenuto in tutti gli insiemi precedenti. L'insieme numerico $I_{2,n}$ dei valori che le funzioni di $W_{1,n}$ assumono in x_2 ha un insieme derivato I'_{2n}, contenuto in $I'_{2,n-1}$; e l'insieme $I'_{2,\infty}$ dei punti appartenenti a tutti gli $I'_{2,n}$ (che sono tutti chiusi) contiene certamente degli elementi ed è, a sua volta, chiuso. Il suo massimo lo indicherò con $F(x_2)$ ($|F(x_2)| \leq k$); e indicherò poi con $W_{2,n}$ l'insieme di tutte le funzioni di $W_{1,n}$ che soddisfano la

$$|f(x_2) - F(x_2)| \leq \epsilon_n .$$

Ogni W_{2n} contiene infinite funzioni ed è contenuta in tutte le $W_{2,r}$ precedenti, e se indico con f_{2n} una qualsiasi funzione di W_{2n}, è

$$|f_{2n}(x_1) - F(x_1)| \leq \epsilon_n , \qquad |f_{2n}(x_2) - F(x_2)| \leq \epsilon_n .$$

E così si prosegua indefinitamente. Formo allora la successione d'insiemi

$$W_{11}, \; W_{22}, \; \ldots, \; W_{nn}, \; \ldots \tag{4}$$

Ogni suo insieme è contenuto nel precedente e contiene infiniti elementi, uno qualunque dei quali f_{nn} di W_{nn} soddisfa alle

$$|f_{nn}(x_r) - F(x_r)| \leq \epsilon_n \qquad (r = 1, 2, \ldots n). \tag{5}$$

Nello stesso mentre ho costruito sull'insieme (2) una funzione F, sempre in modulo inferiore o uguale a k. Dico che F è continua su (2). Siano x_r, x_s due punti di (2) soddisfacenti alla $|x_r - x_s| < \delta$, dove il δ è quello di cui si è parlato al n. 1. Sia $\bar{n}$ maggiore tanto di r quanto di s. Tutte le funzioni $f_{\bar{n}\bar{n}}$ di $W_{\bar{n}\bar{n}}$ soddisfano alle

$$|f_{\bar{n}\bar{n}}(x_r) - F(x_r)| \leq \epsilon_{\bar{n}} , \qquad |f_{\bar{n}\bar{n}}(x_s) - F(x_s)| \leq \epsilon_{\bar{n}}$$

e (n. 1) alla

$$|f_{\bar{n}\bar{n}}(x_r) - f_{\bar{n}\bar{n}}(x_s)| < \epsilon .$$

È dunque, perchè $\bar{n}$ lo posso prendere grande quanto voglio,

$$(6) \qquad |F(x_r) - F(x_s)| \leq \epsilon .$$

Così la F è continua su (2). Essendo poi quest'insieme uniformemente denso in tutto (a, b), posso definire la F su tutto l'intervallo in modo che risulti ovunque continua. Così la (6) risulterà soddisfatta per ogni coppia x', x'' di punti di (a, b) soddisfacenti alla disuguaglianza $|x' - x''| < \delta$. Dico ora che la (4) converge uniformemente, su tutto (a, b), alla $F(x)$. Siano

$$x_{t_1} < x_{t_2} < \ldots < x_{t_r}$$

dei numeri crescenti, estratti dalla (2), in modo che con essi (a, b) risulti diviso in parti tutte minori di δ. Preso poi un x qualunque di (a, b) e detto $x_{t_s}\, x_{t_{s+1}}$ l'intervallo che lo contiene, avviene che tutte le funzioni f_{nn} di W_{nn} soddisfano, se n è maggiore di tutti gli indici t_1, t_2, ... t_r, per il n. 1 e per le (5) e (6) (quest'ultima estesa come sopra si è detto), alla

$$\begin{aligned} |f_{nn}(x) - F(x)| &\leq |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_{t_s})| + |f(x_{t_s}) - F(x_{t_s})| + \\ &\qquad + |F(x_{t_s}) - F(x)| \\ &< 2\epsilon + \epsilon_n \end{aligned}$$

ed anche, per ogni n da un certo indice n_1 in avanti,

$$|f_{nn}(x) - F(x)| < 3\epsilon .$$

Poichè n_1 è indipendente da x, la convergenza della (4) alla $F(x)$ è dimostrata, e il teorema enunciato risulta pienamente stabilito.

3. — Sia ora una successione

$$W_1, \; W_2, \; \ldots, \; W_n, \; \ldots$$

d'insiemi di funzioni, definite in (a, b). Vogliamo dimostrare che

se le funzioni di questi insiemi sono tutte ugualmente continue e ugualmente limitate in (a, b), *la successione considerata ammette almeno una funzione limite (necessariamente continua).*

Consideriamo ancora le due successioni (2) e (3) del n. precedente, sia $I_{1,n}$ l'insieme dei valori di tutte le funzioni di W_n in x_1, e $I'_{1,n}$ il suo derivato. Quest'ultimo è chiuso ed ha un massimo. Il gruppo dei massimi relativi a tutti gli $I'_{1,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ha un massimo punto limite, che indicheremo con $F(x_1)$. Sia n_1 il primo indice, maggiore o uguale ad n, per il quale qualche elemento $f_{n1}(x_1)$ di I_{1,n_1} soddisfa alla disuguaglianza

$$|f_{n_1}(x_1) - F(x_1)| \leq \epsilon_n .$$

Indichiamo con $W_{1,n}$ l'insieme di tutte le funzioni di W_{n_1} per le quali risulta soddisfatta la disuguaglianza precedente. Abbiamo così una successione d'insiemi $W_{1,1}$, $W_{1,2}$, ..., $W_{1,n}$, ... dove W_{1n} è estratto da un W_r di indice uguale o maggiore ad n e dove ogni funzione f_{1n} di questo W_{1n} soddisfa alla

$$|f_{1n}(x_1) - F(x_1)| \leq \epsilon_n .$$

Consideriamo l'insieme I_{2n} di tutti i valori $f_{1n}(x_2)$, e il suo derivato I'_{2n}. Il massimo punto limite dei massimi di questi insiemi derivati indichiamolo con $F(x_2)$. Se allora n_2 è il primo indice $\geq n$ per il quale qualche elemento f_{1n_2} di I_{2n_2} soddisfa alla

$$|f_{1n_2}(x_2) - F(x_2)| \leq \epsilon_n ,$$

indicheremo con W_{2n} l'insieme di tutte le funzioni di W_{1n_2} per le quali è soddisfatta la disuguaglianza precedente. Avremo così la successione W_{21}, W_{22}, ..., W_{2n}, ... dove W_{2n} è estratto da un insieme $W_{1,r}$ d'indice $r \geq n$, e dove, per tutte le funzioni f_{2n} di W_{2n}, è

$$|f_{2n}(x_1) - F(x_1)| \leq \epsilon_n , \qquad |f_{2n}(x_2) - F(x_2)| \leq \epsilon_n .$$

E così via. Formeremo allora la successione

$$W_{11}, \; W_{22}, \; \ldots, \; W_{nn}, \; \ldots$$

L'insieme W_{nn} risulta una parte di un insieme W_r di indice $r \geq n$, ed ogni sua funzione f_{nn} soddisfa alle

$$|f_{nn}(x_s) - F(x_s)| \leq \epsilon_n \qquad (s = 1, 2, \ldots n).$$

Proseguendo qui come al n. precedente, si giunge al termine della dimostrazione.

4. — Una varietà di funzioni, definite in (a, b), la diremo *compatta* se ogni successione d'insiemi di funzioni appartenenti alla varietà ammette almeno una funzione limite, limitata in tutto (a, b) (*). Vale allora la proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà di funzioni continue, definite in (a, b), *sia compatta, è che tutte le sue funzioni siano ugualmente continue e ugualmente limitate nel campo detto.*

Che la condizione sia sufficiente, risulta da quanto si è detto al n. 3. Veniamo a dimostrare che è anche necessaria. Supponiamo, dapprima, che le funzioni non siano tutte ugualmente limitate. Potremo in tale ipotesi, formare la successione d'insiemi di funzioni W_1, W_2, ... comprendendo in W_n tutte le nostre funzioni che in almeno un punto di (a, b) hanno il modulo maggiore o uguale ad n. La successione scritta deve avere, per la definizione stessa di varietà compatta, qualche funzione limite, limitata su tutto (a, b). E questo è impossibile, perchè, preso un intero n_1 convenientemente grande, esiste di certo una di queste funzioni limiti di modulo $< n_1$, ed esistono, di conseguenza, degli insiemi W_n, di indice grande quanto si vuole, che hanno delle funzioni le quali si mantengono in modulo sempre inferiori a $2n_1$, il che contraddice alla costruzione medesima della successione W_1, W_2, ...

Le funzioni della varietà, oltre che ugualmente limitate, sono anche ugualmente continue. Infatti, in caso contrario, presa una successione $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ di numeri positivi, decrescenti,

(*) Modifichiamo così la definizione di insieme *compatto* posta da M. Fréchet, *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel* (" Rend. Ann. Mat. ", Palermo, 1906).

tendenti a zero, esisterebbe un ϵ (ed anche infiniti altri) tale che, per ciascun δ_n, si potrebbe trovare almeno un funzione f_n della varietà ed una coppia di punti x', x'' di (a, b) soddisfacenti alle $|x' - x''| < \delta_n$,

$$|f_n(x') - f_n(x'')| > \epsilon .$$

Sia W_n l'insieme di tutte le funzioni della varietà considerata, ciascuna delle quali, per almeno una coppia di punti soddisfacenti alla $|x' - x''| < \delta_n$, verifichi la disuguaglianza precedente. La successione degli insiemi W_n ammette, per ipotesi, qualche funzione limite, necessariamente continua. Sia $F(x)$ una di esse e $\bar{\delta}$ un numero tale che, per ogni coppia x', x'' di (a, b) che verifichi la $|x' - x''| < \bar{\delta}$, si abbia

$$|F(x') - F(x'')| < \frac{\epsilon}{3} .$$

Ci sono infiniti insiemi W_n che hanno almeno una funzione f_n soddisfacente alla

$$|f_n(x) - F(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

in tutto (a, b). Per ogni coppia x', x'', tale che sia $|x' - x''| < \bar{\delta}$, è allora

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \epsilon .$$

Ora, quando n è abbastanza grande, in modo che sia $\delta_n < \bar{\delta}$, questa disuguaglianza contraddice alla $|f_n(x') - f_n(x'')| > \epsilon$, verificata per almeno una delle coppie dette. Il teorema è dunque dimostrato.

5. — Al. n. 2, per dimostrare che ogni varietà di funzioni ugualmente continue e ugualmente limitate ammette almeno una funzione limite, abbiamo effettivamente costruita una di tali funzioni. Il procedimento costruttivo dato là conduce ad una funzione limite $F(x)$ ben determinata e distinta da tutte le altre che eventualmente potrebbero esistere. Per mezzo di questo procedimento si può dunque, in ogni caso, far corrispondere ad una varietà compatta *un* suo ente limite. Se poi la varietà è anche

chiusa (vale a dire, se contiene ogni sua funzione limite), *lo stesso procedimento fa corrispondere alla varietà* un *suo elemento*, ed inoltre prova l'esistenza di una (almeno) successione di funzioni, convergente ad una funzione limite qualsiasi della varietà.

6. — Fondandosi sulle proposizioni precedenti, si hanno le altre seguenti:

Una varietà di curve, per le quali esista una rappresentazione analitica simultanea

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad a \leq t \leq b$$

con x(t), y(t) *funzioni ugualmente continue e ugualmente limitate in* (a, b), *ammette almeno una curva limite.*

(Una curva C si dirà curva limite di una varietà W se, preso un ϵ arbitrario, esiste almeno una curva di W tale che fra essa e la C si possa porre una corrispondenza biunivoca, ordinata, continua, in guisa che due punti corrispondenti distino fra loro per meno di ϵ).

Data una successione W_1, W_2, .., *di insiemi di curve, le quali si possano rappresentare analiticamente come al teorema precedente, esiste per essa almeno una curva limite.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà di curve sia compatta, è che si possa trovare, per tutte le curve, una rappresentazione analitica simultanea, come quella detta sopra.

Le prime due proposizioni si dimostrano immediatamente; quanto alla terza, chi abbia letto i ragionamenti fatti qui potrà, con non molta fatica, ritrovarle da sè, tenendo sott'occhio i nn. 87-90 della Memoria citata del Fréchet.

Si hanno poi i seguenti importanti corollari:

Una varietà di curve, contenute in un campo limitato e tutte inferiori in lunghezza ad un numero fisso, ammette almeno una curva limite.

Una successione di insiemi di curve, come le precedenti, ammette almeno una curva limite.

7. — Veniamo ora alle successioni minimizzanti, e per chiarire bene le cose, prendiamo a considerare uno dei casi in

cui si è fatto uso del ragionamento classico, che si tratta di legittimare.

Sia, dunque, la funzione $F(xy\,x'y')$ del Calcolo delle Variazioni, definita in un certo campo (xy) limitato e per tutte le coppie x', y' soddisfacenti alle $x'^2 + y'^2 \neq 0$, e sempre maggiore di zero, insieme al suo invariante di Weierstrass. Si debba trovare il minimo dell'integrale I della F, esteso a tutte le curve del campo detto che congiungono due dati punti. Si costruisca la successione di insiemi di curve

$$W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_n,\ \ldots$$

il cui termine generale W_n sia composto di tutte le curve della varietà data per le quali è $I \leq i + \frac{1}{n}$, essendo i il limite inferiore di I sulla varietà stessa. Le curve di questi insiemi risultano tutte, in lunghezza, inferiori ad un numero fisso e, per il n. precedente, W_n è compatto. Per la semicontinuità inferiore dell'integrale della $F(x)$ (*), una qualunque delle curve limiti di W appartiene a W_n stesso. Questo insieme è dunque compatto e chiuso e gli si può far corrispondere *una* sua curva C_n (n. 5). La C_1, C_2, ..., C_n, ... così definita è una successione minimizzante.

(*) Vedi L. Tonelli, *Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni* (" Rend. Circ. Mat. ", Palermo, 1913).

Ricerca dei bromuri in presenza dei solfocianati e dei ferrocianuri; azione dell'acido cromico sul bromuro di cianogeno.

Nota VI del Socio ICILIO GUARESCHI.

I.

Ricerca dei bromuri in presenza dei solfocianati e dei ferrocianuri.

È noto che non è facile scoprire i cloruri in presenza dei solfocianati; a questo scopo il Corninboeuf (1912) propose di precipitare il solfocianato con un sale di rame e un riduttore, e poi ricercare i cloruri nel filtrato col nitrato d'argento.

Le stesse difficoltà sussistono pei bromuri. Nella mia prima nota: *Nuova reazione del bromo sensibilissima anche in presenza degli altri alogeni* (1) io ho fatto osservare che ricercando i bromuri in soluzione con soluzione al 25 % di acido cromico, la presenza dei solfocianati ostacolava la reazione, o questa era molto lieve. Nelle condizioni in cui ho operato allora tutto ciò è perfettamente vero. Ma se si opera in altro modo allora colla mia reazione si possono svelare anche delle traccie di bromuri misti ai solfocianati. Nelle mie prime esperienze facevo passare l'aria nella soluzione contenente il solfocianato ed il bromuro trattata con soluzione di acido cromico al 25 %. In questo caso il bromo messo in libertà doveva agire subito col solfocianato. Ma se si agisce sulla miscela solida o sulla soluzione concentrata, trattandole con eccesso di acido cromico per distruggere il solfocianato, allora si possono svelare delle traccie di bromuri in presenza anche di molto solfocianato.

(1) " Atti R. Accad, di Torino ", 28 aprile 1912, vol. 47; *Chem. Zentralb.*, 1912 (II), pag. 635; e tradotta in " Zeits. f. analyt. Chem. ", 1913, t. 52, pag. 451.

Circa 0,5 gr. di solfocianato potassico, contenenti 1 mgr. di bromuro di potassio, trattati con 10 cm^3 di soluzione d'acido cromico al 50 % reagiscono assai vivamente. Bisogna aggiungere la soluzione cromica a poco a poco, lentamente. Terminata la viva reazione, si scalda a blando calore sino alla ebollizione, badando che le ultime bolle di vetro dell'apparecchio (V. l'apparecchio già da me descritto nella nota III) non si scaldino troppo pel vapor d'acqua. Facendo allora passare una corrente moderata d'aria attraverso al liquido, si riconosce benissimo il bromo colla cartina inumidita col mio reattivo. La reazione è assai sensibile; anche con 0,5 di solfocianato potassico contenente $^1/_2$ mgr., e meno, di bromuro di potassio (cioè meno di 0,0003 di bromo) si osserva bene la reazione colorata. Serve bene il violetto d'Hofmann decolorato.

Miscela di solfocianato potassico con bromuro, joduro e cloruro potassico. — Il bromuro, anche in minima quantità, può essere svelato colla mia reazione anche quando è mescolato a solfocianati con joduri e cloruri.

Ho fatto una mescolanza di 1 grammo KSCN, 0,200 di KCl, 0,100 di KI e 0,002 di bromuro potassico. Circa 0,5 gr. di questa miscela fu trattata a poco a poco, nel mio apparecchietto, con 10 cm^3 di acido cromico al 50 %; la reazione è vivissima, però cessa presto e si può continuare scaldando. Facendo passare con un aspiratore una corrente d'aria, dopo pochi minuti si svela la presenza del bromo.

Se vi è presente molto joduro insieme ai vapori violetti di questo, e del bromo, si sviluppa anche del joduro di cianogeno che in forma di aghetti si deposita nella parte alta dell'apparecchietto e nel tubo ove è la carta reattiva.

La presenza di tutti questi prodotti non ostacola dunque la ricerca di minime quantità di bromuro col mio metodo.

Una miscela analoga alla precedente ma con 2 ‰ di bromuro dà la reazione intensissima, e più volte si può ottenere la colorazione violetta della cartina.

Solfocianato di ammonio e bromuro di ammonio. — Il solfocianato ammonico ostacola assai la ricerca del bromo.

Bisogna notare che la reazione fra l'acido cromico al 50 %, ed anche al 25 %, con il solfocianato ammonico è vivissima;

si può adoperare meglio la soluzione al 5 od al 10 %, in grande eccesso. Così si riesce a svelare bene l'1 % di bromuro ammonico, ed anche meno, nel solfocianato di ammonio.

Solfocianato di mercurio. — Circa 0,5 gr. di solfocianato di mercurio mescolati con circa 0,010 di bromuro mercurico furono trattati con 10 cm^3 di acido cromico al 50 %; scaldando moderatamente, la reazione è vivissima, poi cessa e continuando a scaldare, e occorrendo facendo passare l'aria, si manifesta benissimo la reazione del bromo.

Dunque, anche da una miscela con un grande eccesso di solfocianato mercurico si ha la reazione.

Solfocianato d'argento e bromuro d'argento. — Il solfocianato d'argento ostacola la ricerca di piccole quantità di bromuro d'argento. Anche l'1 % di bromuro d'argento misto al solfocianato d'argento cogli ordinari mezzi di ricerca del bromo non si riesce bene allo scopo. Invece col mio metodo si riesce benissimo.

Grammi 0,200 di solfocianato d'argento contenenti 0,020 di bromuro d'argento scaldati con acido cromico al 50 %, e meglio se al 75 %, dànno manifesta la reazione del bromo. Bisogna scaldare moderatamente per evitare subito una reazione troppo eccessiva. Si può comodamente usare il mio apparecchietto descritto nella nota III; come reattivo può servire tanto la carta colla fucsina decolorata, quanto col violetto d'Hofmann decolorato. Quando si deve far bollire a lungo è bene usare lo stesso apparecchio, ma munito di un refrigerante che involge le due e tre bolle che stanno in alto. Così può evitarsi l'azione dannosa del vapor d'acqua. La corrente d'acqua molto lenta in principio deve essere accresciuta in seguito e mantenere l'ebollizione moderata. Ma anche l'apparecchietto della nota III serve bene. Meglio far passare l'aria dopo che il liquido ha ben bollito.

Gr. 0,500 di solfocianato di argento con 1 mgr. di bromuro d'argento dànno ancora una lieve reazione.

Causa di errore usando il permanganato potassico per spostare il bromo. — Adoperando il permanganato potassico

in soluzione satura o concentrata, invece dell'acido cromico, per spostare il bromo, e riconoscere questo col mio reattivo, si incorre in un grave errore quando gli alogeni, specialmente i bromuri, trovansi mescolati ai solfocianati; questi per l'azione del permanganato dànno del cianato di potassio il quale facilmente si decompone producendo dell'ammoniaca:

$$CONK + H^2O = CO^2 + NH^3$$

che colora in rosso vivo la carta inumidita col reattivo fucsinico. Non è, è vero, la bella colorazione violetta che si ottiene col bromo, ma per piccolissime quantità la confusione è possibile.

Questa medesima causa di errore probabilmente deve aversi anche quando si ricercano i bromuri in presenza dei solfocianati colla reazione di Swarts, ma modificata dal Baubigny. Io non ho verificato.

Il modo però di operare secondo che è indicato dal Baubigny per spostare il bromo, cioè l'uso del permanganato potassico, deve indurre in errore. Perchè se vi sono dei solfocianati oppure altre sostanze azotate che col permanganato potassico diano dell'ammoniaca, questa agisce tanto sul reattivo fucsinico colorandolo in rosso vivo, o sul violetto d'Hofmann decolorato, colorandolo in azzurro, quanto sulla fluoresceina.

Ferrocianuro e ferricianuro di potassio contenenti bromuri. — I bromuri in piccola quantità possono essere riconosciuti in presenza di molto ferrocianuro potassico, mediante l'azione dell'acido cromico al 50 %. 1 mgr. di bromuro potassico in 1 gr. di ferrocianuro si svela in un istante; anche a temperatura ordinaria. Si può fare la reazione entro un matraccetto.

In altro modo è difficile ricercare e svelare delle traccie di bromuri in presenza di molto ferrocianuro. Saggiando il ferrocianuro allo stato solido, in polvere, serve bene anche la soluzione d'acido cromico al 25 %.

Anche nel *ferricianuro di potassio* si possono svelare delle piccole quantità di bromuro. Nella proporzione dell' 1 ‰, ed anche meno, il bromuro si svela.

Ferrocianuro d'argento e bromuro d'argento. — La ricerca di piccole quantità di bromuro d'argento nel ferrocianuro d'argento non è operazione semplice, nè facile, nè sicura. Col mio metodo si riesce bene. Basta trattare la miscela con acido cromico in soluzione concentratissima, satura, scaldare moderatamente e far passare una corrente d'aria nell'apparecchio sovraccennato.

Gr. 0,5 di ferrocianuro d'argento contenenti 11 mgr. di bromuro d'argento, mescolati con 8 cm^3 di soluzione satura di acido cromico dànno intensa colorazione violetta e colorano successivamente più carte inumidite col violetto d'Hofmann decolorato. È bene scaldare alla ebollizione moderata per 5-10 minuti, prima di far passare l'aria e mantenere ben freddo il refrigerante. Gr. 0,5 di ferrocianuro d'argento e 5 mgr. di bromuro d'argento, cioè circa 1 %, dànno ancora molto bene evidente la reazione. Con quantità minori la reazione è dubbia.

Col bleu di Prussia e l'oltremare. — Anche quando i bromuri sono mescolati col bleu di Prussia possono essere in questo modo svelati. Bastano delle traccie minime di bromuro potassico o bromuro di ferro nel bleu di Prussia perchè trattando la miscela con acido cromico al 25 % od al 50 % si abbia subito, a temperatura ordinaria, sviluppo di bromo. Egualmente si ha nel caso che i bromuri trovinsi mescolati all'oltremare; in questo caso è meglio trattare la polvere d'oltremare con acido cromico al 50 % e in lieve eccesso; se vi è poco acido cromico allora l'acido solfidrico che si sviluppa impedisce la reazione cromatica del bromo. Così bisogna fare quando sono presenti i solfuri.

II.

Azione dell'acido cromico sul bromuro di cianogeno.

Secondo W. Kœnig (1) il jodo libero non agisce coi solfocianati in soluzione acquosa. Goldberg (2) aveva dimostrato che

(1) " J. pr. Chem. „, 1911, t. 84, pag. 558 e " Bull. Soc. Chim. „, 1911 (4), t. XII, pag. 777.

(2) " Bull. Soc. Chim. „, (3), 26, pag. 667.

il bromo non fornisce CNBr agendo sul solfocianato potassico in soluzione acquosa; ma Kœnig ha dimostrato che il CNBr si forma quantitativamente se il bromo agisce in eccesso:

$$KSCN + 4Br^2 + 4H^2O = KBr + CNBr + H^2SO^4 + 6HBr$$

F. W. Küster e A. Thiel in una nota: *Eine Trennung von Brom und Rhodan* (1) hanno tentato di dosare il bromo in mescolanza coi solfocianati e per distillazione colla miscela cromica trovarono un eccesso di bromo, perchè secondo gli Autori probabilmente si sviluppa del bromuro di cianogeno che col jodo darebbe:

$$CNBr + 2I' \rightarrow CN' + Br' + I^2.$$

Ottennero buoni risultati raccogliendo il bromo il e bromuro di cianogeno in una soluzione diluita di potassa, invece che nel joduro di potassio; i due corpi vengono assorbiti. In seguito si decompone con acido solforico e permanganato e si raccoglie il bromo nella soluzione di joduro potassico.

Se in questa reazione dell'acido cromico sul solfocianato, in presenza di bromuro, si formasse anche, com'è molto probabile, e come suppongono Küster e Thiel, del bromuro di cianogeno, questo resterebbe decomposto dall'acido cromico stesso e darebbe il bromo libero. Tanto meglio se si fa la reazione lentamente a temperatura ordinaria e scaldando dopo un certo tempo.

Per assicurarmi che veramente l'acido cromico non solamente sviluppa il bromo dal bromuro potassico, ma anche dal bromuro di cianogeno che potrebbe formarsi in presenza dei solfocianati, ho voluto vedere come si comporta il bromuro di cianogeno puro coll'acido cromico.

Il bromuro di cianogeno è molto venefico; solido a temperatura ordinaria, ma che si evapora colla massima facilità dando un gas incoloro.

Il bromuro di cianogeno adoperato CNBr era in bei cristalli incolori, di odore acuto, fusibili a 51°-52°; questi cristalli lasciati a sè in presenza dell'aria entro vasetto chiuso con tappo smerigliato non dànno affatto reazione di bromo libero. Ma, anche

(1) " Zeits. f. anorg. Chem. ", 1903, t. 35, pag. 43.

in piccolissima quantità, messi in contatto di una soluzione di acido cromico al 50 % ed anche a temperatura ordinaria si nota quasi subito una decomposizione con sviluppo di bromo, e nel tempo stesso si produce dell'ossido di cromo, dell'anidride carbonica e dell'ammoniaca. La reazione può essere espressa nel modo seguente:

$$6CNBr + 12H^2O \longrightarrow 6CO^2 + 6NH^3 + 6HBr$$
$$6HBr + 2H^2CrO^4 \longrightarrow Cr^2O^3 + 5H^2O + 3Br^2.$$

Mettendo in contatto il bromuro di cianogeno con soluzioni diversamente concentrate di acido cromico si scorge che bastano delle soluzioni anche molto diluite di acido cromico per mettere in libertà il bromo dal bromuro di cianogeno, a temperatura ordinaria. Con soluzione al 25 % si ha quasi subito intensa la reazioue del bromo, così pure con soluzione al 15 %. Con soluzione al 5 %, e sempre a temperatura ordinaria, la reazione è un poco lenta ma netta e intensa; per concentrazione del 2 % la reazione si manifesta dopo circa $^1/_2$ ora, e con soluzione all'1 % la reazione del bromo si ottiene assai lentamente, dopo circa 12 ore. Con soluzione al $^1/_2$ % la reazione è lentissima. Ma si ha reazione del bromo anche con soluzione al 0,25 %, specialmente se si scalda un poco. In questa reazione non si forma dell'ossamide, ma subito dell'acido ossalico, ossia dell'ossalato di ammonio, che rimane bruciato dall'acido cromico.

In una prossima nota esporrò il modo di riconoscere i gas o vapori bromurati, anche quando trovansi mescolati con derivati clorurati e a molta aria.

Torino, R. Università. Laboratorio di Chimica farm. e tossic.
14 Novembre 1913.

Ricerche anatomiche sui tessuti corticali del rizoma di alcune Iris.

Nota della Dr. ROSINA REGÉ.

Le ricerche, che sono oggetto di questa nota, mi sono state consigliate dal chiarissimo Prof. Oreste Mattirolo.

Esse prendono il loro punto di partenza dalla constatazione fatta nel R. Orto Botanico di Torino, della diversa struttura della porzione corticale del rizoma appartenente ad un certo numero di Iris coltivate nelle aiuole dell'Istituto stesso.

È noto come il rizoma di *Iris germanica*, *Iris florentina*, *Iris pallida*, venga messo in commercio sotto il nome di *rizoma d'Iris*, perfettamente mondato, cioè privo d'ogni traccia del tessuto corticale per mezzo di una operazione, che viene facilitata dalla struttura degli elementi proprii del tessuto corticale stesso.

La sezione trasversale della droga allo stato fresco, prima cioè che la preparazione l'abbia privata della porzione corticale, ci presenta la corteccia nella sua integrità, comprendente normalmente tre parti distinte.

Lo Tschirch (1) vi riscontra al di sotto dell'epidermide uno strato soveroso costituito da 15 a 20 strati di cellule, regolarmente disposte, parallelepipede ed a pareti che permangono sottili; ed al di sotto trova un collenchima che presenta fra gli angoli ispessiti de' suoi elementi meati intercellulari. In questo collenchima appaiono le sezioni dei fasci provenienti dalle foglie, tagliati con angoli diversi, a seconda della sezione. Al di sotto infine esiste ancora, secondo lo Tschirch, uno pseudoendoderma, poco distinto dal confinante parenchima e distinguibile solo per la mancanza d'amido e per gli ispessimenti

(1) A. Tschirch e O. Oesterle, *Anatomische Atlas der Pharmakognosie und Nahrungmittelkunde*, I. Leipzig, 1895.

suberosi appena visibili. L'esistenza di questo strato, ammessa anche da Moeller (1), è invece negata da Karsten (2) e da Gilg (3), il quale dice che il passaggio dalla porzione corticale al cilindro centrale viene segnato dall'addensarsi dei fasci al limite di quest'ultimo.

Le mie osservazioni, estese ad oltre una ventina di specie del gen. Iris, mi hanno dimostrato che l'endoderma indistinguibile in alcune specie, come nelle officinali, è perfettamente distinto ed individualizzato in altre.

Constatai inoltre che lo strato suberoso della corteccia del rizoma non risponde alla reazione del sughero nel caso delle Iris officinali, ma prende invece quella della lignina; e che vi sono Iris in cui la porzione corticale più esterna è costituita da un solo tessuto lignificato, mentre altre l'hanno costituito di due tessuti: l'uno suberificato e l'altro lignificato.

Dalle mie osservazioni ho rilevato anzitutto come la consistenza, la durezza, il colore, lo spessore, la distaccabilità della porzione corticale differissero così marcatamente da specie a specie ed assumessero un comportamento così caratteristico secondo tipi diversi, da spingere a ricercarne le cause.

Le mie ricerche mi hanno permesso di riconoscere quattro tipi principali, che descrivo considerando le specie nelle quali il tipo si presenta più caratteristico.

Per il primo tipo scelgo l'*Iris germanica Linn*, che presenta un grosso rizoma avente una superficie esterna liscia e di colore bruno-giallastro, ed una sezione interna bianca.

La vera corteccia del rizoma in sezione trasversale si presenta costituita da un unico tessuto di 14 o 15 strati di cellule, disposte con sufficiente regolarità, molto grandi, a sezione rettangolare, aventi un larghissimo lume vuoto e parete sottile, *lignificata*, colorata in giallo chiaro.

Le cellule dei primi dieci strati hanno le pareti laterali ondulate e sono più schiacciate di quelle degli strati più interni, che hanno le pareti diritte ed il lume più largo. Ciò

---

(1) Moeller Jos., *Lehrbuch der Pharmakognosie.* Wien, 1906.

(2) Karsten G., *Lehrbuch der Pharmakognosie der Pflanzenreiches.* Jena, 1903.

(3) Gilg E., *Lehrbuch der Pharmakognosie.* Berlin, 1905.

dipende, a parer mio, dal fatto che le prime sono più vecchie e maggiormente esposte agli agenti esterni.

Non ho riscontrata la presenza del tessuto fellogenico nei preparati dei rizomi provenienti da Iris in stato di riposo e di fioritura, cioè raccolti nell'inverno e nella primavera.

Ritengo però che tale tessuto debba riscontrarsi a fioritura finita, quando preparandosi la pianta ad affrontare la siccità estiva, è richiesta anche da parte del rizoma la formazione di un tessuto di protezione all'esterno. Dato il periodo in cui si svolsero le mie ricerche (Inverno-Primavera 1912) non mi è stato naturalmente possibile ottenere preparati della regione corticale in queste condizioni.

Al tessuto corticale segue un parenchima formato di cellule molto grandi, pressochè isodiametriche e poliedriche, aventi grosse pareti cellulosiche, forate da grandi punteggiature, e lume grande ripieno di granuli d'amido ovali, presentanti le linee di accrescimento molto evidenti.

Fra le cellule amilifere sono interposte cellule contenenti cristalli di ossalato di calcio in forma di prismi lunghi 200μ e larghi 25μ.

Al limite del parenchima non mi è stato possibile constatare la presenza dello pseudo-endoderma, ma al luogo di esso trovai in sezione trasversale tante sezioni trasversali di fasci con disposizione sparsa, più fitti e più avvicinati nella parte inferiore del rizoma, e uniti l'uno all'altro da una specie di guaina vascolare qua e là interrotta.

A questo proposito, le mie osservazioni collimano perfettamente con quelle del Gilg, per cui, contrariamente a quanto afferma Tschirch, ritengo che lo pseudo-endoderma abbia a mancare.

Per i caratteri corticali sono dello stesso tipo le seguenti Iris: *I. pallida Lamk*, *I. florentina Linn*, *I. Susiana Linn*, *I. ochroleuca Linn*, *I. pumila Linn*, *I. variegata Linn*, *I. aphilla Linn*, *I. virescens Red*, *I. sordida Wild*, *I. bifiora Linn*, *I. dicothoma Pallas*, che differiscono però dall'*I. germanica* per qualche carattere.

Iris pallida Lamk. — Il rizoma ha mediocri dimensioni, è esternamente liscio e colorato in giallo-chiaro, internamente è bianco. Le cellule lignificate del tessuto corticale più esterno,

pur essendo simili nella forma a quelle dell'*I. germanica*, sono meno grandi.

Il parenchima corticale è costituito di cellule tondeggianti, ricche di granuli d'amido, molto grossi e aventi linee d'accrescimento molto evidenti. I cristalli di ossalato di calcio sono più corti di quelli dell'Iris precedente.

Iris florentina Linn. — Il rizoma è grosso, liscio, colorato esternamente in giallo-bruno, in bianco all'interno.

Le cellule del tessuto corticale lignificato che sono disposte in 17 a 18 strati, sono più piccole delle analoghe delle *Iris germanica* e *florentina* e sono meno schiacciate.

Il parenchima corticale contiene cristalli di ossalato di calcio non molto grandi.

Iris Susiana Linn. — Il rizoma è grosso, esternamente liscio, di colore aranciato, internamente gialliccio e provvisto d'un odore speciale, abbastanza gradevole.

Il tessuto corticale lignificato è costituito da 14 a 15 strati di cellule di grandi dimensioni, disposte con notevole regolarità.

Il parenchima corticale è formato da cellule molto grandi, isodiametriche, poliedriche, aventi pareti cellulosiche molto sottili e lume larghissimo contenente amido.

I cristalli di ossalato di calcio, sparsi nel parenchima, hanno forma di piccoli prismi a base rombica.

Iris ochroleuca Linn. — Il rizoma è grosso, liscio, giallo-bruno esternamente, bianco internamente.

La membrana delle cellule costituenti il tessuto corticale lignificato è sottilissima.

Il parenchima corticale è formato da cellule isodiametriche, tondeggianti, con membrana cellulosica mediocremente spessa e lume ripieno di grossi granuli d'amido ovali, con stratificazione ed *ilo* molto evidenti.

Iris pumila Linn. — Il rizoma è di mediocri dimensioni, liscio, giallo bruno esternamente, bianco internamente.

Il tessuto corticale lignificato presenta numerosi strati di cellule aventi diversa dimensione, e di solito trovansi in esso alternate le cellule piccole alle più grandi.

Il parenchima corticale è formato di grandi cellule aventi parete cellulosica sottile e lume grande contenente grossi granuli d'amido.

I cristalli prismatici di ossalato di calcio sono molto corti.

Iris variegata Linn. — Il rizoma è simile a quello dell'*Iris pumila.*

Le cellule dei primi due strati del tessuto corticale lignificato hanno dimensioni maggiori delle cellule degli strati seguenti.

Il parenchima corticale è formato di cellule aventi una parete cellulosica non molto spessa ed un lume larghissimo contenente granuli d'amido molto grossi ad *ilo* e stratificazione evidente.

I cristalli di ossalato di calcio hanno forma di prismi a base rombica.

Iris aphylla Linn. — Il rizoma è giallo-bruniccio, di dimensioni mediocri, internamente bianco-gialliccio.

Il tessuto corticale lignificato è simile a quello dell'*Iris germanica.*

Il parenchima corticale è formato da cellule di mediocri dimensioni, isodiametriche con parete cellulosica sottile e lume grande, contenente granuli d'amido tondeggianti.

I cristalli di ossalato di calcio hanno forma di prismi molto grossi e molto lunghi.

Iris virescens Red. — Il rizoma è simile al precedente.

Il parenchima corticale è costituito di cellule molto grandi, con parete cellulosica spessa e lume contenente piccoli granuli d'amido rotondi.

Le cellule cristallifere presentano lunghi e grossi cristalli di ossalato di calcio.

Iris sordida Wild. — Il rizoma è grosso, liscio, di color giallo all'esterno, bianco all'interno.

Il parenchima corticale è costituito di grandi cellule isodiametriche, con pareti cellulosiche sottili e lume grande, ripieno di grani d'amido tondeggianti.

I cristalli prismatici di ossalato di calcio non sono molto lunghi.

Iris biflora Linn. — Il rizoma è simile al precedente.

Il parenchima corticale è costituito di cellule aventi pareti cellulosiche spesse e lume pieno di grossi granuli d'amido rotondi.

Iris dicothoma Pallas. — Il rizoma è grosso, liscio, giallo esternamente, bianco internamente.

Le pareti delle cellule costituenti il parenchima corticale sono sottili e il lume di esse contiene plasma e piccoli granuli d'amido rotondi.

***

Del secondo tipo ho trovato come caratteristica l'*Iris foetidissima Linn*, che presenta un rizoma di mediocri dimensioni, avente superficie esterna liscia e di color giallo mentre la sezione interna è bianca.

La corteccia del rizoma è costituita da due sorta di tessuti. Il più esterno è formato da 9 a 10 strati di cellule, disposte più o meno regolarmente, schiacciate, con parete colorata in giallo-chiaro, ispessita e *suberificata*.

Il tessuto più interno è formato da 2 a 3 strati di cellule disposte con molta regolarità, grandi, poligonali-poliedriche, a lume grande e con parete *lignificata* e non ispessita. Fra una cellula e l'altra trovansi spazi intercellulari.

Non ho riscontrato tessuto fellogenico.

Il parenchima corticale presenta cellule poliedriche, isodiametriche, aventi pareti cellulosiche spesse e lume contenente granuli d'amido.

Sparse nel parenchima si trovano cellule cristallifere.

Manca lo pseudo-endoderma.

***

Caratteristica per il terzo tipo scelgo l'*Iris sibirica Linn*, avente un rizoma piccolo, rugoso, provvisto di squame, dotato di notevole consistenza e durezza, bruno-scuro all'esterno, bianco all'interno.

In sezione trasversale la corteccia presenta due tessuti: il più esterno è formato di 4 a 5 strati di cellule schiacciate, aventi le pareti ispessite, di colore giallo, e *suberificate*.

Il tessuto più interno consta di pochi strati di cellule (3 a 5) disposte con regolarità, molto grandi, ma di varie dimensioni, poligonali-poliedriche, aventi lume grande e vuoto e membrana *lignificata*, uniformemente e mediocremente ispessita. Nelle cel-

lule più ispessite la membrana presenta piccoli canaletti che dal lume vanno alla periferia.

Non ho riscontrata la presenza del tessuto fellogenico.

Il parenchima è costituito da cellule pressochè isodiametriche, poliedriche, molto piccole in confronto a quelle del parenchima appartenente alle Iris del 1° tipo. Esse hanno pareti cellulosiche sottili e lume grande, contenente plasma ma privo di amido. In luogo di questo trovasi certamente un altro idrato di carbonio, solubile in acqua, simile o uguale all'idrato di carbonio che Wallach estrasse dal rizoma dell'*I. pseudo-acorus* e che chiamò *irisina*.

Sparse nel parenchima trovansi cellule cristallifere.

Evidentissimo è lo pseudo-endoderma, costituito d'un solo strato di cellule, non molto grandi, che hanno tutte le pareti fortemente ispessite, tranne quella dorsale rivolta alla periferia, che è sottile.

Per i caratteri corticali sono dello stesso tipo le: *Iris pseudo-acorus Linn*, *Iris tridentata Pursh*, che differiscono però in qualche carattere dall'*Iris sibirica* descritta.

Iris pseudo-acorus Linn. — Il rizoma è grosso, rugoso, provvisto di squame, bruno-scuro all'esterno, d'un bel color rosa carico all'interno.

Il tessuto corticale suberificato è costituito di cellule schiacciate a pareti fortemente ispessite, di color giallo-bruno o rosso-bruno, ed a lume piccolo.

Le cellule del tessuto corticale lignificato sono più piccole e più regolari di quelle dell'*I. sibirica*.

Le cellule del parenchima contengono plasma e cristalli d'una sostanza rossa, di cui non ho indagata la natura chimica, e che certamente colora in rosa il rizoma. In luogo dell'amido si trova nel parenchima un idrato di carbonio, levogiro, solubile nell'acqua, chiamato *irisina*.

Lo pseudo-endoderma è simile a quello dell'*I. sibirica*.

Iris tridentata Pursh. — Il rizoma è molto piccolo, rugoso, provvisto di squame, esternamente bruno, bianco internamente.

Alcune cellule del tessuto lignificato sono molto grandi.

Le cellule del parenchima contengono plasma e grandi goccie d'una sostanza oleosa, di cui ignoro la natura chimica, e sono prive d'amido.

Nel parenchima trovansi anche corti cristalli prismatici di ossalato di calcio.

Lo pseudo-endoderma è simile a quello dell'*I. sibirica*.

*
* *

Per il quarto tipo descrivo l'*Iris tuberosa Linn*, che presenta un rizoma grosso, rugoso, provvisto di squame, dotato di notevole consistenza e durezza, di color bruno-scuro all'esterno, bianco all'interno.

In sezione trasversale la corteccia del rizoma presenta due tessuti: il più esterno è formato da 6 o 7 strati, più o meno irregolari, di cellule schiacciate, irregolari, con membrana ispessita e *suberificata*, di color giallo-chiaro.

Segue un tessuto compattissimo, di consistenza quasi cornea, di 7 a 8 strati di cellule disposte con sufficiente regolarità, sclerenchimatiche, aventi pareti fortemente ispessite e *lignificate*. In esse la membrana presenta evidentissime le linee d'accrescimento, attraversate da piccoli canali che dal lume vanno alla periferia.

Il lume è ridotto ad una fessura, e talora ad un piccolo foro pressochè circolare.

Non ho riscontrato tessuto fellogenico.

Il parenchima corticale presenta cellule di notevoli dimensioni, poliedriche, isodiametriche, aventi pareti cellulosiche e lume contenente piccoli granuli d'amido rotondi e grandi goccie di una sostanza oleosa.

Nel parenchima si trovano anche cristalli di ossalato di calcio.

Manca lo pseudo-endoderma ed in luogo di esso si ha una guaina di fasci, molto simile a quella già descritta per l'*Iris germanica* appartenente al 1° tipo.

A questo tipo pei caratteri corticali del rizoma appartengono le: *Iris xiphium Linn*, *I. spuria Linn*, *I. graminea Linn*, *I. maritima Mill*, *I. guldenstaedtiana Lepech*, che hanno però qualche caratteristica loro propria.

Iris xiphium Linn. — Il rizoma è molto piccolo, bruniccio, duro, rugoso, provvisto di squame, di color bianco internamente.

La membrana delle cellule del tessuto sclerenchimatico è

meno ispessita di quella delle cellule corrispondenti dell'*Iris tuberosa*. Per conseguenza anche il lume cellulare non è mai ridotto ad una fessura nè ad un foro.

Il parenchima contiene grossi granuli d'amido e piccoli cristalli di ossalato di calcio.

Iris spuria Linn. — Il rizoma è grosso, rugoso, duro, provvisto di squame, internamente di color bianco.

Il tessuto corticale suberificato consta di 5 o 6 strati di cellule, colorate vivamente in giallo-bruno, disposte assai irregolarmente, schiacciate e di forma irregolare.

Il tessuto lignificato presenta cellule di varia dimensione, ed in generale ho osservato che le cellule più piccole, più stipate e più schiacciate formano gli strati volti verso l'esterno.

Il parenchima è costituito da piccole cellule ricche di granuli d'amido tondeggianti e non molto grossi.

Iris graminea Linn. — Il rizoma ha mediocri dimensioni, è bruno-scuro, rugoso, di considerevole durezza e consistenza, internamente di color bianco.

Il parenchima corticale consta di cellule non molto grandi, isodiametriche, poliedriche, con pareti cellulosiche non molto spesse e lume contenente amido.

Sono abbondanti le cellule cristallifere.

Iris maritima Mill. — Il rizoma ha i caratteri del precedente.

Il parenchima corticale è costituito di cellule grandi, isodiametriche, a membrana cellulosica sottile, e lume contenente poco amido, e grandi goccie di una sostanza oleosa.

Le cellule cristallifere contengono cristalli di ossalato di calcio molto grossi.

Iris guldenstaedtiana Lepech. — Il rizoma di mediocri dimensioni ha corteccia durissima e resistente.

Il tessuto corticale suberificato consta di strati di cellule disposte con regolarità aventi membrana colorata in rosso-bruno. L'ultimo strato del tessuto lignificato, che si trova al contatto del parenchima, è costituito di cellule meno ispessite e con lume più largo.

L'amido è contenuto nel parenchima sotto forma di grossi granuli tondeggianti.

*
* *

Riassumendo: gli elementi dei tessuti corticali dei rizomi delle Iris variano nella forma, nel numero, nella disposizione da specie a specie, ma essenzialmente nelle specie descritte secondo 4 tipi, che sono riuscita a mettere costantemente in evidenza.

La perfetta e costante riconoscibilità di questi caratteri, il loro variare a seconda delle specie, sebbene fossero coltivate nelle identiche condizioni, mi hanno persuasa che, quantunque la corteccia risponda, secondo ogni probabilità, alla necessità di difesa dell'organo di fronte all'ambiente, e possa quindi presumersi soggetta ad un certo grado di variabilità, essa è tuttavia tale da conservare in ogni caso il suo tipo caratteristico.

Lo studio che ne ho fatto e quello che si potrebbe fare in seguito, potrebbe tendere appunto ad accertare, per il più grande numero possibile di specie, il valore sistematico di questo carattere e a mettere in evidenza l'eventuale esistenza di nuovi tipi.

Dato lo stato d'incompletezza attuale delle ricerche, ho conservato nel corso del lavoro la distribuzione adottata dal Baker (1) nella monografia del genere.

È innegabile tuttavia che la sistemazione attuale del genere Iris è lontana dal potersi considerare come soddisfacente.

Le ricerche, che la presente nota intende di avere semplicemente iniziate, potrebbero ritenersi giustificate se l'adozione di questo carattere venisse riconosciuta come un utile contributo ad una migliore sistemazione del genere.

---

(1) Mr. G. J. Báker's, *Systema Iridacearum*. London, 1878 (" The Journal of the Linneal Society ", vol. XVI).

Sopra le deformazioni per distorsione dei solidi elastici, isotropi di rivoluzione.

Nota di ERNESTO LAURA

Sono ben noti i risultati acquisiti alla Teoria della Elasticità con il metodo introdotto dal De St.-Venant per lo studio delle deformazioni dei cilindri, e le molte applicazioni che di questi studî furono fatte alla Resistenza dei Materiali. Questo metodo consiste, in ultima analisi, nell'annullare parte delle componenti di tensione e nel determinare le rimanenti in modo da soddisfare alle condizioni di equilibrio e di compatibilità. Più recentemente le deformazioni dei cilindri furono studiate [1] supponendo le tensioni attraverso ogni sezione, parallela alle basi, funzioni lineari (o più generalmente polinomiali) della quota della sezione stessa.

Analoghe ricerche per solidi di altra forma, per quanto io sappia, ancora non furono intraprese metodicamente [2], benchè, forse, esse potrebbero essere di giovamento anche dal punto di vista delle applicazioni. Si è perciò che ho pensato di studiare le deformazioni di solidi limitati da una porzione di superficie di rotazione Σ e da due sezioni meridiane σ_1, σ_2, ricercando per essi quelle distribuzioni di tensioni interne che dànno ten-

(1) Cfr. W. Voigt (" Göttingen Abhandlungen ", Bd. 34, 1887). Cfr. pure C. Somigliana, *Ricerche sulla deformazione e i fenomeni piezoelettrici in un cilindro cristallino* (" Annali di Mat. pura e applicata ", Serie II, Tomo XX, 1892), e per la Bibiografia dell'argomento: A. E. H. Love, *The mathematical Theory of Elasticity*, 1906, Cap. XVI.

(2) Se si toglie la Memoria del Prof. E. Padova citata in questa Nota a pag. 12. Il metodo (approssimato) pelle applicazioni usato per le deformazioni dei solidi ad asse curvilineo si può vedere esposto in E. Almansi, *Introduzione alla scienza delle costruzioni*, Cap. IX (Torino, 1901).

sioni nulle sopra Σ e dipendono dalla longitudine θ della sezione attraverso cui sono calcolate a mezzo di una funzione lineare di sen θ, cos θ.

Il risultato di questa ricerca, che sembrami interessante, è allora il seguente: *le deformazioni qui considerate* (supponendo che le facce σ_1, σ_2 sieno coincidenti, cioè il dato solido abbia forma anulare) *coincidono con quelle per distorsione di cui il Volterra* [1] *recentemente si occupò in modo affatto generale.* Ne consegue subito (cfr. il n° 2): *La determinazione delle deformazioni per distorsione dei solidi di rivoluzione dipende dalla integrazione di sistemi differenziali in due variabili indipendenti*, di cui ho assegnato la forma generale. Si ottiene così un metodo semplice e diretto per la determinazione di questa classe di deformazioni.

Se poi si osserva che, operando una distorsione, si generano particolari sforzi nei punti del taglio, si riconosce facilmente, ammettendo valido per i solidi qui considerati il Principio di De St.-Vénant (cfr. n° 3), che il procedimento prima esposto può usarsi con vantaggio per la determinazione delle deformazioni di un solido S limitato da una superficie di rotazione Σ e da due sezioni meridiane σ_1, σ_2 quando la Σ è libera da tensioni e le sezioni σ_1, σ_2 sono sollecitate da forze che si riducono prendendo, come centro di riduzione, un punto dell'asse di rotazione, o ad una forza ed un momento a quest'asse perpendicolari, o ad una unica forza diretta lungo l'asse, o ad una coppia a quest'asse perpendicolare.

Lo studio dei casi semplici di elasticità dei solidi qui considerati dipende perciò (cfr. n° 3) dalla integrazione dei sistemi (I), (III), (IV) con le condizioni al contorno (I^{bis}), IIIbis), IVbis). È allora evidente l'analogia di questo risultato con quelli classici del De St.-Venant.

1. — Mi propongo dapprima di determinare la forma più generale delle componenti di spostamento che dànno tensioni che dipendono dalla longitudine θ della sezione meridiana at-

---

[1] Cfr. la Memoria riassuntiva delle diverse note pubblicate da quest'A. sull'argomento: V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.* " Annales de l'École Normale ", XXIV, 1907.

traverso cui sono calcolate a mezzo di espressioni lineari di sen θ, cos θ. Mi riferisco perciò ad un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z ed osservo che ad analoga proprietà soddisfanno le componenti di deformazione. Usando di notazioni solite si ha ora:

$$(1) \qquad e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \quad e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad e_{z\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

dove le u_r, u_z, u_θ indicano le componenti di spostamento nelle direzioni r, z, θ; le e_{rr}, e_{zz}, $e_{\theta\theta}$ le tre dilatazioni nelle direzioni stesse e le e_{rz}, $e_{z\theta}$, $e_{z\theta}$ gli scorrimenti. Si verifica ora agevolmente che le espressioni più generali degli spostamenti che dànno dilatazioni (nelle direzioni r, z, θ), funzioni lineari di sen θ, cos θ, sono le seguenti:

$$(2) \qquad \begin{cases} u_r = A_1 \operatorname{sen}\theta + B_1 \cos\theta + C_1 + \dfrac{\partial f(z,\theta)}{\partial \theta} \\ u_z = A_2 \operatorname{sen}\theta + B_2 \cos\theta + C_2 + \varphi(r,\theta) \\ u_\theta = A_3 \operatorname{sen}\theta + B_3 \cos\theta + C_3 - f(z,\theta) + D_3\theta \end{cases}$$

nelle quali le lettere maiuscole indicano funzioni, per ora arbitrarie, di r e z; e f e φ, funzioni pure arbitrarie degli argomenti in essi messi in evidenza. Imponiamo che pure gli scorrimenti sieno funzioni lineari di sen θ, cos θ. Si ha per le (1) e (2):

$$e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial A_2}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial B_2}{\partial r}\right)\cos\theta +$$
$$+ \frac{\partial C_1}{\partial z} + \frac{\partial C_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 f(z,\theta)}{\partial z\,\partial \theta} + \frac{\partial \varphi(r,\theta)}{\partial r}.$$

Per l'ipotesi posta dovrà dunque essere;

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 f(z,\theta)}{\partial z\,\partial \theta} + \frac{\partial \varphi(r,\theta)}{\partial r} = A' \operatorname{sen}\theta + B' \cos\theta + C',$$

le A', B', C' indicando funzioni di r, z. Si derivi la (3) prima rispetto a r e quindi rispetto a z. Si deduce:

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial r\,\partial z} = \frac{\partial^2 B'}{\partial r\,\partial z} = \frac{\partial^2 C'}{\partial r\,\partial z} = 0.$$

Potremo quindi porre:

$$A' = \frac{d\alpha_1(r)}{dr} + \frac{d\alpha_2(z)}{dz}, \ldots$$

le α_1, $\alpha_2, \ldots$ essendo funzioni arbitrarie dei loro argomenti. La (3) per queste posizioni si scinde nelle due equazioni:

$$\frac{\partial\varphi(r_1\theta)}{\partial r} = \frac{d\alpha_1(r)}{dr}\operatorname{sen}\theta + \frac{d\beta_1(r)}{dr}\cos\theta + \frac{d\gamma_1(r)}{dr} + \frac{dF(\theta)}{d\theta}$$

$$\frac{\partial^2 f(z_1\theta)}{\partial z\,\partial\theta} = \frac{d\alpha_2(z)}{dz}\operatorname{sen}\theta + \frac{d\beta_2(z)}{dz}\cos\theta + \frac{d\gamma_2(z)}{dz} - \frac{dF(\theta)}{d\theta}$$

la F essendo una funzione arbitraria di θ.

Da queste integrando si ha:

$$\varphi(r,\theta) = \alpha_1(r)\operatorname{sen}\theta + \beta_1(r)\cos\theta + \gamma_1(r) + r\,\frac{dF(\theta)}{d\theta} + \Phi_1(\theta)$$

$$f(z,\theta) = -\,\alpha_2(z)\cos\theta + \beta_2(z)\operatorname{sen}\theta + \theta\gamma_2(z) - zF(\theta) + \\ + \Phi_2(\theta) + f(z)$$

le funzioni introdotte essendo arbitrarie.

Sostituisco le espressioni così trovate per la φ e la f nelle (2) ed inglobo nelle A_1, B_1, ... le α_1, β_1, ...; otterremo:

$$(4)\quad \begin{cases} u_r = A_1\operatorname{sen}\theta + B_1\cos\theta + C_1 - z\,\dfrac{dF(\theta)}{d\theta} + \dfrac{d\Phi_2(\theta)}{d\theta} \\ u_z = A_2\operatorname{sen}\theta + B_2\cos\theta + C_2 + r\,\dfrac{dF(\theta)}{d\theta} + \Phi_1(\theta) \\ u_\theta = A_3\operatorname{sen}\theta + B_3\cos\theta + C_3 + zF(\theta) - \Phi_2(\theta) + D_3\theta. \end{cases}$$

Affinchè la $e_{z\theta}$ sia lineare in $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ dovrà dunque aversi:

$$(5)\quad \frac{d^2F(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi_1(\theta)}{d\theta} + F(\theta) + \theta\,\frac{\partial D_3}{\partial z} = A''\operatorname{sen}\theta + B''\cos\theta + C''$$

le A'', B'', C'' essendo funzioni di r, z.

Derivando i due membri della (5) rispetto a z si conclude:

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 D_3}{\partial z^2} = \frac{\partial A''}{\partial z} = \frac{\partial B''}{\partial z} = \frac{\partial C''}{\partial z} = 0.$$

Derivando invece rispetto ad r si deduce:

$$(7)\quad \frac{\partial^2 D_3}{\partial r \partial z} = 0\,; \qquad \frac{dA''}{dr} = \frac{\alpha}{r^2}\,; \qquad \frac{dB''}{dr} = \frac{\beta}{r^2}\,; \qquad \frac{dC''}{dr} = \frac{-W_0}{r^2}\,.$$

Dalle (6) e (7) consegue infine:

$$A'' = -\frac{\alpha}{r} - 2P \qquad B'' = -\frac{\beta}{r} + 2Q \qquad C'' = \frac{w_0}{r} + \gamma_1$$
$$D_3 = \delta z + \psi(r)$$

le α, β, P, Q, δ, w_0 essendo costanti.

La (5) si scinde allora nelle equazioni:

$$\frac{d^2F}{d\theta^2} + F + \delta\theta + 2P \operatorname{sen}\theta + 2Q\cos\theta - \gamma_1 = 0$$
$$\frac{d\Phi_1}{d\theta} + \alpha \operatorname{sen}\theta + \beta\cos\theta - w_0 = 0\,.$$

Dalle quali integrando, ed indicando con α_2, β_2, γ_2 costanti arbitrarie:

$$F = -P\theta\cos\theta - Q\theta \operatorname{sen}\theta + \gamma_1 - \delta\theta + \alpha_2\cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta$$
$$\Phi_1 = \alpha\cos\theta - \beta \operatorname{sen}\theta + w_0\theta + \gamma_2\,.$$

Le (4) divengono allora, inglobando delle costanti nelle A_1, B_1, ... C_3:

$$(8)\quad \begin{cases} u_r = A_1 \operatorname{sen}\theta + B_1\cos\theta + C_1 - z\,(P\theta \operatorname{sen}\theta - Q\theta\cos\theta) + \dfrac{d\Phi_2(\theta)}{d\theta} \\ u_z = A_2 \operatorname{sen}\theta + B_2\cos\theta + C_2 + r\,(P\theta \operatorname{sen}\theta - Q\theta\cos\theta) + w_0\theta \\ u_\theta = A_3 \operatorname{sen}\theta + B_3\cos\theta + C_3 + z\,(-P\theta\cos\theta - Q\theta \operatorname{sen}\theta) - \\ \qquad\qquad - \Phi_2(\theta) + \theta\Psi(r). \end{cases}$$

Imponiamo infine alle funzioni che compaiono nelle (8) di rendere la $e_{r\theta}$ lineare in $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$. Ricordando le (1) si conclude che dovrà essere:

$$(9)\quad \theta\frac{d\Psi(r)}{dr} + \frac{1}{r}\Phi_2(\theta) - \frac{\theta}{r}\Psi(r) + \frac{1}{r}\frac{d^2\Phi_2(\theta)}{d\theta^2} = A''' \operatorname{sen}\theta + B'''\cos\theta + C'''$$

le A''', B''', C''' essendo funzioni della sola r.

Si derivi la (9) rispetto a θ avremo:

$$\frac{d\Psi(r)}{dr} - \frac{\Psi(r)}{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d\Phi_2}{d\theta} + \frac{d^3\Phi_2}{d\theta^3}\right] = A''' \cos\theta - B''' \operatorname{sen}\theta .$$

Moltiplicando i due membri di questa equazione per z e derivando quindi rispetto ad r si deduce:

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\Psi(r)}{dr} - \Psi(r)\right] = \frac{d_0 r A'''}{dr} = \frac{d_0 r B'''}{dr} = 0 .$$

Dalle quali:

$$A''' = -2\frac{v_0}{r}, \qquad B''' = 2\frac{u_0}{r}, \qquad \Psi(r) = \delta_1 + Rr$$

dove le u_0, v_0, δ_1, R sono costanti. La (9) si scinde inoltre nelle due equazioni (δ essendo una nuova costante):

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\theta^2} + \Phi_2 - \delta_1\theta = -2v_0 \operatorname{sen}\theta + 2u_0 \cos\theta + \delta$$

$$C''' = \frac{\delta}{r}$$

dalle quali integrando si ha:

$$\Phi_2(\theta) = -v_0\theta\cos\theta + u_0\theta \operatorname{sen}\theta + \delta_1\theta + \delta .$$

In definitiva le (8) acquistano la forma (inglobando come al solito delle costanti arbitrarie nelle A_1, B_1, ...):

$$(10)\begin{cases} u_r = A_1 \operatorname{sen}\theta + B_1\cos\theta + C_1 - z(P\theta\operatorname{sen}\theta - Q\theta\cos\theta) + \\ \qquad\qquad + v_0\theta\operatorname{sen}\theta + u_0\theta\operatorname{eos}\theta \\ u_z = A_2\operatorname{sen}\theta + B_2\cos\theta + C_2 + r(P\theta\operatorname{sen}\theta - Q\theta\cos\theta) + w_0\theta \\ u_\theta = A_3\operatorname{sen}\theta + B_3\cos\theta + C_3 + z(-P\theta\cos\theta - Q\theta\operatorname{sen}\theta) + \\ \qquad\qquad + v_0\theta\cos\theta - u_0\theta\operatorname{sen}\theta + Rr\theta . \end{cases}$$

Sono queste le espressioni più generali *delle componenti di spostamento in coordinate cilindriche che dànno tensioni attraverso la sezione meridiana di longitudine* θ *dipendenti da* θ *a mezzo di funzioni lineari di sen* θ, *cos* θ.

Riferiamoci a coordinate cartesiane ortogonali x, y, z di cui l'asse x giaccia nel piano $\theta = 0$. Si ha allora, dette come solitamente u, v, w le componenti di spostamento secondo questi assi:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u_r \cos\theta - u_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \\ v = u_r\,\mathrm{sen}\,\theta + u_\theta \cos\theta \\ w = u_z\,. \end{cases}$$

Dalle (10) discende allora:

$$(11) \qquad \begin{cases} u = \varphi(x, y, z) + (u_0 + Qz - Ry)\,\mathrm{arctang}\,\frac{y}{x} \\ v = \psi(x, y, z) + (v_0 + Rx - Pz)\,\mathrm{arctang}\,\frac{y}{x} \\ w = \chi(x, y, z) + (w_0 + Py - Qx)\,\mathrm{arctang}\,\frac{y}{x} \end{cases}$$

nelle quali le φ, ψ, χ sono funzioni uniformi delle x, y, z. Il solido di cui le (11) indicano la deformazione sia di rotazione ed esterno all'asse z allora i tagli in esso fatti secondo i primi meridiani sono, secondo una dicitura del Volterra (Memoria citata, pag. 419) equivalenti e le (11) dànno le componenti di una deformazione di cui le caratteristiche della distorsione sono le quantità u_0, v_0, w_0, P, Q, R.

2. — Consideriamo ancora le componenti di spostamento in coordinate cilindriche date dalle (10). Il solido S, di cui le (10) dànno la deformazione, sia limitato da una superficie Σ di rotazione di asse z e da due piani meridiani σ_1, σ_2. Sia s la linea meridiana (che supponiamo chiusa) e il solido S non abbia punti in comune con l'asse z.

Il solido S sia inoltre isotropo e non sollecitato da forze di massa.

Le equazioni indefinite dell'equilibrio, a cui devono soddisfare le u_r, u_z, u_θ e che devono essere verificate in ogni punto di S, si decompongono allora in equazioni differenziali nelle due variabili indipendenti r, z tra le funzioni incognite A_1, B_1, ... e che devono essere verificate in ogni punto di σ.

Indichiamo con $\hat{\omega}_r$, $\hat{\omega}_\theta$, $\hat{\omega}_z$ le componenti della rotazione nelle direzioni r, θ, z e con Θ la dilatazione cubica. Si ha allora [1]:

$$\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2\hat{\omega}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$2\hat{\omega}_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$2\hat{\omega}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}.$$

Con facile calcolo si ha ora:

$$(12)\left\{\begin{aligned}
\Theta &= \Theta_1 \operatorname{sen}\theta + \Theta_2 \cos\theta + \Theta_3 = \operatorname{sen}\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.rA_1 - \frac{B_3}{r} + \right.\\
&\left. + \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{Qz + u_0}{r}\right] + \cos\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.rB_1 + \frac{A_3}{r} + \right.\\
&\left. + \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{Pz - v_0}{r}\right] + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.rC_1 + \frac{\partial C_2}{\partial z} + R\right]\\
2\hat{\omega}_r &= \left(\frac{A_2}{r} - \frac{\partial B_3}{\partial z} + 2P\theta - Q\right)\cos\theta + \left(-\frac{\partial A_3}{\partial z} + 2Q\theta - \right.\\
&\left. - \frac{B_2}{r} + P\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\partial C_3}{\partial z} + \frac{w_0}{r}\\
2\hat{\omega}_\theta &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial r} - 2P\theta\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_2}{\partial r} + 2Q\theta\right)\cos\theta + \\
&+ \frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{\partial C_2}{\partial r}\\
2\hat{\omega}_z &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}.rA_3 + B_1 + Pz - v_0\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}.rB_3 - \right.\\
&\left. - A_1 - Qz - u_0\right)\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.rC_3 + 2R\theta.
\end{aligned}\right.$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio in coordinate cilindriche sono d'altra parte:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial r} - 2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{\omega}_z}{\partial \theta} + 2\mu\frac{\partial \hat{\omega}_\theta}{\partial z} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - 2\mu\frac{\partial \hat{\omega}_z}{\partial r} + 2\mu\frac{\partial \hat{\omega}_r}{\partial z} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} - 2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial . r\hat{\omega}_\theta}{\partial r} + 2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{\omega}_r}{\partial \theta} = 0.$$

---

[1] Love, *The mathematical Theory of Elasticity*, 2e édition, pag. 56.

Ponendo in queste equazioni per le Θ, $\hat{\omega}_r$, $\hat{\omega}_z$, $\hat{\omega}_\theta$ le espressioni date dalle (12) e separando in esse i coefficienti di $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ si ottengono le nove equazioni seguenti:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases}
\Delta A_1 - \frac{2}{r^2}(A_1 - B_3) + K\frac{\partial \Theta_1}{\partial r} = 0 \\
\Delta B_3 - \frac{2}{r^2}(B_3 - A_1) + K\frac{\Theta_1}{r} = 0 \\
\Delta A_2 - \frac{A_2}{r^2} \qquad\qquad + K\frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = 2\frac{Q}{r}
\end{cases}
$$

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases}
\Delta A_3 - \frac{2}{r^2}(A_3 + B_1) - K\frac{\Theta_2}{r} = 0 \\
\Delta B_1 - \frac{2}{r^2}(B_1 + A_3) + K\frac{\partial \Theta_2}{\partial r} = 0 \\
\Delta B_1 - \frac{B_2}{r^2} \qquad\qquad + K\frac{\partial \Theta_2}{\partial z} = -2\frac{P}{r}
\end{cases}
$$

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases}
\Delta C_1 - \frac{C_1}{r^2} + K\frac{\partial \Theta_3}{\partial r} = 2\frac{R}{r} \\
\Delta C_2 + K\frac{\partial \Theta_3}{\partial z} = 0
\end{cases}
$$

$$
\text{(IV)} \quad \Big\{ \; \Delta C_3 - \frac{C_3}{r^2} = 0
$$

nelle quali si è posto:

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
$$

$$
K = \frac{\lambda + \mu}{\mu}.
$$

Queste equazioni si ripartiscono in quattro sistemi a cui separatamente soddisfanno le (A_1, A_2, B_3), (A_3, B_1, B_2), (C_1, C_2), C_3. I due primi sistemi non sono però effettivamente distinti perchè l'uno si trasforma nell'altro ponendo (A_1, A_2, B_3, Q, u_0) in luogo di $(B_1, B_2, -A_3, -P, -v_0)$.

Per determinare le condizioni che devono essere verificate

in superficie determiniamo le sei componenti di tensione. Si ha facilmente:

$$
(13)\quad \begin{cases}
R_r = \left(\lambda\Theta_1 + 2\mu\frac{\partial A_1}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\lambda\Theta_2 + 2\mu\frac{\partial B_1}{\partial r}\right)\cos\theta + \lambda\Theta_3 + \\
\qquad + 2\mu\frac{\partial C}{\partial r} \\
\Theta_\theta = \left(\lambda\Theta_1 + 2\mu\frac{A_1 - B_3 + Qz - v_0}{r}\right)\operatorname{sen}\theta + \\
\qquad + \left(\lambda\Theta_2 + 2\mu\frac{A_3 + B_1 - Pz + v_0}{r}\right)\cos\theta + \lambda\Theta_3 + 2\mu\left(\frac{C_1}{r} + R\right) \\
Z_z = \left(\lambda\Theta_1 + 2\mu\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\lambda\Theta_2 + 2\mu\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)\cos\theta + \lambda\Theta_3 + \\
\qquad + 2\mu\frac{\partial C_2}{\partial z} \\
R_\theta = \mu\left(\frac{\partial A_3}{\partial r} + \frac{-A_3 - Pz + v_0}{r} - \frac{B}{r}\right)\operatorname{sen}\theta + \\
\qquad + \mu\left(\frac{\partial B_3}{\partial r} + \frac{-B_3 + Qz + u_0}{r} + \frac{A_1}{r}\right)\cos\theta + \mu\left(\frac{\partial C_3}{\partial r} - \frac{C_3}{r}\right) \\
R_z = \mu\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial A_2}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\theta + \mu\left(\frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial B_2}{\partial r}\right)\cos\theta + \\
\qquad + \mu\left(\frac{\partial C_1}{\partial z} + \frac{\partial C_2}{\partial r}\right) \\
Z_\theta = \mu\left(\frac{\partial A_3}{\partial z} - \frac{B_2}{r} + P\right)\operatorname{sen}\theta + \mu\left(\frac{\partial B_3}{\partial z} + \frac{A_2}{r} - Q\right)\cos\theta + \\
\qquad + \frac{\partial C_2}{\partial z} + \frac{w_0}{r}.
\end{cases}
$$

Supponiamo la superficie Σ libera da tensioni, e sia ν la sua normale interna (essa giace in σ ed è pure normale ad s). Le condizioni superficiali saranno:

$$
(14)\quad \begin{cases}
R_r \cos r\nu + R_z \cos z\nu = 0 \\
\Theta_r \cos r\nu + \Theta_z \cos z\nu = 0 \\
Z_r \cos r\nu + Z_z \cos z\nu = 0 .
\end{cases}
$$

Esse per le espressioni delle R_r, ... date dalle (13) si spez-

zano nelle nove seguenti equazioni (ottenute eguagliando a zero i coefficienti di sen θ, cos θ nei primi membri delle (14):

$$
(\mathrm{I}^{bis})\quad \begin{cases}
\left(\lambda\Theta_1 + 2\mu\dfrac{\partial A_1}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \mu\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial z} + \dfrac{\partial A_2}{\partial r}\right)\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \\[2ex]
\mu\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial z} + \dfrac{\partial A_2}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \left(\lambda\Theta_1 + 2\mu\dfrac{\partial A_2}{\partial z}\right)\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \\[2ex]
\mu\left(\dfrac{\partial B_3}{\partial r} - \dfrac{B_3 + Qz + u_0}{r} + \dfrac{A_1}{r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \mu\left(\dfrac{\partial B_3}{\partial z} + \dfrac{A_2}{r}\right)\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{II}^{bis})\quad \begin{cases}
\left(\lambda\Theta_2 + 2\mu\dfrac{\partial B_1}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \mu\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial z} + \dfrac{\partial B_2}{\partial r}\right)\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \\[2ex]
\mu\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial z} + \dfrac{\partial B_2}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \left(\lambda\Theta_2 + 2\mu\dfrac{\partial B_2}{\partial z}\right)\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial A_3}{\partial r} + \dfrac{-A_3 + Pz + v_0}{r} - \dfrac{B_1}{r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \mu\left(\dfrac{\partial B_3}{\partial z} + \dfrac{A_2}{r}\right)\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{III}^{bis})\quad \begin{cases}
\left(\lambda\Theta_3 + 2\mu\dfrac{\partial C_2}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \mu\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial z} + \dfrac{\partial C_2}{\partial r}\right) = 0 \\[2ex]
\mu\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial z} + \dfrac{\partial C_2}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial \nu} + \left(\lambda\Theta_3 + 2\mu\dfrac{\partial C_2}{\partial z}\right)\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{IV}^{bis})\quad \mu\left(\frac{\partial C_3}{\partial r} - \frac{C_3}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial \nu} + \mu\left(\frac{\partial C_3}{\partial z} + \frac{w_0}{r}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) = 0\,.
$$

Queste equazioni come già quelle indefinite dell'equilibrio si scindono in quattro sistemi contenenti rispettivamente i gruppi di funzioni incognite (A_1, A_2, B_3), (A_3, B_1, B_2), (C_1, C_2), C_3. Le equazioni (IIbis) si riducono alle (I^{bis}) ponendo (A_1, A_2, B_3, Q) in luogo di $(B_1, B_2, -A_3, -P)$.

I risultati della presente Nota si possono infine così riassumere (usando della nomenclatura di Volterra, Memoria citata):

1° *Le componenti di spostamento di un solido di rivoluzione esterno al suo asse nel quale è operata* (lungo la sezione meridiana $\theta = 0$) *una distorsione di ordine 1 ed una di ordine 5 si possono rappresentare con le formole:*

$$
\begin{aligned}
u_r &= A_1 \operatorname{sen}\theta + (Qz\theta + u_0\theta)\cos\theta \\
u_z &= A_2 \operatorname{sen}\theta - Qr\theta\cos\theta \\
u_\theta &= B_3 \cos\theta - (Qz\theta + u_0\theta)\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}
$$

Le A_1, A_2, B_3 *sono funzioni di* r, z, *e qualora il solido considerato sia omogeneo, isotropo e non sollecitato nè da forze di massa, nè da tensioni superficiali, soddisfanno il sistema* (I) *nei punti di* 6 *(sezione meridiana) e le equazioni* (I^{bis}) *nei punti di* s *(linea meridiana).*

2° *Le componenti di spostamento in un solido di rivoluzione nel quale lungo la sezione* $\theta = 0$ *è eseguita una distorsione di ordine* σ *sono rappresentati con le formole:*

$$u_r = C_1$$
$$u_z = C_2$$
$$u_\theta = Rr\theta .$$

Le C_1, C_2 *sono funzioni di* r, z *le quali nelle ipotesi del problema precedente soddisfanno in* σ *le equazioni* (III) *e sulla linea meridiana* s *le equazioni* (IIIbis).

3° *Eseguendo infine lungo la sezione* $\theta = 0$ *di un solido di rivoluzione una distorsione di ordine 3 le componenti di spostamento si possono rappresentare con le formole:*

$$u_r = 0$$
$$u_z = w_0 \theta$$
$$u_\theta = C_3$$

La C_3 *dipende solo dalle* r, z *e nelle ipotesi precedenti soddisfa in* σ *l'equazione* (IV) *e sopra* s *l'equazione* (IVbis) [1].

3. — I problemi così postulati sono a soluzione unica.

Di essi si può dare un'altra interpretazione meccanica determinando le tensioni interne sollecitanti ogni sezione.

Consideriamo perciò un solido S limitato lateralmente da una superficie di rotazione Σ e da due sezioni meridiane; il

---

[1] Le deformazioni dei solidi di rivoluzione così definite già furono incontrate dal Prof. E. Padova, *Sull'uso delle coordinate curvilinee in alcuni problemi della Teoria matematica della elasticità.* Studi offerti dall'Università Padovana alla Bolognese nell'VIII centenario.

solido S sia inoltre esterno all'asse di Σ. Ammettiamo che per questi solidi valga il principio enunciato in modo definitivo dal De St.-Venant [1] e conosciuto come il principio di equivalenza elastica dei sistemi di carichi staticamente equivalenti. Secondo questo principio le deformazioni che sono prodotte in un corpo per l'applicazione ad una piccola parte della sua superficie di un sistema di forze di somma geometrica e momento nullo sono di grandezza nulla a distanze ritenute grandi a confronto delle dimensioni lineari della parte considerata. Il solido S sia ora tale che la sua lunghezza longitudinale sia grande rispetto alle dimensioni trasversali della sezione meridiana σ: allora lo stato di deformazione, escluso al più regioni prossime alle sezioni terminali σ_1, σ_2, dipenderà solo dalla forza e dalla coppia che costituiscono un sistema staticamente equivalente al sistema delle tensioni sollecitanti σ_1 e non dalla distribuzione delle tensioni stesse.

Applicando allora un teorema di Volterra (Memoria citata, pag. 442) si vede subito che i problemi 1°, 2°, 3° equivalgono alla determinazione della deformazione dei solidi S ora considerati la cui superficie Σ non è sollecitata da forze, supponendo che le forze sollecitanti le sezioni terminali σ_1, σ_2 si riducono rispettivamente o ad una coppia per l'asse z e ad una forza appoggiata e perpendicolare all'asse z stesso, oppure ad una coppia giacente in un piano perpendicolare a z, oppure ad una forza diretta lungo l'asse z.

Sotto questo aspetto, i sistemi (I), (III), (IV) con le condizioni al contorno relative (I^{bis}), (IIIbis), (IVbis), sono propri di casi particolari di deformazione dei solidi S, i quali possono considerarsi come i corrispondenti di quei casi semplici di deformazione dei cilindri che vengono studiati nei trattati di Resistenza dei Materiali [2].

[1] Cfr. ad es.: Love, *The mathematical Theory of Elasticity*, 2ª edizione, pag. 129.

[2] Cfr. ad es.: C. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle costruzioni*. Torino, 1909. Parte II: *Teoria della elasticità e resistenza dei materiali*.

ENRICO POINCARÉ

Commemorazione di C. SOMIGLIANA.

Pochi uomini di scienza hanno avuto ai giorni nostri così universale rimpianto e incontrastato riconoscimento di valore eccezionale, quanto ne ebbe, alla sua morte, Enrico Poincaré. È poco più di un anno da che egli è scomparso, appena cinquantottenne, e le pubblicazioni intorno a lui continuano numerose, rivelando sempre nuovi aspetti della sua poderosa opera scientifica.

Il fatto è tanto più notevole trattandosi di un cultore delle matematiche, scienze le più lontane dal comune pensiero, apprezzate e comprese solo fra un numero limitato di studiosi. Esse non toccano problemi appassionanti della vita sociale, sono compatibili con tutte le credenze, non destano ire od amori eccessivi; solo richiedono un culto speciale, che assorbe quasi sempre tutte le energie intellettive di chi le coltiva.

Ma la produzione scientifica del Poincaré, pur restando essenzialmente matematica, ebbe tali caratteri di estensione e generalità, in così perfetta consonanza colle tendenze evolutive scientifiche della nostra epoca, che si spiega perfettamente l'interesse grandissimo che essa ha destato in tutto il mondo intellettuale. La matematica nell'epoca moderna è andata perdendo il suo carattere iniziale di scienza esclusiva del numero e della forma geometrica. Essa penetra sempre più in tutti i campi dello scibile e della vita, essa è divenuta il linguaggio comune delle scienze naturali prese nel loro significato più largo. Tutto il nostro sapere è imbevuto di spirito matematico. E anche le matematiche vanno perdendo in questa loro trasformazione quei caratteri di rigidità formale, che parvero un tempo costituire la loro essenza e formarono l'ammirazione degli antichi.

La produzione scientifica del Poincaré rappresenta in modo mirabile questa evoluzione moderna della nostra scienza. Essa ha penetrato quasi tutti i problemi naturali a cui le matematiche furono applicate e quindi un campo enormemente esteso dell'umano sapere. Ed inoltre quando si è rivolta alla speculazione analitica pura ha raggiunto altezze meravigliose di concezione e di invenzione che fanno pensare ai giganti del pensiero matematico, quali Abel o Gauss.

Egli ha fatto anche un'opera che si può dire eccezionale fra i cultori delle scienze esatte. Si disse che fu anche filosofo. Forse l'espressione non è esatta, in quanto egli non ha mai costruito nessun sistema di spiegazione generale dei fatti naturali, neppure basato sui risultati scientifici positivi. Ma ci ha dato, nelle così dette opere filosofiche, le impressioni sue intorno alle teorie che andava costruendo, o che i contemporanei costruivano, impressioni circa il loro valore intellettuale e pratico, circa l'utilità dei metodi usati, circa le direzioni più probabili che prenderà nel suo evolversi il pensiero scientifico. Sopratutto poi ha sottoposto ad una critica acuta, sebbene talvolta un po' paradossale, i fondamenti della scienza.

Egli ci ha così svelato, in certo modo, la sua coscienza di matematico. La sua figura di scienziato si presenta così formidabilmente completa, nella sua forte ossatura, in ogni sua parte.

Delineare queste singole parti, raccogliere con qualche precisione i risultati ai quali egli è arrivato, dire quale sia stata l'origine e lo svolgimento delle grandiose teorie che egli ha dato alla scienza, è opera estremamente ardua e che non potrà essere compiuta che col passare del tempo e collo svolgersi successivo di molte idee da lui enunciate.

Tanto meno posso pretendere di arrivarvi io in questa Commemorazione — involontariamente tardiva — che null'altro vuol essere che l'omaggio doveroso della nostra Accademia ad uno dei suoi Membri più illustri e gloriosi.

***

I progressi dell'analisi matematica sono in gran parte legati ai progressi del concetto di funzione. Dalle prime relazioni ele-

mentari fra due quantità variabili in dipendenza l'una dall'altra, alle quali portavano le equazioni lineari e quadratiche, o le semplici funzioni geometriche dell'arco di cerchio, il concetto di funzione, specialmente colla introduzione delle variabili immaginarie, è andato sempre più acquistando in generalità e complessità e quindi diventando mezzo sempre più potente alla risoluzione dei problemi analitici.

Le difficoltà dell'integrazione dei differenziali algebrici hanno portato Abel e Jacobi, nella prima metà del secolo scorso, a scoprire un campo nuovo, immensamente vasto, di funzioni il cui studio ha arricchito la scienza di una delle più varie e complesse teorie che siano state pensate. La straordinaria molteplicità di rapporti e le leggi così complesse di dipendenza fra le variabili che si incontrano nella teoria delle funzioni ellittiche ed abeliane avevano dato materia di studio e di ricerca per circa un mezzo secolo agli analisti. Weierstrass in particolar modo aveva ridotte queste teorie ad una mirabile armonia e chiarezza; ma già si apriva la via a nuove scoperte. Il Poincaré, non ancora trentenne, fece fare al concetto di funzione un nuovo progresso, quasi d'un tratto, e di tale importanza da poter essere paragonato a quello fatto dagli analisti della prima metà del secolo colla scoperta delle funzioni ellittiche.

Come nella maggior parte delle scoperte matematiche il criterio che servì di guida al Poincaré fu un criterio di generalizzazione per analogia, ma quale solo una mente poderosa, dotata di un intuito straordinario poteva immaginare.

La teoria delle funzioni ellittiche aveva portato alle funzioni doppiamente periodiche, ossia a quelle funzioni che riprendono il loro valore per due aumenti costanti, ripetuti quante volte si vuole, attribuiti alla variabile indipendente.

Erano già apparse in queste teorie anche funzioni le quali si riproducevano pei valori della variabile formanti gruppi speciali.

Il Poincaré partendo dai risultati fondamentali di Fuchs intorno alle proprietà degli integrali delle equazioni differenziali lineari, i quali costituiscono dei gruppi, allorchè la variabile indipendente compie un giro intorno ad un punto singolare, concepì il piano grandioso di una teoria completa delle funzioni, i cui valori non mutano per le sostituzioni della variabile co-

stituenti un gruppo. Ciò richiedeva anzitutto uno studio esauriente preventivo dei gruppi discontinui, quistione assai complessa e difficile, che il Poincaré seppe risolvere colla teoria dei gruppi da lui chiamati *fuchsiani* e *kleiniani* in omaggio ai due illustri analisti tedeschi Fuchs e Klein.

L'analogia colla teoria delle funzioni jacobiane lo portò poi alla costruzione di funzioni che si riproducono a meno di un fattore per le sostituzioni del gruppo, e che mediante i loro quozienti dànno luogo alle funzioni cosidette *automorfe*, che rimangono del tutto inalterate per le stesse sostituzioni.

L'importanza di queste ricerche è legata a due risultati di fondamentale importanza nell'analisi e di una generalità meravigliosa. Essi sono i seguenti:

1° Mediante le nuove funzioni si possono rappresentare gli integrali delle equazioni differenziali lineari, i cui coefficienti sono funzioni algebriche della variabile indipendente.

2° Le coordinate dei punti di una curva algebrica, mediante le stesse funzioni, possono essere espresse come funzioni uniformi di un parametro.

Il primo di questi risultati portava nel campo delle equazioni differenziali lineari una luce analoga a quella portata dalla teoria delle funzioni ellittiche nel problema della integrazione dei differenziali irrazionali. Il secondo forniva all'analisi un nuovo mezzo di ricerca nella teoria degli integrali abeliani.

La immensa generalità di queste ricerche non permetteva al Poincaré di entrare nei particolari di queste nuove teorie, di cui egli tracciò con mano sicura soltanto le linee fondamentali. Cosicchè, a ragione, alla fine dell'ultima delle cinque poderose memorie che riassumono questi studi negli " Acta Matematica „ egli poteva concludere: " *dans les cinq Mémoires que j'ai consacrées à l'étude des trascendantes fuchsiennes et kleinéennes je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste, qui fournira aux géomètres l'occasion de nombreuses et importantes découvertes* „.

*
* *

Nell'analisi pura lo spirito di ricerca è in certo modo libero d'innalzarsi dove meglio l'immaginazione e la generalizzazione

lo invitano. Nelle quistioni di applicazione, quando si tratta di penetrare nell'intima natura dei fatti naturali, ci si trova invece davanti a quistioni che provengono da questi fatti stessi e che conviene affrontare direttamente.

Nell'epoca in cui il Poincaré cominciò a svolgere la sua attività scientifica, alcune quistioni fondamentali, di straordinaria difficoltà, dominavano la Fisica matematica. Egli le attaccò con vedute nuove, valendosi della sua straordinaria padronanza dell'analisi e arrivò a risultati, che anche attualmente rappresentano, si può dire, il limite delle nostre conoscenze.

La quistione dell'esistenza delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali, a cui conducono i problemi della Fisica matematica, dopo che Weierstrass aveva provato non essere attendibile la dimostrazione di un principio geniale dovuto a Dirichlet, si presentava come formidabile per difficoltà e complessità. Schwarz e Neumann avevano trovato risultati importanti in casi speciali e indicata una via per la risoluzione che era al coperto da ogni obiezione.

Il Poincaré cominciò col porre in evidenza come fosse stato a torto bandito dal campo scientifico il principio di Dirichlet. Esso poteva invece gettare molta luce sulla natura delle soluzioni cercate, ed applicato anche in più larga misura di quella iniziale dovuta al suo autore. Naturalmente i risultati così ottenuti risentono del difetto d'origine, ma tale difetto può essere poi, in molti casi, sanato. Trovò poi un nuovo metodo per risolvere il problema classico di Dirichlet, completò in un'ampia memoria la soluzione di questo problema dovuta a Neumann estendendola a campi non più limitati dalla restrizione di essere convessi. Finalmente in un lavoro magistrale, pubblicato nei nostri " Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ", considerò e studiò in modo completo l'equazione differenziale più complicata che si presenti nei problemi di Fisica matematica, e che si riattacca particolarmente al problema delle vibrazioni dei corpi sonori ed al calcolo dei suoni fondamentali.

Un problema che appartiene tanto alla Meccanica che alla Fisica matematica, ed ha speciale importanza per l'Astronomia, è quello delle forme di equilibrio d'una massa fluida in rotazione. Ammesso lo stato iniziale fluido delle masse che costituiscono i corpi celesti, questo problema implica la spiegazione

delle forme ellissoidiche, che noi effettivamente osserviamo nella terra e nei pianeti, e ancora ci può rendere ragione del modo di formazione del sistema solare a partire dalla massa unica iniziale secondo la celebre ipotesi di Laplace.

Mac Laurin e Jacobi avevano dimostrata la possibilità di forme speciali d'equilibrio ellissoidico, il primo per ellissoidi di rotazione, il secondo per ellissoidi a tre assi. Thomson e Tait nel loro grande trattato di Filosofia naturale poi avevano enunciate alcune proposizioni assai importanti, prendendo a considerare, oltre alla quistione della forma, anche quella della stabilità dell'equilibrio; e avevano indicato anche una nuova figura di equilibrio di forma anulare.

Poincaré, proponendosi di dimostrare queste proposizioni dei fisici inglesi, stabilì anzitutto una teoria generale delle figure d'equilibrio e della loro stabilità, introducendo alcuni concetti nuovi, fondamentali per questo problema. Nel caso speciale di un pianeta fluido la sua forma dipende essenzialmente dalla velocità angolare di rotazione. Egli prese quindi a studiare da un punto di vista generale le configurazioni di equilibrio stabile di un sistema, che sono funzioni di un parametro variabile. Chiamò equilibrio di *biforcazione* una configurazione d'equilibrio che si trova comune a due serie differenti di configurazioni d'equilibrio, corrispondenti alla stessa successione dei valori del parametro. Queste serie di configurazioni di equilibrio possono farsi corrispondere ai punti di una curva di un certo spazio. L'equilibrio di biforcazione corrisponde ai punti d'incontro di due rami di questa curva.

Sussiste allora un teorema assai notevole. Seguendo ciascuno dei due rami e passando pel punto di biforcazione le proprietà di stabilità e di instabilità dell'equilibrio si scambiano sui due rami. È il teorema che il Poincaré chiamò dello *scambio delle stabilità*.

Servendosi di queste idee egli potè ritrovare i risultati di Thomson e Tait, e stabilirne altri che gettano una nuova luce sull'importante problema, specialmente perchè permettono in certo modo di seguire le trasformazioni di forma che una massa planetaria dovrebbe aver subito nel processo successivo di raffreddamento e di condensazione. Conservando dapprima una forma ellissoidica di rivoluzione, la massa va continua-

mente appiattendosi; per diventare poi, quando l'appiattimento ha raggiunto un certo limite, un ellissoide jacobiano a tre assi. In seguito assume una forma dissimmetrica piriforme, secondo una nuova forma d'equilibrio, scoperta da Poincaré, avente una specie di strozzamento centrale, che accentuandosi sempre più può infine portare alla separazione della massa in due corpi isolati.

L'analogia di questi risultati colle idee di Laplace è evidente. Tuttavia egli non osa servirsene nè per accettarle, nè per rifiutarle, a cagione dell'ipotesi dell'omogeneità, inerente a queste ricerche, mentre non concorda colle considerazioni di Laplace.

***

Ben più arduo còmpito sarebbe il voler render conto dei lavori del Poincaré nel campo della Meccanica celeste, riguardanti cioè il problema fondamentale dell'astronomia di posizione, il moto di un sistema di punti che si attraggono colla legge di Newton.

Tre volumi intitolati: *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* riassumono le sue principali scoperte in questo campo. Altri tre, che portano il titolo di *Leçons de Mécanique céleste, professées à la Sorbonne*, dànno un'esposizione delle teorie classiche e moderne secondo le sue speciali vedute.

Vi sono nella matematica alcuni risultati di carattere del tutto negativo che rappresentano alcune delle più faticose conquiste che la Scienza abbia fatto. Tale, per citarne una, la dimostrazione dell'impossibilità della quadratura del cerchio, da pochi anni raggiunta, mentre il problema era stato posto da tanti secoli dai geometri greci. Una delle scoperte più importanti fatte dal Poincaré nella Meccanica celeste è appunto di questa natura, e consiste nella dimostrazione completa della non esistenza di integrali uniformi per le equazioni del moto di un sistema di masse newtoniane, in numero maggiore di due, oltre gli integrali elementari già noti. Ciò ha portato ad un mutamento fondamentale d'indirizzo nel problema del moto. Poichè, data l'impossibilità di una soluzione analitica generale, che comprendesse in sè tutte le soluzioni speciali, come avviene nel caso

di due masse, altre vie conveniva cercare per l'indagine delle proprietà del movimento, già nel classico problema dei tre corpi. Il Poincaré percorse il nuovo cammino trionfalmente, proponendosi direttamente lo studio delle proprietà delle traiettorie sulle equazioni differenziali del movimento, e facendo rientrare nei nuovi metodi quasi tutte le più fondamentali quistioni della Meccanica celeste. Poichè, accanto al problema di assegnare quali furono nel passato e quali saranno nel futuro le posizioni degli astri che osserviamo, altre quistioni si impongono di indole più generale e di importanza fondamentale per la filosofia naturale.

Si può infatti domandare se è rigorosamente vero che la legge di Newton sia l'unica legge che regge l'universo; ed anche ammesso che ciò si verifichi, si può chiedere se il nostro sistema seguiterà indefinitamente nel suo moto regolare, che l'umanità da tanti secoli osserva, senza collisioni e senza dispersione di materia. Sono quistioni fondamentali alla cui soluzione è indispensabile il lavoro accumulato di molte generazioni.

Ma anche al problema più pratico del calcolo effettivo delle posizioni degli astri, le ricerche del Poincaré hanno portato contributi importanti, con un'acuta analisi intorno alle serie usate per le soluzioni approssimate delle equazioni del moto e colla introduzione anche in questo campo di nuove idee e di nuovi mezzi di ricerca.

***

Per chi volesse approfondire i mutui rapporti che esistono fra matematica e fisica, sarebbe estremamente interessante lo studiare l'influenza che il Poincaré ha avuto nello svolgimento delle teorie fisiche più recenti, e la ripercussione che queste teorie hanno esercitato sulle sue indagini matematiche.

Un articolo pubblicato pochi giorni sono dal Langevin nella *Revue du Mois* (1), ci mette in evidenza come quasi tutte le quistioni e le ricerche più appassionanti di Fisica sperimentale

(1) N. 94, 13 ottobre 1913, pag. 419.

siano state oggetto di profonde considerazioni da parte del nostro matematico, e come anche molte ricerche sperimentali siano state inspirate da lui. Ed è curioso ed interessante il fatto, riferito dal Langevin, che il primo passo nel campo della radioattività, dovuto al Becquerel, abbia avuto origine dal tentativo di verificare sperimentalmente una ipotesi del Poincaré.

Il momento attuale della Fisica è caratterizzato da un'intima unione fra esperienza e concetto matematico. Mentre la tecnica sperimentale si affina sempre più, d'altra parte l'esperienza è spesso null'altro che la realizzazione di un concetto matematico. Si comprende perciò quanta attrazione abbiano esercitato i progressi moderni della Fisica, sul Poincaré, sempre intento in tutte le sue ricerche alla realtà del fenomeno, e che, padrone sicuro dell'analisi matematica, era in grado più di qualunque altro di piegarla ai bisogni della ricerca sperimentale.

Furono dapprima le teorie di Maxwell che avevano trovato nel 1887 una così brillante conferma nelle esperievze di Hertz, lo scopritore delle onde elettriche, quelle che lo occuparono per lungo tempo. Egli imprese a studiarle sotto ogni aspetto ed a diffonderle in Francia, ove i metodi del grande fisico inglese avevano trovato un serio ostacolo nelle abitudini mentali di logico e ordinato rigore dei classici francesi. Egli approfondì le quistioni che si riattaccano alla propagazione delle onde elettriche, fino a quelle che riguardano le applicazioni pratiche e la telegrafia senza fili. E si interessò tanto alla pratica ed alla tecnica relativa, che non disdegnò di insegnare per diversi anni nella Scuola superiore di telegrafia di Parigi.

Ma sopratutto dovevano attrarre l'ingegno poderoso del Poincaré le nuove idee che si andavano diffondendo intorno alla costituzione dell'elettricità col ritorno ai concetti atomistici, e la teoria della relatività, che dovevano portare una rivoluzione negli antichi concetti della meccanica, e tutto quel complesso di teorie moderne per cui si va delineando una sintesi grandiosa di tutti i fenomeni fisici e chimici.

Il suo nome si trova fra mezzo a tutte le complicate discussioni che i nuovi indirizzi hanno sollevato, nè vi è punto delicato o difficile nel quale egli non abbia cercato di portare la luce del suo intelletto. Cosicchè, non perdendo la sua qualità di matematico, ha potuto contribuire validamente ai progressi

della Fisica, e provare col fatto come la Fisica matematica non sia quell'astrazione superflua, che parve talvolta a qualche indomito sperimentatore.

*
* *

Giudicare ora in modo completo dell'opera scientifica del Poincaré è cosa estremamente difficile. Essa ha dimensioni troppo grandiose; e noi le siamo ancora troppo vicini.

Non vi è dubbio che essa ha penetrato e dominato il movimento scientifico delle Matematiche, della Fisica e dell'Astronomia negli ultimi trent'anni, come una forza travolgente che ha del meraviglioso.

Una tale foga appassionata di ricerche e di scoperte, una tale sovrapposizione di studi nelle più svariate direzioni, hanno dato alla sua produzione scientifica alcuni caratteri speciali che la differenziano dalla più gran parte. Volendo cercare un'immagine sensibile, potremmo paragonarla a certe opere di scultura moderna, ove solo le grandi linee sono tracciate, e pochi particolari sono ricercati e studiati.

Molto quindi vi è da scoprire, da sviluppare, da completare nella miniera inesauribile che egli ha aperto al mondo scientifico. Potrà anche darsi che qualche concetto debba cadere, qualche teoria rivelarsi inadeguata. Ma la grande figura dello scienziato scomparso rimarrà sempre, non vi è alcun dubbio, fra le più notevoli dell'epoca nostra. Egli sarà sempre da considerarsi come uno degli intelletti più alti che abbiano onorato l'umanità.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 23 Novembre 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Carle, De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Direttore della Classe Chironi, il quale anche per iscritto ringrazia la Classe per la sua elezione a Direttore.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 22 giugno 1913.

Il Presidente commemora il defunto Socio Giuseppe Allievo, facendone notare il valore nelle discipline pedagogiche e la tenacia nel propugnare le dottrine che a lui sembravano incontestabilmente vere. Comunica, inoltre, le molte condoglianze pervenute all'Accademia per questa perdita.

Con elogi, offre il Presidente all'Accademia, in nome dei singoli autori, le seguenti pubblicazioni:

1° *Veronica Cybo*, Spezia, tip. Zappa, 1913, del Socio Giovanni Sforza;

2° una serie di scritti di diritto commerciale dell'avvocato Adolfo Sacerdoti, fra cui emergono l'opera in due volumi *Il contratto d'assicurazione*, Padova, 1874-78 e *Gli statuti marit-*

timi veneziani fino al 1255, Venezia, Visentini, 1903, editi per cura del SACERDOTI e del compianto Riccardo PREDELLI;

3° *La geografia nella scienza, nella scuola e nella vita sociale*, Roma, 1913, discorso di Cosimo BERTACCHI;

4° *Il crepuscolo della libertà savonese e l'opera di Giulio II*, S. Pier d'Arena, Scuola tipografica Don Bosco, 1913, di Federico BRUNO e di Filippo NOBERASCO.

A nome dell'editore Giovanni Lobetti Bodoni il Socio STAMPINI offre il suntuoso volume *Nei parentali di G. B. Bodoni*, Saluzzo, tip. Lobetti Bodoni, 1913, encomiando l'idea di questa silloge commemorativa e la splendida esecuzione tipografica di essa in caratteri bodoniani.

Il Segretario dona all'Accademia i seguenti opuscoli numismatici del valente investigatore di storia abruzzese Giovanni PANSA: *Saggio di una bibliografia analitica della zecca medioevale negli Abruzzi; Documenti inediti relativi alle zecche abruzzesi nei secoli XV e XVI; Un decreto di Ferdinando I d'Aragona per la tutela dei ripostigli monetari*, tutti stampati a Napoli, tip. Melfi e Joele, 1912.

Per l'inserzione nelle *Memorie* accademiche il Socio EINAUDI propone una dissertazione di Carlo CONTESSA dal titolo: *Aspirazioni commerciali intrecciate ad alleanze politiche della Casa di Savoia coll'Inghilterra nei secoli XVII e XVIII*. Il Presidente designa a riferirne il Socio proponente EINAUDI ed il Socio SFORZA.

Sono presentati per la pubblicazione negli *Atti* i seguenti scritti:

1° dal Socio RUFFINI: Gian Carlo BURAGGI, *I giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento*, I, *Signorino Omodei;*

2° dal Socio RENIER: Santorre DEBENEDETTI, *Due ballate del " Sollazzo „ di Simone Prudenzani.*

LETTURE

I Giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento.

I. — Signorino Omodei.

Nota di GIAN CARLO BURAGGI.

Di Signorino Omodei, giureconsulto milanese vissuto fra la metà del secolo XIV e il primo quarto del XV, si è già occupato il Lattes, al quale spetta il merito di averlo definitivamente distinto così nella persona come negli scritti dall'altro più antico e più famoso giureconsulto Signorolo con cui i vecchi autori lo confondevano (1). Tuttavia finora poco o nulla si sa del periodo della sua vita trascorso a Torino e dedicato all'insegnamento nell'Università che ivi fu aperta sul principio del quattrocento. È appunto agli anni della sua dimora in Piemonte che si riferiscono le presenti ricerche, le quali mirano a portare un contributo tanto alla biografia del giureconsulto quanto alla storia dei primordi dell'Università torinese.

§ 1. — Compiuti gli studi legali a Pavia, Signorino cominciò assai presto a insegnare in quella Università (2); passò più tardi alle cattedre di Padova e di Piacenza, che occupò per breve tempo e alternatamente con quella pavese. Nel 1412 prese parte alla fondazione dell'Università di Parma, ed è dopo

(1) Lattes, *Due giureconsulti milanesi: Signorolo e Signorino degli Omodei* nei " Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere ", serie II, vol. XXXII (1899), pp. 1017-1045. Alla bibliografia ivi citata conviene ora aggiungere il *Codice diplomatico dell'Università di Pavia*, vol. I, 1361-1400, pubblicato dal Maiocchi (Pavia, 1905). Fra le opere poi che tramandarono la confusione dei due giureconsulti Signorolo e Signorino in una persona sola, vanno annoverati anche i *Privilegia almae taurinensis Universitatis*, Torino, 1679, contenenti un catalogo dei professori che insegnarono a Torino, nel quale è compreso Signorolo (p. 105).

(2) Ebbe la licenza in diritto civile il 2 settembre 1378, la laurea il 20 maggio 1380. Cfr. Maiocchi, op. cit., p. 53 n. 88 e p. 62 n. 112. L'inizio del suo insegnamento non data già, come si crede (Lattes, op. cit., p. 1022), dal 1383, ma da qualche anno prima. Infatti un documento del 4 maggio 1380 ce lo presenta già come lettore. V. Maiocchi, op. cit., p. 62 n. 111.

di allora che gli storici pongono la sua venuta a Torino. La cosa infatti non avrebbe potuto verificarsi che verso quell'epoca. È noto che lo Studio torinese, istituito nel 1404 con bolla di Benedetto XIII, ebbe nei suoi primordi vita assai stentata, e poco mancò che non morisse sul nascere. Prese a funzionare regolarmente soltanto alla fine del 1411, allorchè fu aperto in modo definitivo (1). L'Omodei pertanto non vi potè venire prima di allora; ma il trovarlo a Parma nel 1412 ci prova che nel primo anno scolastico (1411-1412) dello Studio testè rinnovato egli non ne faceva ancora parte. Forse vi fu chiamato nell'anno seguente, e certo nel terzo anno scolastico (1413-1414) già vi insegnava (2).

§ 2. — A partire da questo momento la sua presenza a Torino è documentata a più riprese e in vari modi. Egli aveva fissato la sua abitazione " in contrata sancti Grigorii ", e cioè nella parrocchia in cui forse già allora, e certo più tardi, ebbe sede l'Università (3). Era il lettore più reputato dello Studio,

(1) Cfr. Vallauri, *Storia delle Università degli studi del Piemonte*, I, Torino, 1845, p. 44 e sgg.; Bona, *Della costituzione dell'Università di Torino dalla sua fondazione all'anno 1848*, I, Torino, 1852, p. 1 e sgg.; Gabotto, *L'Università in Piemonte prima di Emanuele Filiberto*, Torino, 1898, p. 17 e sgg.; Ruffini, *L'Università di Torino: profilo storico* nell' " Annuario della R. Università di Torino 1899-1900 ", Torino, 1900, p. 4 e sgg.

(2) In seduta del 28 giugno 1414 il consiglio comunale di Torino deliberò " quod in auxilium solvendi doctoribus legentibus, seu qui legent in futurum, de avere comunis dentur et concedantur prefacto illustrissimo domino nostro floreni ducenti parvi ponderis solvendi ipsis doctoribus omni anno dum studium in ipsa civitate tenebitur et ibidem legetur per dominum Segnorinum de Omodeis legum doctorem, vel alium in legibus magis ipso domino Segnorino famossum et ydoneum, et per dominum Bertolomeum Dinam decretorum doctorem, vel alium ut prefertur in decretis magis famossum et ydoneum, et non aliter nec alio modo " (Archivio comunale di Torino, *Ordinati*, vol. 55, cc. 40 *v.*-41 *r.*).

(3) Il dibattimento della causa dei pedaggi, di cui farò parola in seguito, si svolse appunto in casa di Signorino. I cittadini torinesi vennero citati a comparire il 23 febbraio 1415 " ad domum habitacionis prefati domini Signorini sitam in contrata san[c]ti Grigorii "; e nel giorno fissato essi si presentarono " coram prefatis dominis comissariis sedentibus pro tribunali in domo habitacionis prefati domini Signorini in studio suo " (Archivio di Stato in Torino, *Provincia di Torino*, mz. 3°, n. 1: atti della causa, cc. 2 *v.* e 6 *r.*). La chiesa parrocchiale di S. Gregorio sorgeva poco

il quale per altro scarseggiava ancora di insegnanti. Vi aveva per colleghi Bartolomeo Dina (1), Pietro Besozzo (2), Francesco de Thomatis (3), e, per poco tempo, anche Cristoforo Casti-

discosto dal luogo in cui è presentemente la chiesa di S. Rocco. Cfr. Cibrario, *Storia di Torino*, Torino, 1846, vol. II, p. 172. Lo Studio era allora allogato in varie case che il comune teneva in affitto. Nel 1443 ne acquistò alcune poste di fronte all'attuale chiesa di S. Rocco per adibirle a sede dell'Università, che vi si fissò e vi rimase fino al sec. XVIII. Cfr. Vallauri, op. cit., I, p. 92, n. 3; Duboin, *Raccolta per ordine di materie delle leggi*, ecc., t. XIV, vol. XVI, Torino, 1847, p. 111 in nota; Gabotto, op. cit., p. 41; Ruffini, op. cit., p. 9.

(1) Di questo lettore il Vallauri non ricorda che il nome, scrivendolo però inesattamente: Bertoglino Duyna (op. cit., I, p. 51). Bartolomeo Dina *(Dina, de Dinis)* di Valenza studiò all'Università di Pavia dove si licenziò in diritto canonico il 22 novembre 1397 e si addottorò in ambe leggi il 17 novembre 1398. Cfr. Maiocchi, op. cit., nn. 616 e 719. Insegnò diritto canonico nello Studio pavese dal 1402 al 1411. Cfr. Robolini, *Notizie appartenenti alla storia della sua patria*, vol. V, parte II, Pavia, 1836, pp. 116-117. Nella causa dei pedaggi dibattutasi nel 1415 tra il principe Ludovico d'Acaia e alcuni cittadini torinesi, fu invitato ad assumere la difesa d'ufficio di questi ultimi che erano privi di avvocato. Egli però rifiutò " dicens..... pro sui excusatione quod advocationi et patrocinio dicte cause nequiret intendere, cum fuerit et sit alteratus propter insolitum iter per ipsum nuper factum in partibus Allamanie, propter quod iter habuit et habet spiritus comotos et afflictos ita et taliter quod ob id in ipso debita sanitas non viguit nec viget; tum etiam quia etsi in debita sanitate persisteret, in qua tamen non persistit, non teneretur advocationis officium assumere contra prelibatum dominum dominum principem, cum fuerit et sit in eius obsequis et serviciis astrictus et deputatus, et ab eodem exinde emolumenta percipiat, etc. „ (Archivio di Stato in Torino, *Provincia di Torino*, mz. 3°, n. 1: atti della causa dei pedaggi, cc. 70 *v.*–71 *r.* [6 maggio 1415]).

(2) Per notizie sul Besozzo v. Argelati, *Bibliotheca scriptorum mediolanensium*, Milano, 1745, t. I, p. II, col. 154 e t. II, p. II, col. 1951; Robolini, op. cit., pp. 120 e 203. Venne allo Studio torinese con Signorino Omodei, e insieme con lui se ne allontanò poco prima della morte del principe Ludovico di Acaia, passando a Pavia. Cfr. Robolini, op. cit., pp. 120 e 203. Durante la sua permanenza in Piemonte occupò, oltre quella di lettore, anche la carica di avvocato fiscale del principe Ludovico.

(3) Il nome di Francesco de Thomatis è il primo che figuri nel catalogo dei dottori ascritti al collegio dei giureconsulti di Torino. Cfr. *Statuta venerandi sacrique collegii iurisconsultorum Augustae Taurinorum*, Torino, 1575, p. 26. Fu uno dei tre riformatori dell'Università creati con patenti del 29 settembre 1424. Cfr. [Galli], *Cariche del Piemonte*, Torino, 1798, II, p. 3; Vallauri, op. cit., I, p. 53; Bona, op. cit., p. 60; Gabotto, op. cit.,

glione (1). Ignorasi a quanto ammontasse il suo onorario di lettore (2); ma risulta che il comune di Torino, il quale già si dibatteva in quelle strettezze finanziarie che furono una delle principali cause della traslazione dello Studio a Chieri avvenuta un paio di lustri dopo, non sempre glielo corrispondeva con puntualità (3). Probabilmente questa circostanza ebbe il suo peso nella decisione dell'Omodei di allontanarsi dall'Università subalpina dopo avervi insegnato per pochi anni. Poichè la sua partenza non ebbe luogo, come comunemente si crede (4), in seguito alla morte di Ludovico d'Acaia. Mentre infatti quel prin-

p. 29. Più tardi, nel 1433, venne innalzato alla carica di presidente della suprema generale udienza. Cfr. [Galli], op. cit., I, pp. 157-159; Dionisotti, *Storia della magistratura piemontese*, Torino, 1881, I, p. 63, nota 2. Morì verso il 1460: " nuper defunctum „ è detto in un documento del 17 febbraio di quell'anno. Cfr. Archivio di Stato in Torino, *Protocolli Segretari ducali, Serie Archivi di Corte*, vol. 98, c. 455.

(1) Per notizie su Cristoforo Castiglione vedasi Pancirolo, *De claris legum interpretibus*, Lib. II, cap. LXXX; Argelati, op. cit., II, ii, coll. 355-356; Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana*, tomo VI, parte II, Modena, 1790, p. 506; Robolini, op. cit., V, ii, p. 99 e 175-176; Maiocchi, op. cit., *passim*. Fu uno dei lettori che vennero a Torino per la riapertura dello Studio del 1411, ma se ne allontanò assai per tempo. Nel 1419 il Capitano del Piemonte inviò espressamente a Milano Francesco de Thomatis perchè lo riconducesse all'Università torinese. Cfr. Duboin, op. cit., t. XIV, vol. XVI, Torino, 1847, p. 83 in nota. Ma il Castiglione non accettò l'offerta e rimase a Pavia, ove allora insegnava, fino alla sua morte avvenuta nel 1425. Cfr. Robolini, op. cit., V, ii, p. 99.

(2) All'Università di Pavia nel 1418 Signorino godette lo stipendio di 600 fiorini. Cfr. Robolini, op. cit., V, ii, p. 100. Per gli onorari assegnatigli nel sec. XIV v. Maiocchi, op. cit.

(3) Il consiglio comunale di Torino il 7 marzo 1415 fu chiamato a provvedere " super satisfaciendo et solvendo domino Segnorino legum doctori pro secunda solucione sui salarii eidem alocati per illustrem dominum nostrum Achaye principem „. Il 9 settembre dello stesso anno dovette deliberare " pro satisfaciendo domino Signorino de Homodeis qui dicitur habere debere in deductione salarii sui pro lectura id quod comunitas Taurini pro presenti dare debet quasi videlicet pro duobus terminis ultimis „. E in seduta del 30 ottobre dell'anno predetto ebbe ancora a decidere " super inveniendo modum et viam de solvendo domino Segnorino legum doctori... [*et aliis*]... qui habere debent a comunitate „ (Archivio comunale di Torino, *Ordinati*, vol. 55, c. 139 *r.*, 197 *r.*, 223 *r.*).

(4) Pancirolo, op. cit., Lib. II, cap. LXIV; Robolini, op. cit., pp. 177-178; Lattes, op. cit., pp. 1022-1023.

cipe mancò ai vivi il 6 dicembre 1418, Signorino era già iscritto fin dal 4 ottobre di quell'anno nel rotulo dei lettori dell'Università di Pavia (1). Per altro il suo abbandono del Piemonte precedette di poco la fine dell'ultimo degli Acaia, giacchè abbiamo la prova che nel 1417 egli insegnava ancora a Torino (2). Lasciò questa città insieme con Pietro Besozzo, e con lui tornò a Pavia. Entrambi partirono senza ottenere il pagamento dei loro onorari; e alcuni anni dopo gli eredi di Signorino, già morto, e il Besozzo, tuttora in vita, ne erano sempre in credito, tanto che Cristoforo Castiglione scrisse un consiglio in difesa dei loro diritti (3).

§ 3. — Ma l'attività di Signorino Omodei in Piemonte si esplicò anche fuori del campo dell'insegnamento. A Torino egli aveva subito conquistato quella preminenza cui gli davano diritto il suo sapere e la sua fama. Il principe Ludovico di Acaia non tardò a crearlo suo consigliere (4) e, presentatasene l'oc-

(1) Robolini, op. cit., pp. 100 e 177.

(2) Il 30 agosto 1417 il consiglio comunale di Torino deliberò " conscideratis rationibus et de causis contentis et descriptis in refformacione proxime precedentis conscilii celebrati, scilicet attentis honore et comodo qui et quod pretextu studii comunitati et hominibus Taurini perveniunt, quod per ipsam comunitatem pro anno proxime futuro solvantur et solvi debeant scole seu salaria scolarum *ubi presencialiter legitur per dominos Signorinum, Petrum de Bissucio, dominum Franciscum de Thomatis, dominum Bertolomeum Dinam* et medicos, et ultra non, obstantibus multis et diversis gravaminibus et honeribus quibus ad presens dicta comunitas subiacet et habet, in auxilium solucionum doctorum qui hoc anno venturo legent ut assueverunt hic in Taurino dentur et solvi debeant floreni centum parvi ponderis sive ad rationem solidorum XXXII viennensium pro quolibet, sub condicionibus tamen ac modo et forma quibus infra declaratur, etc. „ (Archivio comunale di Torino, *Ordinati*, vol. 57, c. 73 *v.*).

(3) Pancirolo, op. cit., Lib. II, cap. LXIV; Tiraboschi, op. cit., t. V, parte I, p. 317; Sauli, *Sulla condizione degli studi nella Monarchia di Savoia sino all'età di Emanuele Filiberto*, Torino, 1843, p. 154; Vallauri, op cit., I, p. 52; Lattes, op. cit., p. 1023.

(4) Lettere di commissione per la causa dei pedaggi del 19 febbraio 1415: " Ludovicus de Sabaudia princeps Achaie, etc. dilecto *consciliario* nostro domino Segnorino de Homodeis de Mediolano legum doctori famoso, etc. „; lettere di citazione spiccate da Signorino il 22 febbraio dello stesso anno: " Nos Signorinus de Homodeis legum doctor ac *consiliarius* prelibati domini, etc. „ (Archivio di Stato di Torino, *Provincia di Torino*, mz. 3°, n. 1: Atti della causa dei pedaggi, c. 1 *r.*, 2 *r.*).

casione, si valse dell'opera sua di giureconsulto affidandogli un incarico di speciale importanza. A quei tempi diversi privati cittadini torinesi esigevano in forza di antica consuetudine da chi transitava per la città due pedaggi, denominati l'uno " dell'imperatore ", l'altro " del marchese di Monferrato ". Il principe di Acaia volendo impedire l'ulteriore esercizio di tale preteso diritto, nel 1415 li chiamò in giudizio per mezzo del proprio procuratore fiscale, dopo di aver delegato la decisione della controversia a un apposito collegio composto di tre giudici: Signorino Omodei, Beltramo Cornaggia (1) e Francesco de Thomatis. Fu Signorino che presiedette il giudizio e diresse il corso della causa la quale si trascinò per parecchi mesi (2). Non sappiamo quale esito sortisse; certo non terminò con un giudicato definitivo perchè poco dopo venne ripresa e portata davanti ad altro magistrato. Anche allora Ludovico d'Acaia ricorse a Signorino, che da giudice era ritornato libero giurista, e lo incaricò di assumere il suo patrocinio. E Signorino scrisse un lungo consiglio a sostegno delle ragioni del principe (3).

---

(1) Beltramo Cornaggia, giudice di Moncalieri, era stato condiscepolo di Signorino all'Università di Pavia. Ivi infatti lo troviamo nel 1376-77 rettore dei giuristi. Cfr. Maiocchi, op. cit., pp. 44, 46, 47, 50, nn. 55, 63, 66, 67, 76.

(2) Sono giunti fino a noi gli atti di questa causa, e si conservano nell'Archivio di Stato di Torino, *Provincia di Torino*, mz. 3°, n. 1. Signorino Omodei, Beltramo Cornaggia e Francesco de Thomatis furono investiti dei loro poteri con lettere del principe Ludovico d'Acaia del 19 febbraio 1415, e subito si accinsero al compimento del loro mandato, citando i cittadini torinesi esattori dei pedaggi a comparire alla loro presenza il 23 febbraio. Da questo momento cominciano gli atti della causa e vanno innanzi fino al settembre, con il qual mese termina l'incarto processuale che è incompleto.

(3) Di questo consiglio steso da Signorino e convalidato da Pietro Besozzo, da Bartolomeo Dina e da Michele de Amberris (?) ci è stato tramandato l'originale che si custodisce nell'Archivio di Stato di Torino, *Provincia di Torino*, mz. 3°, n. 1. Esso è costituito da un fascicolo cartaceo in-f° di cc. 26 n. n., delle quali le prime 22 contengono il consiglio e le ultime 4 sono bianche. Il testo venne scritto da un amanuense, e le sole sottoscrizioni sono autografe. Comincia così: " In nomine Patris et Filii et Spiritus San[c]ti glorioseque Virginis Marie nec non beate Catarrine patrone mee amen. In questione vertenti inter illustrissimum ac excelsum dominum dominum Lodovicum de Sabaudia Achaye principem... ". Le sottoscrizioni sono in questi termini: " Secundum ea que vidi in procesu et

§ 4. — Questo consiglio è assai interessante perchè si aggira sull'istituto della prescrizione immemorabile; esso costituisce anzi un contributo non spregevole alla letteratura medievale intorno all'argomento (1). L'acquisto del diritto controverso (esazione per parte di privati cittadini di *nova rectigalia*) per il decorso di tanto tempo *cuius principii memoria non existit*, avrebbe potuto verificarsi secondo Signorino non già in forza della prescrizione vera e propria, che per operare richiede il possesso o il quasi possesso accompagnato dalla buona fede, e nemmeno della consuetudine propriamente detta, il cui valore deriva unicamente dal consenso popolare, ma soltanto in forza di una speciale consuetudine che formatasi con l'esercizio continuato sciente e paziente il principe, diventa come un tacito privilegio del principe stesso. Ecco il fondamento del diritto: la concessione del principe che il concorso di certe circostanze fa presumere avvenuta tacitamente. Com'è naturale, Signorino, dimostrato questo assunto, passa poi a provare che non sussistevano a favore dei cittadini torinesi le condizioni di fatto richieste per giustificare l'acquisto del diritto stesso. In questo

---

scripturis utriusque partis ita videtur in iure ut supra plene concluxum est mihi Signorino de Homodeis legum doctori, et in signum huius me subscripsy et sigillum meum aposuy. — Similiter ita in iure videtur ut supra conclusum est per prefatum dominum Segnorinum michi Petro de Besutio legum doctori, in quorum testimonium me subscripsy sigillumque meum apposui consuetum. — Et idem videtur dicendum michi Bartholameo de Dinis iuris utriusque doctori prout supra conclusum fuit per prefatos spectabiles et egregios dominos doctores, et in testimonium premisorum me propria manu subscripsi et sigillum meum aponi iusi, etc. — Et ego Michael de Amberris (?) legum doctor dico de iure et consulo prout supra conclusum est, et in huius testimonium me manu propria subscripxi et corneola mea qua pro nunc utor signavi „. Ogni sottoscrizione è accompagnata dal sigillo. Quello di Signorino raffigura un dottore seduto sulla cattedra in atto di leggere. In basso è lo scudo con lo stemma del giureconsulto (un leone rampante). La leggenda, in carattere gotico maiuscolo, è la seguente: " ✠ S. SEGNORINI . D . HOMODEIS . LEGVM . DOCTORIS „. — Insieme con l'originale del consiglio si trova una copia non autentica.

(1) Quanto alla prescrizione immemorabile vedasi Schupfer, *Ab immemorabili, tempo immemorabile, prescrizione immemorabile* nel " Digesto italiano „, vol. I, p. I, Torino, 1884, pp. 69-79; e per le vicende dell'istituto in Piemonte dopo Emanuele Filiberto, Mongini, *La prescrizione immemorabile nel diritto piemontese: tema di laurea*, Torino, 1906.

consiglio vi sono alcuni passi notevoli perchè ricordano il giureconsulto Signorolo (1). È però strano che Signorino, il quale secondo le testimonianze più attendibili (2) sarebbe stato suo figlio, parlando di lui lo chiami semplicemente " dominus meus ".

§ 5. — Di consigli scritti dall'Omodei durante il suo soggiorno in Piemonte ce ne è pervenuto anche un altro che verte in materia feudale e penale (3). Nel 1414 era stato commesso a Cuorgnè un furto di 250 ducati d'oro in danno di Antonio Varaglia; e avendo poi questi ricuperato il denaro sottrattogli, i signori di Cuorgnè pretendevano che esso spettasse a loro anzichè al derubato. Contrastandolo il Varaglia, quei feudatari si rivolsero per un parere ai due giureconsulti Signorino Omodei e Girardo de Calcinado, ciascuno dei quali stese un consiglio. La questione era troppo ovvia per richiedere una lunga trattazione; bastarono perciò poche parole ad entrambi i giuristi per dimostrare che il prodotto del furto doveva restituirsi al proprietario, giacchè non ricadeva in alcun modo nel novero dei diritti signorili.

(1) " ..... Et plene notat recolende memorie dominus meus dominus Segnorolus de Homodeis in l. II C. Nova vectigalia..... ". — " ..... Unde ille summus legum monarcha dominus Segnorolus in l. II C. Nova vectigalia, quam publice repetiit in civitate Padue dum ivisset in comittiva illustrissime domine Ysabelle uxoris condam illustris ac excellentissimi domini domini Luchini de Vicecommittibus, in materia presenti sic dicit, etc. ". — " ..... Et dicit prefatus dominus meus..... " (Originale del consiglio, cc. 2 *r.*, 4 *v.*, 5 *v.*).

(2) Cfr. Osio, *Documenti diplomatici tratti dagli Archivi milanesi*, vol. I, Milano, 1864, p. 276, n. CC; Robolini, op. cit., p. 177.

(3) Si legge in copia del sec. XV a cc. 22 *v.*–23 *r.* di un codice degli statuti di Valperga conservato nella Biblioteca di S. M. in Torino (*Manoscritti di Storia Patria*, n. 618*bis*. Cfr. Fontana, *Bibliografia degli statuti dei comuni dell'Italia superiore*, Torino, 1907, vol. III, p. 260). Il breve consiglio di Signorino comincia così: " In nomine Patris et Filii et Spiritus Sancti gloriosque Virginis Marie nec non beate Catherine patronee *(sic)* mee amen. Prime questioni qua queritur an dicta peccunia..... ", ed è sottoscritto in questi termini: " Et ita dico et consulo ego Segnorinus de Homedeis *(sic)* legum doctor, etc. ". Devo la conoscenza di questo ms. degli statuti di Valperga all'amico conte dott. Giuseppe Frola, il quale lo darà alle stampe nel suo *Corpus statutorum Canapicii* di imminente pubblicazione.

Due ballate del " Sollazzo „ di Simone Prudenzani.

Nota di SANTORRE DEBENEDETTI.

I.

Il marito entro l'albero e la simulata cecità (1).

Ho già accennato altrove a questo soggetto (2), che ora riprendo con maggiore informazione, non già colla pretesa d'esaurire l'argomento, ma per lumeggiare meglio che prima io non abbia fatto la novella del Prudenzani intitolata *Violentia*.

Dobbiamo volgere la nostra attenzione ad un racconto del *Panciatantra* (3), che, non più testimoniato nelle letterature orientali, risulta in occidente sotto molteplici forme:

" C'era una volta in un certo paese un Bramino di nome " Yaginadatta. La moglie di lui, una sgualdrina innamorata d'un " altro, senza posar mai faceva ciambelle con burro e con pez- " zetti di zucchero, e di nascosto del marito le portava al suo " damo. Ma, un giorno, il marito vedutala far cotesto, le disse: " O cara, che è quello che là si vede? e dove porti tu sempre " tutto ciò? Suvvia dimmi la verità. — E quella, come se ri- " spondesse da senno, così rispose fintamente al marito: C'è " non lontano di qui un oratorio della santa Dea. Io, come ho " digiunato, le porto oggi per la prima volta in offerta questi " scelti cibi. — Così, sotto gli occhi di lui, togliendo con sè

(1) Per la bibliogr. v. J. Bolte, in " M. Montanus Schwankbücher „, Tübingen, 1899 (" Bibl. des Litter. Vereins in Stuttgart „, 217), p. 611. Al Bolte stesso vado debitore di parecchie indicazioni bibliografiche, delle quali lo ringrazio pubblicamente di tutto cuore.

(2) *L'Orbo che ci vede*, in " Miscellanea Crescini „, p. 523 sgg.

(3) Trad. Pizzi, *Le novelle indiane di Visnusarma*, Torino, 1896, p. 174; nella trad. del Benfey, *Pantschatantra*, Leipzig, 1859, p. 276.

" tutta quella roba, s'incamminò verso l'oratorio della Dea. Con
" questo pretesto dell'avergli indicato la Dea, ella pensava: Mio
" marito si crederà che la sua Bramina, appunto per la santa, è
" solita portar con sè quei tali cibi scelti. — Così adunque, in-
" tanto che, venuta all'oratorio della Dea, entrando nel fiume per
" le abluzioni di rito, essa attendeva a lavarsi, il marito, andatole
" dietro per un'altra via, si appostò in modo da non essere ve-
" duto, dietro il simulacro della Dea. La Bramina frattanto,
" fatte le abluzioni, entrata nell'oratorio della Dea, fatte le pu-
" rificazioni, le unzioni, e data l'offerta delle ghirlande, dei suf-
" fumigi e d'altro, inchinando la Dea, così le si volse dicendo:
" O santa Dea, in qual maniera mio marito potrebbe diventar
" cieco? — Udendo ciò, il Bramino, con voce contraffatta e
" stando pur sempre dietro la Dea, mormorò queste parole:
" Se tu darai continuamente a tuo marito alimento di ciambelle
" di burro e d'altro, ben presto egli diventerà cieco. E la sgual-
" drina, ingannata da quelle finte parole, così tutto il dì diede
" di quelle cose al Bramino. All'altro giorno il Bramino disse:
" O cara, io non vedo più tanto bene! — Udendo questo, la
" donna pensò: Ecco che mi è stata fatta la grazia della Dea!
" Allora, il damo di lei, l'amante del suo cuore, senza sospetto
" e pensando: Questo Bramino che fra poco sarà cieco, cosa
" mai mi potrà fare? — cominciò a recarsi da lei ogni giorno.
" Ma un giorno il Bramino, vedendolo entrare, quando se lo
" vide vicino, afferrandolo per i capelli, tanto lo malmenò con
" le busse, incominciando col bastone e coi calci, che quegli
" morì. Reciso poi il naso alla rea mogliera, la discacciò „.

*
* *

La novella consta di 3 parti:

1° Un marito che sospetta della moglie adultera, si nasconde in un *luogo sacro* ch'essa frequenta;

2° Appreso che ha l'intenzione di *accecarlo*, simulando la *voce della divinità*, le consiglia, per raggiungere l'intento, di impartirgli alcune *vivande* e propriamente delle ghiottornie;

3° *Fingendosi cieco*, può sorprendere in flagrante gli adulteri, che punisce.

*
* *

Poichè nelle versioni e nelle opere sulle quali più o meno venne ad agire il vetusto *Panciatantra* la nostra narrazione manca, e d'altra parte, come vedremo subito, essa risulta non meno in Italia che in Germania, in Russia, ecc., riesce malagevole dire per qual via siasi propagata in occidente.

La più antica redazione a me nota è quella contenuta nel *Sollazzo* (1).

La ballata tratta di donna Fiore, che tradisce il marito, purtroppo monocolo ma ottimo balestriere (il Magagnato), con un ricco amante, Carglicosta. Più volte, vicina ad essere scoperta, colla sua presenza di spirito era riuscita a salvarsi (2).

Il misero, per vero, vive sospettoso, ma come fare ad accertarsi?

" Moglie mia „ un bel giorno le dice: " ho da raccontar- " tene una bella: la *quercia* della Costa stamattina mi ha par- " lato; essa risponde a tutte le domande e sa tutto. Mi consigliò " ch'io, per salvarmi l'anima, ' te tegnia sempre in palma Et " che io non aggia altra speranza ' „. La donna vorrebbe correr subito; il marito la persuade essere più utile interrogar l'albero di mattina.

---

(1) Il *Sollazzo* e il *Saporetto*, ecc., ed. Debenedetti, nel Suppl. n. 15 del " Giorn. stor. „, p. 45.

(2) Un giorno costei, che usava " per suo cenno „ una mascella conficcata in un bastone, avendo dimenticato il consueto segnale, sente l'amante venire: il marito è in casa! Come fare? Con una ballata ammonitrice avverte Carglicosta del frainteso, poi, quando è vicino, con un buon pretesto giustifica la sua presenza (È ispirato dal Boccaccio: v. Debenedetti, *Spunti e motivi boccacceschi in un antico novelliere umbro*, in " Miscellanea Renier „, Torino, 1912, p. 682).

Un'altra volta il Magagnato è sul punto di cogliere in flagrante gli adulteri. Senza perdersi d'animo, donna Fiore nasconde l'amante dietro il canniccio, e, col pretesto d'un sogno che le aveva rivelato che la vista marito era completamente guarita, gli copre l'occhio sano. Carglicosta può ancora una volta svignarsela (cfr. per questo motivetto, che in grazia della *Disciplina clericalis* ebbe un'immensa fortuna, W. Söderhjelm, *Oculus-Linteus*, in " Neuphilologische Mitteilungen „, 1912, p. 57 sgg.).

Questa quercia era internamente vuota e ad essa accedevasi per un foro di sopra. Nessuno lo sapeva. Il Magagnato andò a rimpiattarcisi dentro.

Donna Fiore giunge e incomincia a parlare collo ' spirito remposto quicie '. Lo spirito le domanda se essa desideri la morte del marito. " Non la morte sua „ risponde " io voglio, " ma potermela godere liberamente col mio amante „. La cosa è assai semplice. Lo spirito le dice ch'egli perderà la vista, se essa gli darà a mangiare, per venti giorni, delle *galline nere* e delle *lasagne*, e a bere del *buon vino*.

Donna Fiore, tornando, racconta tutto a Carglicosta, ch' è ben lieto di pagare le spese della " cura „ pur di godersela colla donna.

E così si fa per l'appunto quel che l'oracolo aveva consigliato. A poco a poco, a misura che gli si ammanniscono quelle certe vivande, il marito dà a credere che la sua vista s'indebolisce e finalmente, dopo venti giorni, è costretto ad andare col bastone, ed inciampa ad ogni passo. Carglicosta ormai va e viene a suo talento, e, sicuro del fatto suo, osa persino baciare donna Fiore in presenza del Magagnato, che fremendo stringe i denti.

In seguito il Magagnato prega un amico, promettendogli un buon compenso, di venirsi a nascondere in casa sua; da un altro ottiene di potersi valere della sua " rocchetta „. Ciò fatto, entra in casa e prega la moglie di condurlo in letto perchè da solo non può. Essa l'accompagna. Poi, secondo il solito, Carglicosta arriva e le si pone accanto amorosamente. Allora il marito, impaziente di vendetta, con un colpo di balestra uccide la femmina, e, coll'aiuto dell'amico, trascina Carglicosta, ben legato, alla " rocchetta „; per riscattarsi, il prigioniero deve pagare 6000 ducati.

*
* *

La principale differenza fra i due racconti consiste in questo, che il marito non si cela in un luogo sacro, ma entro il cavo d'un albero, al quale ha attribuito, creduto, virtù profetiche e di cui viene a rappresentare lo spirito.

Si potrebbe aggiungere che le vivande hanno un carattere

più determinato che nel *Panciatantra*: trattasi di galline nere in numero di venti.

Non è un elemento importante la diversità della forma del castigo: il castigo " orientale „ delle adultere consiste nel taglio del naso; qui la donna è uccisa con un colpo di balestra. L'amante è bastonato a morte nel *Panciatantra*: i costumi borghesi che noi possiamo conoscere traverso il Sercambi, il Sacchetti e il Prudenzani, ci mostrano i mariti punto alieni dal castigare gli amanti sorpresi con forti multe.

Già altra volta ho accennato che le astuzie della moglie (v. p. 3, n. 2) non entrano in nessuna redazione dell'" orbo che ci vede „, ond'è ben da credere che il Prudenzani per rendere la novella più ricca ed interessante abbia cucite due tradizioni, giuntegli dal *Decamerone*, e, indirettamente, dalla *Disciplina clericalis*, colla nostra storia. Per il rimanente, vedremo subito qual giudizio convenga pronunziare.

Le numerose redazioni raccolte di questa novella, si potrebbero dividere in due gruppi:

1° Più vicino, sostanzialmente, al *Panciatantra*, ove il marito, od altri per lui, celasi in chiesa, simulando la voce d'un santo o la voce divina;

2° Gruppo che si collega col " culto degli alberi „ ed ha il suo più antico rappresentante nella novella, or ora descritta, del *Sollazzo*.

Non intendo qui che di raccogliere alcuni appunti intorno a questo secondo ramo.

Che la novella già in oriente, o tra genti orientali, abbia assunta questa forma è assai probabile. La credenza che gli alberi possano essere popolati di spiriti ammonitori od onniscenti è diffusa non meno tra gli Indiani che tra i popoli semitici. Ed un inganno, ordito appunto sfruttando questa credenza, è ricordato nel *Panciatantra* stesso in una narrazione, che per essere contenuta nel 2° libro, lascierà dietro di sè una lunga scia. Alludo al dissidio tra il Savio e il Matto. E se così stanno le cose, la novella non aveva alcun bisogno di svestirsi di questo suo carattere come fanno le novelle per " adattamento „ quando vengono a trovarsi in contatto con una civiltà diversa da quella che le ha prodotte, chè l'accennata superstizione non è punto estranea all'occidente.

Certo, la nov. conservata dal Prudenzani è antichissima. Basta osservare che in un territorio assai lontano odesi ancora e con mirabili somiglianze. È bensì vero che dell'adulterio non si fa cenno, ma esso risulta dal complesso.

Una tale, raccontasi nella Russia Grande (1), s'annoia col vecchio marito, ed egli se n'avvede. Per provarla, un giorno, tornando dalla campagna, le racconta d'aver trovata una prodigiosa quercia che gli chiarì molti segreti. Poichè la donna vuole consultarla, il marito si nasconde entro il cavo dell'albero. Giunta, costei inginocchiatasi s' affretta a domandare come mai potrebbe rendere il consorte cieco, ed ottiene la solita risposta: " Füttere ihn nur fetter, brate eine Henne mit Schmeten, koche Graupen mit Milch, backe Talken mit viel Butter, dann wird er stockblind werden „. E così avviene. Credendolo cieco, convita i suoi amici, che s'ubriacano ben bene. Profittando d'un momento che la femmina è uscita per attingere dell'altro vino, il marito esce fuori, uccide tutti gli ospiti e pone in bocca a ciascuno una frittella, come s' essi fossero morti soffocati.

È troppo manifesto, chi ponga mente alle altre varianti ed alla gravità del castigo, che, se pur l'amante non è menzionato, tutta questa faccenda si collega cogli amori della donna, e che forse, anzichè d'uno, come altrove, trattasi qui di numerosi drudi.

Ciò che colpisce è l'albero incantato, una *quercia*, come presso il Prudenzani.

Insieme con questa andrà posta una narrazione raccolta a Kiew (2), per aversi ivi conservato l'albero che parla. Il servitore si nasconde entro la pianta ed alla padrona che passa per colà dà per consiglio di apprestare sia a lui, sia al padrone: " Mehltaschen und Eierspeisen..... Wonach sie beide stumm und wahnsinnig würden „. Così infatti avviene, ma, quando costei sta sollazzandosi coll'amante, i finti muti si slanciano su di lui e l'uccidono.

Troveremo nello stesso territorio, invece del semplice albero,

(1) J. Jaworskij, *Sanct Stölprian*, in " Ztsch. des Vereins für Volkskunde „. 8 (1898), p. 221.

(2) Jaworskij, p. 220.

delle pseudo-divinità silvestri (1). Queste ultime rappresentano un adattamento e una modificazione della forma più semplice e rudimentale.

Una femmina amoreggia con un giovanotto. Il marito se n'accorge e le dice: " Sono andato al bosco, e ho trovato Nicola Duplianscoi: tutto ciò che gli si domanda egli l'accorda „. Egli poi, assai per tempo, va nel bosco, trova un antico pino, si nasconde dentro. La donna fa cuocere " des pâtés, des pains ronds, des crèpes au beurre „, e s'avvia a pregare Nicola Duplianscoi. Giunge presso l'albero, vede un vecchione, e pensa: " Ecco il piccolo padre Nicola Duplianscoi, rivolgiamogli la nostra preghiera: Rendi cieco mio marito! „. Il vecchio le promette d'accontentarla, purchè lasci il paniere colle vivande, ed essa depostolo se ne va. Costui esce subito dall'albero, divora il contenuto della cesta, e ritorna a casa camminando a tentoni. Alla moglie che l'interroga risponde che ha perduto la vista. Essa l'accompagna a dormire. Il giovanotto non si fa lungamente aspettare, ed a lui l'amante offre delle frittelle, ch'egli si mangia con molto gusto. Temendo che soffochi a furia d'impinguarsene, la donna va a prendere del burro. Durante la sua assenza, il vecchio afferra una balestra e l'uccide, poi gli riempie la bocca di frittelle, come s'egli fosse soffocato, e ritorna a dormire.

Qui viene ad innestarsi un altro motivo, assai comune, quello del " prêtre qu'on porte „, che presentemente non ci interessa.

Altra versione:

La moglie d'un pope aveva un amante. L'operaio se n'era accorto, onde la donna pensò di disfarsene. Va da una fattucchiera, che la consiglia di recarsi nel bosco ad interrogare Nicola Duplianscoi. Essa acconsente. " L'ouvrier s'est complète- " ment barbouillé et a saupoudré sa barbe de farine, il monte " sur un sapin et gémit „. La donna subito gli domanda: " Piccolo padre Nicola, come potrò liberarmi del pope e dell'operaio? „. Esso risponde: " Sarebbe peccato ucciderli, rendiamoli ciechi. Domani fa cuocere molte frittelle, e imbevile di molto burro: essi ne mangeranno e perderanno la vista; inoltre dà loro delle ova: mangiatele, perderanno l'udito „. La popessa ritorna a casa

(1) *Kryptadia*, I, 240.

e s'occupa delle frittelle e delle ova. Il pope e l'operaio si disponevano ad andare ai campi, ma essa con sollecitudine, li fa mangiar ben bene, in conformità delle prescrizioni dello spirito. Mangiato ch'ebbero, dissero di veder tutto buio. La popessa li conduce " sur le poële ", e chiama senz'altro l'amante, col quale si diverte. A questo punto i due uomini discendono e li legnano di santa ragione.

Prima di finire, voglio ancora citare una novellina che si racconta a Charkow (1). Il servo d'una tale che amoreggia col parroco, una domenica, mentre essa è in chiesa, si nasconde nel coro ed ascolta le sue preghiere. La sventurata domanda come possa liberarsi del marito e del servitore. Dal suo nascondiglio costui le risponde: " Va domattina nel bosco e raccomandati a S. Iwan Kuščnyk ". La mattina seguente il servo la precede e va a nascondersi entro l'albero. Là giunta, la donna accende innanzi alla pianta un lume e incomincia a pregare. L'albero le risponde: " Koche Obstsuppe und Mehltaschen und brate eine Henne ", dopo la prima vivanda entrambi verranno sordi, dopo la seconda, ciechi, e dopo la gallina moriranno. E tutto avviene a questo modo. Morti i due pericolosi testimoni, la donna convita l'amante; ma essi a un tratto balzano fuori, li bastonano entrambi e li cacciano via.

È evidente che, se il servitore consiglia alla femmina di recarsi a pregare l'albero, ciò prova che al suo responso attribuivasi veramente fede. E la cerimonia del lume acceso presso la pianta, ci lascia intravedere oscuri riti sepolti in un'antichità remota.

Notisi che il servo poteva assai bene dal suo nascondiglio dare quella risposta che invece riserva alla pianta.

*
* *

Sin qui noi abbiamo ritrovati quasi tutti gli elementi della ballata del *Sollazzo*. Un punto però mi rimaneva ancora oscuro. È noto che presso molti popoli le galline nere son riguardate con un senso di superstiziosa paura, onde taluno potrebbe indursi a credere che questa piccola variante sia stata introdotta

(1) Jaworskij, p. 220-1.

dal poeta stesso per rendere alquanto più credibili ed efficaci le parole dell'oracolo. Invero, in parecchie novelline citate ricordansi bensì le galline, tuttavia piuttosto come vivande ghiotte e alquanto rare per la povera gente, che come cibi forniti d'una particolare virtù.

La novella originaria, io penso, suggeriva all'adultera d'apprestare vivande, o in forma o in numero tale da influire sulla sua piccola mentalità, sì ch'ella credesse potersi agevolmente con tal mezzo accecare un uomo. E le galline che ancora compaiono nelle novelle russe son forse elementi disgregati e privi ormai di significato d'un motivo che nel *Sollazzo* ha ancora una salda espressione.

Mi conferma in questo pensiero una redazione veronese (1). Ecco il consiglio dato alla donna per ottenere l'intento: " Hai tu galline a casa? „ — " Ne ho dodici e un gallo „. — " Ebbene, dagliele da mangiare, una per volta, e quando sarai al gallo vedrai che avrà perduta la vista „.

Non si tratta, è vero, di galline nere, ma il " consigliere „ influisce sulla donna col numero, che è il tredici.

È dunque certo che, anche per questo particolare, il Prudenzani non fece opera personale.

II.

Storia del Mangiacipolle.

La follìa di Marcone parve al Prudenzani (2) veramente degna di riso e scherno. Questo contadino, " perfido „ come

---

(1) *La mujer che 'olea copar so marì*, pubbl. da A. Balladoro, in " Niccolò Tommaseo „, I (1904), p. 85. Si divide in 3 parti: 1° alla voce dell'albero o del santo si sostituisce il consiglio del confessore, cioè, a dir meglio, del " marito confessore „ (v. per questo le note del Bolte, nell'op. cit., p. 606); 2° il " confessore „ persuade la donna ad accecare il marito colle vivande accennate e poi a buttarlo in un fiume; 3° ottenuto l'intento, la femmina conduce il marito lungo il fiume, ma quando proprio son vicinissimi all'acqua, egli spalanca gli occhi e la precipita giù, ove annega (la variante del " cieco annegato „ è comunissima: l'esempio più vecchio di quest'inserzione è fornito da un " meistergesang „ di H. Vogel, *Die Keskückhlein* (1541).

(2) Il *Sollazzo*, ed. cit., p. 70 (Pertinacia).

ogni altro villano, fatto prigione (non sappiamo perchè) venne in potere d'un certo Sbardellato (1), che non mancò, per istrappargli larghe promesse, di tormentarlo ben bene. E tra i martiri, Marcone, ch'era agiato, stabilì per sua taglia 30 fiorini. Ma poi il pensiero di dover pagare la bella somma non gli lasciava pace, e di sua bocca uscivano continui lamenti.

Lo Sbardellato che l'udiva, gli propose (per compassione!!) " tre partiti „:

Se un ne fai, agia per carte
Che sirai fuor di presgione.

Marcone s'affretta ad accettare:

Vuoi mangiar(e) trenta cipolle?
Vuoi tu trenta bastonate?
Se non, fa che sien pagate
Fiorin trenta, ch'è tua talglia.

Per quanto le cipolle sian grosse, par questo ancora il più lieve castigo. Il villano mangia e mangia, ma giunto alla ventesima è costretto a domandare pietà:

. . . . . io crepo et ardo!
Non ne va più giù boccone.

E tuttavia, prima di pagare, vorrebbe sostenere le bastonate: lo Sbardellato l'accontenta e con tutte le sue forze lavora a rompergli la persona. Dopo 28 colpi, quando la sua pertinacia par così vicina alla vittoria, Marcone si sente venir meno, e domanda pietà, disposto a pagare i fiorini d'oro. Così fece e poco dopo potè ritornarsene a casa, ma così malconcio che tutte

(1) Si potrà ricordare, data l'estrema rarità del nome, che ai tempi del Prudenzani visse un Conestabile di 125 fanti ai servigi di Francesco Sforza, che chiamavasi " Sbardellato da Civita Ducata „. Costui, d'accordo con Niccolò Piccinino, tentò di tradire il suo signore (luglio 1434), che, avvisato, lo pose alla tortura senza però riuscire a strappargli la confessione; poi " perchè era guasto, lo fe' ben medicare e tennelo seco „ (v. *Cronache e Statuti della città di Viterbo*, ed. Ciampi, Firenze, 1872, p. 143-4).

le medicine riusciron vane, e morì. Naturalmente fu dannato, come responsabile della sua morte.

A le spese di Marchone
Ridarem (comme fo folle!);
De denari et de cipolle
Fo corecto et de bastone.

*
* *

La novella ha una lunga storia.

Se noi ci rivolgiamo, come di dovere, all'oriente, nel *Tantrākhyāyika* ritroveremo tutta quanta la nostra ballata:

Un ladro di cipolle è costretto dai giudici a scegliere tra il pagare 100 rupie d'ammenda, il ricevere 100 bastonate, il mangiare 100 cipolle. Tenta quest'ultima prova, che non gli riesce che in piccola parte (ne divora 7 od 8), poi la seconda, che parimente gli fallisce, onde si rassegna a pagare fra le risa della gente (1).

Assai per tempo penetrava questo esempio tra i popoli semitici. È da notare che, invece delle cipolle, troveremo un pesce marcio. Il re manda un servo al mercato a comprargli un pesce. Come costui torna con un pesce andato a male, il re gli dice: " o mangialo, o ricevi 100 legnate, o paga un'ammenda „. Tenta bensì d'inghiottire l'amaro boccone, e vanamente pure tenta di sopportare i colpi, sì che da ultimo conviene che paghi.

Questa variante si raccomanda per la sua antichità. La pesicta che contiene il nostro racconto s'attribuisce da alcuni al IV sec. D. C.; altri vorrebbe assegnarla al 700 circa. L'esempio è posto in bocca a Rabbi Ismaele che viveva nel II sec. D. C. (2).

Come sia giunto al Prudenzani è difficile dire. Ma poichè trattasi di una di quelle narrazioni che ai predicatori offrivano materia di esempio, la sua diffusione e trasmissione orale è per questo assicurata.

---

(1) F. Hertel, *Eine indische Quelle zu La Fontaine* (*Contes et Nouvelles*, I, 11), in " Studien zur vgl. Literaturgesch. „, **5**, 131. Altre recensioni che con questa si collegano son ricordate dallo stesso, *Tantrākhyāyika, die älteste Fassung des Pañcatantra*, Leipzig u. Berlin, 1909, **1**, 139.

(2) Per questa ed altre redazioni affini v. T. Zachariae, *Die indische Erzählung vom Zwiebeldieb*, in " Studien „ cit., **6**, 362 sgg.

In Occidente il racconto entrava nel gran filone della satira contro il villano. Con quella del *Sollazzo* coincide la duplice redazione conservata dalla *Summa praedicantium* di Giovanni Bromyard: (1)

..... ut sic in processu suo illi assimiletur *rustico*, qui potius elegisse legitur *quinquaginta cepas* quam sustinere *quinquaginta ictus* vel *magnam* quam *dominus* postulaverat dare *pecuniam*. Sed cum tot cepas comedisset et tot ictus sustinuisset, quod plures nec concedere nec sustinere poterat, pecuniam solvit primo requisitam.

..... sicut de illo qui potius quam *certam summam* daret *domino* suo, elegit *quinquaginta* comedere *cepas*, deinde *quinquaginta* sustinere *ictus*. In quibus duobus dum multum fuisset vexatus, de pecunia petita ultimum exsolvit quadrantem.

Dato il carattere dell'opera (la *Summa* è un Manuale in servizio dei predicatori) è naturale che ivi non s'abbia più d'un semplice schema. Sta però di fatto che qui, come in tutte le successive elaborazioni, trattasi di *cipolle* anzichè di *pesci*, il che è quanto dire che sulla diffusione del racconto in occidente non operò la variante semitica.

Manca la motivazione della pena.

Anche presso il Pauli, che dal Bromyard deriva, è espressa in modo indeterminato: " es was ein buer der wider sein iunckern gethon „. Il padrone gli fa la solita proposta: " entweders er solt .L. rowe zülblen essen, oder .L. streich uff seinen blossen rucken lassen schlagen, oder .L. schilling geben „. Il villano era ricco, ma, piuttosto di pagare, s'appigliò alle cipolle: dopo 3 o 4 cede e passa alle bastonate: dopo 3 o 4 s'induce a sborsare i quattrini.

Come è noto, Hans Sachs (2) due volte trattò questo motivo che gli era ispirato dal Pauli. Salvo che, a rendere più interessanti e significativi questi casi, venne a fondere parecchi altri elementi novellistici: il villano risulta tanghero e malizioso, e però meritevole d'un buon castigo.

(1) Citato dall'Oesterley nelle note al *Schimpf und Ernst* del Pauli, Stuttgart, 1866, p. 512.

(2) *Sämtliche Fabeln und Schwänke*, ed. Goetze e Drescher, Halle, 1894, 2, n. 349; 5, n. 627.

***

Apro una breve parentesi per accennare ad una torbida tradizione, che, misera e guasta, giunse all'orecchio di Giordano Bruno; nella penultima scena del *Candelaio* (1582) egli l'andò sviluppando a' danni d'un pedante, Mamphurio. Non volendo costui sborsare certa quantità di scudi, Sanguino l'obbliga a scegliere fra " diece spalmate con questo ferro di correggia „ ed " un cavallo de cinquanta staffilate... a brache calate „. Dopo alcune " spalmate „, si rassegna piuttosto ai colpi di staffile: i lazzi si moltiplicano, il pedante sbaglia il conto, convien ricominciare un paio di volte. Sinchè, non potendone proprio più, esclama: " *Misericordia*: prendetevi gli scudi, la giornea, e tutto quanto quel che volete, *dimittam vobis*... „

Doveva essere ben poco diffusa la novella nella sua *vera* forma, se questo frammento ebbe una certa fortuna benchè manchi il tratto così comico e così adatto alla scena e alla grossolanità dei gusti teatrali del tempo, delle indigeste cipolle.

L'opera tradotta nel 1633 col titolo *Boniface et le Pédant*, fornì a Molière argomento per una scenetta (A. I, Int. II) del *Malade imaginaire* (1ª rappresentazione 10 febbraio 1673). Polichinelle, preso dagli Arcieri che pretendono 6 pistole, rifiutasi di pagarle col pretesto di non aver quattrini. E costoro:

Au défaut de six pistoles,
Choisissez donc, sans façon,
D'avoir trente croquignoles,
Ou douze coups de bâton.

Dopo 15 " croquignoles „ preferisce le bastonate; dopo 6 colpi, paga senz'altro le 6 pistole (1).

***

Di questo tenue rivoletto giovava fare ricordo, solo perchè la scenetta del *Boniface* solevasi addurre come fonte d'un no-

(1) Nell'Ed. dei *Grands Écrivains*, 9, p. 334; a p. 493 è riprodotta la scena, or ora accennata, del *Candelaio*.

tissimo " conte „ del La Fontaine, *conte d'un Paysan qui avait offensé son Seigneur* (1665). È inutile indugiarsi a confutare un'opinione che poteva solo sussistere quando non si conoscevano precedenti e redazioni parallele ben più vicine al " conte „ che non sia la scena di Giordano Bruno. E lo Zachariae ha perfettamente ragione scrivendo: " meines Erachtens haben wir gar kein Recht, Giordano Bruno, La Fontaine und Molière miteinander zu vergleichen und diesen Vergleich etwa zu ungunsten La Fontaines ausfallen zu lassen „.

Il titolo originario era *Conte d'un Gentilhomme espagnol et d'un Païsan, son vassal*; altre varianti avremo occasione di osservare in seguito (1). Par superfluo riassumere un conto che la maggior parte dei lettori conoscerà a memoria:

Un paysan son seigneur offensa:
L'histoire dit que c'étoit bagatelle;
Et toutefois ce seigneur le tança
Fort rudement: ce n'est chose nouvelle.

Per sua bontà il padrone, invece di farlo morire, come avrebbe diritto, gli lascia la scelta:

. . . . . ou de manger trente aulx,
J'entends sans boire et sans prendre repos;
Ou de souffrir trente bons [*var.*: cinquante] coups de gaules,
Bien appliqués sur tes larges épaules;
Ou de payer sur-le-champ cent écus.

Poichè a queste proposte mostruose il contadino grida: misericordia! il gentiluomo veramente offeso che questo disgraziato osi ancora rispondere, ordina senz'altro che lo si impicchi. — Che fare? Convien dunque provare il triste giuoco. — Dopo 12 teste d'aglio non ne può più: vuol bere. Gli si offre gaiamente del buon vino. Ormai la scelta è limitata ai colpi di bastone e agli scudi. Prima d'indursi a pagare, fa fidanza sulla forza dei suoi muscoli. Ai colpi vigorosissimi, prima si raccomanda a Gesù, poi digrigna i denti, si curva, saltella, il viso fa un'orribile smorfia, e infine grida disperatamente. Il signore continua, colla sua consueta gravità, a dar ordine ai manigoldi

(1) Nell'Ed. dei *Grands Écrivains*, 4, 131.

di flagellare senza posa. Dopo 20 bastonate, finalmente il contadino s'arrende e paga.

Ce paysan eut beau s'humilier;
Et, pour un fait assez léger peut-être,
Il se sentit enflammer le gosier,
Vuider la bourse, émoucher les épaules...

Certo, tolto di mezzo, ed a ragione, il *Boniface*, rimaniamo completamente al buio. Dove mai l'avrà pescata il La Fontaine? Altri andò arzigogolando sopra una " communication orale „ del d'Herbelot, ma converrebbe almeno esser sicuri che il d'Herbelot conobbe questo motivo, il che io non garantirei. D'altra parte, perchè proprio pensare all'Oriente? Da più secoli la novella correva, se non proprio in Francia, in paesi vicini. Lo Zachariae pensa che la fonte immediata sia tedesca, e ravvicina il principio del " conte „ a quello della facezia del Pauli (Pauli: " es was ein buer der wider sein iunckern hat gethan „; La Fontaine: " un paysan son seigneur offensa „). Ma il La Fontaine non ha mai ricavato nulla direttamente da scrittori tedeschi.

Fu già osservato che nella prima redazione l'A. aveva localizzata la scena in Ispagna, e questa circostanza, se non fu dettata da ragioni di prudenza, potrebbe far sospettare una fonte spagnuola.

Forse nuove indagini risolveranno l'interessante problema.

Prima di finire, voglio ancora accennare ad una versione danese (1). Il contadino che, facendo legna, ha ingannato il suo signore, deve presentarglisi ed è costretto da lui a pagargli 20 talleri, ovvero a ricevere 50 bastonate od a mangiare 20 cipolle. Incomincia da queste, poi passa alle seconde e da ultimo paga.

Che su questa novellina abbia agito il " conte „ io non credo, sia perchè i numeri non corrispondono, sia perchè il carattere della narrazione continua la satira contro il villano, rivelandosi quindi a noi come un frutto popolaresco e tradizionale.

Le poche redazioni a noi note si possono dividere in due gruppi:

---

(1) *Nit Vade mecum til Tidsfordriv*, Kisbenhavn, 1783, n. 635 (p. 268).

1° Gruppo indiano (*cipolle*).

2° Gruppo semitico (*pesce marcio*).

Il primo ebbe una grande fortuna, chè molti secoli dopo il suo nascere ci risulta superstite in vari territori e lontani l'uno dall'altro; al secondo invece non arrise che una vita effimera e puramente letteraria.

Originariamente dovevasi proprio trattare d'un ladro di cipolle. Il carattere ladresco del contadino risulta ancora presso Hans Sachs e nella redazione danese. Altrove la colpa non è espressa, il che non meraviglia, perchè l'interesse novellistico consisteva soprattutto nella triplice prova.

Nel racconto primitivo il numero delle cipolle, delle bastonate e delle monete era certo uguale: e ciò s'osserva ancora in tutte le redazioni, fuorchè in quella del La Fontaine e nella danese.

Che poi questo numero sia differente da testo a testo è cosa che non può colpire: l'identità sarebbe senz'altro una prova eloquente di derivazione diretta.

Osservo infine che solo presso il Prudenzani il contadino muore, ed è probabilmente una variante scaturita dal suo cervello.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Novembre 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe NACCARI, ed i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, PEANO, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e SEGRE, Segretario.

Vien letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente è lieto di poter dare buone notizie della salute del Socio JADANZA, che è ormai quasi perfettamente guarito.

Il Socio GUARESCHI offre in omaggio un suo opuscolo: *Ascanio Sobrero nel centenario della sua nascita*; ed il Socio FILETI la 16ª edizione della sua *Guida alla Analisi chimica qualitativa*.

Il Socio SALVADORI legge la Commemorazione del Socio corrispondente SCLATER.

Il Socio PEANO presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota di C. POLI: *Sulla dimostrazione della integrabilità delle funzioni continue*; ed il Socio GUIDI una Nota di G. COLONNETTI su *L'estensimetro di Cambridge*, ed un'altra di G. ALBENGA: *Su di alcune teorie approssimate della lastra piana*.

Per le tre Memorie, rispettivamente dei Dottori Favaro, Mago, Vanzetti, presentate nelle ultime adunanze della Classe, vengono successivamente lette le Relazioni dai Soci Naccari (per incarico del collega Jadanza), Peano (anche a nome del Socio D'Ovidio), Foà (a nome pure del Socio Fusari). Accogliendo le proposte fatte, si delibera, con tre successive votazioni unanimi, la stampa di quelle Memorie nei volumi accademici.

Infine il Socio Fusari presenta, per questi medesimi volumi, un nuovo lavoro del Dott. Alfonso Bovero: *Sulla fine struttura e sulle connessioni del ganglio vestibolare del nervo acustico*. Riferiranno su di esso i Soci Foà e Fusari.

LETTURE

Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica.

Nota di E. BOMPIANI

> " Un grand avantage de la géométrie (sur l'analyse) c'est précisément que les sens y peuvent venir au secours de l'intelligence, et aident à deviner la route à suivre, et bien des esprits préfèrent ramener les problèmes d'analyse à la forme géométrique ".
>
> POINCARÉ.

§ 1. Preliminari.

1. — Il concetto sul quale s'imperniano tutti i metodi d'integrazione delle equazioni alle derivate parziali è quello di *caratteristica*. Esso può ritenersi stabilmente definito dai lavori del Darboux e da quelli che vi si collegano, sia per le equazioni di prim'ordine ad un numero qualsiasi di variabili indipendenti, sia per le equazioni (e sistemi di equazioni) del 2° ordine, e di ordine superiore, a due variabili indipendenti [1].

L'estensione al caso di più variabili indipendenti del concetto di caratteristica può farsi in più modi, in relazione alla proprietà delle caratteristiche che si vorrà generalizzare: poichè, in generale, le loro proprietà apparterranno ora ad enti diversi [2].

Le equazioni alle derivate parziali di 2° ordine, lineari ed omogenee, in due variabili si possono distinguere (proiettivamente) in due tipi: parabolico e non parabolico. Se si esamina un sistema di più equazioni simultanee si pone subito la do-

---

[1] Cfr. E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Paris, Hermann), t. II (1898), ch. X, n. 208.

[2] L. c. [1], ch. X, n. 219.

manda: È possibile in generale una classificazione analoga (e la conseguente riduzione a forme determinate)? Se ciò non è in generale, quali particolarità deve presentare il sistema perchè quella riduzione sia possibile?

A tali sistemi di equazioni lineari ed omogenee darò il nome di sistemi a *caratteristica*: mi sembra notevole il fatto che questi sistemi si presentano in una interessante ricerca di geometria iperspaziale cui accennerò in seguito. Eccone intanto la definizione.

2. — Siano date più equazioni simultanee, lineari ed omogenee alle derivate parziali del 2° ordine in un numero qualsiasi di variabili indipendenti; relativamente a ciascuna di esse può introdursi (come d'ordinario) il concetto di ipersuperficie caratteristica e il cono quadrico delle sue normali in un punto (cfr. più in esteso il n. 7); i coni così costruiti per le singole equazioni non hanno in generale parti comuni; nè possono coincidere se supponiamo, come appunto faremo in seguito, che dalle equazioni date non possano ricavarsi equazioni del primo ordine. Perchè essi abbiano una parte comune, che si dirà *caratteristica* del sistema dato, debbono spezzarsi in due iperpiani, dei quali uno (*caratteristica*) è fisso per tutte le equazioni, mentre l'altro varia da equazione ad equazione.

Date più equazioni simultanee *tutte* dello stesso ordine n (> 2) si potranno costruire coni d'ordine n come precedentemente; ma, se essi debbono avere una parte comune, questa potrà essere un iperpiano, o un cono quadrico, ..., o un cono d'ordine $n - 1$; non d'ordine n se escludiamo che dalle equazioni date possano ricavarsi una o più equazioni d'ordine $n - 1$. La parte comune potrà dirsi *caratteristica* del sistema.

Dati più gruppi di equazioni simultanee lineari ed omogenee nelle derivate parziali di una stessa funzione, comprendente ciascuno equazioni dello stesso ordine 2, ..., n, perchè possa definirsi una *caratteristica* comune a tutt'i gruppi considerati occorre che questa sia un iperpiano. Per poter comprendere anche questo caso definiremo equazioni simultanee a *caratteristica* quelle (lineari, omogenee, alle derivate parziali) per le quali i coni sopraddetti si spezzano tutti in un iperpiano fisso e nella parte residua variabile da equazione ad equazione.

3. — In mancanza di un mezzo diretto d'integrazione di queste equazioni, conviene servirsi, per lo studio delle relazioni che passano fra un certo numero d'integrali e delle loro derivate, della rappresentazione geometrica seguente [3].

Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ soluzioni linearmente indipendenti delle equazioni date: per ogni sistema di valori delle k variabili indipendenti $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ $(n > k)$ si possono assumere gli $n+1$ valori delle x come coordinate proiettive omogenee di un punto x in uno S_n. Al variare delle τ il punto x descrive una varietà V_k che *rappresenta* il sistema di equazioni dato (o meglio il gruppo di soluzioni da cui siamo partiti) [4]. Poichè le equazioni sono lineari ed omogenee, una trasformazione proiettiva dello S_n muta il gruppo delle $n+1$ soluzioni scelto in un altro pure di $n+1$ soluzioni fra loro indipendenti; sicchè interesserà ricercare quei caratteri della V_k che rimangono inalterati per trasformazioni proiettive. In altri termini, possiamo formulare, dal nostro punto di vista, il problema dell'integrazione così:

Caratterizzare proiettivamente la V_n *così costruita per* $n+1$ *soluzioni generiche.*

Mi sono proposto questo problema per le equazioni simultanee a caratteristica di 2° e di 3° ordine. Fra i resultati ottenuti scelgo come più espressivi i seguenti:

Le varietà che rappresentano k *equazioni a caratteristica del 2° ordine (fra loro indipendenti) in* k *variabili, ed eventualmente altre equazioni del 2° ordine indipendenti dalle prime* k, *sono necessariamente rigate con carattere di sviluppabile (cioè con spazio tangente fisso lungo tutta una generatrice). Se la varietà* V_k *rappresenta esattamente* k *equazioni a caratteristica (cioè non altre dello stesso ordine e da quelle indipendenti) essa è un cono di prima specie.*

Le varietà V_k *che rappresentano* m *gruppi di tali equazioni a caratteristica del 2° ordine si compongono di* ∞^{k-m} S_m *aventi*

[3] Analoga a quella comunemente usata per l'equazione differenziale ordinaria, lineare ed omogenea; vedasi la Nota del Segre, *Su una classe di superficie degli iperspazii legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* [" Atti Accad. reale delle Scienze di Torino ", vol. XLII (1906-1907), pp. 1047-1079].

[4] Questa V_k potrebbe anche chiamarsi *varietà integrale* del sistema.

lungo ogni spazio generatore uno S_k *tangente fisso; se la* V_k *rappresenta esattamente (nel senso di prima)* m *gruppi di tali equazioni è necessariamente un cono di specie* m.

Se si considerano ν equazioni simultanee a caratteristica del 2° ordine, con $\nu < k$, occorre distinguere due casi che, per ragioni che appariranno in seguito, si diranno *parabolico* e *non parabolico*: nel primo caso, *le* V_k *che rappresentano esattamente* ν *equazioni si compongono di* $\infty^{k-\nu}$ *coni*; nel secondo, si possono anche caratterizzare le V_k geometricamente, ma in modo meno semplice (cfr. n. 18).

Se infine insieme alle ν equazioni del 2° ordine (nel caso parabolico) consideriamo $\frac{(k-\nu)(k-\nu+1)}{2}$ equazioni, pure a caratteristica, del 3° ordine, indipendenti da quelle (e non altre), si ha nel caso più generale (e per maggiori dettagli cfr. il § 7) il risultato:

Le varietà V_k *che rappresentano un tal sistema si compongono di* $\infty^{k-\nu}$ *coni di prima specie aventi i loro vertici sopra uno* $S_{k-\nu}$.

4. — Una parola sul metodo. Come sarà mostrato (n. 7), segue dalla definizione di equazioni simultanee a caratteristica che, con un (eventuale) preliminare cambiamento delle variabili indipendenti, i gruppi di termini contenenti in ciascuna equazione le derivate d'ordine più alto possono considerarsi come derivate di una espressione (identica per tutte le equazioni) lineare ed omogenea nelle derivate prime della funzione incognita.

Ottenuta questa forma del sistema di equazioni si procede a caratterizzare la V_k del n. precedente facendo uso di due osservazioni. La prima riguarda l'arbitrarietà della scelta di alcune delle linee su cui variano le τ separatamente entro la V_k: l'altra riguarda le condizioni d'integrabilità, alcune delle quali possono scriversi senza alcun calcolo e rivelano l'esistenza, entro la V_k, di varietà caratterizzate proiettivamente (p. es. sviluppabili). L'arbitrarietà che rimane nella loro scelta (per effetto della prima osservazione) determina la natura della V_k.

Risulta già da questo cenno quale sia il vantaggio delle considerazioni geometriche sull'indagine puramente analitica: prima perchè non occorre scrivere tutte le condizioni d'integra-

bilità e quelle adoperate danno un carattere *intrinseco* della V_k; poi perchè dall'aver riconosciuto questo fatto si caratterizza la V_k stessa in virtù di teoremi noti.

Le osservazioni indicate possono sfruttarsi anche per equazioni d'ordine superiore al terzo: non m'è parso che, per ora, valesse la pena di farlo. Il passaggio dalle equazioni del secondo a quelle del terzo ordine presentava invece un vero interesse: essendo necessario per queste di ricorrere alla nozione di *indice di sviluppabilità* da me introdotta in altra occasione ([5]).

5. — Il problema geometrico che si riattacca a questa ricerca è quello di caratterizzare le V_k per le quali la varietà luogo degli spazi tangenti ha dimensione minore dell'ordinaria. Se la V_k ($k \geq 3$) deve soddisfare a sole k equazioni indipendenti del 2° ordine, queste sono a caratteristica, e quindi la V_k è un cono. Un problema analogo per gli spazi 2-tangenti ([6]) si ricollega alle equazioni a caratteristica del terz'ordine.

Un argomento in certe parti affine a quello del presente lavoro è stato studiato dal Dr. Terracini nella Memoria: *Alcune questioni sugli spazî tangenti e osculatori ad una varietà* (che verrà pubblicata in questa raccolta).

Però, pur proponendoci inizialmente uno stesso problema, il Dr. Terracini ed io ne affrontiamo due lati diversi, incontrandoci solo nel teorema del n. 12, al quale giungemmo contemporaneamente, per diverse vie.

Più che l'interesse geometrico, di per sè evidente, a me preme rilevare quello analitico dei risultati ottenuti.

Essi assegnano in ciascuno dei casi studiati una forma alla

([5]) Cfr. *a)*: *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi* [" Proceedings of the fifth international Congress of Mathematicians „ (Cambridge, 1912), vol. II, pp. 22-27];

b): *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* [" Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo „, t. XXXVII (1914), n. 2].

([6]) Spazio 2-tangente è lo spazio lineare di dimensione minima contenente l'intorno di primo e di secondo ordine di un punto di una varietà; cfr. la mia Nota, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* [" Atti Reale Accad. delle scienze di Torino „, vol. XLVIII (1912-1913), pp. 393-410], n. 5, nota ([10]).

quale l'integrale generale deve necessariamente ridursi con un opportuno cambiamento di variabili indipendenti.

Però l'effettiva riduzione dipende dalla conoscenza di integrali particolari del sistema.

§ 2. Generalità sulle equazioni a caratteristica.

6. *Locuzioni e notazioni.* — Siano date $r+1$ equazioni (fra loro indipendenti) alle derivate parziali di una sola funzione incognita lineari ed omogenee, di 2° ordine. Una soluzione delle $r+1$ equazioni è pure soluzione d'ogni altra equazione che si ottenga dalle precedenti con combinazioni lineari ed omogenee (i cui coefficienti possono essere funzioni delle variabili indipendenti).

Un gruppo di $r+1$ equazioni, indipendenti fra loro, ottenute con combinazioni lineari ed omogenee da quelle del gruppo dato si dirà perciò *equivalente* a quest'ultimo. La totalità di tutti i gruppi equivalenti ad uno dato si dirà *sistema* di equazioni; il sistema è perciò definito da uno qualsiasi dei gruppi di $r+1$ equazioni indipendenti in esso contenuti; si dirà r la *dimensione del sistema*; 2 l'*ordine* (7).

Diremo che un sistema è *chiuso* quando le equazioni dello stesso ordine che da esso si possono ottenere per derivazione ed eliminazione appartengono al sistema stesso.

Le nozioni di sistema e di sistema chiuso sono invarianti rispetto alle trasformazioni delle variabili.

Analogamente, dati più gruppi di equazioni di ordini diversi, p. es. del 2° e del 3°, formeremo un sistema del terz'ordine associando al gruppo di equazioni del terz'ordine quelle (pure di terz'ordine e fra loro indipendenti) che si ottengono derivando le equazioni del 2° ordine. Diremo che il sistema misto così formato (cioè la totalità delle equazioni di 2° e di 3° ordine che si possono ottenere combinando linearmente ed omogeneamente le equazioni date e quelle ad esse associate) è chiuso quando le equazioni di 3° e di 2° ordine che si possono trarre dal sistema con operazioni di derivazione ed eliminazione appartengono

(7) Mi pare utile definire un sistema di equazioni differenziali in questo senso, per le stesse ragioni per cui conviene parlare di *spazio* definito da alcuni suoi punti.

al sistema stesso. Anche qui le nozioni di sistema misto e di sistema misto chiuso sono invarianti rispetto alle trasformazioni delle variabili.

Analogamente per le equazioni di ordine superiore (delle quali però non avremo occasione di servirci).

Per brevità di scrittura introduciamo le notazioni [8]:

$$x = x(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k); \qquad x^1 = \frac{\partial x}{\partial \tau_1}, \ldots, x^k = \frac{\partial x}{\partial \tau_k};$$

$$x^{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2_1}, \; x^{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}, \ldots$$

Punto *derivato* rispetto a τ_1, p. es. di un punto x (di coordinate x_i), è il punto x^1 di coordinate $x^1_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1}$.

7. *I due tipi di sistemi di equazioni a caratteristica del secondo ordine.*

Siano date ν equazioni simultanee alle derivate parziali, del 2° ordine, lineari ed omogenee

$$(1) \qquad \sum_1^k {}_{il} A^{(s)}_{il} x^{il} + \sum_1^k {}_i B^{(s)}_i x^i + C^{(s)} x = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ove le A, B, C sono funzioni di $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$; noi facciamo l'ipotesi che al sistema da esse definito non appartengano equazioni del prim'ordine.

Nello spazio a k dimensioni S_k [9] ove si assumono come coordinate proiettive *non* omogenee le $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ conviene considerare i coni quadrici

$$(2) \qquad \sum_1^k {}_{il} A^{(s)}_{il} T_i T_l = 0$$

---

[8] Per il metodo e per le notazioni qui riportate cfr. la Memoria del Prof. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* [" Rendic. del Circ. Matem. di Palermo ", t. XXX (1910), pp. 87-121].

[9] Credo opportuno avvertire il lettore che la rappresentazione iperspaziale di questo n. non ha a che vedere con quella di cui è parola al n. 3 e che costituisce la base del metodo di questo lavoro. Questa rappresentazione del n. 7 serve a trovare una forma semplice per le equazioni che definiscono il sistema ed è quella comunemente usata: vedasi Coulon, *Sur l'intégration des équations aux dérivés partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques* [" Thèse ", Paris, Hermann, 1902]; mentre quella del n. 3 serve a caratterizzare proiettivamente la varietà integrale del sistema.

aventi il vertice nell'origine, e le generatrici parallele alle normali alle *ipersuperficie caratteristiche*, integrali di

$$\Phi^{(s)}(f) \equiv \sum_{1}^{k}{}_{ii} A_{ii}^{(s)} \frac{\partial f}{\partial \tau_i} \frac{\partial f}{\partial \tau_i} = 0$$

nel punto di coordinate $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$: le T indicano coordinate correnti; le *funzioni* $\Phi^{(s)}(f)$ si dicono *caratteristiche* delle singole equazioni.

Troviamo subito che *se le* (1) *sono a caratteristica la dimensione del loro sistema è* $\leq k-1$, cioè il numero delle equazioni indipendenti fra le date è $\leq k$ (numero delle variabili ind.).

Infatti, per definizione di equazioni a caratteristica (n. 2), i coni (2) debbono tutti spezzarsi in due iperpiani dei quali uno, che diremo *iperpiano caratteristico*, è fisso per tutte le equazioni; l'altro iperpiano, variabile da equazione ad equazione del sistema, potrà al più descrivere tutto il sistema ∞^{k-1} degli iperpiani uscenti dall'origine nello S_k, entro il qual sistema k sono linearmente indipendenti. D'altra parte non possono esservi due equazioni (1) indipendenti con lo stesso cono (2) (e quindi con uno stesso iperpiano variabile), perchè se vi fossero si potrebbe ricavare da esse un'equazione del 1° ordine, ciò che abbiamo escluso.

Quindi se le (1) sono fra loro indipendenti dev'essere $\nu \leq k$.

Se $\nu = k$, cioè se l'iperpiano variabile descrive *tutto* il sistema ∞^{k-1} nominato, esso *deve* venir a coincidere in una sua posizione con l'iperpiano fisso; cioè esiste *necessariamente* nel sistema definito dalle (1) un'equazione per la quale il cono (2) corrispondente si spezza nell'iperpiano caratteristico contato due volte: più brevemente diremo (secondo la locuzione ordinaria) che l'equazione ha *caratteristica doppia*.

Si presenta spontanea la definizione seguente:

Un sistema a caratteristica si dice parabolico quando possiede un'equazione a caratteristica doppia [10].

L'ultimo resultato s'enuncia allora così:

[10] Nel senso ordinario: due di tali equazioni non possono esistere (con la stessa caratteristica) perchè da esse potrebbe ricavarsi un'equazione del 1° ordine, ciò che abbiamo escluso.

Il sistema definito da k *equazioni a caratteristica del 2° ordine (in* k *variabili) fra loro indipendenti è necessariamente parabolico.*

Se invece è $\nu < k$ può verificarsi l'una o l'altra delle due eventualità:

1° l'iperpiano variabile viene in una sua posizione a coincidere con l'iperpiano caratteristico fisso;

2° l'iperpiano variabile non viene mai a coincidere con l'iperpiano fisso.

Nel 1° caso il sistema possiede un'equazione a caratteristica doppia, e si dirà perciò *parabolico*; nel 2° caso non esiste nel sistema alcuna equazione a caratteristica doppia, e si dirà perciò *non parabolico* (11).

In ogni caso i ν iperpiani che dipendono dall'indice s costruiti per le equazioni (1) potranno assumersi come quelli di equazioni $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, ..., $T_\nu = 0$, mentre l'iperpiano fisso avrà un'equazione del tipo

$$a_1 T_1 + a_2 T_2 + \ldots + a_k T_k = 0\,;$$

ciò significa che:

È sempre possibile, con una trasformazione delle variabili indipendenti, dare alle equazioni che definiscono un sistema a caratteristica la forma:

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial\tau_1}(a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k) + \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \ldots + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\tau_2}(a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k) + \alpha_{21} x^1 + \alpha_{22} x^2 + \ldots + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{2k} x^k + \alpha_{20} x = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial\tau_\nu}(a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k) + \alpha_{\nu 1} x^1 + \alpha_{\nu 2} x^2 + \ldots + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{\nu k} x^k + \alpha_{\nu 0} x = 0 \end{array}\right.$$

(11) In queste ricerche di carattere proiettivo non si distingue il reale dall'immaginario e quindi non v'è luogo ad ulteriori distinzioni.

o, se si vuole, l'altra equivalente

$$a_1 x^{11} + a_2 x^{12} + \ldots + a_k x^{1k} + \beta_{11} x^1 + \beta_{12} x^2 + \ldots + \beta_{1k} x^k + \beta_{10} x = 0$$
$$a_1 x^{21} + a_2 x^{22} + \ldots + a_k x^{2k} + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} x^2 + \ldots + \beta_{2k} x^k + \beta_{20} x = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1 x^{\nu 1} + a_2 x^{\nu 2} + \ldots + a_k x^{\nu k} + \beta_{\nu 1} x^1 + \beta_{\nu 2} x^2 + \ldots + \beta_{\nu k} x^k + \beta_{\nu 0} x = 0$$

ove le a, α, β sono funzioni di $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$.

Nel *caso parabolico* l'iperpiano $a_1 T_1 + a_2 T_2 + \ldots, + a_k T_k = 0$ appartiene al sistema lineare definito da $T_1 = 0, \ldots, T_\nu = 0$, quindi $a_{\nu+1} = \ldots = a_k = 0$; con un eventuale cambiamento di variabili può questo iperpiano supporsi coincidente con $T_1 = 0$, p. es. Ne segue:

Se il sistema definito dalle ν *equazioni* (1) *è parabolico, ciò che avviene necessariamente se* $\nu = k$, *al sistema* (1) *può darsi la forma:*

$$x^{11} + \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \ldots + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0$$
$$x^{12} + \alpha_{21} x^1 + \alpha_{22} x^2 + \ldots + \alpha_{2k} x^k + \alpha_{20} x = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{1\nu} + \alpha_{\nu 1} x^1 + \alpha_{\nu 2} x^2 + \ldots + \alpha_{\nu k} x^k + \alpha_{\nu 0} x = 0$$

Nel caso *non parabolico* l'iperpiano $a_1 T_1 + a_2 T_2 + \ldots + a_k T_k = 0$ *non* appartiene al sistema lineare definito da $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, ..., $T_\nu = 0$, quindi, con un eventuale cambiamento di variabili, questo iperpiano può supporsi coincidente con $T_{\nu+1} = 0$, p. es. Ne segue:

Se il sistema definito dalle ν *equazioni* (1) *è di tipo non parabolico, al sistema* (1) *può darsi la forma:*

$$x^{1,\nu+1} + \alpha_{10} x + \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \ldots + \alpha_{1k} x^k = 0$$
$$x^{2,\nu+1} + \alpha_{20} x + \alpha_{21} x^1 + \alpha_{22} x^2 + \ldots + \alpha_{2k} x^k = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{\nu,\nu+1} + \alpha_{\nu 0} x + \alpha_{\nu 1} x^1 + \alpha_{\nu 2} x^2 + \ldots + \alpha_{\nu k} x^k = 0$$

8. — Le considerazioni precedenti, che ci hanno condotto alla scelta di una determinata forma per le equazioni di definizione di un sistema a caratteristica, permettono anche di dimostrare che:

Un sistema chiuso a caratteristica è completamente integrabile.

Poichè le nozioni di sistema chiuso e di sistema completamente integrabile sono indipendenti dalla scelta delle variabili, possiamo ragionare sulla forma (I) delle equazioni che lo definiscono.

Le condizioni d'integrabilità si scrivono eguagliando due espressioni differenti delle derivate seconde di $A = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$ che si possono trarre da (I); queste condizioni sono equazioni di 2° ordine in x, che per definizione di sistema chiuso appartengono al sistema stesso, o, in altre parole, sono soddisfatte identicamente in virtù delle (I) stesse.

§ 3. Sistemi di equazioni a caratteristica di 2° ordine di tipo parabolico.

9. — Sia $\nu = k$. Il sistema, necessariamente di tipo parabolico, si può scrivere, come s'è visto,

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l}
x^{11} + \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \ldots + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0 \\
x^{12} + \alpha_{21} x^1 + \alpha_{22} x^2 + \ldots + \alpha_{2k} x^k + \alpha_{20} x = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{1k} + \alpha_{k1} x^1 + \alpha_{k2} x^2 + \ldots + \alpha_{kk} x^k + \alpha_{k0} x = 0 .
\end{array} \right.
$$

Consideriamo la varietà V_k che rappresenta il sistema scritto (nel senso del n. 3) e in un suo punto x la tangente alla linea τ_1 (cioè su cui varia soltanto τ_1) definita dal punto $x^1 \left(= \frac{\partial x}{\partial \tau_1}\right)$. Al variare di x su V_k varia questa tangente e *se essa non giace su* V_k descrive una varietà a $k+1$ dimensioni V'_{k+1}; se invece questa retta descrive una V'_k essa è necessariamente la V_k (descritta da un suo punto x). Per decidere quale delle due eventualità si presenti basta cercare la dimensione dello spazio

tangente ($k+1$ nel primo caso, k nel secondo) alla varietà descritta dal punto

$$X = x + \lambda x^1$$

al variare di λ e delle τ. Esso è lo spazio di X e dei suoi punti derivati primi

$$X,\ x^1,\ x^1 + \lambda x^{11},\ x^2 + \lambda x^{12},\ \ldots,\ x^k + \lambda x^{1k}$$

cioè anche per le (I), quello dei punti $x, x^1, x^2, \ldots, x^k$, cioè un S_k (quindi la V_k è rigata); anzi, qualunque sia λ, coincide con lo S_k tangente a V_k in x. Riassumiamo queste osservazioni nel teorema:

Una V_k *che rappresenti* k *equazioni (indipendenti) a caratteristica del 2° ordine è necessariamente rigata con carattere di sviluppabile (cioè con* S_k *tangente fisso lungo ogni generatrice).*

Ne segue che con un eventuale cambiamento della variabile τ_1 la prima equazione del sistema (I) può scriversi: $x^{11} = 0$.

10. — Fino ad ora non s'è fatto uso della nozione di sistema chiuso definito dalle (I), cioè non s'è fatta alcuna ipotesi relativa alla non esistenza di altre equazioni di 2° ordine (non contenute nel sistema) alle quali soddisfino le x. Supponiamo ora (e così sempre in seguito, se non si avverta il contrario) che il sistema sia chiuso, cioè completamente integrabile.

Prescindendo dalla prima equazione $x^{11} = 0$ (che si ottiene col cambiamento accennato) il sistema (I) si scrive:

$$(\mathrm{I}')\quad \left\{\begin{array}{l} x^{12} + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} x^2 + \ldots + \beta_{2k} x^k + \beta_{20} x = 0 \\ x^{13} + \beta_{31} x^1 + \beta_{32} x^2 + \ldots + \beta_{3k} x^k + \beta_{30} x = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^{1k} + \beta_{k1} x^1 + \beta_{k2} x^2 + \ldots + \beta_{kk} x^k + \beta_{k0} x = 0. \end{array}\right.$$

Applichiamo ora le due osservazioni di cui è parola al n. 4.

Il sistema conserva la sua forma per un cambiamento dei parametri $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_k$, del tipo:

$$\rho_2 = \rho_2(\tau_2, \ldots, \tau_k),\ \rho_3 = \rho_3(\tau_2, \ldots, \tau_k),\ \ldots,\ \rho_k = \rho_k(\tau_2, \ldots, \tau_k)$$

con la condizione che il determinante funzionale $D = \frac{d(\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_k)}{d(\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_k)}$ sia diverso da zero (necessaria perchè le nuove variabili τ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_k$ descrivano tutta la V_k). Infatti il sistema (I') prende la forma:

$$\sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x^1}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_2} + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} \sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_2} + \ldots + \beta_{2k} \sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_k} + \beta_{20} x = 0$$

$$\sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x^1}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_3} + \beta_{31} x^1 + \beta_{32} \sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_2} + \ldots + \beta_{3k} \sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_k} + \beta_{30} x = 0$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x^1}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_k} + \beta_{k1} x^1 + \beta_{k2} \sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_2} + \ldots + \beta_{kk} \sum_{2}^{k}{}_l \frac{\partial x}{\partial \rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial \tau_k} + \beta_{k0} x = 0.$$

Da esso possono ricavarsi le derivate $\frac{\partial x^1}{\partial \rho_l}$ $(l = 2, \ldots, k)$ espresse linearmente e omogeneamente per mezzo di x e delle derivate prime x^1, $\frac{\partial x}{\partial \rho_2}$, $\frac{\partial x}{\partial \rho_3}$, ..., $\frac{\partial x}{\partial \rho_k}$ (perchè il determinante dei coefficienti della $\frac{\partial x_1}{\partial \rho_l}$ è appunto $D \neq 0$): sicchè anche nelle nuove variabili τ_1, ρ_2, ρ_3, ..., ρ_k le equazioni che definiscono il sistema possono scriversi nella forma (I'). Diciamo rigata $(\tau_1 \tau_2)$ la superficie individuata dalla variabilità di τ_1 e di τ_2 soltanto: l'osservazione ora fatta si può esprimere geometricamente dicendo che ogni rigata entro la V_k può considerarsi come rigata $(\tau_1 \tau_2)$. Ciò è essenziale per il seguito.

Passiamo ora a scrivere alcune delle condizioni di illimitata integrabilità delle (I').

Le due espressioni di x^{123} tratte dalla prima e dalla seconda equazione debbono essere identiche (in virtù delle (I') stesse e dell'ipotesi che il sistema sia chiuso). Ciò esige intanto che siano

$$\beta_{23} = \beta_{24} = \ldots = \beta_{2k} = 0$$
$$\beta_{32} = \beta_{34} = \ldots = \beta_{3k} = 0\,;$$

dico che già le condizioni scritte in prima riga bastano a riconoscere la natura della V_k. Infatti per esse la prima equazione di (I') diviene

$$x^{12} + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} x^2 + \beta_{20} x = 0$$

cioè la rigata (τ_1, τ_2) è sviluppabile. Se $k \geq 3$, per l'osservazione precedente *ogni* rigata entro la V_k è sviluppabile: la V_k è notoriamente un cono, e non soddisfacendo ad altre equazioni di 2° ordine non appartenenti al sistema è necessariamente un cono generico di prima specie. Riassumendo:

Le V_k $(k \geq 3)$ *che rappresentano esattamente* k *equazioni a caratteristica (cioè non altre non appartenenti al sistema da quelle definito) sono coni generici di prima specie. Per* $k = 2$ *può trattarsi di una sviluppabile ordinaria.*

In forma analitica:

Si può sempre, con un opportuno cambiamento di variabili, dare ad un integrale del sistema precedente la forma

$$x(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k) = A + \tau_1 B(\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_k) \qquad (A = \text{cost.})$$

se $k \geq 3$; *se* $k = 2$ *o l'integrale può ridursi alla forma precedente o, come avverrà in generale, all'altra*

$$x(\tau_1, \tau_2) = A(\tau_2) + \tau_1 \frac{dA}{d\tau_2}\,.$$

11. — Siano invece le equazioni linearmente indipendenti in numero di $\nu < k$, e il sistema da esse definito sia chiuso

e di tipo parabolico. Le equazioni di definizione si possono scrivere

$$
\begin{aligned}
& x^{11} = 0 \\
& x^{12} + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} x^2 + \ldots + \beta_{2k} x^k + \beta_{20} x = 0 \\
& x^{13} + \beta_{31} x^1 + \beta_{32} x^2 + \ldots + \beta_{3k} x^k + \beta_{30} x = 0 \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& x^{1\nu} + \beta_{\nu 1} x^1 + \beta_{\nu 2} x^2 + \ldots + \beta_{\nu k} x^k + \beta_{\nu 0} x = 0
\end{aligned}
$$

Le considerazioni del n. precedente vanno solo modificate relativamente al cambiamento di variabili che ora dev'essere del tipo

$$\rho_2 = \rho_2(\tau_2, \ldots, \tau_\nu), \quad \rho_3 = \rho_3(\tau_2, \ldots, \tau_\nu), \ldots, \rho_\nu = \rho_\nu(\tau_2, \ldots, \tau_\nu).$$

Scrivendo le condizioni d'integrabilità si riconosce che le variabili $\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k$ non figurano (che apparentemente) come variabili di derivazione; sicchè, prescindendo da esse, il sistema attuale si presenta come identico al precedente nelle sole variabili $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$. Perciò vale il teorema:

Le V_k *che rappresentano* ν *equazioni a caratteristica che definiscano un sistema chiuso e di tipo parabolico si compongono di* $\infty^{k-\nu}$ *coni di prima specie se* $\nu \geq 3$, *di* ∞^{k-2} *sviluppabili (eventualmente coni) se* $\nu = 2$.

Sotto forma analitica:

L'integrale generale di ν *equazioni a caratteristica del 2° ordine che definiscano un sistema parabolico chiuso, può sempre scriversi, con un cambiamento di variabili, nella forma*

$$x = A(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + \tau_1 B(\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_k)$$

se $\nu \geq 3$, *o, per* $\nu = 2$, *nell'altra*

$$x = A(\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_k) + \tau_1 \frac{\partial A}{\partial \tau_2}.$$

§ 4. La varietà W degli spazi tangenti ad una varietà V_k.

12. — Per poter esporre il problema geometrico che dà origine ad un sistema di equazioni a caratteristica del 2° ordine (k fra loro indipendenti), occorre richiamare qualche nozione sulla varietà degli spazii S_k tangenti ad una V_k descritta dal punto x $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$.

Lo S_k tangente in x a V_k è definito dai punti $x, x^1, x^2, \ldots, x_k$ e quindi la detta varietà W è luogo del punto [12]

$$X = x + \sum_1^k {}_\lambda u_\lambda x^\lambda$$

al variare dei $2k$ parametri u e τ.

Lo spazio tangente a W in X è quello dei punti

$$x, x^1, x^2, \ldots, x^k, \sum_1^k {}_\lambda u_\lambda x^{1\lambda}, \sum_1^k {}_\lambda u_\lambda x^{2\lambda}, \ldots, \sum_1^k {}_\lambda u_\lambda x^{k\lambda}.$$

La W ha in generale dimensione $2k$; essa ha dimensione minore se: 1° i punti x, x^λ, $x^{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, \ldots, k)$ appartengono ad uno S_{2k-m} $(m > 0)$; 2° pur appartenendo i punti x, x^λ, $x^{\lambda\mu}$ ad uno spazio di dimensione $\geq 2k$ i punti che individuano lo spazio tangente sono linearmente dipendenti per valori qualsiansi delle u.

Questa seconda ipotesi dà luogo alle equazioni a caratteristica. Si riconosce infatti [13] che se la W relativa ad una V_k ha dimensione $2k - 1$ e se la V_k soddisfa esattamente a k equa-

---

(12) Segre, l. c. (8), n. 20.

(13) Per $k = 3$, cfr. A. Terracini, *Sulle* V_k *che rappresentano più di* $\frac{k(k-1)}{2}$ *equazioni di Laplace linearmente indipendenti* [" Rend. del Circ. Mat. di Palermo ", t. XXXIII (1912), pp. 176-186], n. 1; o più elementarmente per confronto diretto ecc.

zioni di 2° ordine (linearmente indipendenti), queste si posson supporre della forma:

$$a_1 x^{11} + a_2 x^{12} + \ldots + a_k x^{1k} + \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \ldots + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0$$
$$a_1 x^{21} + a_2 x^{22} + \ldots + a_k x^{2k} + \alpha_{21} x^1 + \alpha_{22} x^2 + \ldots + \alpha_{2k} x^k + \alpha_{20} x = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1 x^{k1} + a_2 x^{k2} + \ldots + a_k x^{kk} + \alpha_{k1} x^1 + \alpha_{k2} x^2 + \ldots + \alpha_{kk} x^k + \alpha_{k0} x = 0$$

cioè a caratteristica. Viceversa, ogni V_k che rappresenti un sistema di questo tipo ha una W (luogo dei suoi spazi tangenti) di dimensione $2k - 1$.

Per il resultato del n. 10 abbiamo il teorema:

Le varietà V_k $(k \geq 3)$ *per le quali la varietà* W *degli spazii tangenti ha dimensione* $2k - 1$ *e che rappresentano* k *equazioni di 2° ordine (linearmente indipendenti) sono coni generici di prima specie* (14).

§ 5. Gruppi di equazioni simultanee a caratteristica di 2° ordine di tipo parabolico.

13. — Abbiamo dimostrato al n. 7 che il numero delle equazioni linearmente indipendenti che posseggono una data caratteristica è minore o eguale al numero delle variabili indipendenti. Ciò non esclude la possibilità di considerare più gruppi di equazioni possedenti ciascuno una caratteristica propria.

Vogliamo estendere ad un sistema composto di più gruppi i resultati ottenuti precedentemente (per un solo gruppo di equazioni che definiva tutto il sistema).

Prescindiamo ora dall'ipotesi che la V_k non soddisfi ad altre equazioni di 2° ordine non contenute nel sistema definito; e supponiamo che siano dati *due* gruppi di k equazioni a carat-

---

(14) Questo resultato, per $k = 3$, si trova, raggiunto con metodi differenti, in Sisam, *On Three Spreads Satisfying Four or More Homogeneous Linear Partial Differential Equations of the second Order* [" American Journal of Mathematic ", vol. XXXIII (1911), pp. 97-128], p. 109; e in Terracini, l. c. (13), n. 5.

teristica: il resultato s'estende senz'altro ad un numero m qualsiasi di gruppi di k equazioni.

Con le stesse considerazioni del n. 7 vediamo che le equazioni che definiscono il sistema si possono scrivere:

$$
(\mathrm{I}_1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
a_1 x^{11} + a_2 x^{12} + \ldots + a_k x^{1k} + \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0 \\
a_1 x^{21} + a_2 x^{22} + \ldots + a_k x^{2k} + \alpha_{21} x^1 + \alpha_{22} x^2 + \ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{2k} x^k + \alpha_{20} x = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1 x^{k1} + a_2 x^{k2} + \ldots + a_k x^{kk} + \alpha_{k1} x^1 + \alpha_{k2} x^2 + \ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_{kk} x^k + \alpha_{k0} x = 0
\end{array}
\right.
$$

$$
(\mathrm{I}_2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
b_1 x^{11} + b_2 x^{12} + \ldots + b_k x^{1k} + \beta_{11} x^1 + \beta_{12} x^2 + \ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta_{1k} x^k + \beta_{10} x = 0 \\
b_1 x^{21} + b_1 x^{22} + \ldots + b_k x^{2k} + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} x^2 + \ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta_{2k} x^k + \beta_{20} x = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_1 x^{k1} + b_2 x^{k2} + \ldots + b_k x^{kk} + \beta_{k1} x^1 + \beta_{k2} x^2 + \ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta_{kk} x^k + \beta_{k0} x = 0
\end{array}
\right.
$$

e perciò alla V_k che lo rappresenta appartiene per ogni punto x il piano determinato inoltre dai due punti

$$A = a_1 x^1 + \ldots + a_k x^k; \qquad B = b_1 x^1 + \ldots + b_k x^k:$$

lo spazio tangente alla V_k è fisso in tutt'i punti di un piano. Gli stessi ragionamenti valgono per un numero qualsiasi di gruppi, quindi:

Le V_k *che rappresentano* m *gruppi ciascuno di* k *equazioni a caratteristica del 2° ordine, fra loro indipendenti, ed eventualmente altre equazioni del 2° ordine, non appartenenti al sistema da quelle individuato, si compongono di* $\infty^{k-m}\,\mathrm{S}_m$ *ed hanno lungo ogni spazio generatore uno* S_k *tangente fisso. Per queste* V_k *la* W *degli spazii tangenti ha dimensione* $2k - m$.

Per $m = 1$ ha mostrato il prof. Segre ([15]) che una tal V_k è caratterizzata dal contenere $k - 1$ varietà focali V_{k-1} alle quali le sue generatrici sono tangenti (con i casi di degenerazione delle V_{k-1}).

In modo analogo si possono caratterizzare le V_k composte di $\infty^{k-m} S_m$ con S_k tangente fisso lungo un S_m. Basta osservare che la sezione di una tal V_k con uno spazio di dimensione conveniente è una V'_{k-m+1} composta di ∞^{k-m} rette con S_{k-m+1} tangente fisso lungo una generatrice, cioè per il teorema ricordato, ∞^{k-m} rette tangenti a $k - m$ varietà V'_{k-m}. Poichè lo spazio secante è affatto generico, purchè della dimensione voluta, si conclude che:

Le V_k *dell'ultimo enunciato contengono* $k - m$ *varietà* V_{k-1} *alle quali i loro* S_m *sono tangenti (con i casi di degenerazione delle* V_{k-1}*).*

14. — Supponiamo ora che non esistano altre equazioni di 2° ordine cui soddisfino le x_i oltre quelle del sistema definito dagli m gruppi, e supponiamo anche $m = 2$.

Poichè la nostra V_k è generata da piani, possiamo sempre scegliere due delle variabili indipendenti, per es. τ_1, τ_2, in modo da dare a due delle equazioni dei gruppi (I_1 e I_2) la forma $x^{11} = 0$ $x^{22} = 0$ (cfr. il ragionamento analogo al n. 9); in conseguenza di questa scelta le altre equazioni si scrivono

$$(I'_1)\quad \begin{cases} x^{12} = \gamma_{21} x^1 + \gamma_{22} x^2 + \dots + \gamma_{2k} x^k + \gamma_{20} x \\ x^{13} = \gamma_{31} x^1 + \gamma_{32} x^2 + \dots + \gamma_{3k} x^k + \gamma_{30} x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{1k} = \gamma_{k1} x^1 + \gamma_{k2} x^2 + \dots + \gamma_{kk} x^k + \gamma_{k0} x \end{cases}$$

$$(I'_2)\quad \begin{cases} x^{12} = \delta_{11} x^1 + \delta_{12} x^2 + \dots + \delta_{1k} x^k + \delta_{10} x \\ x^{23} = \delta_{31} x^1 + \delta_{32} x^2 + \dots + \delta_{3k} x^k + \delta_{30} x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{2k} = \delta_{k1} x^1 + \delta_{k2} x^2 + \dots + \delta_{kk} x^k + \delta_{k0} x \end{cases}$$

([15]) L. c. ([8]), n. 29.

(a noi non interessa che la forma di queste equazioni, e non l'espressione effettiva delle γ e δ per mezzo delle α e β).

Le due equazioni scritte in prima riga debbono essere fra loro identiche, perchè abbiamo supposto che al sistema non appartengano equazioni del primo ordine.

Tenendo conto delle condizioni d'integrabilità (come al n. 10) si vede che le equazioni dei gruppi (I'_1), (I'_2) debbono scriversi più semplicemente:

$$(I'_1)\quad \begin{cases} x^{12} = \gamma_{21} x^1 + \gamma_{22} x^2 + \gamma_{20} x \\ x^{13} = \gamma_{31} x^1 + \gamma_{32} x^2 + \gamma_{33} x^3 + \gamma_{30} x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{1k} = \gamma_{k1} x^1 + \gamma_{k2} x^2 + \gamma_{kk} x^k + \gamma_{k0} x \end{cases}$$

$$(I'_2)\quad \begin{cases} x^{12} = \gamma_{21} x^1 + \gamma_{22} x^2 + \gamma_{20} x \\ x^{23} = \delta_{31} x^1 + \delta_{32} x^2 + \delta_{33} x^3 + \delta_{30} x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{2k} = \delta_{k1} x^1 + \delta_{k2} x^2 + \delta_{kk} x^k + \delta_{k0} x \end{cases}$$

Prescindiamo dal caso banale $k = 2$, nel quale la V_2 si riduce al piano individuato da tre dei suoi punti (p. es. x, x^1, x^2): cioè quattro soluzioni del sistema sono sempre legate linearmente ([16]).

Occorre distinguere il caso $k = 3$ dal caso generale $k > 3$.

Sia $k = 3$. La prima equazione identica nei due gruppi ci dice che ogni rigata su cui variino τ_1 e τ_2 solamente è sviluppabile: il che già sappiamo essendo essa nel piano dei punti x, x^1, x^2. Le altre due equazioni mostrano che il piano generatore della V_3 (x, x^1, x^2) e quello infinitamente vicino (al variare di τ_3) si tagliano lungo una retta: la V_3 è la seconda sviluppabile di una curva (eventualmente può comporsi dei piani passanti per

([16]) Cfr. Appell, *Sur les fonctions hypergéometriques de deux variables* [" Journal de Liouville ", 3e série, t. 8 (1882), pp. 173-216], n. 16, teor. *b*, p. 193.

una retta; non è uno S_3 perchè questo soddisferebbe a più equazioni).

Sia $k > 3$: all'osservazione ora fatta associamo l'altra sui cambiamenti variabili che lasciano inalterata la forma $(I'_1 I'_2)$ per concludere che ogni ∞^1 di piani entro la V_k è la seconda sviluppabile di una curva. Da ciò si ricava facilmente che la V_k è un cono di seconda specie (cioè generato da ∞^{k-2} piani passanti per una retta) ([17]).

Che poi una V_k di questo tipo rappresenti effettivamente un sistema definito da due gruppi di k equazioni a caratteristica, si verifica subito. Se i punti A e B individuano la retta vertice del cono, e C è un punto generico di esso, si ha:

$$x = A + \tau_1 B + \tau_2 C(\tau_3, \ldots, \tau_k)$$

(A e B costanti) e quindi

$$\begin{cases} x^{11} = 0 \\ x^{12} = 0 \\ x^{13} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x^{1k} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{22} = 0 \\ x^{21} = 0 \\ \tau_2 x^{23} = x^3 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \tau_2 x^{2k} = x^k \end{cases}$$

I ragionamenti, e quindi il resultato, si trasportano senz'altro al caso di m gruppi di k equazioni a caratteristica (algebricamente compatibili) che formino un sistema completamente integrabile.

Le V_k *che rappresentano un sistema del tipo ora detto si com-*

([17]) Allo scopo si consideri entro il sistema ∞^{k-2} $(k > 3)$ di piani una qualsiasi ∞^2. Si noti inoltre che si può ragionare sopra una proiezione generica del sistema in S_4 (perchè l'incidenza supposta per ogni ∞^1 di piani è superiore a quella imposta da S_4). Per dualità si ha un sistema ∞^2 di rette entro il quale ogni ∞^1 è sviluppabile: si tratta quindi delle rette di un piano o di un cono, cioè, ritornando alla configurazione data, dei piani passanti per una retta o appartenenti ad uno S_3; questa seconda eventualità è da scartare perchè si avrebbero troppe equazioni, quindi ecc.... Ragionamento analogo è da farsi per m gruppi di k equazioni a caratteristica.

pongono di $\infty^{k-m} S_m$; *se* $k = m$ *la* V_m *è uno* S_m [18]; *se* $k = m + 1$, *gli* $\infty^1 S_m$ *generatori della* V_{m+1} *sono osculatori ad una curva (con i casi degeneri)*; *se infine* $k > m + 1$ *(caso generale) la* V_k *è un cono di specie* m *(cioè i suoi spazii generatori passano per uno* S_{m-1} *fisso).*

Per tutte le varietà finora considerate in questo paragrafo *la* W *degli spazii tangenti ha dimensione* $2k - m$.

Il resultato analitico contenuto nell' ultimo enunciato è il seguente:

Un integrale generico del sistema definito da m *gruppi di* k *equazioni a caratteristica completamente integrabile può sempre porsi, con un opportuno cambiamento di variabili, nella forma*

$$x = A_0 + \tau_1 A_1 + \ldots + \tau_{m-1} A_{m-1} + \tau_m C(\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \ldots, \tau_k)$$
$$(A_0, \ldots, A_{m-1}, \text{costanti})$$

se $k > m + 1$; *se* $k = m + 1$ *la forma a cui potrà ridursi è, in generale,*

$$x = A(\tau_{m+1}) + \tau_1 \frac{dA}{d\tau_{m+1}} + \tau_2 \frac{d^2A}{d\tau_{m+1}^2} + \ldots + \tau_m \frac{d^mA}{d\tau_{m+1}^m}$$

(o la precedente).

15. Osservazione. — A prescindere dal caso banale $m = k$, dev'essere sempre $m < k$. Abbiamo visto (§ 4, n. 12) che la ricerca delle V_k per cui la varietà degli spazii tangenti W ha dimensione minore dell'ordinaria conduce a distinguere due casi: nel 1° la V_k rappresenta più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni del secondo ordine linearmente indipendenti [19]; lo studio dei sistemi a caratteristica ci ha condotti a varietà che appartengono in generale al secondo caso: ora ci domandiamo quando le equazioni fra loro indipendenti contenute negli m gruppi di k equazioni siano in numero $\leq \frac{k(k-1)}{2}$ (in modo che il loro studio non coincida con quello del primo caso).

Poichè due gruppi debbono aver sempre un'equazione co-

[18] Più propriamente una ∞^0 di S_m, cioè un numero discreto di S_m.
[19] Segre, l. c., n. 6 [8]; n. 21; Terracini, l. c., n. 12 [18].

mune (quella che fornisce x^{rs} nell'r-esimo e nell's-esimo gruppo), il numero delle equazioni indipendenti è

$$mk - \binom{m}{2}$$

che dev'essere $\leq \frac{k(k-1)}{2}$. Per l'uguaglianza deve aversi

$$mk - \binom{m}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$
$$2mk - m(m-1) = k(k-1)$$
$$k^2 - (2m+1)k + m(m-1) = 0 .$$

Quest'equazione dev'essere risoluta in numeri interi e tali che risulti $k > m$. Dovrà intanto essere

$$(2m+1)^2 - 4(m^2 - m) = \alpha^2$$

(α intero), cioè

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{4} = 2m$$

quindi α dev'essere un numero dispari; posto $\alpha = 2t+1$ (t intero) si ha

$$\frac{t(t+1)}{2} = m$$

che dà per k i valori

$$k = \frac{t(t+3)}{2} + 1 , \qquad k = \frac{t(t-1)}{2}$$

il quale ultimo essendo minore di m va scartato. Quindi, se t è l'intero per il quale

$$(t+1)(t+4) > 2k - 2 \geq t(t+3),$$

dev'essere $m \leq \frac{t(t+1)}{2}$; queste disuguaglianze assegnano, dato k, il limite che può raggiungere m (senza che la varietà V_k rientri nel 1° caso).

16. — Abbiamo finora considerato più gruppi di equazioni a caratteristica, contenenti ciascuno k equazioni linearmente indipendenti. Cerchiamo di trasportare questi resultati al caso in cui le equazioni di ciascun gruppo siano in numero minore di k, e supponiamo che le equazioni indipendenti siano ν in ciascuno dei gruppi.

Diverse ipotesi si potranno presentare; dopo averle esposte, prenderemo in esame la più semplice. Riprendiamo a questo scopo le considerazioni del § 2, n. 7.

Relativamente a ciascun gruppo di ν equazioni (o al sistema da esso definito) esiste un iperpiano (caratteristico) fisso, mentre l'iperpiano variabile da equazione ad equazione descrive un sistema $\infty^{\nu-1}$ al quale (essendo per ipotesi il sistema parabolico) appartiene l'iperpiano fisso. Se i gruppi di equazioni sono m, abbiamo così m sistemi $\infty^{\nu-1}$ d'iperpiani; le posizioni reciproche che questi sistemi d'iperpiani possono assumere nello S_k delle variabili $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ sono le seguenti:

1) non esiste una parte comune a tutti questi sistemi;
2) esiste una parte comune a tutti questi sistemi;
3) tutti questi sistemi coincidono.

Quest'ultimo caso si presenta necessariamente quando $\nu = k$ (cioè nell'ipotesi già studiata), perchè ciascun sistema si compone di *tutti* gli iperpiani uscenti da uno stesso punto.

È quindi chiaro che se vorremo ottenere resultati analoghi a quelli dei numeri precedenti, sarà appunto di quest'ultimo caso che dovremo occuparci.

Facciamo ancora qualche osservazione di carattere generale sulla forma che può darsi alle equazioni dei singoli gruppi nei diversi casi che si presentano.

Nel primo non si potrà, in generale, assegnare alle equazioni date una forma più semplice di quella a cui conducono le considerazioni del n. 7.

Il secondo caso si può dividere in due sottocasi, a seconda che:

a) la parte comune a tutti i sistemi d'iperpiani variabili non contiene tutti gli iperpiani caratteristici fissi di tutti i gruppi di equazioni date;

b) la parte comune a tutti i sistemi d'iperpiani variabili contiene tutti gli iperpiani caratteristici fissi di tutti i gruppi di equazioni date.

Nel sottocaso *b)* si può assegnare un massimo per il numero m dei gruppi di equazioni. Infatti, perchè questi gruppi siano fra loro indipendenti, occorre che tali siano i loro iperpiani caratteristici. Sia $\mu - 1$ la dimensione della parte comune ai sistemi d'iperpiani variabili ($\mu < \nu$); gli iperpiani indipendenti sono μ e quindi questo è il massimo valore che può assumere m.

Con le considerazioni del § 2, n. 7, si vede che μ equazioni in ciascun gruppo si possono scrivere nella forma

$$(\mathrm{I}_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial A}{\partial \tau_1} + \alpha_{11} x^1 + \ldots + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial \tau_2} + \alpha_{21} x^1 + \ldots + \alpha_{2k} x^k + \alpha_{20} x = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial A}{\partial \tau_\mu} + \alpha_{\mu 1} x_1 + \ldots + \alpha_{\mu k} x^k + \alpha_{\mu 0} x = 0 \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{I}_2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial B}{\partial \tau_1} + \beta_{11} x^1 + \ldots + \beta_{1k} x^k + \beta_{10} x = 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial \tau_2} + \beta_{21} x^1 + \ldots + \beta_{2k} x^k + \beta_{20} x = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial B}{\partial \tau_\mu} + \beta_{\mu 1} x^1 + \ldots + \beta_{\mu k} x^k + \beta_{\mu 0} x = 0 \end{array}\right. ,\ldots$$

ove $A = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu$, $B = b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_\nu x^\nu$, ...; le altre equazioni in ciascun gruppo contengono pure derivate di A, B, ..., ma in modo che una stessa variabile di derivazione non comparisca in tutti i gruppi.

Nel sottocaso *b)* a μ delle equazioni di definizione in ciascun gruppo può darsi la forma più semplice:

$$(\mathrm{I}_1)\quad \left\{\begin{array}{l} x^{11} + \alpha_{11} x^1 + \ldots + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0 \\ x^{12} + \alpha_{21} x^1 + \ldots + \alpha_{2k} x^k + \alpha_{20} x = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^{1\mu} + \alpha_{\mu 1} x^1 + \ldots + \alpha_{\mu k} x^k + \alpha_{\mu 0} x = 0 \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{I}_2)\quad \begin{cases} x^{21} + \beta_{11}\, x^1 + \ldots + \beta_{1k}\, x^k + \beta_{10}\, x = 0 \\ x^{22} + \beta_{21}\, x^1 + \ldots + \beta_{2k}\, x^k + \beta_{20}\, x = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\

zioni date non se ne possano ricavare del 1° ordine) e illimitatamente integrabile.

Per caratterizzare la V_k che lo rappresenta, riprendiamo le considerazioni del n. 10. Se si tien conto al solito modo delle condizioni d'integrabilità per la forma in cui abbiamo visto potersi sempre scrivere le equazioni che definiscono il sistema (in fine al n. prec.) si vede che le variabili $\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k$ non vi figurano che apparentemente come variabili di derivazione; e allora per il resultato già conseguito al n. 14 si ha il teorema:

Le V_k *che rappresentano un sistema totalmente parabolico definito da* m *gruppi di* ν *equazioni a caratteristica del 2° ordine sono costituite da* $\infty^{k-m} S_m$, *e precisamente:*

se $\nu = m$ *la* V_k *è luogo di* $\infty^{k-\nu} S_\nu$ *(disposti nel modo più generale, in senso proiettivo);*

se $\nu = m + 1$ *la* V_k *si compone delle* m*-esime sviluppabili di* $\infty^{k-m-1} (= \infty^{k-\nu})$ *curve (cioè i suoi* S_m *generatori si possono ordinare in modo da riuscire osculatori ad* ∞^{k-m-1} *curve);*

se infine $\nu > m + 1$ *(caso generale) la* V_k *è luogo di* $\infty^{k-\nu}$ *coni di specie* m.

Analiticamente si ha il resultato:

Un integrale generico di un sistema totalmente parabolico definito c. s. si può con un opportuno cambiamento di variabili ridurre, in corrispondenza ai tre tipi elencati della V_k, *ad una delle seguenti forme:*

$$x = A_0(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + \tau_1 A_1(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + \ldots + \\ + \tau_m A_m(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k), \qquad (m = \nu)$$

$$x = A(\tau_\nu, \tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + \tau_1 \frac{\partial A}{\partial \tau_\nu} + \tau_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau_\nu^2} + \ldots + \tau_m \frac{\partial^m A}{\partial \tau_\nu^m}, \\ (m = \nu - 1)$$

$$x = A_0(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + \tau_1 A_1(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + \ldots + \tau_{m-1} A_{m-1}(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + \\ + \tau_m C(\tau_{m+1}, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k), \qquad (m < \nu - 1).$$

Che poi le x ora scritte soddisfino effettivamente ad un sistema totalmente parabolico è senz'altro evidente.

§ 6. Sistemi di equazioni a caratteristica di 2° ordine di tipo non parabolico.

18. — Come s'è già visto al n. 7, dev'essere il numero ν delle equazioni linearmente indipendenti che definiscono il sistema (e possedenti la stessa caratteristica) minore di k: alle equazioni stesse può darsi la forma:

$$
\begin{aligned}
x^{1,\nu+1} &= \gamma_{10} x + \gamma_{11} x^1 + \gamma_{12} x^2 + \ldots + \gamma_{1k} x^k \\
x^{2,\nu+1} &= \gamma_{20} x + \gamma_{21} x^1 + \gamma_{22} x^2 + \ldots + \gamma_{2k} x^k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{\nu,\nu+1} &= \gamma_{\nu 0} x + \gamma_{\nu 1} x^1 + \gamma_{\nu 2} x^2 + \ldots + \gamma_{\nu k} x^k
\end{aligned}
$$

(le γ sono funzioni delle variabili $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$).

Se si ha una sola equazione, $\nu = 1$, essa esprime che gli S_k tangenti alla V_k che rappresenta il sistema in due punti infinitamente vicini di una linea τ_1 (o τ_2) hanno in comune la tangente alla linea τ_2 (o τ_1) passante per uno di essi. In particolare, se $k = 2$, la V_2 è una superficie con un doppio sistema coniugato (una superficie Φ secondo la denominazione del professore Segre) [20] e dall'osservazione fatta scende la trasformazione di Laplace. Questa osservazione fa vedere di più che la trasformazione stessa non può estendersi ai sistemi soprascritti (cfr. più in esteso il § 8).

Se $\nu \geq 2$, e se facciamo l'ipotesi che la V_k non rappresenti altre equazioni di 2° ordine non contenute nel sistema, potremo scrivere le condizioni d'integrabilità confrontando per termini le due espressioni delle derivate terze $x^{l,m,\nu+1}$ $(l, m, = 1, \ldots,$

[20] L. c. n. 3 [3]; n. 11. Questa stessa denominazione viene ora usata in senso diverso nella recente Memoria del Bianchi, *Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche* [" Memorie della Soc. It. delle Scienze (detta dei XL) ", serie 3ª, t. XVIII (1913), pp. 1-98].

ν; $l \neq m$) che dal sistema si traggono. Si giunge così alla forma:

$$x^{1,\nu+1} = \gamma_{10} x + \gamma_{1,\nu+1} x^{\nu+1} + \gamma_{11} x^1$$
$$x^{2,\nu+1} = \gamma_{20} x + \gamma_{2,\nu+1} x^{\nu+1} + \gamma_{22} x^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{\nu,\nu+1} = \gamma_{\nu 0} x + \gamma_{\nu,\nu+1} x^{\nu+1} + \gamma_{\nu\nu} x^{\nu}.$$

Notiamo che un cambiamento delle linee $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ entro una G_ν ($\tau_{\nu+1} =$ cost., $\tau_{\nu+2} =$ cost., ..., $\tau_k =$ cost.) non altera la forma del sistema dato; sicchè queste linee sono affatto arbitrarie entro la G_ν. Inoltre le variabili $\tau_{\nu+2}, \ldots, \tau_k$ non figurano come variabili di derivazione, sicchè potremo astrarre da esse e studiare una $V_{\nu+1}$ definita da $\tau_{\nu+2} =$ cost., ..., $\tau_k =$ cost. entro la V_k.

Le $\infty^1 G_\nu$ ($\tau_{\nu+1} =$ cost.) entro una $V_{\nu+1}$ sono tali che gli S_ν ad esse tangenti nei punti di una curva $\tau_{\nu+1}$ sono osculatori ad una curva. Possiamo interpretare le equazioni scritte anche in altro modo.

La prima equazione mostra che le tangenti alle linee $\tau_{\nu+1}$ dai punti di una stessa linea τ_1 formano una sviluppabile; ma s'è osservato che τ_1 è una linea qualsiasi su G_ν, quindi: le tangenti alle linee $\tau_{\nu+1}$ nei punti di una G_ν formano un cono.

Riassumendo:

Entro una $V_{\nu+1}$ *vi è un sistema notevole di* $\infty^1 G_\nu$, *e un sistema notevole di* ∞^ν *curve* $\tau_{\nu+1}$ *tali che:*

1° *le tangenti alle linee* $\tau_{\nu+1}$ *nei punti di una* G_ν, *e quindi gli* $S_{\nu+1}$ *tangenti a* $V_{\nu+1}$ *nei punti stessi passano per un punto;*

2° *gli* S_ν *tangenti alle* G_ν *nei punti di una* $\tau_{\nu+1}$ *sono osculatori ad una curva (o casi degeneri).*

La V_k *che rappresenta il sistema dato si compone di* $\infty^{k-\nu-1}$ *di queste* $V_{\nu+1}$.

19. — La proprietà enunciata in 1° esprime in sostanza che ogni superficie Φ contenuta nella nostra $V_{\nu+1}$ ammette ∞^1 coni circoscritti: i loro vertici sono sopra una curva che non dipende dalla scelta di Φ. Cioè ancora ([21]): ogni equazione di 2° ordine

([21]) L. c. n. 3 ([3]); n. 18; e la mia Memoria, *Sull'equazione di Laplace* [" Rend. Circ. Mat. di Palermo ", t. XXXIV (1912), pp. 383-407], parte I.

contenuta entro il sistema è integrabile (col metodo di Laplace, cioè) con quadrature, e quindi lo è il sistema stesso.

Possiamo trovare effettivamente l'integrale del sistema. Le condizioni d'illimitata integrabilità (fra loro indipendenti) si scrivono:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \ldots = \gamma_{\nu\nu} = \gamma$$

$$\gamma^2{}_{1,\nu+1} = \gamma^1{}_{2,\nu+1}, \ldots, \gamma^\nu{}_{1,\nu+1} = \gamma^1{}_{\nu,\nu+1}, \ldots, \gamma^\nu{}_{\nu-1,\nu+1} = \gamma^{\nu-1}{}_{\nu,\nu+1}$$

$$\gamma_{10} + \gamma_{1,\nu+1}\gamma = \gamma^1, \ \gamma_{20} + \gamma_{2,\nu+1}\gamma = \gamma^2, \ldots, \gamma_{\nu 0} + \gamma_{\nu,\nu+1}\gamma = \gamma^\nu, \quad \left(\gamma^s = \frac{\partial\gamma}{\partial\tau_s}\right).$$

Le condizioni scritte in prima riga portano che la curva, luogo dei vertici dei coni, è descritta dal punto

$$x^{\nu+1} - \gamma x$$

mentre quelle nell'ultima riga dicono che è nullo uno degli invarianti di ciascuna delle equazioni date. Se il punto scritto è indeterminato, cioè se la varietà che consideriamo non è in realtà una $V_{\nu+1}$, ma una V_ν, si ha (trattandosi di coordinate omogenee)

$$x^{\nu+1} - \gamma x = 0\,;$$

cioè

$$x = e^{\int \gamma d\tau_{\nu+1}} X(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)$$

(ove X è simbolo di funzione arbitraria degli argomenti indicati) è l'integrale generale del sistema. Escluso questo caso d'eccezione, si riconosce (in modo del tutto analogo a quello che si tiene per una sola equazione integrabile col metodo di Laplace) che l'integrale è del tipo

$$x = e^{\int \gamma d\tau_{\nu+1}}\left[X(\tau_1, \ldots, \tau_\nu) + \int Y(\tau_{\nu+1})\, e^{\int(\gamma_{1,\nu+1}d\tau_1 + \ldots + \gamma_{\nu,\nu+1}d\tau_\nu - \gamma d\tau_{\nu+1})} d\tau_{\nu+1}\right]$$

ma perchè questo possa soddisfare al sistema dev'essere ancora

$$\gamma_{1,\nu+1} = Y_1(\tau_1), \ \gamma_{2,\nu+1} = Y_2(\tau_2), \ldots, \gamma_{\nu,\nu+1} = Y_\nu(\tau_\nu).$$

20. — Per le V_k studiate in questo paragrafo la W degli spazi tangenti ha dimensione ordinaria.

§ 7. Sistemi di equazioni a caratteristica del terzo ordine.

21. — Prendiamo ora a considerare un sistema di equazioni a caratteristica di 2° e di 3° ordine. S'è già osservato che i coni di 2° e di 3° ordine che possono associarsi alle singole equazioni (n. 7) debbono avere un iperpiano comune, cioè i termini contenenti in ciascuna equazione le derivate d'ordine più elevato debbono potersi considerare come derivate (prime o seconde) di una medesima espressione contenente linearmente ed omogeneamente le derivate prime della funzione incognita x.

Come già nel caso delle sole equazioni del 2° ordine, si può trovare un massimo per il numero delle equazioni linearmente indipendenti; e si riconosce subito che, se le equazioni di 2° ordine indipendenti sono ν, quelle del 3° sono in numero di $\frac{(k-\nu)(k-\nu+1)}{2}$ e che il sistema può definirsi con le equazioni

$$
\text{(I)}\quad \left\{
\begin{array}{l}
A^1 = \alpha_{1,k}\, x^k + \alpha_{1,k-1}\, x^{k-1} + \ldots + \alpha_{1,1}\, x^1 + \alpha_{1,0}\, x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A^\nu = \alpha_{\nu,k}\, x^k + \alpha_{\nu,k-1}\, x^{k-1} + \ldots + \alpha_{\nu,1}\, x^1 + \alpha_{\nu,0}\, x
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(II)}\quad \left\{
\begin{array}{l}
A^{\nu+1,\nu+1} = \alpha_{\nu+1,k,k}\, x^{kk} + \alpha_{\nu+1,k,k-1}\, x^{k,k-1} + \ldots + \\
\qquad + \alpha_{\nu+1,1,1}\, x^{11} + \alpha_{\nu+1,k}\, x^k + \ldots + \alpha_{\nu+1,0}\, x \\
A^{\nu+1,\nu+2} = \alpha_{\nu+1,\nu+2,k,k}\, x^{kk} + \alpha_{\nu+1,\nu+2,k,k-1}\, x^{k,k-1} + \ldots + \\
\qquad + \alpha_{\nu+1,\nu+2,1,1}\, x^{11} + \alpha_{\nu+1,\nu+2,k}\, x^k + \ldots + \alpha_{\nu+1,\nu+2,0}\, x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A^{kk} = \alpha_{k,k,k}\, x^{kk} + \alpha_{k,k,k-1}\, x^{k,k-1} + \ldots + \alpha_{k,1,1}\, x^{11} + \\
\qquad + \alpha_{k,k}\, x^k + \ldots + \alpha_{k,0}\, x
\end{array}
\right.
$$

ove $A = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu$; le a, α sono funzioni delle τ.

Ci limiteremo a studiare un sistema definito appunto da questo numero massimo di equazioni illimitatamente integra-

bile, nell'ipotesi che le equazioni del 2° ordine definiscano un sistema di tipo parabolico.

Converrà distinguere diversi casi a seconda dei valori di ν: nel caso di sole equazioni del 2° ordine la V_k, rappresentatrice del sistema, possiede un'asintotica (se $\nu = 1$), o è luogo di sviluppabili (se $\nu = 2$) o di coni (se $\nu \geq 3$); si tratta di vedere quale sia l'influenza delle equazioni del 3° ordine sulla natura della V_k. I casi che tratteremo sono: $\nu = 1$, $k = 2$; $\nu = 2$, $k = 3$; ν qualsiasi, $k = \nu + 1$; $\nu = 1$, k qualsiasi; $\nu > 2$, k qualsiasi.

22. — Premettiamo qualche osservazione di carattere generale sulla forma a cui possono ridursi le equazioni di definizione del sistema.

Intanto, con un eventuale cambiamento dei parametri τ_1, τ_2, ..., τ_ν, può porsi $A = x^1$ (cfr. n. 7) e anzi si può sempre fare in modo che la prima equazione del sistema (I) sia $x^{11} = 0$, e di conseguenza le altre:

$$\left\{\begin{array}{l}
x^{12} = \beta_{2k}\, x^k + \beta_{2,k-1}\, x^{k-1} + \ldots + \beta_{21}\, x^1 + \beta_{20}\, x \\
x^{13} = \beta_{3k}\, x^k + \beta_{3,k-1}\, x^{k-1} + \ldots + \beta_{31}\, x^1 + \beta_{30}\, x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{1\nu} = \beta_{\nu k}\, x^k + \beta_{\nu,k-1}\, x^{k-1} + \ldots + \beta_{\nu,1}\, x^1 + \beta_{\nu 0}\, x
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
x^{1,\nu+1,\nu+1} = \ldots + \beta_{\nu+1,l,m}\, x^{l,m} + \ldots + \beta_{\nu+1,k}\, x^k + \ldots + \\
\qquad\qquad + \beta_{\nu+1,1}\, x^1 + \beta_{\nu+1,0}\, x \\
x^{1,\nu+1,\nu+2} = \ldots + \beta_{\nu+1,\nu+2,l,m}\, x^{l,m} + \ldots + \beta_{\nu+1,\nu+2,k}\, x^k + \ldots + \\
\qquad\qquad + \beta_{\nu+1,\nu+2,1}\, x^1 + \beta_{\nu+1,\nu+2,0}\, x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{1,l,k} = \ldots + \beta_{k,l,m}\, x^{l,m} + \ldots + \beta_{k,k}\, x^k + \ldots + \beta_{k,1}\, x^1 + \beta_{k,0}\, x
\end{array}\right.$$

(come al solito non interessa l'espressione delle β per mezzo delle α, ma la sola forma delle equazioni).

Applicando alle prime ν equazioni le condizioni d'integrabilità si vede (cfr. n. 11) che il primo gruppo ha la forma

$$
(\mathrm{I}') \quad \left\{ \begin{array}{l}
x^{12} = \gamma_{22}\, x^2 + \gamma_{21}\, x^1 + \gamma_{20}\, x \\
x^{13} = \gamma_{33}\, x^3 + \gamma_{31}\, x^1 + \gamma_{30}\, x \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^{1\nu} = \gamma_{\nu\nu}\, x^\nu + \gamma_{\nu 1}\, x^1 + \gamma_{\nu 0}\, x
\end{array} \right.
$$

$$\gamma_{22} = \gamma_{33} = \ldots = \gamma_{\nu\nu} = \gamma.$$

Cerchiamo di semplificare in modo analogo le equazioni del secondo gruppo. Osserviamo perciò che in forza delle equazioni scritte la coppia (l, m) di indici (nei termini con le derivate seconde di x) può ritenersi variabile nel quadro:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & (1, \nu+1) & (1, \nu+2) & \ldots & (1, k) \\
(22) & (23) & \ldots & (2\nu) & (2, \nu+1) & (2, \nu+2) & \ldots & (2, k) \\
(32) & (33) & \ldots & (3\nu) & (3, \nu+1) & (3, \nu+2) & \ldots & (3, k) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(\nu 2) & (\nu 3) & \ldots & (\nu\nu) & (\nu, \nu+1) & (\nu, \nu+2) & \ldots & (\nu, k) \\
(\nu+1,1) & (\nu+1,2) & (\nu+1,3) & \ldots (\nu+1,\nu) & (\nu+1,\nu+1) & (\nu+1,\nu+2) & \ldots & (\nu+1,k) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(k, 1) & (k, 2) & (k, 3) & \ldots & (k, \nu) & (k, \nu+1) & (k, \nu+2) & \ldots (k, k)
\end{array}
$$

Ricaviamo ora dalla prima equazione delle (I') la derivata $x^{1,2,\nu+1,\nu+1}$; essa risulta combinazione lineare (di alcune) delle

$$x,\ x^1,\ x^2,\ x^{\nu+1},\ x^{1,\nu+1},\ x^{2,\nu+1},\ x^{\nu+1,\nu+1},\ x^{1,\nu+1,\nu+1},\ x^{2,\nu+1,\nu+1}$$

o, in forza della prima equazione del gruppo (II), delle sole

$$x,\ x^1,\ \ldots,\ x^k,\ \ldots,\ x^{lm},\ \ldots,\ x^{2,\nu+1,\nu+1};$$

l'unica derivata terza che vi possa figurare è $x^{2,\nu+1,\nu+1}$.

Procuriamoci la stessa derivata $x^{1,2,\nu+1,\nu+1}$ dalla prima equazione del gruppo (II); si ha come combinazione lineare delle

$$x,\ x^1,\ \ldots,\ x^k,\ \ldots,\ x^{rs},\ \ldots,\ x^{2lm},\ \ldots$$

Fissiamo la nostra attenzione sul gruppo delle derivate terze, ricordando il quadro soprascritto. Le derivate del tipo x^{21m} $(m > \nu)$ si possono, in virtù del gruppo (I), esprimere linearmente per mezzo della x e delle sue derivate prime e seconde: nell'equazione prima del secondo gruppo potranno perciò comparire i termini contenenti

$$x^{1,\nu+1},\ x^{1,\nu+2},\ \ldots,\ x^{1,k}.$$

Anzi non vi potrà comparire di più altra derivata seconda che la $x^{\nu+1,\nu+1}$: perchè, secondo l'altra espressione trovata di $x^{1,2,\nu+1,\nu+1}$ non figura in essa che la derivata terza $x^{2,\nu+1,\nu+1}$ (e, ripetiamo, facciamo l'ipotesi che x non soddisfi ad altre equazioni di secondo e di terzo ordine non appartenenti al sistema misto (n. 6) definito da quelle scritte). Così intanto riconosciamo che $x^{1,\nu+1,\nu+1}$ è combinazione lineare ed omogenea delle sole

$$x,\ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^\nu,\ x^{\nu+1},\ \ldots,\ x^k,\ x^{1,\nu+1},\ \ldots,\ x^{1,k},\ x^{\nu+1,\nu+1}.$$

Dico di più che in $x^{1,\nu+1,\nu+1}$ non compariscono le derivate $x^2, \ldots, x^\nu$. Infatti se vi fossero esse darebbero origine (per derivazione rispetto a τ_2) ai termini

$$x^{22},\ x^{23},\ \ldots,\ x^{2\nu}.$$

Nè questi possono venir eliminati dalla espressione di $x^{1,2,\nu+1,\nu+1}$ perchè le espressioni delle x^{12m} $(m > \nu)$ ricavate dalla prima equazione di (I′) non li contengono.

Ma nella espressione di $x^{1,2,\nu+1,\nu+1}$ ricavata derivando x^{12} essi neppure figurano: quindi $x^2, \ldots, x^\nu$ debbono mancare in $x^{1,\nu+1,\nu+1}$ che si può infine scrivere

$$x^{1,\nu+1,\nu+1} = \gamma_{\nu+1,\nu+1,\nu+1}\, x^{\nu+1,\nu+1} + \gamma_{\nu+1,1,\nu+1}\, x^{1,\nu+1} + \ldots +$$
$$+ \gamma_{\nu+1,1,k}\, x^{1,k} + \gamma_{\nu+1,\nu+1}\, x^{\nu+1} + \ldots + \gamma_{\nu+1,k}\, x^k + \gamma_{\nu+1,1}\, x^1 + \gamma_{\nu+1,0}\, x.$$

Discutendo in modo analogo le altre equazioni si vede che,

con la scelta eseguita della variabile τ_1, le equazioni date si scrivono nella forma

$$
(\mathrm{I}')\quad \left\{
\begin{array}{l}
x^{11} = 0 \\
x^{12} = \gamma_{22}\, x^2 + \gamma_{21}\, x^1 + \gamma_{20}\, x \\
\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots \\
x^{1\nu} = \gamma_{\nu\nu}\, x^\nu + \gamma_{\nu 1}\, x^1 + \gamma_{\nu 0}\, x \\
(\gamma_{22} = \dots = \gamma_{\nu\nu} = \gamma)
\end{array}
\right.
$$

$$
(\mathrm{II}')\quad \left\{
\begin{array}{l}
x^{1,\nu+1,\nu+1} = \gamma_{\nu+1,\nu+1,\nu+1}\, x^{\nu+1,\nu+1} + \gamma_{\nu+1,1,\nu+1}\, x^{1,\nu+1} + \dots + \\
\qquad + \gamma_{\nu+1,1,k}\, x^{1k} + \gamma_{\nu+1,\nu+1}\, x^{\nu+1} + \dots + \gamma_{\nu+1,k}\, x^k + \\
\qquad + \gamma_{\nu+1,1}\, x^1 + \gamma_{\nu+1,0}\, x \\
x^{1,\nu+1,\nu+2} = \gamma_{\nu+1,\nu+2,\nu+1,\nu+2}\, x^{\nu+1,\nu+2} + \gamma_{\nu+1,\nu+2,1,\nu+1}\, x^{1,\nu+1} + \\
\qquad + \dots + \gamma_{\nu+1,\nu+2,1,k}\, x^{1k} + \gamma_{\nu+1,\nu+2,\nu+1}\, x^{\nu+1} + \dots + \\
\qquad + \gamma_{\nu+1,\nu+2,k}\, x^k + \gamma_{\nu+1,\nu+2,1}\, x^1 + \gamma_{\nu+1,\nu+2,0}\, x \\
\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots \\
x^{1,k,k} = \gamma_{k,k,k}\, x^{kk} + \gamma_{k,1,\nu+1}\, x^{1,\nu+1} + \dots + \gamma_{k,1,k}\, x^{1k} + \\
\qquad + \gamma_{k,\nu+1}\, x^{\nu+1} + \dots + \gamma_{k,k}\, x^k + \gamma_{k,1}\, x^1 + \gamma_{k,0}\, x.
\end{array}
\right.
$$

Passiamo ora a trovare la loro interpretazione geometrica nei diversi casi che si possono presentare.

23. — Si abbia $\nu = 1$, $k = 2$, cioè il sistema

$$x^{11} = 0.$$

$$x^{122} = \gamma_{22}\, x^{22} + \gamma_{12}\, x^{12} + \gamma_2\, x^2 + \gamma_1\, x^1 + \gamma_0\, x\,;$$

l'ultima equazione può scriversi anche

$$X^{22} = \delta_{12}\, x^{12} + \delta_2\, x^2 + \delta_1\, x^1 + \delta\, x$$

ponendo $X = x^1 - \gamma_{22} x$; cioè il piano osculatore alla curva descritta dal punto X al variare di τ_2 (individuato da X, X^2, X^{22}) è contenuto nello S_3 dei punti x, x^1, x^2, x^{12}; questo S_3 è tangente alla rigata lungo tutta la generatrice cui appartiene X (x, x^1), dunque sulla rigata esiste una curva i cui piani oscu-

latori giacciono negli S_3 tangenti alla rigata lungo le sue generatrici. Adoperando una locuzione già da me introdotta per lo studio delle rigate negli iperspazii, diremo che *la rigata ha indice di sviluppabilità* 2; è noto ([22]) che in tal caso *le sue generatrici giacciono nei piani osculatori ad una curva* (*e casi degeneri*) ([23]).

24. — Si abbia ora $\nu = 2$, $k = 3$; il sistema, con osservazioni analoghe alle precedenti, si scrive:

$$\begin{cases} x^{11} = 0 \\ x^{12} = \gamma_{22}\, x^2 + \gamma_{21}\, x^1 + \gamma_{20}\, x \\ x^{133} = \gamma_{333}\, x^{33} + \gamma_{313}\, x^{13} + \gamma_{33}\, x^3 + \gamma_{31}\, x^1 + \gamma_{30}\, x\,. \end{cases}$$

La prima equazione esprime che la V_3 integrale è rigata, la seconda che le ∞^1 superficie rigate definite entro V_3 da $\tau_3 =$ cost. sono sviluppabili, la terza che le ∞^1 superficie definite da $\tau_2 =$ cost. sono rigate della specie considerata precedentemente, cioè hanno il primo indice di sviluppabilità $= 2$. Per l'ipotesi fatta che non esistano altre equazioni di 2° e di 3° ordine soddisfatte da x, si può fare un cambiamento di variabili tale che le rigate $\tau_2 =$ cost. siano qualsiansi entro la V_3. Dunque ogni rigata entro la V_3 ha indice di sviluppabilità 2 (o 1 per le ∞^1 sviluppabili).

Cerchiamo di caratterizzare queste V_3. Cominciamo dal supporre che gli ∞^1 spigoli di regresso delle sviluppabili non si riducano a punti: si riconosce subito che tre di essi infinitamente vicini stanno in uno S_4 ([24]). Se escludiamo che tutta la rigata

([22]) L. c., n. 4 ([5]), *b)*.

([23]) Questo fatto non avviene in generale per una rigata di S_n se $n > 4$.

([24]) Analiticamente. Se X (τ_2, τ_3) è il punto che descrive lo spigolo di regresso (su cui varia τ_2) si ha

$$l_{332} X^{332} + l_{33} X^{33} + l_{32} X^{32} + l_3 X^3 + l_2 X^2 + l_0 X = 0. \tag{1}$$

Ma poichè la proprietà notata vale per una rigata qualsiasi entro la congruenza, deve aversi una relazione lineare omogenea fra i punti:

$$X,\ X^2,\ \frac{dX}{dt},\ \frac{dX^2}{dt},\ \frac{d^2X}{dt^2},\ \frac{d^2X^2}{dt^2}$$

appartenga ad uno S_4 (tutte le rigate in S_4 appartenendo alla specie in esame) ciascuna sviluppabile dev'essere costituita dalle tangenti ad una curva piana; i loro ∞^1 piani sono osculatori ad una medesima curva. La V_3 è la seconda sviluppabile di una curva. Ma una tale V_3 soddisfa a quattro equazioni di 2° e di 3° ordine; e va quindi esclusa.

Le sviluppabili devono ridursi necessariamente a coni aventi i loro vertici sopra una curva e questa dev'essere quasi-asintotica ([25]) per tutte le rigate di V_3 (cioè deve possedere la proprietà della curva descritta da X nel caso del n. prec.). Si vede subito che (per non ritornare sulla seconda sviluppabile di una curva) questa quasi-asintotica dev'essere una retta. Riassumendo:

La V_3 *integrale di un sistema del tipo*

$$\begin{cases} x^{11} = 0 \\ x^{12} = \gamma_{22}\, x^2 + \gamma_{21}\, x^1 + \gamma_{20}\, x \\ x^{133} = \gamma_{333}\, x^3 + \gamma_{313}\, x^{13} + \gamma_{33}\, x^3 + \gamma_{31}\, x^1 + \gamma_{30}\, x \end{cases}$$

ove

$$\frac{dX}{dt} = X^2 \tau'_2 + X^3 \tau'_3,\ \frac{dX^2}{dt} = X^{22} \tau'_2 + X^{32} \tau'_3,\ \frac{d^2X}{dt_2} = X^{22} \tau'_2 + 2X^{23} \tau'_2 \tau'_3 + \ldots;$$

$$\frac{d^2X^2}{dt^2} = X^{222} \tau'^2_2 + \ldots$$

con τ'_2, τ'_3, τ''_2, τ''_3 qualsiansi.

Ponendo intanto $\tau'_2 = 0$, $\tau'_2 = 1$ si ha, in virtù della (1)

$$m_{22}X^{22} + m_{33}X^{33} + m_{32}X^{32} + m_3X^3 + m_2X^2 + m_0X = 0 \tag{2}$$

e ponendo invece $\tau'_3 = 0$

$$n_{222}X^{222} + n_{23}X^{23} + n_{22}X^{22} + n_3X^3 + n_2X^2 + n_0X = 0\,. \tag{3}$$

Le relazioni (1) (2) (3) mostrano che i punti

$$X,\ X^2,\ X^3,\ X^{22},\ X^{33},\ X^{23},\ X^{222},\ X^{233}$$

appartengono allo S_4 dei primi cinque p. es. (se questi l'individuano). Procuriamoci X^{2222}: poichè X^{222} appartiene a questo S_4, X^{2222} apparterrà allo spazio determinato da S_4 e dai punti derivati X^{32}, X^{332}; ma questi appartengono ancora allo stesso S_4, quindi vi appartiene X^{2222}. La stessa operazione ora fatta può ripetersi su X^{2222}, e così di seguito: concludiamo che lo spigolo di regresso generico sta in uno S_4. Ma questo contiene anche X^3 e X^{33}, dunque, per lo stesso ragionamento fatto su X, contiene tre spigoli di regresso infinitamente vicini. Ora si può continuare come nel testo.

([25]) L. c., n. 4 ([5]), *b)*.

si compone di ∞^1 coni di prima specie aventi i loro vertici sopra una retta.

Non mettiamo il resultato sotto forma analitica, perchè ciò sarà fatto appresso in un caso più generale.

25. — Mostriamo invece quale sia, anche in un caso così semplice, l'importanza dell'ipotesi che non esistano altre equazioni (indipendenti dalle date) alle quale soddisfino le x (d'ordine ≤ 3). Riprendiamo perciò in esame questo sistema abbandonando l'ipotesi ora ricordata.

Rimangono inalterate le considerazioni fatte fino al cambiamento di variabili.

Consideriamo gli ∞^1 spigoli di regresso, sui quali assumiamo come variabile τ_2, delle ∞^1 sviluppabili : sulla superficie luogo vengono tracciati i due sistemi di linee τ_2, τ_3. La V_3 rigata è costituita dalle tangenti alle linee τ_2 ; le tangenti alle τ_2 in 3 punti successivi di una τ_3 stanno in uno S_4 (appunto perchè le rigate $\tau_2 =$ cost. entro V_3 hanno indice di sviluppabilità 2). Indicando con z (τ_2, τ_3) un punto della superficie detta, può porsi

$$x = z^2 + \tau_1 z.$$

I punti z, z^2, z^3, z^{32}, z^{33}, z^{332} debbono appartenere ad uno S_4 sicchè la z dev'essere integrale di un'equazione del tipo

$$a z^{332} + b z^{33} + c z^{32} + d z^3 + e z^2 + f z = 0 .$$

Eliminando z e le sue derivate fra questa e la relazione che dà x si ritorna sul sistema precedente. Ma dico che la x soddisfa necessariamente ad un'altra equazione del terz'ordine.

Insieme allo S_4 considerato pensiamo lo S_4 costruito per un punto infinitamente vicino di τ_2: questi due S_4 hanno in comune lo S_2 osculatore a τ_3 nel punto, cioè stanno in uno S_6. Esprimiamo analiticamente questo fatto. Lo spazio congiungente nominato è quello dei punti

$$\begin{matrix} x & x^1 & x^3 & x^{13} & x^{33} \\ x^2 & x^{12} & x^{23} & x^{123} & x^{233} \end{matrix} ;$$

esso dev'essere uno S_6; cioè, tenuto conto delle relazioni precedenti, deve valere una relazione del tipo

$$lx^{233} + mx^{33} + nx^{23} + px^{13} + qx^3 + rx^2 + sx^1 + tx = 0\,,$$

equazione differenziale di terzo ordine cui deve soddisfare la x. Il resultato può enunciarsi così:

L'integrazione del sistema delle tre equazioni date e dell'ultima scritta è equivalente all'integrazione di un'unica equazione di 3° ordine del tipo:

$$az^{332} + bz^{33} + cz^{32} + dz^3 + ez^2 + fz = 0\,.$$

Per questa equazione si può costruire una teoria del tutto simile a quella dell'equazione di Laplace.

26. — Il sistema di ν equazioni del 2° ordine e di una del terzo si discute allo stesso modo del precedente. Le prime ν equazioni indicano che nella $V_{\nu+1}$ vi sono ∞^1 coni definiti da $\tau_{\nu+1} = \text{cost.}$; l'ultima indica (nell'ipotesi che non esistano altre equazioni di 2° e di 3° ordine fra le x) che ogni rigata entro la $V_{\nu+1}$ ha indice di sviluppabilità $= 2$ al massimo.

Per un teorema già da me dimostrato ([26]) queste $V_{\nu+1}$ si compongono di ∞^1 coni aventi i vertici sopra una retta, o appartengono ad uno spazio di dimensione ≤ 4. Quest'ultima ipotesi è da scartare (si è già visto nel caso precedente).

D'altra parte si verifica subito che una $V_{\nu+1}$ composta di ∞^1 coni aventi i loro vertici sopra una retta è integrale del nostro sistema. Siano A e B due punti fissi che individuano la retta dei vertici; $C\,(\tau_2, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1})$ un punto preso sulla generatrice generica. Un punto x della $V_{\nu+1}$ è della forma

$$x = \tau_1\,(A + \tau_{\nu+1}\,B) + C\,(\tau_2, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1})\,;$$

per esso si ha:

$$x^{11} = 0,\ x^{12} = 0,\ \ldots\ x^{1\nu} = 0,\ x^{1,\nu+1,\nu+1} = 0,$$

sistema di equazioni del nostro tipo. Riassumendo:

([26]) L. c., n. 4 ([5]), *b)* n. 17.

Le $V_{\nu+1}$ integrali di un sistema del tipo indicato si compongono di ∞^1 coni (generici) di prima specie aventi i loro vertici sopra una retta. Alla soluzione si può dare la forma

$$x = \tau_1 (A + \tau_{\nu+1} B) + C(\tau_2, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1})$$

mediante un opportuno cambiamento di variabili.

Se invece si partisse dallo stesso sistema

$$\begin{aligned}
x^{11} &= 0 \\
x^{12} &= \gamma_{22} x^2 + \gamma_{21} x^1 + \gamma_{20} x \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^{1\nu} &= \gamma_{\nu\nu} x^\nu + \gamma_{\nu 1} x^1 + \gamma_{\nu 0} x \\
x^{1,\nu+1,\nu+1} &= \gamma_{\nu+1,\nu+1,\nu+1} x^{\nu+1,\nu+1} + \gamma_{\nu+1,1,\nu+1} x^{1,\nu+1} + \\
&\qquad + \gamma_{\nu+1,\nu+1} x^{\nu+1} + \gamma_{\nu+1,1} x^1 + \gamma_{\nu+1,0} x
\end{aligned}$$

ammettendo però che le x possano soddisfare ad altre equazioni del 3° ordine, ma non del secondo (non appartenenti al sistema), la $V_{\nu+1}$ integrale sarebbe ancora costituita da ∞^1 coni V_ν di prima specie, definiti da $\tau_{\nu+1} =$ cost.

Ciascuna delle rigate (V_2) definite da $\tau_2 =$ cost., ..., $\tau_\nu =$ cost. ha indice di sviluppabilità $= 2$, cioè le sue generatrici sono nei piani osculatori ad una curva su cui varia $\tau_{\nu+1}$: il luogo di queste curve è una V_ν sulla quale interessa notare le $V_{\nu-1}$ definite da $\tau_{\nu+1} =$ cost. Infatti:

i piani (S_2) osculatori alle linee $\tau_{\nu+1}$ nei punti di una $V_{\nu-1}$ passano per un punto;

lo $S_{2\nu}$ congiungente due spazi tangenti a V_ν in punti consecutivi di una $\tau_{\nu+1}$ contiene gli $S_{\nu-1}$ tangenti alle $V_{\nu-1}$ in tre punti consecutivi della curva stessa $\tau_{\nu-1}$, e passa per un punto dipendente solo da $\tau_{\nu+1}$.

Da queste proprietà potrebbero ricavarsi (come al n. 25) le altre equazioni differenziali cui soddisfa x.

27. — Esaurito così lo studio di un sistema di $k = \nu + 1$ equazioni del nostro tipo, prendiamo a considerare il sistema (I'), (II') nel caso più generale, cominciando dall'esame delle

equazioni del 2° gruppo associate alla $x^{11} = 0$. Esse, per l'ipotesi che non valgano altre equazioni di 2° e di 3° ordine fra le x, debbono potersi scrivere

$$
(\mathrm{II}')\quad
\begin{cases}
X^{\nu+1,\nu+1} = \gamma_{\nu+1,1,k}\, x^{1k} + \dots + \gamma_{\nu+1,1,\nu+1}\, x^{1,\nu+1} + \gamma_{\nu+1,k}\, x^{k} + \\
\qquad + \dots + \gamma_{\nu+1,\nu+1}\, x^{\nu+1} + \gamma_{\nu+1,1}\, x^{1} + \gamma_{\nu+1,0}\, x \\
X^{\nu+1,\nu+2} = \gamma_{\nu+1,\nu+2,1,k}\, x^{1k} + \dots + \gamma_{\nu+1,\nu+2,1,\nu+1}\, x^{1,\nu+1} + \\
\qquad + \gamma_{\nu+1,\nu+2,k}\, x^{k} + \dots + \gamma_{\nu+1,\nu+2,\nu+1}\, x^{\nu+1} + \gamma_{\nu+1,\nu+2,1}\, x^{1} + \\
\qquad + \gamma_{\nu+1,\nu+2,0}\, x \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X^{k,k} = \gamma_{k,1,k}\, x^{1k} + \dots + \gamma_{k,1,\nu+1}\, x^{1,\nu+1} + \gamma_{k,k}\, x^{k} + \dots + \\
\qquad + \gamma_{k,\nu+1}\, x^{\nu+1} + \gamma_{k,1}\, x^{1} + \gamma_{k,0}\, x
\end{cases}
$$

$$\gamma_{\nu+1,\nu+1,\nu+1} = \gamma_{\nu+1,\nu+2,\nu+1,\nu+2} = \dots = \gamma_{k,k,k} = \gamma.$$

Il punto $X = x^1 - \gamma x$ appartiene alla generatrice rettilinea passante per il punto x, e descrive una $V_{k-\nu}$ al variare di $\tau_{\nu+1}, \dots, \tau_k$.

Esaminiamo questa $V_{k-\nu}$ in rapporto allo spazio $S_{2(k-\nu)+1}$ dei punti $x, x^1, x^{\nu+1}, \dots, x^k, x^{1,\nu+1}, \dots, x^{1,k}$. I punti $X, X^{\nu+1}, \dots, X^k$ stanno nello $S_{2(k-\nu)+1}$ e per le equazioni (II') vi stanno anche i punti $X^{\nu+1,\nu+1}, X^{\nu+1,\nu+2}, \dots, X^{kk}$: questi sono in numero di $\frac{(k-\nu+1)(k-\nu+2)}{2}$: confrontiamolo al numero dei punti che definiscono lo $S_{2(k-\nu)+1}$ in cui quelli si trovano. Per $k > \nu + 1$ (e l'ipotesi $k = \nu + 1$ è già stata studiata) si trova

$$\frac{(k-\nu+1)(k-\nu+2)}{2} \geq 2(k-\nu) + 2$$

il segno d'uguaglianza valendo solo per $k = \nu + 2$. Ne segue in ogni caso che lo $S_{2(k-\nu)+1}$ tangente alla rigata lungo una sua generatrice è lo spazio 2-tangente alla varietà descritta da un determinato punto (X) di essa (cioè lo spazio che contiene X, i suoi punti derivati primi e derivati secondi) ([27]).

La varietà $V_{k-\nu}$, (X), *descritta dal punto* X *può perciò dirsi asintotica della* $V_{k-\nu+1}$ *rigata in cui è immersa. La proprietà di*

([27]) L. c. n. 5 ([8]).

possedere questa $V_{k-\nu}$ *asintotica è caratteristica per le rigate* $V_{k-\nu+1}$ *integrali del sistema* (II').

Sia ora $k = \nu + 2$; una superficie generica ha per spazio 2-tangente uno S_5, quindi potrà assumersi come superficie asintotica di una rigata del tipo precedente.

Ma nel caso generale ($k > \nu + 2$) lo spazio 2-tangente ad una $V_{k-\nu}$ ha dimensione $> 2(k - \nu) + 1$; quindi per costruire la $V_{\nu+1}$ rigata occorre risolvere un problema preliminare:

Costruire una $V_{k-\nu}$ il cui spazio 2-tangente generico abbia dimensione $= 2(k - \nu) + 1$.

Poniamo $k - \nu = \mu$: lo spazio 2-tangente ad una V_μ ha in generale dimensione $\frac{\mu(\mu+1)}{2} + \mu$; se questa deve ridursi a $2\mu + 1$ occorre che fra X e le sue derivate prime e seconde passi un numero ϵ di relazioni lineari ed omogenee tali che

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2} + \mu - \epsilon = 2\mu + 1$$

quindi

$$\epsilon = \frac{\mu(\mu-1)}{2} - 1 .$$

Supponiamo, p. es., che lo spazio 2-tangente ad (X) in X sia individuato dai punti

$$X,\ X^{\nu+1},\ \ldots,\ X^k,\ X^{\nu+1,\nu+1},\ X^{\nu+1,\nu+2},\ \ldots,\ X^{\nu+1,k},\ X^{\nu+2,\nu+2}$$

(essendo uno $S_{2\mu+1}$): le $\frac{\mu(\mu-1)}{2} - 1$ equazioni cui soddisfa X forniscono le altre derivate X^{rs}.

Integrato questo sistema è facile integrare quello dato (II') (che contiene $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ equazioni del terz'ordine).

Infatti un punto y generico sulla generatrice per X essendo contenuto nello spazio 2-tangente nominato dev'essere del tipo:

$$y = tX + t_{\nu+1} X^{\nu+1} + \ldots + t_k X^k + t_{\nu+1,\nu+1} X^{\nu+1,\nu+1} + \ldots + \\ + t_{\nu+1,k} X^{\nu+1,k} + t_{\nu+2,\nu+2} X^{\nu+2,\nu+2},$$

cioè le sue coordinate sono combinazioni lineari ed omogenee dei punti indicati a secondo membro. Ciò dev'essere anche vero,

come s'è osservato, per i punti $y^{\nu+1}, \ldots, y^k$: quindi derivata la relazione precedente e sostituite in essa le derivate seconde e terze di X che è possibile ricavare dalle equazioni cui X soddisfa debbono annullarsi i coefficienti dei termini che non figurano nella relazione stessa. Ciò impone dei legami differenziali ai coefficienti nell'espressione di y. Riassumendo:

L'integrazione del sistema (II') *di* $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ *equazioni del terzo ordine* (*insieme alla* $x^{11}=0$) *è ricondotta all'integrazione di un sistema di* $\frac{\mu(\mu-1)}{2}-1$ *equazioni del 2° ordine, lineari ed omogenee, in una funzione* X. *La soluzione di* (II') *è del tipo*

$$x = \tau_1 X + y$$

ove

$$y = tX + t_{\nu+1} X^{\nu+1} + \ldots + t_k X^k + t_{\nu+1,\nu+1} X^{\nu+1,\nu+1} + \\ + t_{\nu+1,\nu+2} X^{\nu+1,\nu+2} + \ldots + t_{\nu+1,k} X^{\nu+1,k} + t_{\nu+2,\nu+2} X^{\nu+2,\nu+2}$$

i coefficienti di questa combinazione lineare essendo legati da relazioni differenziali del 1° ordine che si sanno costruire (e che naturalmente bisogna integrare).

In particolare, per $\mu = 2\left(\frac{\mu(\mu-1)}{2} - 1 = 0\right)$ si può prendere per X una funzione qualsiasi, sicchè basta soddisfare alle relazioni differenziali ora dette.

Finora abbiamo esaminato il solo gruppo (II'); vedremo che il problema si semplifica quando il gruppo (I') contenga altre equazioni oltre alla $x^{11}=0$.

28. — Esaminiamo ora l'ultimo caso: $\nu > 2$ e k qualsiasi (caso generale).

Ci è già noto che la V_k si compone di $\infty^{k-\nu}$ coni (cfr. n. 11). Se indichiamo con $X(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k)$ un vertice generico e con $y(\tau_2, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k)$ un punto di una sua generatrice, si ha

$$x = \tau_1 X(\tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k) + y(\tau_2, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k);$$

con questa scelta di parametri le equazioni del primo gruppo prendono la forma

$$x^{11} = 0, \; x^{12} = 0, \; \ldots, \; x^{1\nu} = 0.$$

Se si applicano al solito modo le condizioni d'integrabilità alle equazioni del terz'ordine, si vede che in esse non possono comparire che le derivate

$$x^1,\ x^{1,\nu+1},\ \ldots,\ x^{1k},\ x^{1,\nu+1,\nu+1},\ x^{1,\nu+1,\nu+2},\ \ldots,\ x^{1,k,k},$$

cioè, poichè $x^1 = X$, quelle equazioni si scrivono:

$$X^{\nu+1,\nu+1} = \delta_{\nu+1,\nu+1,\nu+1}\, X^{\nu+1} + \ldots + \delta_{\nu+1,\nu+1,k}\, X^k + \delta_{\nu+1,\nu+1,0}\, X$$

$$X^{\nu+1,\nu+2} = \delta_{\nu+1,\nu+2,\nu+1}\, X^{\nu+1} + \ldots + \delta_{\nu+1,\nu+2,k}\, X^k + \delta_{\nu+1,\nu+2,0}\, X$$

. . . . . .

. . . . . .

$$X^{k,k} = \delta_{k,k,\nu+1}\, X^{\nu+1} + \ldots + \delta_{k,k,k}\, X^k + \delta_{k,k,0}\, X.$$

Tutte le derivate seconde di X si esprimono per mezzo di X stessa e delle sue derivate prime, linearmente ed omogeneamente: altrettanto accade per le derivate successive di qualsiasi ordine; cioè la varietà (X) descritta da X è uno S_μ.

Si verifica poi subito che se la (X) è uno S_μ la varietà V_k è del tipo voluto.

Lo $S_\mu\,(\mu = k - \nu)$ sia definito dai punti fissi $A_0, A_{\nu+1}, \ldots, A_k$; un punto della nostra V_k rigata è del tipo

$$x = \tau_1 \left(A_0 + \sum_{\nu+1}^{k}{}_i\, A_i \tau_i\right) + B\,(\tau_2, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1}, \tau_k).$$

Si ha

$$x^{11} = x^{12} = \ldots = x^{1\nu} = 0\,; \qquad x^{1,\nu+1} = A_{\nu+1}, \ldots, x^{1k} = A_k$$

quindi

$$x^{1,\nu+1,\nu+1} = 0,\ x^{1,\nu+1,\nu+2} = 0,\ \ldots,\ x^{1,\nu+1,k} = 0,\ \ldots,\ x^{1,k,k} = 0\,;$$

le x non soddisfanno in generale (cioè se le B sono scelte in modo generico) ad alcun'altra equazione non appartenente al sistema individuato dalle precedenti. Riassumendo:

Le V_k *integrali di un sistema di* ν *equazioni del 2° ordine e di* $\frac{(k-\nu)(k-\nu+1)}{2}$ *del 3° ordine, a caratteristica, completamente integrabile, si compongono nel caso più generale* (ν *e* k *qualsiansi*) *di* $\infty^{k-\nu}$ *coni di prima specie aventi i loro vertici sopra uno* $S_{k-\nu}$.

In altre parole, l'integrale generale di un tale sistema (che non soddisfi ad altre equazioni di 2° e di 3° ordine) può con una trasformazione (puntuale) dei soli parametri τ *ridursi, nel caso più generale, alla forma*

$$x = \tau_1 \left(A_0 + \sum_{\nu+1}^{k}{}_i A_i \tau_i\right) + B(\tau_2, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_k).$$

29. — Per le V_k studiate in questo paragrafo la varietà degli spazi 2-tangenti ha dimensione minore dell'ordinaria.

Infatti lo spazio 2-tangente in x alla V_k da esso descritta è individuato dai punti:

$$x, \; x^1, \; \ldots, \; x^k, \; x^{11}, \; x^{12}, \; \ldots, \; x^{1k}, \; \ldots, \; x^{kk},$$

cioè la varietà degli spazi 2-tangenti è descritta dal punto

$$\Xi = x + \sum_1^k{}_\lambda u_\lambda x^\lambda + \sum_1^k{}_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} x^{\lambda\mu} \qquad (w_{\lambda\mu} = w_{\mu\lambda}).$$

Per avere la dimensione della varietà (Ξ) descritta dal punto Ξ basta cercare la dimensione dello spazio ad essa tangente in Ξ, individuato dai punti

$$(1) \qquad x, \; x^\lambda, \; x^{\lambda\mu}, \; \sum_1^k{}_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} x^{\lambda\mu s} \qquad (\lambda, \mu, s = 1, \ldots, k).$$

Dalle equazioni date si possono ricavare tutte le derivate seconde di $A = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$ come combinazioni lineari ed omogenee di x e delle sue derivate prime e seconde; cioè qualunque siano le $w_{\lambda\mu}$ si avrà sempre

$$\sum_1^k{}_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} A^{\lambda\mu} = a_1 \sum_1^k{}_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} x^{\lambda\mu 1} + a_2 \sum_1^k{}_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} x^{\lambda\mu 2} + \ldots + \\ + a_k \sum_1^k{}_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu} x^{\lambda\mu k}$$

espresso per mezzo di x e delle sue derivate prime e seconde, o anche: fra i punti (1) passa sempre una relazione lineare ed omogenea qualunque siano le $w_{\lambda\mu}$, cioè la varietà (Ξ) ha dimensione $\leq \frac{k(k+3)}{2} - 1$ $\left(\text{e non } \frac{k(k+3)}{2}, \text{ come in generale}\right)$.

Si vede anche inversamente che se la varietà (Ξ) degli spazi 2-tangenti a V_k ha dimensione $\frac{k(k+3)}{2} - 1$ e se la V_k rappresenta il minimo numero possibile di equazioni del terzo ordine ([28]) (senza che per essa si riduca la dimensione di W), queste equazioni debbono essere in numero di $\frac{k(k+1)}{2}$ linearmente indipendenti e sono necessariamente a caratteristica (nel senso definito). Se alcune fra esse possono considerarsi ottenute per derivazione da equazioni del secondo ordine e se il sistema da queste individuato è di tipo parabolico, la V_k è caratterizzata dai teoremi di questo paragrafo.

§ 8. Sulle trasformazioni di un sistema di equazioni a caratteristica di tipo non parabolico.

30. — Uno dei capitoli più interessanti nella teoria della equazione (di Laplace) di 2° ordine in due variabili indipendenti, lineare ed omogenea, è senza dubbio quello delle sue trasformazioni: fra queste occupa un posto singolarmente importante la trasformazione di Laplace per l'equazione di tipo non parabolico. Esiste una trasformazione analoga per i sistemi di equazioni a caratteristica? Le considerazioni geometriche del n. 18 permettono di rispondere, negativamente, a questa domanda.

La trasformazione di Laplace per un'unica equazione consiste in ciò: sulla superficie che la rappresenta esiste un doppio sistema coniugato; le tangenti alle linee di un sistema nei punti di una linea dell'altro formano una sviluppabile: il luogo degli spigoli di regresso che così si ottengono è una superficie che rappresenta pure un'equazione di Laplace con le stesse variabili caratteristiche.

Ciò ricordato riprendiamo la proprietà 2) contenuta nell'ultimo enunciato del n. 18 relativa ad un sistema di tipo non parabolico, e poniamo per semplicità $\nu = 2$. Gli S_2 tangenti alle G_2 nei punti di una $\tau_{\nu+1}$ sono osculatori ad una curva:

([24]) Se la V_k rappresenta qualche equazione del 2° ordine, vanno prese in considerazione le equazioni del 3° ordine (fra loro indipendenti) che se ne ottengono per derivazione.

sia X un suo punto ottenuto partendo da un punto x della $V_{\nu+1} \equiv V_3$. La trasformazione di x in X si presenta del tutto analoga a quella di Laplace per il caso di due variabili; ma la varietà descritta da X non è del tipo della V_3 di partenza possiamo procurarci la formola di trasformazione.

La retta intersezione di due consecutivi dei piani tangenti nominati contiene (oltre X) i punti che si ottengono da x applicando la trasformazione di Laplace alle due superficie Φ, cui x appartiene, nelle direzioni τ_1, τ_2; questi punti sono:

$$x^1 - \gamma_{1,\nu+1}\, x\,, \qquad x^2 - \gamma_{2,\nu+1}\, x\,.$$

Facciamo variare $\tau_{\nu+1}$: l'intersezione della retta individuata con quella infinitamente vicina dà il punto X. Se quindi si pone:

$$X = \lambda\,(x^1 - \gamma_{1,\nu+1}\, x) + \mu\,(x^2 - \gamma_{2,\nu+1}\, x)$$

deve aversi per esso

$$\| x^1 - \gamma_{1,\nu+1}\, x,\ x^2 - \gamma_{2,\nu+1}\, x,\ X^{\nu+1} \| = 0:$$

questa relazione determina $\lambda : \mu$ e servendosi delle condizioni di integrabilità si può (n. 19) dare ad X la forma elegante

$$X = \begin{vmatrix} x^1 - \gamma_{1,\nu+1}\, x & x^2 - \gamma_{2,\nu+1}\, x \\ \gamma^1 - \gamma^{\nu+1}_{1,\nu+1} & \gamma^2 - \gamma^{\nu+1}_{2,\nu+1} \end{vmatrix}.$$

Se X descrivesse una varietà dello stesso tipo di quella di partenza i punti X, $X^{\nu+1}$, X^1, $X^{1,\nu+1}$, p. es., dovrebbero appartenere ad un piano; ma la retta dei punti X, $X^{\nu+1}$ è individuata dai punti

$$x^1 - \gamma_{1,\nu+1}\, x\,, \qquad x^2 - \gamma_{2,\nu+1}\, x:$$

se si derivano rispetto a τ_1 si ottengono altri due punti che con i precedenti individuano un S_3. L'ultima formola scritta (che dà X) estende la trasformazione di Laplace ad un sistema di due equazioni, ma conduce ad una varietà di tipo diverso, alla quale la trasformazione non è più applicabile. Analogamente per $\nu > 2$.

31. — Si vede invece subito che il sistema ammette delle trasformazioni analoghe a quelle definite dal Darboux per l'equazione di Laplace, formate con soluzioni dell'equazione stessa ([29]). Consideriamo perciò un punto di una V_ν $(\tau_1, \ldots, \tau_\nu)$ $\tau_{\nu+1} = \text{cost.}$ e lo S_ν ivi tangente ([30]). Gli S_ν costruiti analogamente per $h+1$ punti successivi di una $\tau_{\nu+1}$ appartengono ad uno $S_{\nu+h}$ definito dallo S_ν tangente in un punto a V_ν e dallo S_h ivi osculatore a $\tau_{\nu+1}$. Così per ogni punto della $V_{\nu+1}$ luogo di x si definisce uno S_h ed uno $S_{\nu+h}$. Se l'ambiente è uno S_n e si sega la configurazione degli S_h e degli $S_{\nu+h}$ con uno S_{n-h}, si ha dalla prima una V'_ν alla quale sono tangenti gli S_ν ottenuti segando la seconda configurazione. Analiticamente:

Se $x_1, \ldots, x_{n+1}$ *sono soluzioni linearmente indipendenti del sistema dato, i determinanti che s'estraggono dalla matrice*

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_h & x_{h+1} & \cdots & x_{n+1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau_{\nu+1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_h}{\partial \tau_{\nu+1}} & \dfrac{\partial x_{h+1}}{\partial \tau_{\nu+1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial \tau_{\nu+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^h x_1}{\partial \tau^h_{\nu+1}} & \cdots & \dfrac{\partial^h x_h}{\partial \tau^h_{\nu+1}} & \dfrac{\partial^h x_{h+1}}{\partial \tau^h_{\nu+1}} & \cdots & \dfrac{\partial^h x_{\nu+1}}{\partial \tau^h_{\nu+1}} \end{vmatrix}$$

tenendo fisse le prime h *colonne sono soluzioni di un sistema dello stesso tipo di quello dato. Assunti questi determinanti come coordinate proiettive omogenee di un punto di una* V'_ν, *le coordinate di* ν *altri punti che individuano lo* S_ν *ivi tangente si ottengono dalle precedenti sostituendo nella prima linea alle* x *le loro derivate prime* $\dfrac{\partial x}{\partial \tau_1}, \ldots, \dfrac{\partial x}{\partial \tau_\nu}$.

Al sistema è anche applicabile una trasformazione analoga ad una già da me data per un'equazione di Laplace con un

---

([29]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (Paris, Gauthier-Villars), t. II (1889), livre IV, ch. VIII.

([30]) Queste considerazioni geometriche sono del tutto analoghe a quelle da me svolte nella Nota, *Sur les configurations de Laplace* [" C. R. de l'Académie des Sciences ", t. 156, pp. 603-605, 24 février 1913].

invariante nullo ([31]). Con ragionamenti analoghi a quelli svolti nella Memoria ora citata si vede che se x è integrale del sistema dato, la funzione

$$\Theta(\tau_1, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1})\, x(\tau_1, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1}) - \\ - \Theta(\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_\nu, \tau_{\nu+1})\, x(\bar{\tau}_1, \ldots, \tau_\nu, \tau_{\nu+1})$$

ove

$$\Theta = e^{-\int(\gamma_{1,\nu+1}\, d\tau_1 + \ldots + \gamma_{\nu,\nu+1}\, d\tau_\nu)}$$

è integrale di un sistema dello stesso tipo avente per variabili di derivazione $\tau_1, \tau_2 \ldots, \tau_{\nu+1}$ mentre $\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_\nu$ rappresentano valori fissati ad arbitrio di $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$.

Questa trasformazione può applicarsi più volte, ed ogni volta s'introducono ν parametri completamente arbitrarii nei coefficienti del nuovo sistema.

Göttingen, 31 luglio 1913.

([31]) L. c., n. 19 ([21]); parte II. Qui si profitta appunto della circostanza che ogni superficie Φ entro la $V_{\nu-1}$ ha un invariante nullo (cfr. n. 19).

INDICE

§ 1. — Preliminari . . . . . *Pag.* 83
§ 2. — Generalità sulle equazioni a caratteristica . . . „ 88
§ 3. — Sistemi di equazioni a caratteristica di 2° ordine di tipo parabolico . . . . . „ 93
§ 4. — La varietà W degli spazi tangenti ad una varietà V_k . „ 98
§ 5. — Gruppi di equazioni simultanee a caratteristica di 2° ordine di tipo parabolico . . . . . „ 99
§ 6. — Sistemi di equazioni a caratteristica di 2° ordine di tipo non parabolico . . . . . „ 100
§ 7. — Sistemi di equazioni a caratteristica di 3° ordine . . „ 113
§ 8. — Sulle trasformazioni di un sistema di equazioni a caratteristica di tipo non parabolico . . . . . „ 128

Sulla dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue.

Nota di CINO POLI

1. — In questa nota mi propongo una questione di importanza principalmente didattica, cioè di dimostrare l'esistenza dell'integrale definito di una funzione continua in un dato intervallo senza far uso del teorema di Cantor sulla continuità uniforme.

Prendo a base di questa dimostrazione la definizione di integrale di Riemann come è stata modificata da G. Darboux coll'introduzione degli integrali infero e supero, e semplificata da G. Peano [1].

2. — Se a, b sono numeri reali ($a < b$) ed f è una funzione reale nell'intervallo $a^{\frown} b$, considero un numero finito n di punti $d_0 = a$, d_1, d_2,... $d_n = b$, $d_i < d_{i+1}$, e detto m_i il minimo, n_i il massimo di f in $d_i^{\frown} d_{i+1}$ formo le somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i (d_{i+1} - d_i) \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} n_i (d_{i+1} - d_i). \tag{2}$$

Il limite superiore dei valori assunti da (1) quando varia il sistema dei punti d, si chiama l'integrale infero di f in $a^{\frown} b$.

[1] *Sulla definizione di integrale.* " Annali di matematica ", 1895.

La definizione e i teoremi dati nei due numeri seguenti si trovano espressi in simboli di logica matematica nel " Formulario Mathematico ", ed V, § VII, P. 1, 2, 3, 4, 6, 10.

che indico con $S_1(f; a, b)$; mentre il limite inferiore dei valori (2) è l'integrale supero che indico con $S'(f; a, b)$.

La f è integrabile in $a^{\neg}b$ se i due integrali sono uguali.

3. — Se c è un numero compreso fra a e b si dimostra facilmente che

$$S_1(f; a, b) = S_1(f; a, c) + S_1(f; c, b) \tag{3}$$

$$S'(f; a, b) = S'(f; a, c) + S'(f; c, b). \tag{4}$$

Infatti gli integrali di f si possono ottenere anche dalle somme (1), (2) relative ai soli gruppi di punti d che contengono anche c, poichè se un gruppo non lo contiene, aggiungendovi c si ottiene un altro gruppo che dà una somma (1) più grande e una somma (2) più piccola che non il gruppo primitivo.

Limitandoci dunque a considerare gruppi d che contengono c, si vede che tanto la (1) quanto la (2) diventano la somma di due somme analoghe relative agli intervalli $a^{\neg}c$, $c^{\neg}b$ rispettivamente. Quindi prendendo i limiti se ne deduce il teorema.

Sostituendo nella (1) ad ogni m_i il minimo M di f in tutto $a^{\neg}b$, e nella (2) ad ogni n_i il massimo N, si ottiene immediatamente il teorema del valore medio:

$$M(b-a) \leq S_1(f; a, b) \leq S'(f; a, b) \leq N(b-a) \tag{5}$$

4. — Se dunque f è continua in tutto l'intervallo dato esistono due numeri θ, θ' entrambi compresi fra 0 e 1, tali che

$$S_1(f; a, b) = (b-a) f[x + \theta(b-a)]$$

$$S'(f; a, b) = (b-a) f[x + \theta'(b-a)].$$

Allora in un punto qualunque x di $a^{\neg}b$ si ha

$$\lim_{y=x} \frac{S_1(f; a, y) - S_1(f; a, x)}{y-x} = \lim_{y=x} \frac{S_1(f; x, y)}{y-x} =$$

$$= \lim_{y=x} f[x + \theta(y-x)] = f(x)$$

e similmente

$$\lim_{y=x} \frac{S'(f\,;a,y)-S'(f\,;a,x)}{y-x} = \lim_{y=x} \frac{S'(f\,;x,y)}{y-x} =$$

$$= \lim_{y=x} f[x+\theta'(y-x)] = f(x).$$

Vale a dire che se f è continua, tanto la derivata di $S_1(f;a,x)$ che quello di $S'(f;a,x)$ rispetto ad x sono uguali ad f. Dunque la derivata della differenza di queste due integrali è nulla in ogni punto di $a^{\frown}b$, ossia questa differenza è costante rispetto ad x. Ma

$$S'(f\,;a,a) = S_1(f\,;a,a) = 0$$

dunque $S_1(f;a,x) = S'(f;a,x)$ per ogni valore di x.

Ho così dimostrato il teorema: *Se in un certo intervallo è data una funzione reale continua, i suoi integrali infero e supero in detto intervallo sono uguali, cioè la funzione data è integrabile*; e ciò senza far uso del teorema di Cantor la cui comprensione esatta offre non piccole difficoltà al giovane che inizia lo studio del calcolo, ed appoggiandomi invece solo a teoremi fondamentali che devono essere studiati in ogni corso, anche nel più elementare.

Torino, 27 novembre 1913.

L'estensimetro di Cambridge.

Nota del Dott. Ing. GUSTAVO COLONNETTI

La Cambridge Scientific Instrument Co. costruisce da qualche anno un estensimetro, destinato alla misura dell'allungamento elastico e, conseguentemente, del modulo d'elasticità a trazione, il quale, per essere stato progettato più come uno strumento da officina che come un apparecchio scientifico, ha il merito di non presentare organi delicati il cui uso richieda nell'operatore particolari abilità. Non vi si trovano infatti nè specchi nè microscopi: i due pezzi di cui l'apparecchio si compone, entrambi assai robusti e semplicissimi, vengono semplicemente a poggiare l'uno sull'altro in tal modo che l'estensimetro non dovrebbe subir danno di sorta neppure quando la provetta sottoposta alla prova venisse inopinatamente a rompersi.

Per altra parte un rapporto del National Physical Laboratory (Engineering Department), che la casa costruttrice esibisce a prova della bontà dell'istrumento, dopo di aver riferiti i risultati di una prova eseguita su di una barretta di acciaio di 0,565 pollici di diametro, dichiara testualmente: " The instrument is evidently reliable to about the one thousandth of a millimetre, under ordinary conditions of test ".

L'alto interesse che può presentare così per gli studiosi come, e sopratutto, pei tecnici uno strumento di misura il quale un così elevato grado di approssimazione realizzi con una incomparabile semplicità di mezzi, mi induce a rendere noti alcuni dei risultati a cui io sono pervenuto operando con uno di questi estensimetri recentemente acquistato dal mio Laboratorio per le prove sui materiali da costruzione nella R. Scuola Navale Superiore di Genova.

*
* *

Premetto una breve descrizione dell'apparecchio ed un cenno su di una variante che ne può rendere l'uso anche più agevole e sicuro.

Ciascuna delle due parti di cui lo strumento si compone viene fissata alla provetta M mediante una coppia di punte

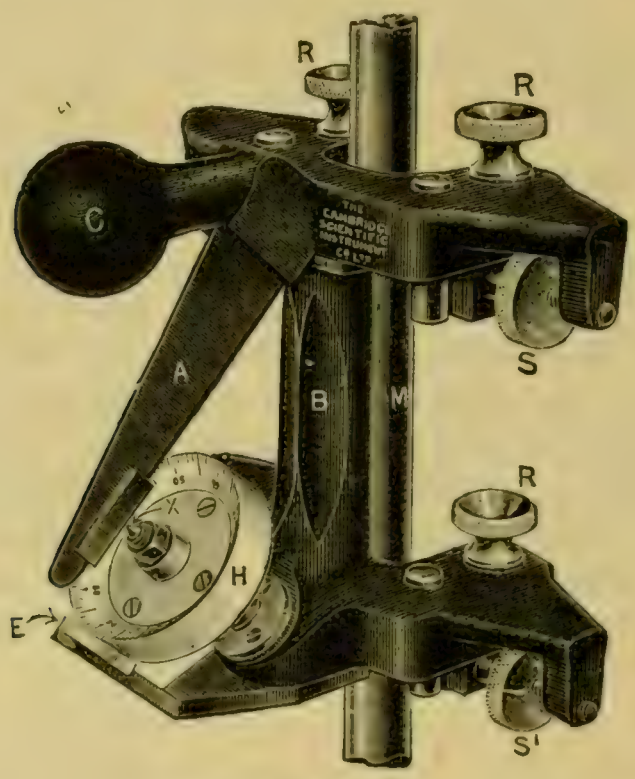


Fig. 1.

coniche, indicate nelle nostre figure in P, P e P', P' rispettivamente, alla cui manovra servono le viti S, S, R, R ed S', S', R', R'. Il braccio B della parte inferiore termina inoltre con un coltello (a profilo circolare) in acciaio temperato, sul quale, come su di un fulcro, riposa, mediante un'apposita sede pure in acciaio, la parte superiore. Il contrappeso C provvede a mantenere immutato il contatto delle due parti suddette anche quando al variare della lunghezza del tratto utile della provetta varia la distanza delle due coppie di punte P, P e P', P'. Nasce così un moto relativo di rotazione, attorno al suddetto fulcro, dell'una parte dello strumento rispetto all'altra: questo moto

può venire apprezzato manovrando la vite micrometrica H che si trova sulla parte inferiore dello strumento in modo che la sua punta X si mantenga sempre a contatto del bordo di un piccolo coltello d'acciaio con cui termina la lamina flessibile A che appartiene alla parte superiore dello strumento.

Se le cose sono disposte per modo che lo spostamento del suddetto coltello rispetto alla punta X sia eguale a cinque volte

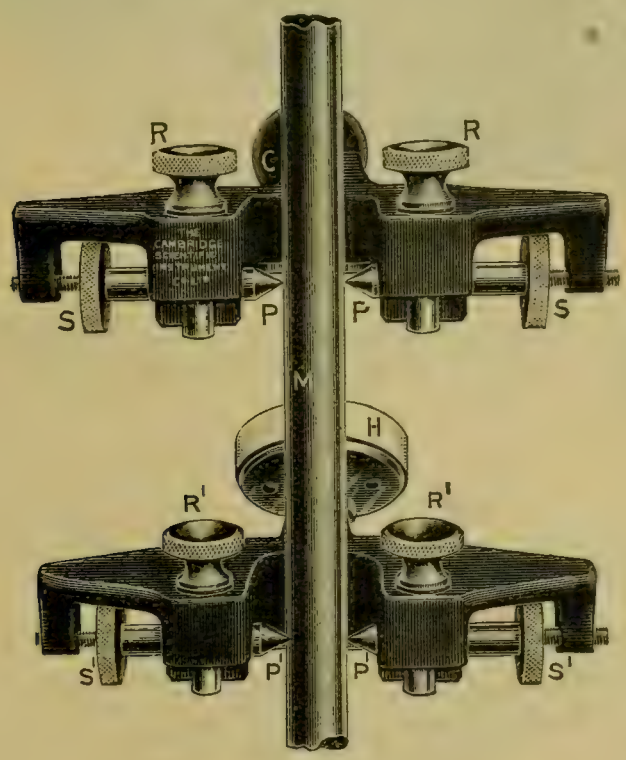


Fig. 2.

l'allungamento del tratto utile della provetta che lo ha cagionato, se cioè è eguale a 5 l'*ingrandimento meccanico* dello strumento, si può facilmente apprezzare nella misura della deformazione il millesimo di millimetro: a questo fine il tamburo H è diviso in 100 parti e la vite che lo porta ha il passo eguale a mezzo millimetro. Ciò s'intende alla duplice condizione che il montaggio dello strumento possa venir eseguito colla dovuta precisione e che si disponga di un metodo sufficientemente sensibile per avvertire, appena si verifica, il contatto della punta X contro il bordo del coltello.

A facilitare le operazioni preparatorie, la Casa costruttrice fornisce coll'apparecchio un piccolo banco in ghisa destinato a rendere assai rapida e nel tempo stesso scrupolosamente pre-

cisa la impressione sulla provetta delle quattro piccole tacche entro le quali debbono trovar posto le quattro punte coniche P, P

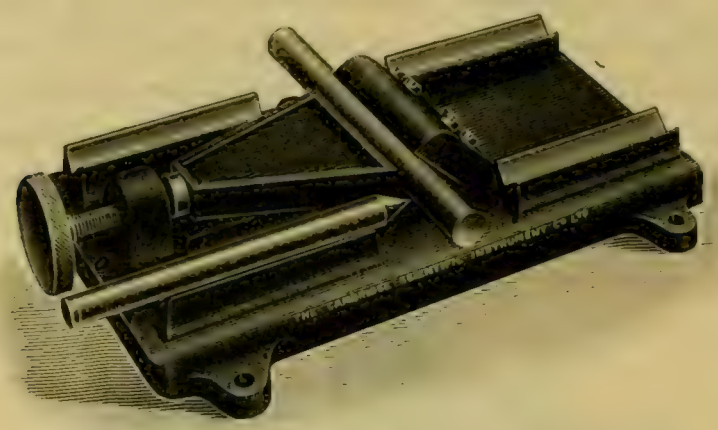


Fig. 3.

e P', P'. Questo banco, rappresentato nella nostra fig. 3, porta due scanalature a forma di **V** fra loro parallele e coi loro assi

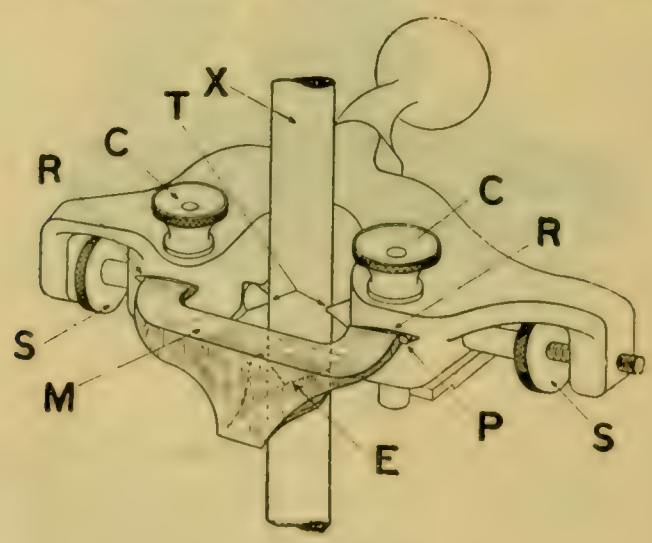


Fig. 4 (*).

situati esattamente a quella distanza a cui debbono trovarsi poi le due coppie di punte sopra nominate (nell' apparecchio

(*) In questa figura sono indicate colle lettere S e C le viti di manovra delle punte T mediante le quali lo strumento vien fissato alla provetta X. La posizione dello strumento è da considerarsi corretta quando il calibro M, collocato col suo bordo superiore nelle scanalature R in contatto coll'ostacolo P, riesce a toccare la provetta con entrambi i lati dell'angolo rientrante E praticato nella sua parte inferiore.

normale questa distanza è di 10 cm.). Tali scanalature sono interrotte verso il mezzo del banco. Ivi può venire trasversalmente fissata la provetta per modo che sulla sua superficie le tacche volute vengono facilmente impresse, a due a due diametralmente opposte, mediante apposito punteruolo; la punta di questo porta tre minuscoli appiattimenti, in grazia dei quali le punte perfettamente coniche dello strumento si potranno più sicuramente fissare nelle tacche senza gioco.

Un calibro *M* (figura 4), pure fornito coll'apparecchio, permette poi a chi sta per usare lo strumento di assicurarsi che entrambe le parti dell'estensimetro si trovino simmetricamente disposte rispetto ad un unico piano passante per l'asse della provetta.

Ma è essenzialmente nel modo di avvertire il primo contatto della punta *X* col bordo del coltello che termina la lamina *A* che risiede la caratteristica più spiccata dell'apparecchio costruito dalla Cambridge Scientific Instrument Co. Viene infatti a questo scopo ingegnosamente utilizzata la flessibilità della lamina *A* per riconoscere tale contatto a mezzo del suono che si produce non appena la punta, avanzando, incomincia a sfiorare il coltello vibrante.

I costruttori dichiarano di essere stati condotti dall'esperienza a riconoscere la sensibilità di questo procedimento, non privo davvero di originalità, il quale ha il caratteristico pregio di permettere all'osservatore di oltrepassare senza inconvenienti la posizione del primo contatto: tutto ciò che può succedere è che la punta obblighi la lamina *A* ad arrestarsi da una parte o dall'altra, ma ciò non impedisce all'osservatore di ripetere la lettura dopo di aver fatto retrocedere la vite e di aver rimesso in vibrazione il coltello.

Siffatte ripetizioni di letture rendono agevole il constatare che, *a parità di condizioni di vibrazione della lamina* A, un tale sistema consente il voluto grado di approssimazione. È però altrettanto facile accorgersi che, variando l'ampiezza delle dette vibrazioni, e sopratutto la loro *forma* (dipendentemente dal modo con cui la lamina è stata inizialmente spostata), può la lettura rendersi incerta per 2 o anche per 3 divisioni del tamburo. Questa dipendenza del grado di approssimazione dello strumento dall'abilità dell'operatore è parsa a chi scrive così notevole da

rendere necessaria qualche modificazione allo strumento atta ad assicurare alle vibrazioni che c'interessano una forma ed un'ampiezza sensibilmente costanti.

Le fig. 5 e 6 rappresentano lo strumento corredato di un piccolo elettromagnete Z il quale, eccitato a volontà mediante la corrente fornita da un accumulatore, produce la deviazione iniziale della lamina A; le vibrazioni che in essa lamina si verificano all'apertura del circuito della corrente eccitatrice soddisfano assai bene alle condizioni sopra enunciate. Con questa

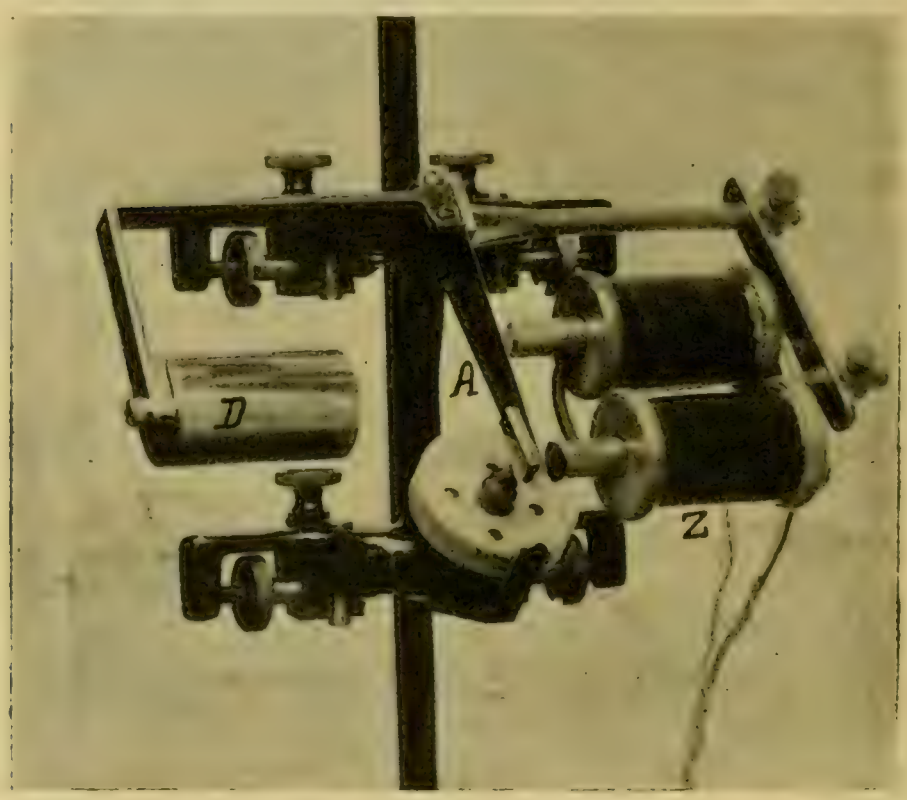


Fig. 5.

variante (*) si riesce ad apprezzare con sicurezza la mezza divisione del tamburo.

Inoltre la possibilità di mettere la lamina in vibrazione senza toccare colle mani l'apparecchio elimina una causa di urti, i quali possono disturbare gravemente l'andamento dell'esperienza, specie se il diametro della provetta è inferiore ad un certo li-

(*) Tale variante venne eseguita, su disegno di chi scrive, dal valente meccanico del R. Istituto Tecnico di Genova, Sig. Francesco Musanti.

mite. In questo caso occorre anche evitare, nei limiti del possibile, ogni sollecitazione secondaria derivante dal peso, eccentrico, dell'elettromagnete; perciò si è sostituito al contrappeso C un nuovo contrappeso D situato in posizione conveniente.

***

Per rendersi conto del funzionamento dell'apparecchio conviene immaginarlo ridotto ad un semplice schema, quale è quello

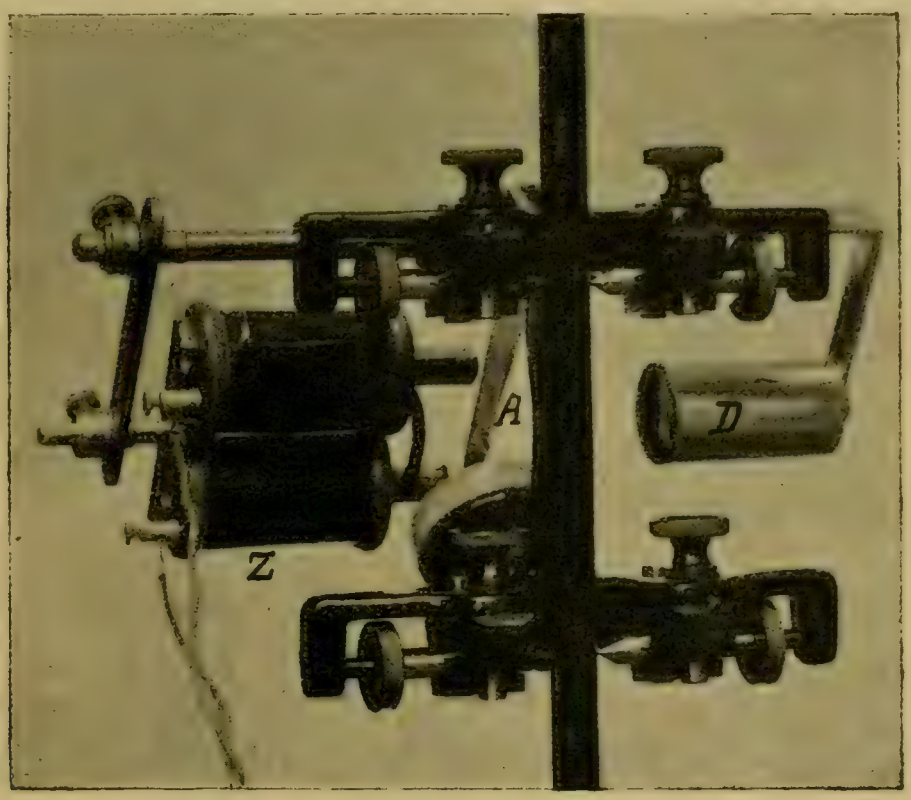


Fig. 6.

rappresentato dalla fig. 7. In essa si è indicato con O il fulcro in corrispondenza del quale trovansi fra loro connesse le due parti dello strumento: parti che considereremo come articolate rispettivamente in P ed in P' all'asse geometrico della provetta.

La retta $A\,A'$ rappresenta il bordo utile, opportunamente prolungato, del coltello: la $B\,B'$ rappresenta invece l'asse geometrico della vite micrometrica. Ad individuare analiticamente le direzioni e posizioni spettanti a queste due rette, rispettivamente nella parte superiore e nella parte inferiore dello stru-

mento, è sembrato opportuno introdurre le lor due distanze r e k dal fulcro O ed i due angoli $\alpha - \frac{\pi}{2}$ e β che esse fanno colle due direzioni OP ed OP' rispettivamente.

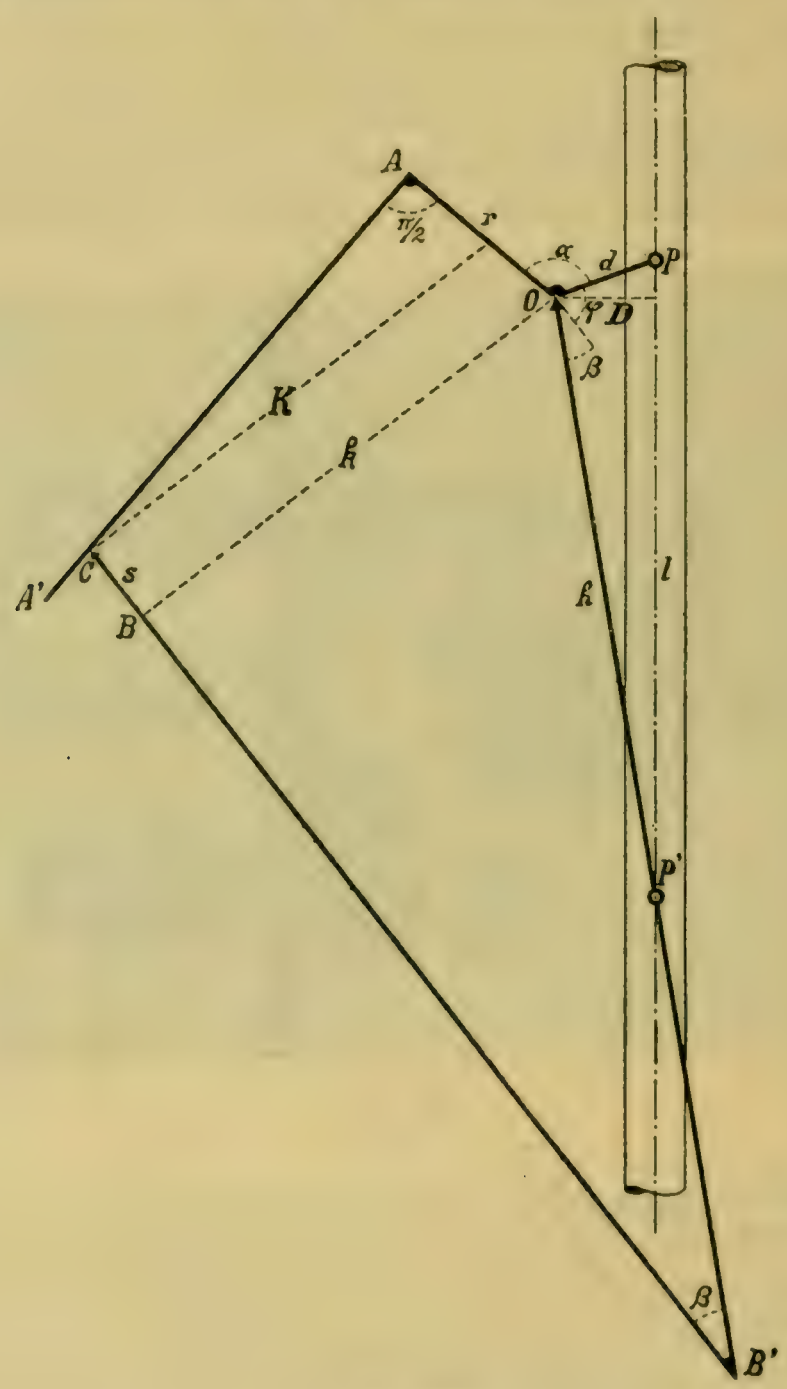


Fig. 7.

La posizione relativa delle due parti dell'apparecchio verrà invece caratterizzata mediante l'angolo φ che la direzione OP fa

colla direzione BB'. Si denoteranno inoltre con l la distanza PP', cioè la lunghezza del tratto di provetta sottoposta ad esperienza, e con s l'ascissa del punto C della retta BB' in cui essa è incontrata dalla AA', misurata assumendo il punto B (piede della perpendicolare che passa per O) come origine e la direzione BB' come verso positivo.

Ciò premesso, noi determineremo la legge con cui varia s al variare di l, coll' intermediario della variabile ausiliaria φ, prendendo in considerazione, in luogo degli effettivi movimenti delle singole parti del sistema, i soli loro moti relativi alla parte inferiore dello strumento considerata come assolutamente fissa nello spazio; è noto che questi moti relativi possono immaginarsi realizzati imprimendo idealmente all'intiero sistema un moto eguale ed opposto a quello che la detta parte inferiore dello strumento subisce effettivamente durante l'esperienza.

Posto per brevità $OP = d$ ed $OP' = h$, dalla eguaglianza

$$l^2 = h^2 + d^2 - 2hd \cos(\beta + \varphi)$$

si ricava facilmente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{l}{hd \operatorname{sen}(\beta + \varphi)} .$$

Per altra parte

$$s = \frac{r + k \operatorname{sen}(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)}$$

donde

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = \frac{k + r \operatorname{sen}(\alpha + \varphi)}{\cos^2(\alpha + \varphi)} .$$

Ciò che a suo tempo abbiamo chiamato l'*ingrandimento meccanico* dello strumento viene dunque ad essere misurato da

$$(1) \qquad \frac{\partial s}{\partial l} = \frac{\partial s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{l\,[k + r \operatorname{sen}(\alpha + \varphi)]}{hd \operatorname{sen}(\beta + \varphi) \cos^2(\alpha + \varphi)} .$$

Se si indica con

$$D = \frac{hd \operatorname{sen}(\beta + \varphi)}{l}$$

la distanza del fulcro O dall'asse PP' della provetta, e con

$$K = \frac{k + r \operatorname{sen}(\alpha + \varphi)}{\cos^2(\alpha + \varphi)}$$

la lunghezza del segmento di retta perpendicolare a BB' innalzato da C fino a incontrare la retta OA, si può scrivere più semplicemente

$$\frac{\partial s}{\partial l} = \frac{K}{D}. \tag{2}$$

La variabilità, evidente, di questo rapporto implica, come era da prevedersi, la necessità di utilizzare lo strumento soltanto per variazioni convenientemente limitate dell'angolo φ, l'approssimazione della misura dipendendo ovviamente dalla variazione corrispondente dell'ingrandimento.

A parità di altre condizioni, l'apparecchio consentirà il maggior grado di approssimazione se utilizzato nei dintorni di quella posizione per cui è

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right) = 0$$

cioè

$$D \frac{\partial K}{\partial \varphi} - K \frac{\partial D}{\partial \varphi} = 0. \tag{3}$$

Eseguendo le operazioni indicate, questa equazione di condizione assume la forma:

$$\frac{r}{K \cos(\alpha + \varphi)} + 2 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{cotg}(\beta + \varphi) - \frac{D}{l}. \tag{4}$$

Tra le infinite soluzioni che essa caratterizza non mancano i casi particolari caratteristici.

Supponiamo ad esempio che, nella sua posizione media di funzionamento, il braccio OP debba riuscire normale all'asse PP' della provetta. Allora

$$\operatorname{cotg}(\beta + \varphi) = \frac{D}{l}$$

onde la [4] diviene

$$r + 2K \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) = 0 .$$

Scritta sotto la forma

$$r = 2K \operatorname{sen}(\alpha + \varphi - \pi) \tag{5}$$

essa giustifica facilmente le costruzioni grafiche delle fig. 8 e 9. Nella prima di esse si è supposta già progettata, con criterii

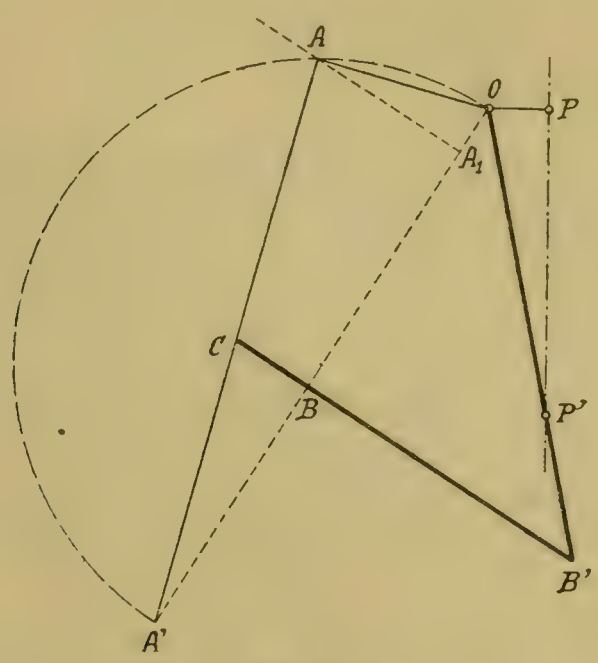


Fig. 8.

pratici, la parte inferiore dello strumento: fissato allora l'ingrandimento $\frac{K}{D}$ e scelto D ad arbitrio, colla sola condizione che si abbia

$$\frac{k}{2} < K \leq k ,$$

si determinerà la posizione del punto A (e contemporaneamente la direzione da attribuirsi alla retta AA') cercando il punto in cui la semicirconferenza di diametro $OA' = 2K$ tracciata in figura incontra la parallela a BB' che dista da O di $OA_1 = 2\,(k - K)$.

Nella fig. 9 invece si è supposta già costruita la parte superiore dello strumento e si è determinata la posizione da attribuirsi all'asse BB' della vite micrometrica coll'aiuto di un cerchio di raggio $MC = K$ avente il centro nel punto di mezzo M del segmento OA.

Ho creduto non inutile soffermarmi brevemente sulla soluzione particolare espressa dalla [5] perchè essa appare fra tutte la più semplice e, direi anche, la più ovvia: ad essa infatti giungerebbe direttamente chi tentasse di soddisfare la [3] facendo in essa separatamente

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial D}{\partial \varphi} = 0 .$$

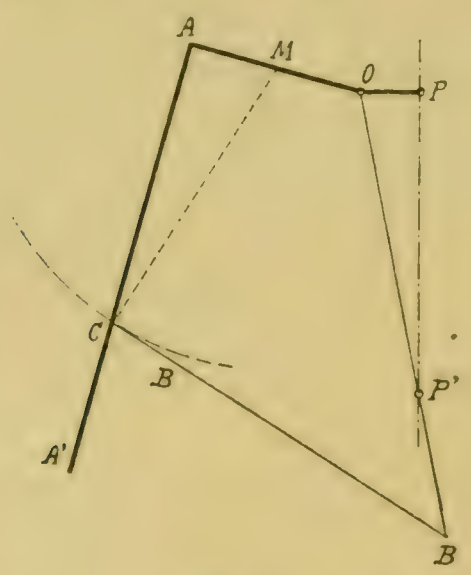


Fig. 9.

Ma è d'uopo avvertire che non è certamente a questa classe di soluzioni che si sono ispirati i costruttori dell'apparecchio che ci occupa. Un accurato esame di esso mi ha infatti permesso di constatare che, in prossimità della sua posizione iniziale di funzionamento, e precisamente allorquando la direzione AA' risulta perpendicolare alla BB', riesce con sufficiente approssimazione soddisfatta la relazione

$$\operatorname{cotg}(\beta + \varphi) = \frac{D}{l} - \frac{r}{K}$$

a cui la [4] si riduce quando si pone $\alpha + \varphi = \pi$.

In prossimità di questa posizione l'ingrandimento $\frac{K}{D}$ si mantiene adunque sensibilmente costante. Il suo valore però, nell'apparecchio che appartiene al mio Laboratorio nella R. Scuola Navale Superiore di Genova, invece di essere, come dovrebbe, eguale a 5, è prossimo assai a 4,90 : ciò ci autorizza a prevedere che le misure di deformazioni eseguite con tale strumento saranno affette da un errore sensibilmente costante del 2 $^0/_0$ all'incirca in difetto. I moduli di elasticità che se ne potranno dedurre saranno perciò alla lor volta errati del 2 $^0/_0$ circa *in eccesso.*

*
* *

I risultati delle considerazioni teoriche sopra esposte hanno trovato nell'esperienza una così confortante conferma che credo utile complemento a quanto precede far seguire, riassunte nei due quadri allegati, le osservazioni che, per mezzo del suddescritto estensimetro, io ho avuto occasione di fare nello scorso inverno su di una provetta d'acciaio dolce le cui proprietà elastiche hanno potuto essere a più riprese controllate mediante lo Spiegelapparat di Bauschinger grazie al benevolo interessamento che l'ill. prof. C. Guidi ha voluto dimostrare per queste ricerche.

Le prove si sono succedute, a non grande distanza di tempo, nell'ordine in cui si trovano qui appresso riferite. Soltanto tra la prima e la seconda serie la provetta è stata ripetute volte sollecitata da un carico di intensità oscillante fra 0 e 3 tonnellate : donde l'incrudimento che i risultati rivelano nel materiale.

L'esame delle cifre che qui si riportano conferma le più favorevoli previsioni sulla sensibilità del metodo di misura, e, quando si correggano i risultati riportati nelle tabelle 2ª e 4ª nel senso previsto, la concordanza loro coi corrispondenti valori delle tabelle 1ª e 3ª riesce assolutamente soddisfacente.

1ª Serie. TABELLA 1ª

Esperienze eseguite con lo Spiegelapparat di Bauschinger *del Laboratorio per le prove sui materiali da costruzione del R. Politecnico di Torino* (Distanza fra i coltelli = cm. 15).

Carico totale t.	Letture in $\frac{1^{mm}}{5000}$ Specchio ant.	Specchio post.	Dilatazione in millesimi di millimetro	Differenze in millesimi di millimetro	Scostamenti dalla media in millesimi di millimetro	Modulo di elasticità medio t/cm²
0.50	1800	2200				
1.00	1892	2095	19.7	19.7	— 0.2	
1.50	1989	1989	40.0	20.3	+ 0.4	
2.00	2082	1882	60.0	20.0	+ 0.1	
2.50	2178	1780	79.8	19.8	— 0.1	
3.00	2272	1678	99.4	19.6	— 0.3	2131
0.50	1800	2200				
1.00	1895	2091	20.4	20.4	+ 0.3	
1.50	1990	1985	40.5	20.1	0	
2.00	2088	1881	60.7	20.2	+ 0.1	
2.50	2181	1778	80.3	19.6	— 0.5	
3.00	2278	1675	100.3	20.0	— 0.1	2112

TABELLA 2ª.

*Esperienze eseguite coll'*Estensimetro di Cambridge *del Laboratorio per le prove sui materiali da costruzione della R. Scuola Navale Superiore di Genova* (Distanza fra le punte = cm. 10).

Carico totale t.	Letture in millesimi di millimetro	Dilatazione in millesimi di millimetro	Differenze in millesimi di millimetro	Scostamenti dalla media in millesimi di millimetro	Modulo di elasticità medio t/cm²
0.50	87.5				
1.00	100.5	13.0	13.0	+ 0.1	
1.50	114.0	26.5	13.5	+ 0.6	
2.00	126.0	38.5	12.0	— 0.9	
2.50	139.0	51.5	13.0	+ 0.1	trovato : 2189
3.00	152.0	64.5	13.0	+ 0.1	corretto : 2146
0.50	86.5				
1.00	100.0	13.5	13.5	+ 0.4	
1.50	114.0	27.5	14.0	+ 0.9	
2.00	126.5	40.0	12.5	— 0.6	
2.50	139.0	52.5	12.5	— 0.6	trovato : 2154
3.00	152.0	65.5	13.0	— 0.1	corretto : 2111

2ª Serie. TABELLA 3ª.

Esperienze eseguite con lo Spiegelapparat di Bauschinger *del Laboratorio per le prove sui materiali da costruzione del R. Politecnico di Torino* (Distanza fra i coltelli = cm. 15).

Carico totale t.	Letture in $\frac{1^{mm}}{5000}$ Specchio ant.	Specchio post.	Dilatazione in millesimi di millimetro	Differenze in millesimi di millimetro	Scostamenti dalla media in millesimi di millimetro	Modulo di elasticità medio t cm²
0.50	1500	2300				
1.00	1580	2199	18.1	18.1	— 1.1	
1.50	1677	2097	38.0	19.9	+ 0.7	
2.00	1771	1997	57.4	19.4	+ 0.2	
2.50	1866	1899	76.7	19.3	+ 0.1	
3.00	1961	1799	96.2	19.5	+ 0.3	2202
0.50	1500	2300				
1.00	1583	2200	18.3	18.3	— 0.9	
1.50	1672	2100	37.2	18.9	— 0.3	
2.00	1770	2000	57.0	19.8	+ 0.6	
2.50	1867	1902	76.5	19.5	+ 0.3	
3.00	1962	1803	95.9	19.4	+ 0.2	2209

TABELLA 4ª.

*Esperienze eseguite coll'*Estensimetro di Cambridge *del Laboratorio per le prove sui materiali da costruzione della R. Scuola Navale Superiore di Genova* (Distanza fra le punte = cm. 10).

Carico totale t.	Letture in millesimi di millimetro	Dilatazione in millesimi di millimetro	Differenze in millesimi di millimetro	Scostamenti dalla media in millesimi di millimetro	Modulo di elasticità medio t/cm²
0.50	34.0				
1.00	45.5	11.5	11.5	— 1.1	
1.50	58.0	24.0	12.5	— 0.1	
2.00	71.5	37.5	13.5	+ 0.9	
2.50	83.5	49.5	12.0	— 0.6	trovato : 2241
3.00	97.0	63.0	13.5	+ 0.9	corretto : 2196
0.50	35.0				
1.00	46.0	11.0	11.0	— 1.6	
1.50	58.5	23.5	12.5	— 0.1	
2.00	72.0	37.0	13.5	+ 0.9	
2.50	85.0	50.0	13.0	+ 0.4	trovato : 2241
3.00	98.0	63.0	13.0	+ 0.4	corretto : 2196

Su di alcune teorie approssimate della lastra piana.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA

Nelle moderne costruzioni ed in special modo in quelle di cemento armato trova frequente impiego la lastra piana quadrata o rettangolare, talora come soletta sottoposta ad un carico di solito uniforme, talora invece come parete di serbatoio o di cella di silos e sollecitata in un caso da pressioni linearmente crescenti con la profondità, nell'altro da spinte che obbediscono ad una legge molto complessa, alla quale però è lecito sostituire la legge esponenziale detta di Janssen (1). I calcoli di stabilità di queste strutture si fanno quasi sempre seguendo metodi empirici o teorie grossolanamente approssimate.

Per lastre soggette ad un carico uniformemente ripartito l'ingegnere ha una guida abbastanza sicura nelle numerose esperienze di Bach e nella semplicissima teoria semiempirica che questo autore da esse ha dedotto (2): ma per quanto le formole di Bach abbiano ormai ricevuto la sanzione della pratica, tuttavia, poichè esse non consentono una nitida visione del comportamento statico della lastra sotto i carichi, da alcuni ingegneri furono ideate nuove teorie, le quali poggiano su fondamenti non sempre abbastanza sicuri e da qualche pubblica amministrazione (3) vien suggerito l'uso di formole strettamente collegate

(1) Cfr. A. H. Janssen, *Versuche über Getreidedruck in Silozellen*, in " Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure ", 1895, pag. 1045, od anche H. Reissner, *Theorie des Erdrucks*, in " Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften ", IV, 2, II, pag. 396.

(2) C. v. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, Ed. 6ª, pag. 573.

(3) Confronta la circolare del Ministero francese dei lavori pubblici *Calcul des hourdis en béton armé*, nelle " Annales des Ponts et Chaussées ", 1912, II, pag. 469.

con quelle che Navier logicamente ricavò dalla classica teoria approssimata delle lastre sottili [1].

Nel caso di pareti di serbatoi o di silos i dati sperimentali sono ancora molto scarsi ed il calcolo statico si fa di solito immaginando la parete divisa in un doppio ordine di striscie indipendenti e normali fra di loro, soggette ciascuna ad una parte della sollecitazione esterna, parte che si determina in base ad ipotesi talora molto lontane dalle reali condizioni statiche della lastra, alcune volte anzi in contraddizione fra di loro o contrarie ai principî fondamentali della Scienza delle Costruzioni. Per questa arbitrarietà spesso grossolana delle ipotesi dalle quali si parte nei calcoli, i metodi che suppongono questa ideale decomposizione sono tenuti in poco credito dai teorici, quantunque l'artificio di scomporre la parete in striscie, che fin dai primi inizi della teoria della lastra s'era presentato spontaneo alla mente geniale di Eulero [2], possa, rettamente applicato, condurre per via molto rapida ed intuitiva alla equazione differenziale di Lagrange e di Sofia Germain e permetta un agevole confronto fra i risultati della teoria matematica approssimata e quelli di alcuni fra i meno imperfetti procedimenti della pratica.

***

Consideriamo una lastra rettangolare di lati a, b, di spessore costante s, caricata da un carico di intensità p per unità di superficie. Indichiamo con z lo spostamento in direzione normale alla lastra del punto generico di coordinate x, y, o del piano medio di essa ed assumiamo gli assi x ed y paralleli ai lati.

Immaginiamo la lastra decomposta in due ordini di striscie fra di loro ortogonali e parallele agli assi e riteniamo la larghezza di esse come unitaria. Se con p_x si indica quella parte di p che potremo supporre agire sulle striscie parallele

---

[1] La teoria di Navier è largamente riassunta nella Nota di Saint-Vénant al § 73 della *Théorie de l'Elasticité des Corps solides* di *Clebsch*, p. 689 e sgg.

[2] *De motu vibratorio tympanorum*, " Novi Commentari Academiae Petropolitanae ", XI, 1766, pag. 243-60.

all'asse x, con p_y quella agente sulle striscie parallele all'asse y e se si suppone la completa indipendenza dei due ordini di striscie, avremo per una proprietà notoria della linea elastica

$$(1) \qquad \begin{cases} p_x = EJ\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \dfrac{Es^3}{12}\,\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} \\ \text{e} \\ p_y = EJ\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \dfrac{Es^3}{12}\,\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^4}\,(^1). \end{cases}$$

Ma è

$$p_x + p_y = p,$$

sarà quindi per le (1)

$$(2) \qquad p = \frac{Es^3}{12}\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right).$$

La (2) è la equazione della superficie elastica d'una lamina data da Giacomo Bernoulli il giovane (²); a questa equazione possono ridursi alcune fra le risoluzioni tecniche del problema della lastra: è in particolare assai facile porre in evidenza lo stretto legame che esiste fra essa e la nota equazione differenziale di Lavoinne (³), impiegata spesso nello studio della resistenza delle porte di conche e di bacini di carenaggio, le quali sono soggette alla pressione idrostatica. Nel caso di rigidezza a flessione variabile nelle due direzioni x ed y le (1) si trasformano nelle

$$p_x = E_x J_x \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$$

e

$$p_y = E_y J_y \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$$

(¹) Seguo le notazioni delle *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni* del prof. Guidi.

(²) *Essai théorique sur les vibrations des plaques élastiques rectangulaires et libres*, " Nova Acta Academiae Petropolitanae ", V, 1789.

(³) Lavoinne, *Sur la flexion des entretoises et du bordage dans les portes d'écluse*, in " Annales des Ponts et Chaussées ", 1867, I, pag. 321 e seg. Questa Memoria è estesamente riassunta nel noto Trattato di Flamant: *Résistance des Matériaux*.

e per essere

$$p = p_x + p_y = \gamma x$$

ove si ponga l'asse della y orizzontale e coincidente con il livello superiore dell'acqua e si indichi con γ il peso dell'unità di volume dell'acqua, si avrà subito

$$p_x = E_x J_x \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$$

e

$$\gamma y - p_x = E_y J_y \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} .$$

Derivando quattro volte la prima di queste relazioni ad y e quattro volte la seconda di esse rispetto ad x, ed eguagliando i due valori di $\frac{\partial^8 z}{\partial x^4 \partial y^4}$ così ottenuti si ha subito

$$\frac{\partial^4 p_y}{\partial x^4} + \frac{E_x J_x}{E_y J_y} \frac{\partial^4 p_x}{\partial y^4} = 0 \tag{3}$$

equazione che differisce solamente per i simboli da quella di Lavoinne.

***

In realtà le varie striscie nelle quali si è intesa decomposta la parete non possono deformarsi liberamente. Se si tien conto della mutua dipendenza fra i due ordini di striscie, ma, come prima approssimazione si trascurano le tensioni tangenziali che si esercitano sulle faccie laterali di esse, se cioè si suppone implicitamente che le tensioni principali siano per ogni elemento parallele agli assi x ed y, ricordando le note relazioni

$$E\epsilon_x = \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y$$

e

$$E\epsilon_y = \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x$$

si avrà

$$\sigma_x = E \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\epsilon_x + \frac{1}{m} \epsilon_y\right)$$

e per essere nei limiti di approssimazione ordinariamente ammessi, fatte le solite convenzioni riguardo ai segni,

$$\epsilon_x = -y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

ed

$$\epsilon = -y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

sarà anche

$$\sigma_x = -\frac{m^2}{m^2-1} Ey \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

dalla quale molto facilmente si ha

$$M_x = -\frac{m^2}{m^2-1} EJ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \tag{4}$$

od anche

$$M_x = -\frac{m^2}{m^2-1} \frac{Es^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

Ma è notoriamente

$$p = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$$

e quindi per la precedente

$$p_x = \frac{m^2}{m^2-1} \frac{Es^3}{12} \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{1}{m} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \right).$$

Poniamo per brevità

$$\frac{m^2}{m^2-1} \frac{Es^3}{12} = D,$$

dove D è la cosidetta *cylindrical rigidity* degli inglesi. Avremo allora

$$p_x = D \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{1}{m} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \right)$$

e analogamente

$$p_y = D \left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + \frac{1}{m} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \right).$$

Per la relazione

$$p = p_x + p_y$$

sopra ricordata, avremo quindi

$$p = D\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2}{m}\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right). \tag{5}$$

Il dott. ing. Bosch, partendo dal teorema del minimo lavoro di deformazione (1) e il prof. Hager (2) ispirandosi al procedimento contenuto nella nota memoria di Walter Ritz (3) " Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik „ hanno dato soluzioni del problema della lastra che, come può facilmente verificarsi, coincidono con quelle che derivano dalla (5). L'imperfezione di queste risoluzioni venne subito notata da Jovo Simič (4) e più tardi riconosciuta dallo stesso Hager (5).

*
* *

La (5) si semplifica alquanto e si riduce alla equazione di Lagrange, quando si prendano in considerazione anche i momenti delle tensioni tangenziali agenti sulle faccie laterali delle striscie.

In questo caso, accettando le ipotesi di Kirchhoff, sarà, con gli ordinari simboli,

$$\tau_z = G\gamma = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 2Gy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

---

(1) *Berechnung der gekreuzt armierten Eisenbetonplatte und deren Aufnahmeträger*, Berlin, Ernst.

(2) Hager, *Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen*, München, Oldenbourg, 1911,

(3) Pubblicata nel " Journal für die reine und angewandte Mathematik „, 1909.

(4) *Beitrag zur Berechnung der rechteckigen, ringsum aufliegenden Platten*, in " Oesterreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst „, 1909, pag. 349.

(5) *Berechnung ebener, rechteckiger Platten.* Deutsche Bauzeitung, *Mitteilungen etc.*, 1912, pag. 6.

e quindi, per unità di lunghezza della striscia,

$$M_t = 2G \frac{s^3}{12} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Ma è notoriamente

$$G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E = \left(1 - \frac{1}{m}\right) D$$

sarà quindi anche

$$M_t = D\left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \tag{6}$$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse y dell'elemento generato dall' incrocio di due striscie fra loro ortogonali, indicando con T_x lo sforzo di taglio sulle faccie parallele all'asse x, sarà evidentemente,

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_t}{\partial y} \tag{7}$$

e per la (4) e la (6)

$$T_x = -D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

e ancora

$$p_x = -\frac{\partial T_x}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}\right).$$

Analogamente

$$p_y = D\left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

e quindi

$$p = D\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right), \tag{8}$$

che è la equazione differenziale di Lagrange.

L'integrazione della (8) per varie condizioni al contorno ha dato origine a numerose ed interessanti ricerche relative specialmente ai contorni circolare ed ellittico. Per quanto riguarda le lastre rettangolari hanno speciale importanza, dal punto di

vista delle applicazioni tecniche, gli studi di Navier, di Maurice Lévy, di Estanave e di Simič. Navier integrò per mezzo di una doppia serie di seni la equazione (8) per il caso di lastre semplicemente appoggiate al contorno sopra un quadro rigido e caricate da un carico uniforme esteso a tutta la lastra o limitato ad una parte di essa opportunamente definita (1). Simič trattò recentemente alcuni problemi già risoluti da Navier ricorrendo invece ad una doppia serie iperbolica (2). Maurice Lévy indicò una soluzione molto elegante del problema della lastra per il caso in cui due almeno dei lati opposti siano semplicemente appoggiati (3); il metodo di Lévy venne sviluppato con molta larghezza nella tesi di Estanave (4).

Di carattere tutto speciale sono le ricerche di Ritz sulla lastra perfettamente incastrata: elegantissimo dal punto di vista matematico il procedimento di Ritz riesce eccessivamente faticoso nelle applicazioni pratiche.

Una soluzione relativamente semplice, che basta per i bisogni della pratica, si ottiene seguendo la via additata da Föppl (5), ricercando cioè una funzione ζ_1 delle x e delle y la quale soddisfi alle condizioni al contorno, sostituendola in luogo di ζ nella (8) e calcolando il corrispondente valore p_1 del carico. Con una opportuna combinazione di un limitato numero di queste soluzioni è facile giungere in molti casi a formole abbastanza approssimate.

*
* *

La via seguìta nello stabilire la relazione (8) conduce subito a quelle equazioni che definiscono le condizioni di posa imposte agli orli della lastra dalla natura dell'appoggio.

(1) Cfr. la citata Nota di Saint Vénant al § 73 dell'opera di Clebsch.

(2) *Ein Beitrag zur Berechnung der rechteckigen Platten*, in "Zeitschrift des Oest. Ingenieur und Architekten-Vereines", 1908, N. 44.

(3) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1899, tome 129.

(4) Eugène Estanave, *Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre*, Paris, Gauthier-Villars, 1900.

(5) Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, V.

Consideriamo per fissare le idee un lato parallelo all'asse y e di equazione

$$y = c.$$

Se il lato preso in esame è perfettamente libero sarà necessariamente nullo lungo di esso il momento flettente e per la (4) si avrà

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y=c} = 0\,. \tag{9}$$

Per l'equilibrio della traslazione nella direzione delle z di un elemento di striscia parallelo all'asse x preso in corrispondenza dell'appoggio dovrà poi essere

per $y = c$

$$T_x + \frac{\partial M_t}{\partial y} = 0$$

o per la (6) e la (7)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{2m-1}{m}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right]_{y=c} = 0\,. \tag{10}$$

La (9) e la (10) sono le note relazioni di Kirchhoff [1].

Se la piastra è semplicemente appoggiata al contorno sopra un quadro rigido o che possa venir ritenuto tale e deve durante la deformazione aderire al quadro lungo tutto il suo perimetro dovrà essere

$$(z)_{y=c} = 0 \tag{11}$$

ed

$$M_x = 0$$

o per la (4)

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y=c} = 0\,. \tag{12}$$

---

[1] *Ueber Gleichgewicht und Bewegung einer elastischer Scheibe*, " Crelle's Journal ", 1850.

Se finalmente l'incastro è perfetto si dovrà evidentemente avere

$$(13)\qquad \begin{cases} (\zeta)_{y=c} = 0 \\ \text{e} \\ \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{y=c} = 0. \end{cases}$$

Se si trascurano invece le tensioni agenti sulle faccie laterali delle striscie variano le condizioni al contorno per il caso di orlo libero o semplicemente appoggiato e si ha come nel caso della trave:

all'orlo libero

$$(14)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{y=c} = 0 \\ \text{e} \\ \left(\dfrac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\right)_{y=o} = 0 \end{cases}$$

e all'orlo appoggiato

$$(15)\qquad \begin{cases} (\zeta)_{y=c} = 0 \\ \text{e} \\ \left(\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{y=c} = 0. \end{cases}$$

L'appoggio semplice e l'incastro perfetto ora considerati sono due condizioni ideali di posa che non hanno d'ordinario riscontro nella realtà.

Il quadro d'appoggio d'una lastra è sempre elastico e permette piccoli cedimenti e nel caso di incastro piccole rotazioni degli orli. In molti casi è possibile prescindere da queste deformazioni, la cui considerazione conduce ad una eccessiva complessità di calcolo e può ridursi ai casi ideali sopra accennati. Altre volte quando si ritenga di non poter trascurare l'effetto di queste piccole deformazioni, conviene ricorrere ad un artificio analogo a quello proposto da Guidi per il calcolo dei serbatoi cilindrici [1], e sostituire alla lastra effettiva una lastra ideale,

---

[1] *Sul calcolo dei serbatoi cilindrici in béton armato,* " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. 48, 1912-13.

secondo i casi semplicemente appoggiata ad un quadro rigido o in esso perfettamente incastrata, ma con dimensioni alquanto superiori a quelle reali.

*
* *

Vediamo ora di confrontare i risultati delle diverse teorie sopra accennate per il caso particolarmente semplice di una lastra appoggiata lungo il contorno su di un quadro indeformabile e soggetta ad un carico p distribuito simmetricamente rispetto ad una delle sue mediane. In grazia della simmetria sarà opportuno, ove si segua il procedimento suggerito da Föppl, ricercare la ζ, fra le funzioni simmetriche, le trigonometriche ad esempio.

Poniamo l'origine delle coordinate in uno dei vertici della lastra e facciamo la semplice ipotesi

$$\zeta_1 = q \operatorname{sen} \frac{j\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{b} y \tag{16}$$

si vede subito che sono soddisfatte le condizioni al contorno espresse dalla (11) e dalla (12): introducendo il valore (16) nella (8) si ha poi con facili riduzioni

$$p_1 = Dq\pi^4 \left[\left(\frac{j}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2\right]^2 \operatorname{sen} \frac{j\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{b} y. \tag{17}$$

Se quindi sarà possibile esprimere il carico dato p ricorrendo ad una sommatoria o ad una serie della forma

$$p = \sum a_{jk} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{b} y \tag{18}$$

sarà

$$\zeta = \frac{1}{D\pi^4} \sum b_{jk} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{b} y \tag{19}$$

dove, per le relazioni precedenti,

$$b_{jk} = \frac{a_{jk}}{\left[\left(\frac{j}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2\right]^2}. \tag{20}$$

Supponiamo ora che il carico p sia uniformemente distribuito, dalle note relazioni

$$\pi - x = 2 \sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{m} \tag{21}$$

ed

$$x = 2 \sum_0^\infty (-1)^{m+1} \frac{\operatorname{sen} mx}{m} \tag{22}$$

dove m assume tutti i valori interi positivi, si ha subito sommando

$$\pi = 4 \sum_0^\infty \operatorname{sen} \frac{nx}{n} \tag{23}$$

dove la sommatoria va limitata ai soli numeri interi positivi dispari.

Avremo quindi per la (23)

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{1}{j} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{a} x \tag{24}$$

e

$$p = \frac{4}{\pi} p \sum_0^\infty \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{b} y \tag{25}$$

dove j e k assumono rispettivamente tutti i valori interi dispari positivi.

È inoltre lecito moltiplicare fra loro la (24), la (25) e porre

$$p = \frac{16}{\pi^2} p \sum_0^\infty \frac{1}{jk} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{b} y \,. \tag{26}$$

Avremo quindi per la (19) e la (20)

$$\zeta = \frac{16\,p}{D\pi^6} \sum_0^\infty \frac{1}{jk} \frac{\operatorname{sen} \frac{j\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{b} y}{\left[\left(\frac{j}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2\right]^2} \tag{27}$$

La (27) è la nota equazione della superficie elastica di una lamina data da Navier. La serie (27) converge molto rapidamente e spesso nelle applicazioni basta arrestarci al primo termine di essa. Si ha allora

$$\zeta' = \sim \frac{16\,p}{\pi^6 D}\left(\frac{a^2 b^3}{a^2+b^2}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{b} \tag{28}$$

ed osservando che

$$\zeta_0 = \frac{16\,p}{\pi^6 D}\left(\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\right)^2$$

è la freccia d'inflessione in mezzeria

$$\zeta' = \sim \zeta_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{b} \tag{29}$$

che è la formola approssimata recentemente suggerita da Lorenz [1].

Se la parete è soggetta invece ad una pressione che varia linearmente con la x, per esempio alla pressione

$$p = \gamma x$$

combinando fra loro la (22) e la (25) risulta

$$p = \frac{8\gamma}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{jk}\operatorname{sen}\frac{j\pi}{a}x\operatorname{sen}\frac{k\pi}{b}y \tag{30}$$

e quindi

$$\zeta = \frac{8\gamma}{\pi^5}\sum_0^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{jk}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{j\pi}{a}x\operatorname{sen}\frac{k\pi}{b}y}{\left[\left(\frac{j}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2\right]^2}\,. \tag{31}$$

La posizione (16) soddisfa anche alle condizioni ai limiti a cui conducono le teorie imperfette di Bernoulli e di Hager. Con

---

[1] H. Lorenz, *Angenäherte Berechnung rechteckiger Platten*, " Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure ", 1913, pag. 623.

la prima di queste teorie in luogo della (20) si avrebbe subito per la (4) la relazione

$$b_{j,k} = \frac{a_{j,k}}{\left(\frac{j}{a}\right)^4 + \left(\frac{k}{b}\right)^4}.$$

Con la seconda teoria si otterrebbe invece per la (5)

$$b_{j,k} = \frac{a_{j,k}}{\left(\frac{j}{a}\right)^4 + \frac{2}{m}\left(\frac{j}{a}\right)^2\left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^4}$$

e quindi nei due casi si avrebbero valori delle deformazioni e delle sollecitazioni maggiori di quelli ottenuti ricorrendo alla equazione più approssimata di Lagrange.

*
* *

Con altre ipotesi relative alla funzione ζ, è possibile trattare il caso delle pareti dei silos o il caso di lastre perfettamente incastrate. Ma i risultati ottenuti nel primo caso sono di una grande complessità: quelli che si troverebbero nel secondo convergono molto lentamente in vicinanza degli incastri dove appunto interessa conoscere le sollecitazioni unitarie. È interessante osservare che per la lastra incastrata i valori delle deformazioni dati dalle teorie di Bernoulli e di Hager, contrariamente a quanto succede per la lastra appoggiata, sono inferiori a quelli dati dalla teoria di Lagrange, e possono quindi in pratica condurre a dimensioni troppo ridotte, talora anche insufficienti.

PHILIP LUTLEY SCLATER

Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Torino.

Commemorazione di T. SALVADORI.

Nell'anno 1896 l'Istituto Smithsoniano di Washington publicava un Bollettino del Museo Nazionale degli Stati Uniti, il 49mo, contenente la Bibliografia degli scritti publicati da Philip Lutley Sclater, F. R. S., Segretario della Società Zoologica di Londra. Essa è preceduta da uno Schizzo biografico del medesimo. Il lavoro è fatto con estrema diligenza ed in esso si può trovare tutto quanto si riferisce allo Sclater fino all'anno 1896.

La ragione che spinse quello Istituto a tale publicazione è da ricercare nel fatto che l'opera principale dello Sclater, e veramente fu grandissima, si svolse intorno alla fauna dei vertebrati dell'America meridionale e centrale. Mammiferi e uccelli. Ma i lavori sistematici dello Sclater non si limitarono ai vertebrati di quella Regione, quindi il suo nome occorre sovente fra i Naturalisti di tutte le Regioni. E non solo quale sistematico, giacchè a lui si debbono anche i primi studi intorno alla Distribuzione geografica degli animali. Argomento importantissimo, che si collega coll'origine delle specie e quindi colla teoria Darwiniana.

* * *

Philip Lutley Sclater nacque il 4 novembre 1829 nell'Hampshire e passò la prima giovinezza nel collegio di Winchester e poi in Oxford, ove si dedicò principalmente allo studio delle matematiche, occupando il tempo che aveva libero nello studio degli uccelli. Ivi insegnava Hugh E. Strickland, geologo ed ornitologo, che lo prese sotto la sua protezione. Fu presso lo Strickland che lo Sclater s'incontrò con John Gould, poco dopo il ritorno di questi dal grande viaggio in Australia.

Nel dicembre del 1849 lo Sclater ottenne la promozione in matematica e negli studi classici. In questo periodo egli fece in Parigi la conoscenza del grande ornitologo Carlo Bonaparte,

Principe di Canino, al quale fu legato da viva amicizia fino alla morte del Principe nel 1858, il quale nel Museo di Parigi gli aveva dedicato una specie col nome di *Euphonia Sclateri*.

Fra il 1851 ed il 1855 lo Sclater studiò legge e più tardi nel 1874, quando suo fratello l'onorevole Giorgio Sclater Booth, divenuto poi Lord Basing, accettò un posto nel Ministero Disraeli, lo Sclater ne diventò segretario, tenendo l'ufficio per due anni, ma quando ebbe la prospettiva di tenerlo permanentemente, preferì lasciarlo, non reggendogli l'animo di abbandonare lo studio della Storia Naturale.

Nel 1859, resosi vacante il posto di Segretario della Società Zoologica di Londra, lo Sclater, fortemente sostenuto dal grande anatomico Owen e dal Yarrell, fu eletto a quel posto, al quale egli si dedicò con grandissima attività, cosicchè la Società prosperò in modo straordinario. Basti il dire che il numero dei soci da 1700 nel 1859, in breve salì a 3000, e che le rendite della Società da Lire sterline 14.000, cioè da L. 350.000, salì a Lire sterline 30.000, cioè a L. 750.000. Qualunque naturalista sia stato a Londra, non ha certo mancato di visitare il Giardino Zoologico della Società, ove si ammira la più meravigliosa raccolta di svariatissimi animali viventi, dei quali si possono osservare e studiare non solo le forme, ma anche le attitudini ed i costumi. I naturalisti inoltre trovano nella Biblioteca di Zoologia, annessa alla Società, e quasi creata dallo Sclater, la più completa riunione di libri che trattano di tutti i rami della Zoologia, per modo che lo studio degli animali vi riesce grandemente facilitato, e ben lo sanno quelli che fra noi, volendo dedicarsi allo studio di qualche ramo della Zoologia, incontrano grandissime difficoltà per difetto di libri.

Lo Sclater continuò nell'ufficio di Segretario della Società zoologica di Londra per 43 anni, lasciandola in uno stato di grande floridezza.

Lo Sclater fu uno dei fondatori del giornale " The Ibis ", il più bello ed il più importante di tutti i giornali ornitologici e per molti anni e parecchie volte ne fu l'Editore diligente ed accurato. Questo giornale, che conta ora 55 anni di vita, è l'organo di una importante società ornitologica, che va sotto il nome di " British Ornithologists' Union ", alla quale sono ascritti oltre a 500 membri.

I lavori dello Sclater annoverati nel Bollettino sopramenzionato, fino al 1896, sommano a 1287, nei quali si trovano descritte 1067 specie nuove, 135 nuovi generi e 2 nuove famiglie di uccelli, principalmente americani. Tra i lavori dello Sclater alcuni sono di notevole mole e costituiscono importanti monografie. Molti di questi lavori hanno interesse pel rispetto geografico. E qui cade in acconcio menzionare come lo Sclater sia stato uno dei primi a far notare la importanza della Distribuzione Geografica degli animali.

Fu nel 1858 che lo Sclater pubblicò il primo lavoro intorno a tale argomento, intitolato: *On the general Geographical Distribution of the Members of the Class Aves* (" Journ. Linn. Soc. of Lond. ", II, pp. 130-145). In questo lavoro lo Sclater fissò con precisione le grandi Regioni Zoologiche. Paleartica, Etiopica, Indiana, Australiana, Neartica e Neotropica, segnandone i confini ed indicandone i principali tipi caratteristici. Il Wallace, che pure grandemente si è occupato della Distribuzione Geografica degli Animali (*The Geographical Distribution of Animals*), accettò le Regioni stabilite dello Sclater, ma cambiando il nome Regione Indiana in Regione Orientale, la quale cosa venne pure accettata dallo Sclater (" Ibis ", 1891, p. 515).

Nell'agosto 1875 lo Sclater tornò con maggiore estensione a trattare lo stesso argomento della Distribuzione Geografica degli Animali in un Indirizzo all'Associazione Britannica per l'avanzamento delle Scienze, in Bristol, dal titolo: *On the present state of our Knowledge of Geographical Zoology* (" Rep. Brit. Ass. Adv. Sci. ", 1875, pt. II, pp. 85-133).

Restringendo poi l'argomento alla classe degli Uccelli, lo Sclater nel 1891, al secondo Congresso ornitologico internazionale a Buda Pest, fece una conferenza che, lievemente modificata, si trova publicata nel giornale " The Ibis " (1891, pp. 514-557), col titolo: *On recent advances in our Knowledge of the Geographical Distribution of Birds.*

Anche il difficile argomento della Classificazione degli uccelli fu trattato dallo Sclater in un lavoro che ha per titolo: *Remarks on the present state of the Systema Avium* (" The Ibis ", 1880, pp. 340-350, 399-411). In questa classificazione, valendosi dei lavori del Nitzsch, di Huxley, di Sundevall, di Parker e di Garrod, lo Sclater si è avvicinato specialmente a quella

dell'Huxley, che dopo aver diviso gli uccelli nelle tre sottoclassi *Saururae*, *Ratitae* e *Carinatae*, divise l'ultima fondandosi principalmente sulla varia disposizione delle ossa del palato, ma laddove l'Huxley cominciava il suo sistema colle forme inferiori e più rettiliane e terminava colle più elevate e più differenziate, lo Sclater seguì invece il sistema opposto, ciò che forse non sembra preferibile. Importantissime sono in questo lavoro le osservazioni intorno alla più esatta posizione sistematica di certe specie e generi.

Tra i lavori ornitologici importanti dello Sclater sono da menzionare quattro dei 27 volumi che costituiscono il *Catalogue of the Birds in the British Museum*; essi trattano in parte dei *Passeriformes* e delle *Picariae*.

Oltre che agli uccelli lo Sclater rivolse pure la sua attenzione ai Mammiferi.

La sua posizione di Segretario della più grande Associazione zoologica come quella di Londra, gli dette campo di osservare e di studiare molte e rare specie viventi di Mammiferi e frutto dei suoi studi furono i numerosi lavori intorno ai Rinoceronti, ai Cervi, ai Tapiri, ai generi *Ovis* ed *Equus*, la grande Monografia illustrata delle Antilopi in collaborazione con Oldfield Thomas, e molti altri.

Lo Sclater nel giugno scorso aveva 83 anni; egli, sano e robusto, poteva vivere ancora qualche anno, suo padre visse 97 anni, ma un accidente di vettura gli fu fatale. Si può dire che egli lavorò fino agli ultimi momenti della sua vita; l'ultimo suo lavoro (*Commentary on the new Hand-list of British Birds*, " The Ibis ", 1913, pp. 113-127) è di questo anno; esso tratta di un argomento molto dibattuto fra gli zoologi, quello della nomenclatura e della legge di priorità. Lo Sclater per questo rispetto era un conservatore, come lo è lo scrittore di questi cenni biografici.

Lo Sclater apparteneva alla Società Reale di Londra, che è il corpo scientifico più importante dell'Inghilterra, ed alla grande Società Geografica di Londra ed a moltissime altre società che tenevano ad onore di averlo socio. Egli era stato nominato Socio corrispondente della nostra Accademia fin dal 1885.

Relazione sulla Memoria del Dr. G. A. Favaro: *Declinazioni di 121 stelle di riferimento per il Catalogo Astrofotografico di Catania* [Zona da + 46° a + 48°] *osservate al Cerchio meridiano di Reichenbach di Torino.*

L'Osservatorio astrofisico di Catania partecipa al lavoro internazionale per la formazione della *Carta fotografica del cielo* comprendente le stelle fino alla 13ª grandezza. Le coordinate delle stelle, che si rilevano dalle carte fotografiche, sono riferite alle posizioni note di alcune stelle: tanto più esatte saranno quindi le posizioni di tutte le altre stelle, quanto meglio saranno note le posizioni delle stelle di riferimento. Si fecero perciò riosservare col Cerchio meridiano tutte queste stelle già appartenenti a vecchi cataloghi, e nel Congresso tenuto a Parigi nel 1909, l'Osservatorio di Torino, rappresentato dal Direttore G. Boccardi, si era assunto una parte di detto lavoro. Il Dr. Favaro ebbe l'incarico di riosservare le declinazioni delle stelle, mentre le ascensioni rette furono osservate dal Dr. G. Horn. Il lavoro di osservazione incominciò nel novembre 1912 e continua tuttora. Il Dr. Favaro presenta qui i risultati di alcune di tali osservazioni, cioè di quelle eseguite dal 21 novembre al 12 dicembre 1912; tali risultati sono quelli di 503 osservazioni fatte sopra 121 stelle appartenenti al Catalogo *A. G. Bonn* e confrontate con 114 osservazioni di 19 stelle appartenenti al Catalogo *Bauschinger-Oertel.* Stante la importanza e la utilità di tali osservazioni, la Commissione propone la inserzione del lavoro del Dr. Favaro nel volume delle Memorie accademiche.

A. Naccari.
N. Jadanza, *relatore.*

Relazione sulla Memoria del Dr. VINCENZO MAGO: *Teoria degli ordini.*

Il Dr. Mago comincia la sua Memoria colla già lunga bibliografia relativa agli ordini di infinito delle funzioni. Espone dapprima la definizione degli ordini, quando sono espressi da numeri finiti, e la serie dei teoremi.

Quando l'ordine d'una funzione non si può esprimere con un numero finito, bisogna introdurre con opportune definizioni, varie specie di infiniti attuali. Il § 4 tratta della somma e differenza di questi infiniti; il § successivo definisce il prodotto d'un ordine finito per uno infinito. Poi il nostro autore pone per la prima volta in luce le difficoltà che presenta la definizione del prodotto di due infiniti. Spiega a quali leggi logiche debbano soddisfare le operazioni su enti ottenuti per astrazione. Fa vedere che alcune definizioni (effettivamente proposte da varii autori) conducono ad enti assurdi, cioè contradittorii in sè stessi. Egli prova che la definizione del prodotto di due infiniti è possibile, ed in più modi; ma nessuna via finora tentata conduce a soluzione soddisfacente.

Il § 8 è relativo al teorema fondamentale, che data una serie infinita di ordini infiniti, si può trovare un ordine maggiore di ognuno della serie.

La Memoria termina coll'applicare la teoria degli ordini alla convergenza delle serie e degli integrali definiti.

Il lavoro del Dr. Mago costituisce un'esposizione chiara e precisa di queste teorie finora esposte in modo frammentario, imperfetto, e spesso confuso. Contiene osservazioni critiche interessanti; alcune teorie sono del tutto nuove.

Perciò noi giudichiamo il lavoro del Dr. Mago degno dell'inserzione nelle Memorie della nostra R. Accademia.

E. D'OVIDIO.
G. PEANO, *relatore.*

Relazione sulla Memoria del Prof. Dr. Ferruccio Vanzetti: *Meningo-encefalite sifilitica sperimentale.*

L'A. ha intrapreso una serie di ricerche sperimentali dirette a studiare l'azione del virus sifilitico sui centri nervosi allo scopo di illustrare l'evoluzione di questo processo così frequente nella patologia umana e di penetrare più addentro nella conoscenza delle alterazioni determinate dalla lues sul sistema nervoso.

Innestando sotto la dura madre di conigli frammenti di sifiloma sperimentale allo stato di purezza, l'A. riuscì ad ottenere per la prima volta alterazioni da parte della dura madre della leptomeninge e dell'encefalo. La dura madre dopo pochi giorni dall'innesto comincia a presentare un'infiltrazione prevalentemente linfocitaria che va in seguito aumentando e che dissocia i fasci connettivi, manifestandosi ora in forma diffusa, ora in forma di focolai. Particolare gravità essa raggiunse in un caso raccolto in 35ª giornata, nel quale l'infiltrazione linfocitaria era intensissima ed assumeva i caratteri di un tessuto di granulazione, sotto la cui invasione scompariva la struttura fascicolata di questa membrana.

Più attiva però è solitamente la partecipazione della leptomeninge, nella quale il processo d'infiltrazione raggiunge gradi più elevati e talora imponenti ed aumenta lo spessore di questa membrana, così da farle toccare un'altezza di molte volte la norma. Tale alterazione non si limita a quella parte che è a più diretto contatto con il frammento sifilomatoso, ma si manifesta sovente anche a distanza da esso e non infrequentemente anche in quell'emisfero, dove non fu portato il virus sifilitico.

Il processo non si arresta alle membrane di rivestimento, ma spesso penetra direttamente nel tessuto nervoso limitrofo, determinando più gravi lesioni encefaliche.

Tale diffusione avviene per diverse vie ed assume una notevole varietà di aspetti: più spesso ha luogo lungo le guaine avventiziali del vaso, che dalla pia meninge penetrano nell'en-

cefalo e non si limita ai vasi degli strati corticali, ma si porta profondamente anche in forma discontinua nella sostanza bianca degli emisferi arrivando talora fino ai ventricoli laterali.

Altra volta si osserva nella sostanza grigia e bianca dei focolai di encefalite rotondeggianti o leggermente allungati, di varia grandezza e costituiti da fitti accumuli linfocitari, che infiltrano e divaricano i vari elementi del tessuto nervoso.

Infine, nei casi più gravi, il tessuto di granulazione dalla pia si spinge nel cervello rigoglioso e compatto in forma di ampie gettate cuneiformi, alterando e distruggendo profondamente gli elementi del tessuto nervoso. In casi avanzati possono le alterazioni delle pachi e leptomeningi regredire, dando luogo ad un ispessimento connettivo di queste membrane, mentre permane per un certo tempo la lesione cerebrale sopratutto in forma di focolai di encefalite circoscritta o diffusa, come fu ora accennato.

Importanti sono i rapporti fra le lesioni così provocate e le spirochete di Schaudinn. Le spirochete non furono riscontrate nei focolai meningei ed encefalici descritti, ma solo nel frammento innestato ove si riscontrano in buon numero e talora anche in grande quantità per parecchie settimane dopo l'innesto del tessuto sifilomatoso: l'A. potè dimostrarle fino al 40° giorno, sia raccolte in focolai, sia distribuite diffusamente nel tessuto. Esiste sempre un diretto rapporto fra la persistenza della spirocheta e la lesione determinata.

Per spiegare tale modo di azione della spirocheta si affacciano sopratutto due ipotesi: o che la spirocheta si trovi nei focolai meningei e cerebrali sotto un aspetto morfologico diverso da quello attualmente noto, o che essa agisca dal pezzo innestato per mezzo dei suoi prodotti tossici qualunque essi sieno. Meno probabile sembrerebbe l'ipotesi che il parassita si trovi nei focolai meningei in così scarso numero da sfuggire a ricerche anche accurate. In conclusione, riteniamo il lavoro del Dr. Vanzetti meritevole d'essere stampato nelle Memorie dell'Accademia.

Torino, 30 novembre 1913.

Pio Foà.
V. Fusari, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 7 Dicembre 1913.

PRESIDENZA DEL PROF. ITALO PIZZI
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: STAMPINI, SFORZA, EINAUDI, BAUDI DI VESME e RENIER Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci: CHIRONI, Direttore della Classe, MANNO, CARLE, RUFFINI, BRONDI e D'ERCOLE.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 23 novembre 1913.

Il Socio EINAUDI, incaricato col Socio SFORZA di riferire intorno allo scritto del Prof. Carlo CONTESSA, *Aspirazioni commerciali intrecciate ad alleanze politiche della Casa di Savoia coll'Inghilterra nei secoli XVII e XVIII*, legge la sua relazione favorevole. La Classe, approvata la relazione, delibera con pienezza di voti segreti l'inserzione della monografia del Prof. CONTESSA nelle *Memorie* accademiche.

Relazione intorno alla Memoria del Sig. Prof. Carlo Contessa, intitolata: *Aspirazioni commerciali intrecciate ad alleanze politiche della Casa di Savoia coll'Inghilterra nei secoli XVII e XVIII.*

Argomento della Memoria del Prof. Carlo Contessa è lo studio di un trattato del 9 settembre del 1669 tra il Duca di Savoia ed il Re d'Inghilterra, detto di Firenze, dalla città dove era stato firmato. Il trattato, che era esclusivamente di commercio, confermava ed ampliava numerosi privilegi contenuti negli editti precedenti di portofranco per Nizza e Villafranca, insieme ad alcune concessioni speciali già accordate nel secolo XVII ai commercianti inglesi. Carattere peculiare di esso era non tanto la franchigia o la diminuzione dei dazi doganali concesse alle merci inglesi, quanto le limitazioni gravissime che esso apportava alla sovranità del Duca di Savoia. Impegnavasi infatti questi a non modificare le sue tariffe gabellarie se non col consenso del console e dei mercanti inglesi residenti in Nizza e Villafranca; affidavasi la risoluzione di ogni questione insorta tra i mercanti inglesi ad un giudice o ad un collegio di giudici della loro nazione; stabilivansi tribunali misti per la risoluzione delle controversie miste. Ai sudditi di Savoia non era concessa alcuna reciprocità di vantaggi negli Stati di S. M. Britannica; e nessun impegno assumevano gli inglesi di giovarsi effettivamente dei privilegi ad essi consentiti, ma unicamente si esprimeva il desiderio che le agevolezze loro consentite invogliassero i navigli mercantili dell'Inghilterra ad approdare nei porti nizzardi anzichè in quelli di Genova e Livorno. Vane speranze queste nudrite dal ministro Giovanni Trucchi; chè nessun effetto seguì al trattato e questo medesimo finì per cadere in disuso e persino in dimenticanza.

Nè durante la prima guerra di Vittorio Amedeo II con la Francia nel 1690-96, nè durante la guerra di successione spa-

gnuola (1700-713) l'Inghilterra, pur desiderosa di surrogare il proprio commercio d'importazione e la propria bandiera a quella della Francia, pensò di far ritornare in vita il vecchio trattato; ma si stette paga di ottenere che le sue merci fossero in genere trattate negli Stati del Duca secondo le migliori condizioni che erano fatte ai forestieri.

L'occasione di rinfrescare il trattato di Firenze fu un editto del 1722 di Vittorio Amedeo II, il quale proibiva l'estrazione delle sete crude a tutela dei filatoi piemontesi, che si lagnavano di mancare in quell'anno di materia prima per lo scarso raccolto dei bozzoli. L'Inghilterra, che vendeva in Piemonte sopratutto pannilana e ne estraeva sete gregge per i suoi filatoi e le sue tessiture, vivamente si lagnò del divieto e pretese fosse una violazione dell'oramai dimenticato trattato di Firenze del 1669. Si ripeterono le lagnanze inglesi pochi anni dopo, quando Vittorio Amedeo II, a proteggere alcune manifatture di lana appena allora iniziate nei suoi Stati, aumentò il dazio su certe qualità di panni, come i Frisoni d'Irlanda ed i Kersy, che provenivano dall'Inghilterra.

La Corte di Londra minacciò rappresaglie e parve imminente nel 1728 l'approvazione del Parlamento inglese ad un *bill*, il quale aumentava i dazi contro gli organzini di seta piemontesi.

L'A. esamina i pareri numerosi stesi dai consiglieri del Re di Sardegna per dimostrare l'infondatezza delle pretese inglesi di far rivivere il trattato di Firenze, e le istruzioni date agli inviati sabaudi alla corte di Londra. Dalle quali traspare talvolta una certa arrendevolezza a cedere pel momento sui punti controversi, pur di mantenere fermo il principio che un trattato, menomatore della sovranità, potesse ancora essere considerato in vigore. La controversia non fu condotta ad alcuna risoluzione esplicita: ancora nel 1731, nel 1768 e nel 1773 l'Inghilterra rinnovava le sue proteste e dichiarava di considerare in vigore il trattato del 1669; ed ancora nel luglio 1784 la corte di Torino dava al cavaliere di Pollone l'istruzione di evitare qualsiasi accenno a conclusioni di nuovi formali trattati di commercio.

Il trattato del 1669 era certamente ispirato a concetti, che anche oggi appaiono corretti e fecondi, di libertà commerciale;

ma non si può disconoscere che esso innestava su questo fecondo principio altri e ben diversi principii, di privilegi giurisdizionali ai forestieri e di vincoli perpetui alla legislazione fiscale interna, di cui si vedono oggi i deleteri effetti, per la indipendenza nazionale, nei paesi, dove ebbe o conserva dominio la Turchia. È perciò degna di studio la monografia, in cui il Contessa narra le vicende della resistenza ostinata e tacita con cui la corte di Torino riuscì a far cadere in disuso un trattato, che sì gravi pericoli celava tra le sue pieghe; sicchè la commissione ne propone la stampa nelle Memorie accademiche.

Giovanni Sforza
Luigi Einaudi, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Dicembre 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe NACCARI, ed i Soci SALVADORI, D'OVIDIO, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI, BALBIANO e SEGRE, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Vengono presentate, per l'inserzione negli *Atti*, le seguenti Note:

S. ZUBLENA, *Dosamento rapido dello zinco nei suoi minerali,* dal Socio D'OVIDIO;

L. CHINAGLIA, *Contributo allo studio delle anomalie dei Lumbricidi,* dal Socio CAMERANO;

A. TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà,* dal Socio SEGRE;

C. POLI, *Sugli integrali estesi al contorno di un campo qualunque,* dal Socio SEGRE.

Il Socio FUSARI, anche a nome del collega FOÀ, legge la Relazione sulla Memoria del Dott. Alfonso BOVERO: *Sulla fine struttura e sulle connessioni del ganglio vestibolare del nervo acustico.* Accogliendo le conclusioni della Relazione, la Classe unanime delibera la stampa di quel lavoro fra le *Memorie.*

LETTURE

Dosamento rapido dello zinco nei suoi minerali.

[Applicazione diretta del metodo di Frary all'analisi dei minerali].

Nota del Dott. SILVIO ZUBLENA.

Avendo dovuto occuparmi per parecchio tempo delle analisi dei minerali che il Reale Corpo delle Miniere inviava al R. Politecnico di Torino, ed in special modo dei minerali solforati di piombo, zinco, arsenico, ecc., provenienti dalla Sardegna, credetti opportuno di provare diversi dei metodi rapidi ora tanto in uso nei Laboratorî analitici, fermando la mia attenzione su quelli riguardanti lo zinco e cercando di applicarli direttamente all'analisi dei minerali.

Metodi rapidi di dosamento dello zinco ne esistono parecchi: basterebbe citare i metodi volumetrici. Ma se per tutti questi metodi il tempo richiesto dalla determinazione si riduce a pochi minuti, un tempo molto lungo è richiesto per la preparazione della soluzione da analizzare.

In considerazione appunto di ciò abbandonai i metodi volumetrici e mi servii esclusivamente del metodo elettrolitico, elettrolizzando con agitazione elettromagnetica la soluzione di zincato sodico col metodo e coll'apparecchio ideato dal Frary (*).

L'apparecchio mi diede ottimi risultati e, data la sua semplicità, ritengo debba preferirsi, per il caso che ora ci interessa, a tutti i sistemi di elettrodi rotanti.

Serve come catodo un cilindro di rete di nichel alto 5 cm.

(*) Von Francis C. Frary, " Z. f. Angew. Chem. ", 1907, pagg. 1897 e 2247.

e di diametro tale che possa adattarsi perfettamente alla parete del bicchiere. Dopo la pesata lo zinco depositato viene sciolto immergendo l'elettrodo per alcuni istanti nell'acido solforico diluito, ed essendo la quantità di nichel che contemporaneamente si scioglie molto piccola, l'elettrodo può servire per un grande numero di determinazioni (*).

L'anodo è costituito da una spirale di platino di 1 mm.

L'elettrolito è costituito da zincato sodico; la sua resistenza è piccola e sono sempre sufficienti 5 o al massimo 6 Volts.

La quantità di idrossido di sodio che si raccomanda di impiegare è di 7 a 8 gr. per gr. 0,1 di Zn; quantità maggiori o minori hanno la tendenza a dare dei depositi di zinco spugnosi.

Il volume dell'elettrolito deve raggiungere 100-125 cc. e per evitare un riscaldamento durante l'elettrolisi, il bicchiere viene raffreddato circondandolo con un tubo di piombo di 4 mm. percorso da una corrente d'acqua.

Alla fine di ogni determinazione gli elettrodi vengono lavati nel solito modo senza interrompere la corrente e senza lasciare mai pervenire il deposito di zinco in contatto dell'aria prima che tutto l'alcali sia stato completamente eliminato. I primi 200 cc. della soluzione travasata vengono acidificati con acido solforico, vi si aggiungono 3-5 cc. di soluzione di ferrocianuro potassico (1 : 10) e si lascia in riposo per 10 minuti se prima non si ha intorbidamento: in queste condizioni mgr. 0,2 di zinco dànno un intorbidamento molto distinto.

Il catodo ben lavato con acqua, si tuffa in un bicchiere con alcol, si essicca in stufa a 100°-120° C., si lascia raffreddare in essiccatore e si pesa.

L'intensità di corrente da impiegare per la precipitazione di gr. 0,2 di Zn è per i primi 15 minuti di 4-4,5 Amp. e per successivi 20 minuti di 1 a 2 Amp (**).

(*) Osservai però nel corso delle mie esperienze che allorquando la superficie dell'elettrodo per il lungo uso era divenuta appannata, lo zinco che vi si depositava, non era più di aspetto brillante, ma di natura spugnosa e facilmente ossidabile.

(**) Operando con 4,5 Amp. dopo 15 minuti la quantità principale del metallo è già precipitata, ma le ultime tracce si lasciano separare molto difficilmente. Frary, loc. cit.

Durante questa seconda fase dell'elettrolisi conviene però mantenere attraverso il solenoide una corrente di 4-4,5 Amp. per avere l'agitazione dell'elettrolito sempre vivace.

Applicazione del metodo di Frary direttamente all'analisi dei minerali.

Preparazione della soluzione. — Ha grande importanza la scelta del solvente che si deve impiegare.

Non si può adoperare l'acido nitrico perchè riducendosi questo per effetto dell'elettrolisi in ammoniaca, questa, se presente nell'elettrolito anche in piccolissime tracce, impedisce o in tutto o in parte il depositarsi dello zinco (*) e per le ragioni a tutti note non si può elettrolizzare per scopi analitici in presenza di cloruri.

Il solvente che si deve impiegare è l'acido solforico, e per attaccare bene il minerale e per eliminare la *silice*, l'*arsenico* e l'*antimonio*, si opera in presenza di acido fluoridrico.

Il minerale qualunque esso sia, finamente polverizzato e porfirizzato si tratta in capsula di platino con acido fluoridrico e solforico concentrato e si riscalda con precauzione prima a bagnomaria e poi a bagno di sabbia. In questo modo il minerale viene completamente attaccato, lo zinco passa facilmente tutto in soluzione come solfato, e alla temperatura alla quale si opera, la *silice*, l'*arsenico* e l'*antimonio* vengono completamente eliminati allo stato di fluoruri. Tutti gli altri fluoruri che eventualmente hanno potuto formarsi sono completamente decomposti dall'acido solforico, e dopo questo trattamento abbiamo nella capsula come residuo insolubile il solfato di piombo ed eventualmente i solfati delle terre alcaline dai quali si può facil-

(*) Non basta la grande quantità di soda presente nell'elettrolito, anche dopo averlo fatto bollire per alcuni minuti, a garantirci dell'assenza di ammoniaca; ho verificato molte volte che tracce anche piccolissime di acido nitrico ostacolano il deposito completo dello zinco.

Se fu impiegato l'acido nitrico bisognerà scacciarlo completamente coll'acido solforico concentrato.

mente separare e dosare il piombo col metodo dell'acetato. Tutti gli altri elementi sono passati nella soluzione solforica.

Trattandosi ora di applicare il metodo di Frary e dovendo operare con grandi quantità di idrossido di sodio, bisognerà considerare come si comporteranno gli elementi che abbiamo nella soluzione da analizzare.

Osservando i risultati analitici di un grande numero di minerali di zinco, vediamo che oltre allo zinco possono essere presenti:

Pb, Cu, Cd, Ag, As, Sb, Fe, Mn, Al

e inoltre

SiO_2, CaO, MgO e talvolta $BaSO_4$.

La *silice*, il Pb, l'As, l'Sb e il $BaSO_4$ furono già precedentemente eliminati, ci rimangono gli altri.

Supponiamo ora di trattare una soluzione solforica in cui oltre allo zinco siano presenti i suddetti elementi, con idrato sodico al 10 $^0/_0$ in eccesso: devono precipitare tutti gli elementi accennati allo stato di idrossidi, mentre rimangono in soluzione lo zincato e l'alluminato di sodio.

Se così fosse, e che tutto lo zinco rimanesse in soluzione, non si farebbe che portare a volume noto la soluzione, filtrare ed elettrolizzare una parte aliquota del filtrato per avere terminato il saggio, non avendo, come spiegherò in seguito, alcuna influenza sull'andamento dell'analisi la presenza dell'alluminato nell'elettrolito.

Ma così non è. La grande quantità di idrossido di sodio che ci occorre di impiegare dà col *rame* e col *cadmio* delle reazioni che dobbiamo considerare.

Questi due elementi, sebbene in piccola quantità, accompagnano molto spesso lo zinco nei suoi minerali.

Se si tratta una soluzione di un sale di rame con idrossido di sodio molto concentrato ed in grande eccesso e facendo bollire per pochi minuti, il precipitato di ossido di rame dapprima formatosi si ridiscioglie completamente comunicando alla solu-

zione una colorazione azzurro intenso (*). Elettrolizzando questa soluzione, del rame si deposita sul catodo.

È evidente quindi che una soluzione di zincato sodico avente colorazione azzurra conterrà del rame e non potrà essere elettrolizzata direttamente per la determinazione dello zinco.

Una soluzione di un sale di cadmio, trattata con idrossido di sodio precipita l'idrossido di cadmio che si scioglie un po' meno facilmente che quello di rame ma pur tuttavia si scioglie, se operiamo in presenza di un forte eccesso di idrato sodico concentrato ed operando all'ebollizione. La soluzione risultante è incolora. Se si diluisce questa soluzione con acqua riprecipita l'idrossido di cadmio (**). Anche in questo caso elettrolizzando una soluzione di zincato contenente cadmio succede ciò che abbiamo verificato per il caso precedente del rame, e che cioè il cadmio precipita assieme allo zinco sul catodo.

Per queste ragioni non bisognerà mai elettrolizzare direttamente soluzioni di minerali di zinco sotto forma di zincato sodico, senza prima aver eliminato i metalli del gruppo dell'idrogeno solforato.

Fra tutti i metodi esperimentati in proposito, nessuno si presta meglio della precipitazione con idrogeno solforato. A questo punto dobbiamo però tener presente una piccola difficoltà che si incontra per la precipitazione completa del solfuro di cadmio; perchè, se operiamo in presenza di poco acido solforico può precipitare assieme ai metalli del 2° gruppo un po' di solfuro di zinco, e se operiamo in presenza di troppo acido si arrischia di non precipitare completamente il cadmio. Usando però l'avvertenza da principio di portare il minerale in soluzione mediante una quantità nota di acido solforico, si può con una conveniente diluizione, preparare una soluzione che contenga dal 25 al 30 % di acido solforico. In queste condizioni ed operando coll'acido solfidrico alla temperatura di 70° C, possiamo

(*) Pare che l'ossido di rame in presenza di molto idrato sodico abbia funzione acida. — Löw, " Z. für Anal. Chem. ", 9, 463; " Chem. Centralblatt ", 1871, 510.

(**) Sul comportamento dell'idrossido di cadmio in presenza di un forte eccesso di idrossido di sodio, farò delle ricerche speciali.

ottenere la precipitazione completa di tutti i metalli del 2° gruppo, cadmio compreso (*).

Per dimostrare come sia necessario eliminare il cadmio dalla soluzione di zincato che dobbiamo elettrolizzare, riporto nella Tav. N° 1 e 2 i dati delle esperienze che ho fatto in proposito:

I. Preparai una soluzione titolata di solfato di zinco e solfato di cadmio che per aggiunta di una conveniente quantità di soda resi fortemente alcalina. Il cadmio passò tutto in soluzione. Elettrolizzai nel solito modo ed ottenni:

Tav. N° 1.

N°	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
1	gr. 0,24317	gr. 0,2469	+ 3,73	negativa
2	gr. 0,24317	gr. 0,2466	+ 3,43	negativa

I risultati ottenuti sono molto alti, ciò che non succede se prima si separa il cadmio coll'acido solfidrico, come ce lo indica la seguente esperienza.

II. Preparai una soluzione titolata di solfato di zinco cui aggiunsi rame e cadmio (**), la riscaldai a 70° C. e mantenendola a questa temperatura vi feci gorgogliare una corrente di acido solfidrico operando in modo che per la precipitazione com-

(*) Classen, " Ausgew. Meth. der Anal. Chem. „, I, 349.

(**) La quantità degli elementi estranei che si devono eliminare e che aggiunsi alle soluzioni di zinco che servirono per le mie esperienze, fu sempre molto maggiore di quella che generalmente si trova nei minerali di zinco.

pleta del cadmio fosse presente nella soluzione dal 25 al 30 % di acido solforico. Dopo precipitazione raffreddai, portai a volume il tutto in un pallone tarato da 200 cc., filtrai 150 cc. che feci bollire per eliminare l'acido solfidrico, e, dopo raffreddamento, neutralizzato l'acido libero, trattai colla conveniente quantità di idrossido di sodio. Portai il tutto a volume e ne prelevai una parte aliquota che elettrolizzai. Ottenni:

Tav. N° 2.

N°	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
3	gr. 0,08085	gr. 0,0806	— 0,25	negativa
4	gr. 0,08085	gr. 0,0807	— 0,15	negativa

Si può quindi dedurre da questi risultati che operando nelle condizioni indicate di concentrazione acida e di temperatura, si può fare la precipitazione con acido solfidrico di tutto il cadmio presente nella soluzione senza temere che una parte dello zinco venga anch'essa precipitata.

Gli altri elementi che possiamo ancora incontrare nella soluzione di un minerale di zinco sono l'*Alluminio*, il *Ferro* ed il *Manganese*, e anche per questi dobbiamo considerarne il comportamento in presenza di forti quantità di idrossido di sodio.

Una soluzione di un sale di alluminio trattata con soda caustica precipita l'idrossido di alluminio facilmente solubile in eccesso di reattivo per formazione di alluminato sodico, quindi nell'elettrolito noi troveremo questo elemento assieme allo zinco. La sua presenza nell'elettrolito non disturba il buon andamento del saggio come ce lo dimostrano i dati dell'esperienza riuniti nella tavola N° 3.

Preparai una soluzione titolata di solfato di zinco ed allume

potassico, aggiunsi la conveniente quantità di idrossido di sodio ed elettrolizzai. Ottenni:

TAV. N° 3.

N°	Alluminio presente % di zinco	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
5	50 %	gr. 0,109099	gr. 0,1091	—	negativa
6	50 %	gr. 0,109099	gr. 0,1091	—	negativa
7	25 %	gr. 0,109099	gr. 0,1089	— 0,199	lieve intorbidam.

Provai a ripetere l'esperienza con quantità variabili di alluminio ed i risultati ottenuti mi confermarono che la sua presenza nell'elettrolito non portava alcun pregiudizio al buon andamento del saggio.

Ferro. — Questo elemento, non considerando la franklinite dove entra come elemento costitutivo del minerale, lo troviamo sempre e in quantità molto variabili nei minerali di zinco.

Una soluzione di un sale ferrico, trattata con idrossido di sodio forma un precipitato di idrossido di ferro affatto insolubile anche in presenza di grande eccesso di reattivo; la sua presenza nella soluzione da elettrolizzare è nociva e questo elemento deve completamente essere eliminato.

Manganese. — Questo elemento, tranne nella franklinite dove è presente in notevole quantità, non si trova sempre nei minerali di zinco, e solamente in piccola quantità; coll'idrossido di sodio si comporta come il ferro e quindi deve essere eliminato.

Gli altri elementi che, oltre a questi che abbiamo menzionato, si possono trovare nella soluzione che dobbiamo analiz-

zare, o furono precedentemente eliminati o per noi non hanno importanza.

Ci troviamo dunque di fronte ad una soluzione dalla quale, eliminato il gruppo dell'idrogeno solforato, dobbiamo eliminare soltanto il ferro ed il manganese, essendo la presenza dell'alluminio nello zincato perfettamente indifferente.

Per eliminare il precipitato prodotto dall'idrossido di sodio bisognerà ricorrere alla filtrazione col metodo che descriverò appresso.

Debbo ora far presente una piccola difficoltà che si incontra nella separazione del ferro e del manganese.

Potei osservare nelle mie esperienze come si ottengono risultati ben differenti a seconda del modo con cui si precipitano questi due elementi in seno alla soluzione sodica.

Se si versa nella soluzione del minerale la conveniente quantità di soda, otteniamo la completa precipitazione del ferro e del manganese, ma questo precipitato contiene sempre una notevole quantità di zinco che, anche per prolungata ebollizione non si riesce a far passare in soluzione; infatti elettrolizzando una parte aliquota di liquido filtrato da una tale prova ottenni:

Tav. N° 4.

N°	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
8	gr. 0,13637	gr. 0,0594	— 76,97	negativa
9	gr. 0,13637	gr. 0,0593	— 77,07	negativa

Se invece, nella quantità di soda stabilita e mantenuta bollente si versa la soluzione del minerale precedentemente neutralizzata, a piccole porzioni, agitando il liquido e facendo bol-

lire il tutto per alcuni minuti (*) si riesce ad avere un precipitato di idrossidi perfettamente privo di zinco, essendo questo passato tutto in soluzione. Infatti operando in questo modo ottenni:

Tav. N° 5.

N°	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
10	gr. 0,13637	gr. 0,1357	— 0,67	negativa
11	gr. 0,13637	gr. 0,1357	— 0,67	negativa

Se confrontiamo questi risultati con quelli ottenuti nel saggio precedente vediamo come sia di somma importanza il non trascurare questo particolare di versare cioè la soluzione del minerale nella soda anzichè questa in quella.

La grande differenza che si riscontra operando in un modo piuttosto che nell'altro credo debba ricercarsi in ciò che: precipitando con idrossido di sodio una soluzione di un sale di ferro contenente zinco, il precipitato che si forma viene ad occludere una certa quantità di idrossido di zinco che difficilmente potrà venire in contatto coll'eccesso di reattivo e sciogliersi, anche facendo bollire per molto tempo il precipitato sospeso nella soluzione sodica; mentre, se si opera nel modo inverso, versando cioè la soluzione del sale (precedentemente neutralizzata) nella soda bollente, a piccole porzioni, agitando e facendo bollire per alcuni minuti, il precipitato di idrossido di zinco non ha tempo di formarsi che già vien sciolto dalla soda, ed il precipitato di idrossido di ferro che viene formandosi poco alla

(*) L'ebollizione che avviene con questi liquidi densi è sempre tumultuosa e sarà conveniente operare in un pallone a lungo collo mantenuto inclinato per evitare perdite dovute a proiezione.

volta, sarà bensì imbevuto di liquido contenente zinco, ma questo liquido conterrà lo zincato sodico nell'uguale proporzione di tutto il liquido costituente la soluzione.

Ci rimane ora a vedere come si deve preparare la soluzione da elettrolizzare.

Volendo operare rapidamente, tentai di risparmiare la lunga e noiosa operazione della filtrazione elettrolizzando direttamente il liquido che tiene in sospensione il precipitato, tale quale come risulta dopo il trattamento con idrossido di sodio.

Mi servii di un catodo fatto di lamiera di nichel anzichè di rete per evitare che i fiocchi di precipitato potessero rimanere imprigionati nelle maglie, venire ridotti per effetto dell'elettrolisi e quindi depositarsi assieme allo zinco.

L'elettrolisi venne eseguita, come sempre, con l'agitazione elettromagnetica dell'elettrolito.

Se le asperità che può presentare la superfice dell'elettrodo possono veramente facilitare la deposizione del ferro assieme allo zinco, operando per confronto con un elettrodo di rete dovrò trovare una quantità di ferro maggiore.

Feci la seguente esperienza:

due quantità uguali di liquido contenente il precipitato in sospensione vennero elettrolizzate operando nelle identiche condizioni di tempo, di temperatura e d'intensità di corrente. Si ottennero i seguenti risultati:

Tav. N° 6.

N°	Zinco calcolato	Zinco trovato con elettr. di lastra	Zinco trovato con elettr. di rete	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
12	gr. 0,13637	gr. 0,1415	—	+ 5,13	presenza di zinco
13	gr. 0,13637	—	gr. 0,1464	+ 10,03	negativa

La soluzione cloridrica del deposito di zinco, trattata con NH_3 e NH_4Cl dà precipitato di idrossido di ferro.

Come si può vedere in questa prova eseguita nei due saggi N° 12 e N° 13 la differenza che si ottiene tra il calcolato e il trovato è molto forte, e molto forte è pure la differenza che si ottiene fra le due prove N° 12 e N° 13, ciò che prova come siano veramente le asperità della superficie dell'elettrodo quelle che favoriscono il depositarsi del ferro assieme allo zinco. Infatti, mentre la superficie dell'elettrodo di lastra presentava un deposito di zinco compatto e striato in nero (per deposito di ferro) solamente in corrispondenza di alcune asperità, l'elettrodo di rete presentava una superficie completamente nera, indizio certo di una quantità di ferro maggiore di quella ottenuta nel primo caso.

Ritengo quindi essere di somma importanza la separazione del precipitato prodotto dall'idrossido di sodio, perchè altrimenti non si ottiene un deposito di zinco perfettamente puro, e non mi pare si possa applicare in questo caso il metodo proposto da K. Jene (*) per l'analisi dei minerali di zinco, in cui viene trascurato il gruppo dell'idrogeno solforato, e si elettrolizza il liquido tal quale come risulta dopo la precipitazione con idrossido di sodio, senza preventiva filtrazione. Io sperimentai questo metodo non solo nel modo indicato dall'autore, ma impiegando altresì degli elettrodi giranti e con forma speciale e con superficie perfettamente liscia: riuscii a diminuire notevolmente la quantità di ferro che si deposita collo zinco, ma non riuscii mai ad eliminarlo completamente. La quantità di ferro che si depositava era sempre tale da produrre un precipitato quando se ne saggiava la soluzione cloridrica coll'ammoniaca. Riporto nella seguente Tav. N° 7 le esperienze fatte in proposito:

(*) K. Jene, " Chem. Ztg. ", 29 (1905), 803.

Tav. N° 7.

N°	Durata dell'elettrolisi	Intensità	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
14	20′	2 Amp.	gr. 0,13637	gr. 0,1213	— 15,07	molto zinco
15	30′	4,5 Amp.	gr. 0,1091	gr. 0,1065	— 2,6	presenza di zinco
16	30′	4,5 Amp.	gr. 0,05455	gr. 0,0512	— 3,35	presenza di zinco

N° 14 = elottrodo girante a superficie liscia.

N^i 15 e 16 = elettrodi giranti di rete.

La soluzione cloridrica del deposito di zinco, trattata con NH_3 e NH_4Cl dà precipitato di idrossido di ferro.

Abbandonai allora questo metodo e rivolsi la mia attenzione alla ricerca di un metodo di separazione del precipitato, perfetto, ed il più possibile rapido.

Per quanto sia cosa noiosa il dover filtrare delle soluzioni titolate e per giunta concentrate di idrossido di sodio, non potei fare a meno di ricorrere a questo metodo per separare il precipitato.

Come si sa, non si può filtrare per carta. Operando con tamponi filtranti di amianto, si otterrebbe un liquido perfettamente limpido, ma la filtrazione che si effettua in modo assai lento deve essere agevolata con una forte aspirazione e ciò sempre a danno del titolo della soluzione.

Credo di aver risolto facilmente questo problema servendomi di un filtro di alundum. Il recipiente filtrante che mi servì per tutte le esperienze era un filtro di alundum per estrattori Soxhlet: con questo materiale ottenni sempre una filtrazione perfetta e rapida senza dover ricorrere ad alcuna aspirazione (*). Operando in questo modo ottenni buoni risultati — v. Tav. N° 8:

(*) Può darsi talvolta, specialmente quando si adopera il filtro per la prima volta, che le prime porzioni del liquido passino torbide (e allora si riportano sul filtro); ma appena il precipitato ha rivestito le parti del filtro, il liquido filtra limpidissimo ed in meno di 10 minuti sono già filtrati i 100 cc. che comunemente servono per il saggio.

Tav. N° 8.

N°	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Aspetto del deposito	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
17	gr. 0,109099	gr. 0,1086	— 0,49	bello	negativa
18	gr. 0,109099	gr. 0,1095	+ 0,4	parz. ossid.	negativa
19	gr. 0,109099	gr. 0,1089	— 0,2	bello	negativa

Accennerò ancora ad un'avvertenza che bisogna avere per misurare la parte aliquota che ci deve servire per il saggio.

In tutte le mie esperienze ho potuto osservare come abbia grandissima importanza il modo con cui si misura il liquido che dobbiamo elettrolizzare.

Non possiamo servirci delle comuni pipette perchè il liquido da misurare è molto denso e la grande aderenza di questo alle pareti del recipiente misuratore è causa di errori che ho potuto facilmente constatare. Nella esperienza N° 20 della Tav. N° 9 il campione da elettrolizzare fu misurato con una comune pipetta da 40 cc. mentre nell'esperienza N° 21 la stessa quantità di liquido fu misurata in due volte con una comune pipetta da 20 cc.

Tav. N° 9.

N°	Zinco calcolato	Zinco trovato	Differenza mgr.	Prova con ferrocianuro sul liquido travasato
20	gr. 0,109099	gr. 0,1084	— 0,69	negativa
21	gr. 0,109099	gr. 0,1076	— 1,49	negativa

Si osservi come nel saggio N° 21 in cui il liquido fu misurato in due volte, si trova una quantità di zinco molto minore che nel saggio N° 20.

Per ovviare a questo inconveniente io usai sempre, e consiglio di usare anzichè delle comuni pipette, dei palloncini esattamente tarati e che si possano facilmente lavare. Lavando più volte con poca acqua il recipiente misuratore ed aggiungendo le acque di lavaggio al liquido da elettrolizzare evitai completamente gli errori dovuti all'aderenza del liquido alle pareti del recipiente ed ottenni degli errori assolutamente trascurabili: infatti, riferendomi ai dati sopracitati si ottenne per

Zinco calcolato	Zinco trovato	differenza
gr. 0,1091	gr. 0,1089	mgr. —0,2

ciò che, riferendo il volume di soluzione impiegato a gr. 1,— di minerale, porterebbe una differenza in meno di gr. 0,02 di Zinco per 100 grammi di minerale.

Riassunto. — Per le ragioni che credo di aver sufficientemente spiegate, riescii ad applicare il metodo del Frary direttamente all'analisi dei minerali di zinco, riducendo a poche ore il tempo occorrente per il saggio, operando nel modo seguente:

Gr. 2 a 5 di minerale, a seconda della sua ricchezza, vengono messi in capsula di platino, umettati con acido solforico e attaccati con acido fluoridrico. Si aggiungono a piccole porzioni 30 cc. di acido solforico concentrato (p. sp. 1,8) e, operando sotto una buona cappa aspirante, si riscalda con precauzione prima a bagnomaria e poi a bagno di sabbia fino all'apparire di fumi bianchi pesanti. A questo punto si ritira la capsula e si lascia raffreddare; si diluisce il contenuto con poca acqua, si filtra lavando per decantazione prima e poi sul filtro stesso i solfati insolubili con poca acqua contenente acido solforico. Il precipitato si tratta nel solito modo e può servire per dosare il piombo col metodo dell'acetato.

Il liquido filtrato il cui volume sarà di circa 180 cc. contiene dal 25 al 30 % di acido solforico, viene riscaldato in un

bicchiere a 70° C. e a questa temperatura vi si fa gorgogliare una corrente di acido solfidrico. Si versa tutto in un pallone tarato da 200 cc., si raffredda rapidamente agitando il pallone sotto un getto d'acqua e si porta a segno.

Si filtrano rapidamente per mezzo di un filtro asciutto 150 cc. di liquido da cui si scaccia l'idrogeno solforato facendo bollire rapidamente in un pallone a lungo collo mantenuto inclinato; si raffredda rapidamente agitando sotto un getto d'acqua e si ossida il ferro con alcune gocce di perossido di idrogeno. Si neutralizza tutto l'acido libero con carbonato sodico fino all'apparire di un precipitato che difficilmente si ridiscioglie, si fa bollire per alcuni minuti, ed a piccole porzioni, sempre agitando, questo liquido così preparato, viene versato nella voluta quantità di soluzione bollente di idrossido di sodio. Si fa ancora bollire per cinque minuti il liquido torbido, si raffredda rapidamente sotto un getto d'acqua e si porta a volume di 500 cc. (*).

Si filtra rapidamente per mezzo di un filtro di alundum, e del filtrato limpido se ne misurano 100 cc. in un palloncino tarato che vengono versati nel bicchiere dell'apparecchio elettrolitico; vi si aggiungono le acque di lavaggio del palloncino e si elettrolizza nel modo che ho descritto.

Senza interrompere la corrente si lavano gli elettrodi con acqua, poi il catodo viene tuffato in un bicchiere con alcol, essiccato, raffreddato e pesato.

Nota. — Si osservi che nel metodo che ho esposto bisogna operare con soda caustica concentrata ed a caldo, e che, se per queste operazioni vengono impiegati dei recipienti di vetro contenente zinco (p. es. il vetro di Jena), una certa quantità di zinco dal vetro può passare in soluzione nella soda e può essere causa di gravi errori. Potei osservare come adoperando dei recipienti di detto vetro, la quantità di zinco che si trovava nei saggi fosse sempre superiore al calcolato, quantunque si ottenessero dei depositi di zinco compatti e brillanti e quindi

(*) In questa precipitazione, come pure in quella ottenuta dall'acido solfidrico, il volume che può occupare il precipitato viene trascurato.

per nulla ossidati. Attribuii questi errori allo zinco contenuto nel vetro e me ne accertai colla seguente esperienza:

In un pallone di vetro contenente zinco, della capacità di circa 300 cc. feci bollire per un'ora 50 cc. di una soluzione al 20 % di idrossido di sodio che dopo raffreddamento versai nell'apparecchio elettrolitico.

Dopo mezz'ora di elettrolisi si ottenne sul catodo un deposito di gr. 0,0458 di zinco.

Come si vede la quantità di zinco che passa in soluzione nella soda caustica operando con questi vetri è abbastanza grande (*), e credo debba attribuirsi a ciò il fatto che succede talvolta di verificare la presenza dello zinco nelle soluzioni di idrossido di sodio — mantenute in recipienti di vetro di Jena anche senza riscaldamento — presenza che si vuol ascrivere a metodi imperfetti di fabbricazione.

Per tutti i miei saggi analitici mi servii esclusivamente di vetri perfettamente privi di zinco, e di ciò me ne accertai facendovi bollire per molto tempo una soluzione al 20 % di soda caustica e cercando poscia in questa la presenza dello zinco colla reazione sensibilissima del ferrocianuro di potassio.

Dal R. Politecnico di Torino. Laboratorio di Chimica Applicata ai Materiali da Costruzione. Dicembre 1913.

(*) Sulla solubilità dei vetri a base di zinco nella soda a diverse concentrazioni e temperature pubblicherò i risultati di alcune esperienze.

Contributo allo studio delle anomalie dei Lumbricidi.

Nota del Dott. LEOPOLDO CHINAGLIA.

Le anomalie nei Lumbricidi, ed in generale negli Oligocheti, sono abbastanza frequenti. Data la struttura segmentale di questi animali, sono possibili: l'aumento o la diminuzione nel numero di alcuni organi ripetentisi metamericamente, e lo spostamento di essi in metameri diversi da quelli in cui, di regola, sogliono trovarsi. Spesse volte è la segmentazione stessa, e quindi anche la posizione degli organi che giacciono nei varî segmenti, che si presentano alterate. Tali irregolarità si ritengono in alcuni casi legate ad un fenomeno rigenerativo. Dopo la rigenerazione di una parte del corpo il numero primitivo dei segmenti può darsi che venga a risultare cambiato, e perciò cambiata anche la giacitura degli organi situati sia nei segmenti rigenerati, sia in quelli che seguono.

Lo scopo di questo mio lavoro non è di dare un elenco completo delle anomalie che sono state descritte nei Lumbricidi, ma di accennare come le più importanti di esse possano venir raggruppate. Per illustrare le varie categorie che verrò così enumerando ho dovuto raccogliere un certo numero di esempî fra quelli offerti dalla ricca casistica di anomalie descritte. Naturalmente non mi occupo delle anormalità prodotte artificialmente come sarebbero quelle ottenute dallo Joest, dall'Hescheler, dal Korschelt, dal Michel, ecc., ma soltanto di quelle osservate in natura, rivolgendo speciale attenzione alle anomalie che interessano l'apparato riproduttore, perchè mi sono sembrate particolarmente interessanti. E del resto la maggioranza delle anomalie descritte si riferiscono, in tutto od in parte, all'apparato sessuale. Ciò dipende sopratutto dal fatto che, siccome caratteri diagnostici molto importanti sono desunti dagli organi ge-

nitali, l'attenzione degli osservatori è richiamata di preferenza su di essi. L'apparato sessuale, per altro, data la sua notevole complessità ed il grande numero di organi da cui è formato, è facilmente sede di anomalie. Queste consistono essenzialmente:

A) Nella dissimmetria di posizione,

B) Nella riduzione o nell'aumento di numero,

C) Nell'anormale sviluppo e struttura di alcuni organi.

In alcuni casi, non infrequenti, in cui gli organi interni ed esterni si trovano spostati all'innanzi di un egual numero di anelli, rimanendo normali le distanze reciproche fra gli organi stessi, appare evidente la mancanza di uno o più segmenti anteriori. È possibile che tale riduzione di numero sia sopravvenuta in seguito ad una rigenerazione, ma è anche possibile che sia dovuta ad una perturbazione nello sviluppo embrionale. Quest'ultima maniera di formazione è l'unica che si possa invocare per spiegare l'origine di un gran numero di anomalie. Si può dunque concludere che una parte delle irregolarità di struttura che si osservano nei Lombrichi hanno origine nell'adulto in seguito ad un fenomeno rigenerativo, mentre altre hanno un'origine più remota poichè appaiono già nell'embrione in conseguenza di uno sviluppo anormale. Non è da escludere che talvolta possano anche presentarsi fenomeni di ibridismo. Ricordo a questo proposito un individuo di *Helodrilus* (*Eiseniella tetraedrus* (Sav.)) " dont la formule du *clitellum* et des *tubercula pubertatis* correspondait exactement avec celle de l'*Allolobophora chlorotica*. Mais la forme du corps, la disposition des poils, la coupe tétraédrique de la queue et la couleur coïncidaient avec celle des *Allurus tetraedrus* avec lesquels il vivait. S'agirait-il là d'un cas d'hybridité? „ (de Ribaucourt, **53**, p. 71). Nulla si oppone a credere che ciò possa essere. L'accoppiamento fra individui di specie diversa è stato sorpreso dal Friend, il quale vide coniugati un *Lumbricus rubellus*, Hoffmstr. ed un *L. rubescens* (= *L. festivus* (Sav.)) (**36**). Rimane da provare che tali accoppiamenti possano essere fecondi. La fecondazione nei Lombrichi non è ancora chiara in tutti i suoi punti (*) e l'ibridismo

(*) Recentemente il Cognetti si è occupato di questo argomento (**32**).

è stato poco studiato. L'Harms (**39**) ha proposto un metodo per ottenere ibridi, consistente nel trapiantamento degli ovarî. È forse più facile ottenerne costringendo individui di specie affini ad accoppiarsi mediante allevamenti opportuni.

Senza diffondermi intorno alla rigenerazione dei Lombrichi (*), dirò solo che i segmenti rigenerati presentano di solito un complesso di caratteri esterni ed interni diversi da quelli dei segmenti normali. Nella regione anteriore ad esempio fu osservata la mancanza di nefridi, l'anormale struttura dei dissepimenti e la riduzione numerica delle setole (Morgan, **47**). Spesso quando si tratta della regione caudale è facilissimo riconoscere la parte rigenerata che rimane molto più sottile di quella normale con segmenti più corti e più ravvicinati. Questo avviene in numerosi individui di *Hel. (Allolobophora) caliginosus* form. *trapezoides* e di *Allolobophora terrestris*, Rosa (= *Hel. (All.) longus* (Ude) osservati dal de Ribaucourt (**53**, p. 50 e 56, tav. II, fig. 65). Il tipo dell'*Hel. (Eophila) laurentii*, da me descritto (**14**) come pure sei esemplari di *Hel. (All.) chloroticus* (Sav.) (**16**, p. 173) presentavano anch'essi la coda rigenerata in modo analogo. Ciò non si verifica però sempre. Il de Ribaucourt figura, ad esempio, (tav. I, fig. 26) un lumbricide in cui la coda rigenerata si presenta con un diametro di poco inferiore a quello normale. In un individuo di *Hormogaster redii*, Rosa, che qui riporto, quantunque non si tratti di un Lumbricide, perchè presenta un esempio di anomalia nella disposizione delle setole, le distanze fra i fasci setolari *a*, *b*, *c* erano alterate dopo il 70° segmento. Interpretai questa anomalia (**18**, p. 2) come dovuta a rigenerazione caudale, sebbene il diametro della parte rigenerata non fosse diverso da quello della parte normale.

Si deve al Rosa (**54**) il seguente saggio di classificazione delle più frequenti anomalie esterne dei Lumbricidi, in cui sono pure considerati alcuni organi dell'apparato sessuale.

" 1° Accorciamento anormale del corpo con riduzione del numero dei segmenti per cui il clitello viene a trovarsi a metà della lunghezza del corpo.

(*) Rimando per questo argomento al volume sulla *Rigenerazione* del Przibram (**52**) ricco di bibliografia.

" 2° Biforcazione della coda e simili mostruosità (*).

" 3° Dissimmetria nella segmentazione o nella posizione delle aperture sessuali e dei *tubercula pubertatis*.

" 4° Trasposizione simmetrica delle aperture sessuali. Generalmente questi casi si riconoscono come anomali per essere allora trasportate anche le aperture femminee che devono trovarsi sempre al 14° segmento. Anche i *tubercula pubertatis* seguono generalmente la trasposizione delle aperture sessuali.

" 5° Trasposizione del clitello e dei *tubercula pubertatis*. Oltre i casi in cui queste parti sono trasposte coordinatamente ad una trasposizione avvenuta nelle aperture maschili o femminee, c'è qualche caso in cui il clitello e sopratutto i *tubercula pubertatis* sono trasposti di un segmento innanzi o indietro senza alcuna altra variazione corrispondente, nemmeno nella posizione delle spermateche; tali casi sono, ora semplici anomalie isolate, ora sono abbastanza fissi in modo da dare origine a varietà locali ".

Quest'ultima categoria ha per noi poca importanza, si tratta più che altro dell'oscillazione dei caratteri dovuta alla variabilità individuale.

Il rapido moltiplicarsi delle osservazioni dopo la fondamentale revisione dei Lumbricidi del Rosa, in cui sono enumerate le categorie di anomalie sopradette, misero in luce sempre nuovi casi in parte ascrivibili a tali categorie, in parte di tipo diverso.

Specialmente frequenti sono le irregolarità nella segmentazione, consistenti nella fusione o nella scissione di uno o più segmenti. Ciò può avvenire da uno solo o da entrambi i lati del corpo. Nel caso più comune un segmento si divide in due e non di più, e così pure due sono i segmenti che si fondono in uno solo. Questo si verifica in alcuni Lumbricidi anormali descritti dal de Ribaucourt (**53**, p. 57), dal Cognetti (**20**, p. 18)

(*) La biforcazione della coda o della parte anteriore dipende spesse volte da rigenerazione. Lo Joest (**44**) ottenne mostri doppî per mezzo dell'innesto, ma in natura questa genesi evidentemente non è possibile. Anche il Tellyesniczky (**58**) si è occupato dello studio della produzione di mostri bifidi. Esemplari naturalmente doppî anteriormente o posteriormente furono, a varie riprese, descritti dall'Andrews (**1** e **2**), dal Collin (**33**), dal Friend (**37** e **38**), dal Service (**56**), dal Williamson (**59**), ecc.

e da me (**15**, p. 111), mentre un individuo di *Helodrilus (Allolobophora) caliginosus* (Sav.) osservato dal primo autore presenta tre anelli consecutivi, il 14°, il 15° ed il 16°, " complètement fusionnés ventralement et latéralement „ (**53**, p. 52). La segmentazione anormale in questa specie non è rara; individui in cui erano presenti irregolarità nella disposizione e continuità di alcuni segmenti senza che ne risultasse alterato il numero totale furono ricordati dal Cognetti (**23**, p. 2) e da me (**16**, p. 172). Interessante è un esemplare di *Hel. (Dendrobaena) octaedrus* (Sav.), che aveva " le clitellum situé aux anneaux 29 à 34 = 6 et les tubercula aux anneaux 32, 33; les trois premiers anneaux disposés les uns par rapport aux autres en tire-bouchon „ (de Ribaucourt, **53**, p. 29). (Metamerismo a spirale) (*).

Quasi tutte le altre anomalie riguardano più o meno da vicino l'apparato sessuale. Esse infatti colpiscono sia gli organi che entrano in funzione durante l'accoppiamento (aperture sessuali, *tubercula pubertatis*, clitello), sia gli organi utili per la fecondazione (spermateche), sia quelli che servono alla maturazione ed alla conduzione dei prodotti sessuali (vescicole seminali, padiglioni cigliati e canali deferenti, per l'apparato maschile; *receptacula ovorum*, padiglioni ed ovidutti, per quello femminile), sia infine direttamente le gonadi.

Le anomalie nelle aperture sessuali possono presentarsi rispetto alla posizione e rispetto al numero. La maggior parte dei casi descritti riguarda le aperture maschili, le quali essendo più visibili sono più facilmente osservabili. Sono frequenti i casi in cui esse non giacciono nella posizione normale ma sono spostate di uno o più segmenti sia da un lato solo, sia da entrambi i lati del corpo. Quando la trasposizione è simmetrica si nota spesso uno spostamento analogo nei *tubercula pubertatis*, ma non sempre.

(*) A proposito delle anomalie di segmentazione nei Lumbricidi è utile leggere anche i lavori del Cori (**35**), del Morgan (**46**) e dello Smith (**57**).

Ricordo ancora le ricerche condotte con metodo statistico dal Pearl e dal Fuller (**50**) intorno alla variabilità del numero dei segmenti, della lunghezza del corpo, del clitello, della posizione delle aperture maschili, ecc.

Può avvenire ancora che le aperture maschili invece di essere soltanto un paio, come di regola, siano più numerose. Questa anomalia si presenta sia che le aperture normali occupino la posizione regolare, sia che esse siano spostate. Per lo più poi non è simmetrica. Riassumendo, si può avere: 1° uno spostamento delle aperture maschili, *a)* simmetrico, *b)* non simmetrico; 2° un aumento nel numero delle aperture stesse, *a)* simmetrico, *b)* non simmetrico. Esistono individui in cui le due forme d'anomalia si trovano riunite. Casi di trasposizione simmetrica nelle aperture maschili furono osservati dall'Hoffmeister (**41**, p. 78), dal Bretscher (**13**, p. 414) e dal Cognetti (**24**, p. 4 e **25**, p. 105), ed interpretati per mezzo della rigenerazione della parte anteriore del corpo (*). Nell'*Octolasium damianii*, Cogn. furono descritti spostamenti simmetrici o no delle aperture maschili fino a giungere al primo segmento del clitello. Spostamenti analoghi ma meno ampî furono pure osservati nell'*Octolasium hemiandrum*, Cogn. (Cognetti, **25**, p. 121 e 122). Lo spostamento di una sola apertura è ad ogni modo più frequente. Esso fu osservato in Lumbricidi di varie specie; dal Morren (**48**, tav. V, fig. 19 e 20), dall'Hoffmeister (**41**, p. 8), dal Cognetti (**20**, p. 18, **24**, p. 2 e 8, **25**, p. 106), dal de Ribaucourt (**53**, p. 72, tav. II, fig. 59 e 61), dal Collin (**34**), ecc. (**). La presenza di aperture maschili in soprannumero fu notata: dal de Ribaucourt (**53**, p. 28 e 52, tav, I, fig. 29-32, tav. II, fig. 36, 42), dal Chinaglia (**17**, p. 2), dall'Hoffmeister (**41**, p. 8), ecc. In un esemplare di *Lumbricus herculeus* Sav. del R. Museo Zoologico di Torino, determinato dal Rosa, sono presenti due paia di aperture maschili, mentre un giovane di *Hel. (Allolobophora) caliginosus* (Sav.) form. *trapezoides* (A. Dug.) di Bari, determinato dal Cognetti, possiede

(*) Non è da escludere però che talvolta queste trasposizioni siano anomalie di prima formazione. Il Cognetti stesso ha osservato, ad es., un giovane esemplare di *Dichogaster Aloysii Sabaudiae*, Cogn., in cui si notava uno spostamento all'innanzi di tutti gli organi interni ed esterni, senza che fosse visibile traccia di rigenerazione (**30**, p, 9).

(**) Anche fuori della fam. dei Lumbricidi fu osservato lo spostamento non simmetrico delle aperture maschili. Il Cognetti, ad es., lo vide, accompagnato da quello delle spermateche, in *Ocnerodrilus* (*Ilyogenia*) *calwoodi*, Michlsn. (**26**, p. 2).

a destra due aperture maschili, una al 14°, l'altra al 15° segmento.

Le anomalie nei *tubercula pubertatis* consistono anch'esse per lo più nello spostamento di tali organi in segmenti diversi da quelli in cui si trovano normalmente. Quando questo spostamento non si accompagna a quello di altri organi (come le aperture maschili, quelle delle spermateche, il clitello), di solito non esiste corrispondenza fra i due lati del corpo. La posizione dei *tubercula pubertatis* del resto, per quanto sia uno dei buoni caratteri specifici, tuttavia non è sempre assolutamente costante in una medesima specie. Spesso anzi si osserva una variabilità entro limiti più o meno ristretti. Naturalmente in questi casi di variazioni individuali esiste sempre simmetria fra il lato destro e quello sinistro. È possibile però, in taluni casi, considerare come anomali quegli individui in cui i *tubercula* si trovino spostati simmetricamente, ad esempio quando siano trasposti di un numero notevole di segmenti rispetto alla giacitura normale. L'anomalia è, ad ogni modo, più evidente quando la simmetria viene a mancare. Anche per i *tubercula pubertatis* possono darsi casi in cui esiste solamente uno spostamento, e casi in cui invece si nota un aumento di numero. Anomalie di questi due tipi furono descritte dal Cognetti (**25**, p. 109, **22**, p. 4, **24**, p. 6), dal de Ribaucourt (**53**, p. 5 e 46), da me (**18**, p. 3, **16**, p. 173), ecc.

Nel clitello le anomalie sono poco frequenti. Per lo più si notano oscillazioni nei suoi limiti anteriore e posteriore, ma si tratta quasi sempre di variazioni individuali, più o meno frequenti. Naturalmente quando la segmentazione è irregolare anche la posizione del clitello, come quella di altri organi, è alterata, ma questa anomalia non è che una conseguenza della prima. La dissimmetria nel clitello si osserva raramente. Accompagnata da irregolarità in altre parti fu notata dal Cognetti (**25**, p. 105) (*). Un notevole arretramento del clitello,

(*) Il Beddard (**56**) osservò l'asimmetria del clitello anche fuori della fam. dei Lumbricidi, nel gen. *Pheretima*. In questo stesso genere il Rosa riscontrò le aperture maschili, quelle delle spermateche ed il clitello spostati sul lato destro di un segmento in dietro (**55**, p. 775, tav. fig. 12). " Qualche esempio di anomalie analoghe „ egli aggiunge " si trova talora nei

insieme ad irregolarità nella segmentazione e nelle aperture maschili, vidi io stesso in un individuo di *Hel. (Eiseniella) tetraedrus* (Sav.) (**17**, p. 2). Ricordo di avere pure esaminato un esemplare di *Hel. (Allolobophora) caliginosus* (Sav.) form. *trapezoides* (A. Dug.) proveniente da Moncalieri in cui il clitello era anomalo, non già per posizione, ma per struttura. Nei segmenti della regione clitelliana di questo individuo l'ispessimento ghiandolare si arrestava qua e là in modo tutto affatto irregolare, per cui apparivano altrettante aree rigonfie, biancastre, di varia forma e grandezza, perfettamente separate l'una dall'altra da tratti in cui il segmento aveva la sua struttura ed il suo colore normale. Quantunque l'esemplare avesse i caratteri e le dimensioni di un adulto, può darsi che il suo clitello fosse in via di formazione, è più probabile però che esso abbia subìto un anomalo arresto di sviluppo.

Le anomalie negli organi sessuali interni dei Lombrichi consistono, nella maggioranza dei casi, nell'aumento, nella diminuzione numerica, nella trasposizione simmetrica o no di essi. Non mancano però anche le irregolarità strutturali e morfologiche degli organi stessi (*). Le spermateche sono tra quelli in cui si rinvengono più di frequente.

Le principali anomalie delle spermateche si possono dividere come segue: 1° aumento nel numero, *a)* segmentale o metamerico, *b)* laterale; 2° riduzione nel numero; 3° spostamento in senso longitudinale nel segmento, *a)* delle spermateche e delle

Lumbricidi, sopratutto negli *Allurus*: esse sono interessanti per far vedere quanto sia profonda la correlazione fra questi organi che pure non hanno morfologicamente alcun nesso speciale fra loro „. Intorno alle variazioni del numero delle spermateche e delle papille copulatrici nel gen. *Pheretima* ha scritto l'Horst (**42**), ed è interessante a questo riguardo l'asimmetria di posizione riscontrata dal Beddard nelle spermateche dei tipi della *P. forbesi*, Beddard (**9**).

(*) Alcune volte si tratta di irregolarità dovute all'azione di parassiti, i quali, come è noto, si trovano frequentemente nel corpo di questi animali. Essi possono cagionare l'atrofia di alcuni organi (Chinaglia, **16**, p. 175), od alterazioni nella struttura e nella forma, a cui si può aggiungere ipertrofia (Cognetti, **30**, p. 6 e **31**). In questi casi non si tratta di vere anomalie, ma di fenomeni che rientrano nel campo della patologia.

loro aperture, *b)* delle sole spermateche, che possono sporgere in uno o nell'altro dei due segmenti contigui; 4° spostamento trasversale delle aperture esterne; 5° alterazione nella forma delle spermateche. L'aumento nel numero di questi organi può essere di due sorta. In un caso esse sono presenti oltre che nei segmenti in cui si trovano di regola anche in altri posteriori ad essi. L'anomalia è accompagnata talora da dissimmetria nelle aperture maschili (Cognetti, **23**, p. 4, 5 e **25**, p. 123, Baldasseroni, **3**, p. 55, Michaelsen, **45**, p. 19). Nell'altro caso invece le spermateche soprannumerarie si trovano entro a segmenti in cui già ne esiste un paio normale (Cognetti, **25**, p. 119, fig. 3). All'aumento si contrappone la diminuzione numerica la quale è più frequente. Tanto l'aumento quanto la diminuzione nel numero possono essere simmetrici o no. Lumbricidi con alcune spermateche assenti sono stati descritti, tra gli altri, dal Cognetti (**25**, p. 121, **28**, p. 8 e 17) e dal Baldasseroni (**3**, p. 54). Talvolta questa riduzione numerica raggiunge il limite estremo con la scomparsa totale delle spermateche. Ciò avviene con frequenza nell'*Hel. (Eisenia) roseus* (Sav.) (Cognetti, **21**, p. 10 e **25**, p. 108). Gli esemplari anomali segnano in questo caso il passaggio fra la forma *typica,* munita di quattro paia di vescicole seminali e di due paia di spermateche, e la form. *bimastoides* Cogn., munita di due sole paia di vescicole seminali e priva di spermateche. Alcuni esemplari esaminati da me segnano un grado più spinto. Essi infatti mancano di spermateche ed hanno tre sole paia di vescicole seminali (**18**, p. 2). Oltre a queste anomalie nel numero, le spermateche possono ancora presentarne rispetto alla loro posizione nel segmento. Sono noti, infatti, casi di spostamento in senso antero-posteriore (Cognetti, **23**, p. 4 e 5) e casi di spostamento in senso laterale (Cognetti, **28**, p. 16). Avviene ancora che le spermateche siano anomale nella forma. Talora si presentano segnate da solchi che dànno luogo a strozzature ed a lobi irregolari (Cognetti, **25**, p. 121). Talora sono bilobe (Beddard, **4**, p. 455, fig. 1 e 2, Cognetti, **25**, p. 119, Chinaglia, **18**, p. 3) o trilobe (de Ribaucourt, **53**, p. 9). Le spermateche bilobe possono essere considerate come un grado morfologico intermedio fra la struttura normale e l'aumento numerico laterale.

In un individuo di *Octolasium complanatum* (A. Dug.) il Cognetti notò la fusione delle vescicole seminali del 12° segmento

sopra il vaso dorsale in modo che rimanevano distinti i peduncoli (**27**, p. 3) (*).

Assai interessanti sono le anomalie che colpiscono direttamente le gonadi. Esse consistono: 1° nello spostamento simmetrico o no, *a)* dei testes, *b)* degli ovarî, *c)* di entrambe le gonadi; 2° nell'aumento, simmetrico o no, del numero delle gonadi per la presenza: *a)* di testes soprannumerarî, *b)* di ovarî soprannumerarî, *c)* di gonadi ermafroditiche soprannumerarie (**). Un caso di spostamento non simmetrico degli ovarî fu descritto dal Benham (**11**, p. 257, tav. III, fig. 3-4). Anomalie negli ovarî ricordò ancora il Bergh (**12**, p. 308, nota a piè di pagina). In un individuo di *Lumbricus agricola* Hoffmst. il Pearl (**49**) riscontrò anomalia in tutto l'apparato sessuale e la presenza di testes ed ovarî soprannumerarî. In varie specie di Lumbricidi l'Hesse ritrovò gonadi soprannumerarie poco sviluppate (**40**, p. 424, tav. 25, fig. 24). Ovarî soprannumerarî (sei paia) riconobbe pure il Woodward (**60**) in un " Earthworm " (= *Allolobophora*, sp. inc.) ed in altri Lumbricidi (**61**). Questo autore ha pure osservato un individuo di *Helodrilus (Allolobophora) longus* (Ude) il quale, oltre ai testes che pendono dai setti $^{9}/_{10}$ e $^{10}/_{11}$ e gli ovarî del dissepimento $^{12}/_{13}$ normali, possedeva gonadi soprannumerarie appese ai setti $^{11}/_{12}$ e $^{13}/_{14}$. Quelle del setto $^{11}/_{12}$ egli riconobbe essere ghiandole ermafroditiche (***).

Dallo studio comparativo delle anomalie a cui ho accennato

(*) Sono da ricordare qui, prima di passare alle anomalie che interessano le gonadi, la duplicazione anormale di un padiglione cigliato osservata e figurata dal Cognetti (**19**, tav. fig 8) in un Enchitreide, e l'interessante irregolarità di posizione dei padiglioni stessi osservata in un Lumbriculide dal Pierantoni (**51**, p. 232, tav. 14, fig. 6).

(**) Anomalie varie con presenza di spermateche ed ovarî in soprannumero osservò il Beddard, fuori della famiglia dei Lumbricidi, nel *Perionyx excavatus*, Perr. (**5**, p. 308, fig. 3, 4, 6). Ovarî soprannumerarî egli riscontrò pure in specie appartenenti ad altri generi, come il gen. *Eudrilus* (**6**, p. 446), il gen. *Phreodrilus* (**7**, p. 287), il gen. *Acanthodrilus* (**8**, p. 452), ecc.

(***) Ghiandole ermafroditiche esistono normalmente in un Glossoscolecino, l'*Enantiodrilus Borellii*, Cogn.; ed appunto il Cognetti descrivendone l'apparato sessuale ricorda, insieme ad altre, l'anomalia illustrata dal Woodward, traendo dal confronto considerazioni interessanti a cui rimando il lettore (**29**).

possono trarsi conclusioni importanti sia riguardo alla interpretazione della struttura degli Oligocheti, sia riguardo alla filogenesi, ma non è mio compito entrare in questi argomenti, trattati più o meno ampiamente dagli autori che ho man mano ricordato.

Premesse queste considerazioni descriverò un individuo di *Helodrilus (Allolobophora) caliginosus* (Sav.) forma *trapezoides* (A. Dug.), raccolto dal Dottor Enrico Festa ad Agios Isidoros nell'isola di Rodi, profondamente anomalo nella struttura. In esso l'anomalia non colpisce soltanto l'apparato riproduttore, in modo analogo a quanto avviene in un altro individuo della medesima specie, studiato dal Cognetti (**24**, p. 5). Ho preferito procedere ad un'accurata dissezione piuttosto che all'esame microscopico, perchè ho voluto rivolgere la mia attenzione sopratutto alla morfologia ed ai rapporti anatomici fra i varî organi. Ed ecco le particolarità più notevoli che ho potuto osservare.

Caratteri esterni. — La lunghezza dell'esemplare, conservato in alcool, è di mm. 60; il diametro di mm. 5.

I segmenti sono in numero di 90 sul lato destro; su quello sinistro tale numero è assai superiore per la parziale scissione di alcuni di essi. Esaminando il Lombrico dal lato ventrale (v. fig. 1), si presentano a sinistra visibilmente divisi in due i segmenti: 3°, 5°, 9°, 11°, 13°, 16°, 24°, 27°, 30°, 36°, 51°, ecc. Il segmento 25° è diviso in tre e quelli 41° e 42° sono invece alquanto fusi nella regione mediana. Dal lato dorsale si presentano scissi a sinistra, oltre a quelli sopradetti, anche i segmenti: 12°, 14°, 21°, 25°, 26°, 29°, ecc. I solchi intersegmentali soprannumerarî sono variamente profondi ed evidenti. Per lo più non oltrepassano la linea

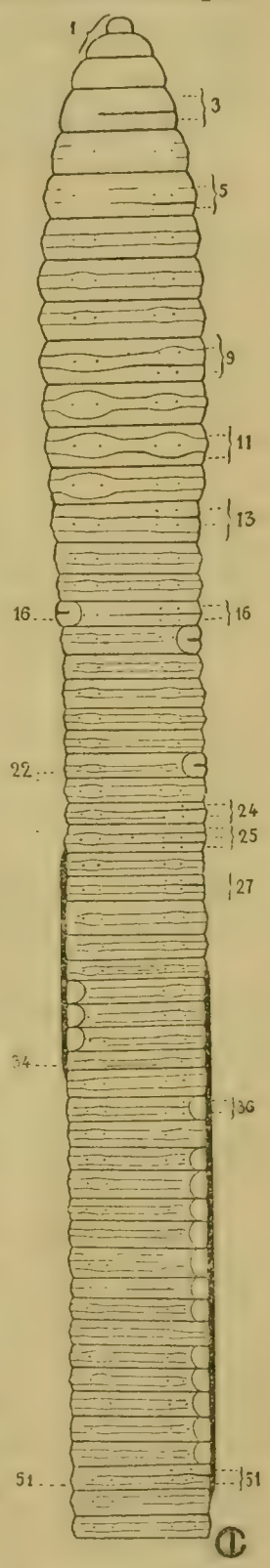


Fig. 1. – Schematica, rappresentante il lombrico dal lato ventrale.

mediana longitudinale sia dorsalmente che ventralmente. Molto spesso terminano più lateralmente di tale linea. Alcuni di essi finiscono per esaurirsi sfumando, senza avvicinarsi ai solchi intersegmentali contigui, eccezionalmente raggiungono invece il margine anteriore o posteriore del segmento, di preferenza quello posteriore, e così la parte di segmento soprannumeraria rimane meglio circoscritta ed assume l'aspetto di un segmentino soprannumerario incuneato fra quelli normali. Un esame più attento fa rilevare accenni a disturbi nella segmentazione anche in altri segmenti oltre a quelli ricordati. I segmenti scissi, osservati dal lato ventrale, mostrano a destra la solita triannulazione con le setole impiantate nell'annulo centrale sopra un leggero rilievo papilliforme; a sinistra invece i due deboli solchi che dànno la triannulazione si approfondiscono e le setole sorgono su due, o più raramente su tutti e tre, gli annuli, che acquistano così carattere di segmenti veri e proprî (v. fig. 2, B). Possono apparire in essi anche accenni di triannulazione soprannumeraria (v. fig. 2, A).

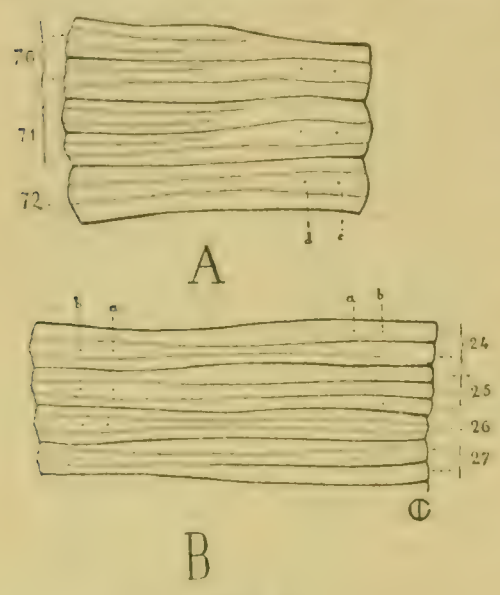


Fig. 2.

A. Tre segmenti scissi dorsalmente, visti di lato.

B. Quattro segmenti scissi a sinistra, visti dal lato ventrale.

Le setole sono regolarmente disposte. È solo da notare l'aumento numerico di esse a sinistra, poichè, come si vide, anche gli anelli soprannumerarî ne sono muniti. Esse occupano pure in tali segmenti la posizione normale in modo che ciascuna si impianta al livello corrispondente al proprio fascio, continuando così la linea delle setole degli altri segmenti.

Riguardo alle papille, i ben noti rilievi del 9°, 10° e 11° segmento sono normalmente sviluppati solo a destra. A sinistra invece quello del 9° è quasi indistinto; quello del 10° giace sulla parte anteriore del segmento, il quale è diviso in due; quello dell'11° quasi non si vede. A sinistra sono poi visibili accenni papilliformi anche in segmenti posteriori all'11°.

Il clitello è completamente anomalo. A destra si estende dal 26° segmento al 34° (= 9). Esso però non abbraccia interi questi segmenti, poichè si ferma dorsalmente presso a poco a livello della linea longitudinale mediana in modo che i segmenti a sinistra non appaiono diversi da quelli normali. Man mano che dall'innanzi si procede verso l'indietro si vede il clitello spingersi sempre più verso sinistra in modo che i segmenti 31°, 32°, 33°, 34° ne sono completamente ricoperti. A sinistra esso incomincia dunque al 31° segmento e si estende posteriormente fino al 51° (= 21). Anche in questo caso esso interessa soltanto la parte sinistra dei segmenti e si arresta dorsalmente presso a poco alla linea mediana dorsale.

I *tubercula pubertatis* giacciono a destra normalmente al 31°, 32°, 33° segmento, per cui il lombrico appartiene alla forma *trapezoides* (A. Dug.). A destra sono notevolmente più numeosi. Si può dire che a partire dal 36° tutti i segmenti del clitello sono, da questo lato, forniti di *tubercula*, ad eccezione del 37° e del 45°.

Le aperture maschili hanno posizione irregolare, sia a destra che a sinistra. A destra se ne nota una al 16° segmento. Tale segmento è diviso a sinistra in due più sottili ed il solco che li separa viene a terminare dietro il labbro posteriore dell'apertura maschile. L'atrio di quest'ultima è irregolare poichè fra le due labbra viene ad inserirsi, a destra, un piccolo segmentino che può rappresentare la continuazione di quello soprannumerario di sinistra. Il solco che segna la segmentazione anomala viene dunque ad essere interrotto dall'atrio dell'apertura maschile, al di là della quale riappare. Questa particolarità, insieme a quelle riferite precedentemente, mi sembra provare che l'irregolare aumento numerico di alcuni metameri è dovuto ad una vera scissione di quelli normali, per modo che la segmentazione irregolare viene a sovrapporsi a quella regolare primitiva. Sul lato sinistro le aperture maschili sono due, una al 17° e l'altra al 22° segmento, entrambe munite di labbra tumescenti, leggermente estese sui due segmenti contigui, simili alle aperture normali.

Caratteri interni. — I dissepimenti $^{6}/_{7}$ - $^{13}/_{14}$ sono notevolmente ispessiti, infundibuliformi, rinforzati da legamenti muscolari.

Alla duplicazione esterna corrisponde internamente una duplicazione della cavità del segmento per l'apparire di setti soprannumerari del tutto simili a quelli normali. Così il setto

soprannumerario che divide in due il 10° segmento è fortemente ispessito come tutti i dissepimenti di questa regione, mentre quelli dei segmenti posteriori, ove i setti normali sono più sottili, sono più sottili anch'essi. Questi setti soprannumerarî di preferenza si estendono fino a raggiungere il tubo digerente, indipendentemente da quelli normali più prossimi, in alcuni casi invece si avvicinano ad uno dei due setti che delimitano il segmento e si saldano con esso. Nelle cavità, che così si originano, si trovano di regola tutti gli organi che normalmente giacciono nel segmento, per cui a sinistra gli organi disposti metamericamente sono in numero maggiore che a destra. I cuori, per esempio, che a destra si notano regolarmente dal 6° segmento all'11° incluso e sono quindi sei, a sinistra sono invece sette, perchè il 6° segmento ne è privo, il 7° e l'8° ne contengono uno ciascuno, il 9° segmento essendo duplicato ne contiene due, il 10° e l'11° uno, ed il 12°, privo di cuore a destra, ne possiede invece uno a sinistra sorretto dalla superficie anteriore di un dissepimento soprannumerario, dal quale il segmento stesso rimane a sinistra diviso in due. Così pure le vescicole seminali, che a destra sono quattro normali ai segmenti: 9° sorretta dal dissepimento $^{9}/_{10}$, 10° sorretta dal dissepimento $^{10}/_{11}$, 11° sorretta dal dissepimento $^{10}/_{11}$, 12° sorretta dal dissepimento $^{11}/_{12}$. A sinistra sono invece cinque, una al 9° piccola, sorretta dal dissepimento $^{9}/_{10}$, una al 10° pure piccola sorretta dal dissepimento $^{10}/_{11}$, una all'11° ben visibile, sorretta dal dissepimento $^{10}/_{11}$, una al 12° maggiore delle altre sorretta dal dissepimento $^{11}/_{12}$ ed una infine nel 12° appesa alla superficie posteriore del dissepimento soprannumerario che divide questo segmento. Anche il 9° segmento è duplicato a sinistra, e ciò non ostante non possiede vescicole seminali soprannumerarie. Ciò dipende forse dal fatto che in tale segmento il setto addizionale si salda con quello anteriore prima di raggiungere il tubo digerente così che la cavità che ne risulta non è quella di mezzo segmento completo, e non può quindi possedere tutti gli organi che giacciono in mezzo segmento.

È ancora da notare la presenza di un nefridio in ciascuno dei mezzi segmenti soprannumerarî.

Come si vede, in questo esemplare sono anomali quasi tutti gli organi sessuali ed anche alcuni che con l'apparato

sessuale non hanno rapporti diretti, come il sistema circolatorio. Non ho potuto vedere se esistano irregolarità anche nelle gonadi. Ad ogni modo l'anomalia principale, da cui le altre irregolarità di struttura dipendono, è quella che interessa la segmentazione e consiste nella scissione di alcuni segmenti a sinistra. Fra le anomalie di segmentazione più frequenti negli Anellidi è appunto da annoverare la presenza, da un solo lato del corpo, di parapodî, nefridî, ecc., e di mezzo setto soprannumerarî. Per il fatto che questa anomalia presenta un segmento, con gli organi che vi si contengono, raddoppiato, cioè scisso in due, da un lato, i tedeschi la dissero *Spaltmetamerie*. Mi pare che si possa escludere che essa abbia avuto origine, nel Lumbricide descritto, in seguito a rigenerazione irregolare. Tutto fa invece credere che dipenda da uno sviluppo embriologico anormale. Anche il Morgan (**46**) è d'opinione che queste scissioni asimmetriche dei segmenti siano spiegabili per mezzo di uno spostamento dei somiti nell'embrione, oppure ammettendo che da un lato del corpo uno o più somiti avessero nell'embrione stesso una larghezza metà di quella dell'altro lato. È noto come " bei " den Anelliden zerfallen die Mesodermstreifen später in seg- " mentale Abschnitte, welche, in dem sie sich aushöhlen, zu den " Cölomsäcken der betreffenden Segmente werden. Aus ihrer " Wand entwickeln sich die Rumpf- und Darmmusckulatur, die " Gonaden, und die Nephridien „ (Korschelt e Heider, **43**, p. 278). È probabile che durante la formazione dei setti siano avvenuti, nell'individuo anomalo che ho descritto, dei turbamenti per cui il numero di essi non venne ad essere uguale sui due lati del corpo. I setti soprannumerarî si inserirono lungo i leggeri solchi, che segnano la pluriannulazione esterna del segmento, e che divennero perciò veri e propri solchi intersegmentali. È notevole che i mezzi segmenti così originati siano provvisti di setole perfettamente come quelli normali. Le setole essendo alla dipendenza dell'ectoderma, dobbiamo pensare che il loro apparire sia dovuto ad un fenomeno di correlazione nello sviluppo degli organi. La presenza di setti e quindi di cavità segmentali soprannumerarie è accompagnata naturalmente dal formarsi di vasi sanguigni, di nefridî e di altri organi metamerici anche in tali segmenti.

In questo modo mi pare che l'origine dell'anomalia possa

essere spiegata. Rimangono però sempre delle questioni di indole più generale. Ci si può infatti chiedere se essa era già segnata da qualche irregolarità nell'idioplasma, o se invece non rappresenta che la reazione a circostanze particolari di ambiente interno od esterno sopravvenute. Argomenti favorevoli e sfavorevoli si potrebbero trovare sia per l'una che per l'altra ipotesi. Sta il fatto importante della correlazione completa degli organi anormali. " These correlations in abnormal " cases ", concluderò con il Pearl (**49**, p. 127), " together with " the facts of normal development seem to indicate that the " developmental process in the earthworm at any rate, may be " regarded as a series of responses to stimuli, partly coming " from the external environment and also to a large extent " from the interaction of the parts of the embryo, one upon " another. It is this latter phase of the process, namely the de- " velopment of parts in definite interrelations to one another, " that I vould emphasize. More study of variation and regenera- " tion from this point of view would be desirable and possibly " lead to important results ".

LAVORI CITATI.

(**1**) Andrews E., *Bifurcated Anellids* " Amer. Naturalist ", vol. 26, p. 725, tav. 21, 1893.

(**2**) Andrews E., *Some abnormal Anellids*, " Quart. Jour. Micr. Sci. " (n. s.), vol. 36, part. 4, n. 144, p. 435, tav. 32-34, 1894.

(**3**) Baldasseroni V., *Contributo alla conoscenza dei Lombrichi italiani*, " Monit. Zool. ital. ", ann. 18, n. 2, p. 50, 1907.

(**4**) Beddard F. E., *Observations on the Structure of* Lumbricus complanatus, *Dugès*, " Proc. Roy. Soc. Edinburgh ", session 1885-86, p. 451.

(**5**) Beddard F. E., *Remarks on the Variation of* Perionyx excavatus, *E. Perrier*, " Proc. Zool. Soc. London ", 1886, p. 308.

(**6**) Beddard F. E., *Contributions to the Anatomy of Earthworms with Descriptions of some New Species*, " Quart. Journ. Micr. Sci. " (n. s.), vol. 30, p. 421, 1888.

(**7**) Beddard F. E., *Anatomical Description of two New Genera of Aquatic Oligochaeta*, " Trans. Roy. Soc. Edinburgh ", vol. 36, p. 287, 1890.

(8) Beddard F. E., *On the Homology between the Genital Ducts and Nephridia in the Oligochaeta*, " Proc. Roy. Soc. London ", 1890, p. 452.

(9) Beddard F. E., *Observations upon an American Species of* Perichaeta *and upon some other Members of the Genus*, " Proc. Zool. Soc. London ", 1890, p. 52.

(10) Beddard F. E., *On some* Perichaetidae *from Japan*, " Zool. Jahrb. Abth. f. Syst. ", vol. 6, p. 755, tav. 32, 1892.

(11) Benham W. B., *Note on a Couple of Abnormalities*, " Ann. and Magaz. of Nat. Hist. ", London, (6) 7, p. 256, tav. 3, 1891.

(12) Bergh R. S., *Untersuchungen über den Bau und die Entwicklung der Geschlechtsorgane der Regenwürmer*, " Zeit. wiss. Zool. ", vol. 44, p. 303, 1886.

(13) Bretscher K., *Beitrag zur Kenntnis der Oligochaeten Fauna der Schweiz. I. Zur Faunistik und Biologie der schweizerischen Oligochaeten*, " Rev. Suisse de Zool. ", vol. 6, p. 369, 1899.

(14) Chinaglia L., Helodrilus (Eophila) Laurentii n. sp. (*Nuovo Lumbricide italiano*), " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. " Torino, vol. 25, n. 620, 1910.

(15) Chinaglia L., *Alcuni Lombrichi raccolti nel Bresciano*, " Commentarî Ateneo Brescia ", ann. 1911, p. 108.

(16) Chinaglia L., *Altri Lombrichi raccolti nel Bresciano*, " Commentarî Ateneo Brescia ", ann. 1912, p. 167.

(17) Chinaglia L., *Lombrichi della valle del Maira*, " Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. ", Torino, vol. 27, n. 651, 1912.

(18) Chinaglia L., *Escursioni zoologiche in Sardegna del Dr. Enrico Festa*, III, *Lombrichi*, " Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. ", Torino, vol. 28, n. 667, 1913.

(19) Cognetti de Martiis L., *Ricerche intorno alla struttura dell'apparato circolatorio degli Olig. I. L'apparato valvolare nel vaso dorsale degli Enchitreidi*, " Atti R. Acc. Sci. ", Torino, vol. 34, 1899, 1 tav.

(20) Cognetti de Martiis L., *Gli Oligocheti della Sardegna*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. ", Torino, vol. 16, n. 404, 1901, 1 tav.

(21) Cognetti de Martiis L., *Terricoli boliviani ed argentini*, " Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. ", Torino, vol. 17, n. 420, 1902.

(22) Cognetti de Martiis L., *Lumbricidi del Cadore e del Tirolo*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. ", Torino, vol. 18, n. 434, 1903.

(23) Cognetti de Martiis L., *Contributo alla conoscenza degli Oligocheti della Liguria*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. ", Torino, vol. 18, n. 443, 1903.

(24) Cognetti de Martiis L., *Lombrichi delle Alpi marittime*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. ", Torino, vol. 18, n. 451, 1903.

(25) Cognetti de Martiis L., *Lombrichi liguri del Museo civico di Genova*, " Annali Mus. civ. Storia Nat. „, Genova, serie 3ª, vol. 2 (42), p. 102, 1905.

(26) Cognetti de Martiis L., *Contributo alla conoscenza della Drilofauna delle isole Canarie*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. „, Torino, vol. 21, n. 521, 1906.

(27) Cognetti de Martiis L., *Nota sui Lombricidi delle Tremiti*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. „, Torino, vol. 21, n. 525, 1906.

(28) Cognetti de Martiis L., *Nuovi dati sui Lombricidi dell'Europa orientale*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. „, Torino, vol. 21, n. 527, 1906.

(29) Cognetti de Martiis L., *Un nuovo caso di ghiandole ermafroditiche negli Oligocheti*, " Biologica „, vol. I, 1906, tav. 2.

(30) Cognetti de Martiis L., *Lombrichi del Ruwenzori e dell'Uganda*, in: *Il Ruwenzori*, vol. I, Milano, Hoepli, 1909, 4 tav.

(31) Cognetti de Martiis L., *Una curiosa alterazione anatomica-istologica in un Lombrico dovuta a Nematodi parassiti*, " Atti R. Acc. Sci. „, Torino, vol. 44, 1909, 1 tav.

(32) Cognetti de Martiis L., *Contributo alla conoscenza della fecondazione negli Oligocheti*, " Atti R. Acc. Sci. „, Torino, vol. 45, 1910, 1 tav.

(33) Collin A., *Ein seltener Fall von Doppel-bildung beim Regenwurm* (Lumbricus sp.), " Naturw. Wochenschr. „, 6, n. 12, p. 113, 3 fig., 1891.

(34) Collin A., *Ueber die Regenwürmer der Umgegend von Berlin*, " S. B. nat. Fr. „, p. 115, 1892.

(35) Cori, *Ueber Anomalien der Segmentierung bei Anelliden und deren Bedeutungen für die Theorie der Metamerie*, " Zeit. f. wiss. Zool. „, vol. 54, p. 569, tav. 25, 1893.

(36) Friend H., *On Hybridity among Worms*, " Field Club „, 3, p. 147, e " Naturalist „, p. 301, 1890.

(37) Friend H., *Curiosities of Worm Life*, " Hardwick's Sci. Gossip „, London, p. 108, 7 fig., e p. 161, 2 fig., 1892.

(38) Friend H., " *Hare-lip* „ *in Earthworms*, " Nature, a weekly Journ. of Sci. „, London, p. 316, 1 fig., febbraio 1893.

(39) Harms W., *Ueber Ovarialtransplantationen bei Regenwürmer, eine Methode zu Bastardierung*, " Zool. Anzeig. „, Leipzig, 36, p. 145, 1910.

(40) Hesse R., *Zur vergleichenden Anatomie der Oligochaeten*, " Zeit. wiss. Zool. „, vol. 58, p. 394, tav. 24-25, 1894.

(41) Hoffmeister W., *Die bis jetzt bekannten Arten aus der Familie der Regenwürmer*, Braunschweig, 1845.

(42) Horst R., *On the variability of characters in* Perichaetidae, " Notes Leyden Mus. „, 20, p. 201, 1898.

(43) Korschelt E. und Heider K., *Lehrbuch der vergleichenden Entwicklungsgeschichte*, Lief. 4, Jena, Fischer, 1910.

(44) Joest E., *Transplantationsversuche an Lumbriciden, Morphologie und Physiologie der Transplantation*, " Arch. f. Entwickmech., 5, p. 419, tav. 6-7, 18 fig., 1897.

(45) Michaelsen W., *Oligochaeta der Naturhistorischen Museums Hamburg IV*, " Mitt. Mus. Hamburg „, vol. 8, p. 19, 1901.

(46) Morgan H., *Spiral Modification of Metamerism*, " Journ. Morph. Boston „, vol. 7, p. 245, 3 fig., 1893.

(47) Morgan H., *Experimental Studies of the Internal Factors of Regeneration in the Earthworm*, " Arch. f. Entwicklungsmech. „, vol. 14, p. 562, tav. 29-30, 1902.

(48) Morren C. F. A., *De* Lumbrici terrestris *historia naturali necnon anatomia tractatus*, Bruxelles, 1829.

(49) Pearl R., *A variation in the genital Organs of Lumbricus agricola Hoffm.*, " Anat. Anzeig. „, vol. 18, n. 4-5, p. 123, 1900.

(50) Pearl R., Fuller W. N., *Variation and Correlation in the Earthworm*, " Biometrika „, vol. 4, p. 213, tav. 1-2, 1905.

(51) Pierantoni U., *Oligocheti del fiume Sarno*, " Archivio Zoologico „, vol. 2, fasc. 2, p. 227, 1905.

(52) Prizbram H., *Experimental Zoologie*, vol. II, *Regeneration*, Leipzig und Wien, 1909.

(53) Ribaucourt (de) E., *Étude sur la faune lombricide de la Suisse*, " Rev. suisse de Zool. „, vol. 4, 1896 (estratto, p. 1-110, tav. 1-3).

(54) Rosa D., *Revisione dei Lumbricidi*, " Mem. R. Acc. Sci. „, Torino, ser. 2, vol. 43, p. 399, 2 tav., 1893.

(55) Rosa D., *Perichetini nuovi o meno noti*, " Atti R. Acc. Sci. „, Torino, vol. 29, p. 762, tav. 29, 1894.

(56) Service R., *A bifid Worm* (Lumbricus foetidus), " Zoologist „ (3), vol. 18, 1894 e " Ann. Sott. Nat. Hist. „, p. 185, 1894.

(57) Smith W. W., *Further notes on New Zeeland Earthworms*, " Tr. N. Zeeland Inst. „, vol. 26 (n. s. 9), p. 138, 1894.

(58) Tellyesniczky K., *Osszenövesztett állatok*, " Termes. Kozl. Magyar Tars. „, vol. 30, p. 113, 13 fig., 1898.

(59) Williamson H. C., *On a bifid Earthworm* (Lumbricus terrestris), " Ann. Nat. Hist. „, vol. 13, p. 217, tav. 10, 1893.

(60) Woodward M. F., *Description of an Abnormal Earthworm possessing seven Pairs of Ovaries*, " Proc. Zool. Soc. „, London, p. 184, tav. 13, 1892.

(61) Woodward M. F., *Further Observations on Variations in the Genitalia of British Earthworms*, " Proc. Zool. Soc. „, London, p. 319, tav. 24, 1893.

Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.

Nota I di ALESSANDRO TERRACINI

INDICE

I. — Introduzione e generalità . . . . . n.i 1–3
II. — Alcuni sistemi di equazioni di Laplace rappresentati da coni „ 4–9
III. — Alcune proposizioni ausiliarie . . . . . „ 10–12

I.

Introduzione e generalità (1).

1. — Quando si consideri una varietà a k dimensioni, V_k, immersa in uno spazio S_n (che supponiamo pel momento di dimensione abbastanza alta, $n \geq 2k$), generalmente avviene che due S_k tangenti a quella varietà, infinitamente vicini tra loro, si possono riguardare come incidenti in un punto. Esistono tuttavia delle particolari V_k, tali che ogni S_k ad esse tangente in un punto generico P è incontrato dagli S_k tangenti in punti infinitamente vicini a P secondo uno S_l, con $l > 0$; V_k che godono pure della proprietà che la varietà W costituita dagli S_k tangenti alla V_k ha dimensione $2k - l$, anzichè $2k$, come avviene in generale (2). Orbene, può avvenire che queste due proprietà si verifichino come conseguenza del fatto che lo spazio oscula-

(1) Alcuni risultati del presente lavoro (precisamente i teoremi dei n.i 5 e 9) si trovano pure, diversamente dimostrati, nella Nota del D.r E. Bompiani, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, in corso di stampa in questi Atti. Tuttavia il Bompiani ed io, nei nostri due lavori, pur prendendo le mosse da uno stesso problema, ne affrontiamo, per diverse vie, lati diversi.

(2) L'equivalenza delle due proprietà riesce quasi evidente nella loro traduzione analitica, come si vedrà al n.o 6.

tore alla V_k in un suo punto generico [3] abbia dimensione $2k - l$, ossia che la V_k verifichi un sistema di $\frac{k(k+3)}{2} - 2k + l = \frac{k(k-1)}{2} + l$ equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del secondo ordine (equazioni di Laplace) linearmente indipendenti [4]. Infatti, quando sia soddisfatta questa ipotesi, gli S_k tangenti alla V_k in punti infinitamente vicini (del primo ordine) a un suo punto generico P, i quali S_k stanno nello spazio osculatore alla V_k in P, tagliano lo S_k tangente in P almeno secondo uno S_l; e del pari si riscontra subito direttamente come la W abbia dimensione non maggiore di $2k - l$. Tuttavia, per $k > 2$, affinchè abbia luogo questa proprietà, non è necessario che la V_k verifichi un sistema di $\frac{k(k-1)}{2} + l$ eq. di Lap. lin. ind.: così, per $k = 3$, si trovano già delle varietà tali che la corrispondente W ha dimensione 5, mentre esse non verificano che tre equazioni di Laplace linearmente indipendenti. Anzi ho dimostrato in un altro mio lavoro [5] che tali varietà sono necessariamente coni generici (la cui sezione iperpiana generica non verifica nessuna equazione di Laplace).

Si presenta pertanto il problema di determinare tutte le varietà che offrono la particolarità indicata, senza che essa discenda dal numero di equazioni di Lap. lin. ind. verificate dalla varietà stessa; problema che, oltre che per sè stesso, ha interesse anche per la seguente questione. Nella Nota citata più sopra io mi sono occupato della determinazione di tutte le V_k

---

[3] Cioè lo spazio a cui appartengono i piani osculatori nel punto stesso alle linee tracciate sulla V_k, che passano per quel punto.

[4] Intendiamo con questo di dire che le coordinate proiettive omogenee di un punto che descriva la V_k, espresse in funzione di k parametri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, sono soluzioni di uno stesso sistema di $\frac{k(k-1)}{2} + l$ eq. di Lap. lin. ind. Cfr.: *a)* Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, " Rend. del Circ. Mat. di Palermo ", t. XXX (1910), pagine 87-121, v. il n.° 21; *b)* Terracini, *Sulle V_k che rappresentano più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti*, ibid., t. XXXII, (1912), pp. 176-186.

[5] Loc. cit. [4] *b)*, v. il n.° 4.

che rappresentano un sistema di più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, e precisamente ho dimostrato il seguente teorema:

Una V_k *rappresentante* $\frac{k(k-1)}{2}+l$ *equazioni di Lap. lin. ind.* $(l>0)$ *sta su una varietà* U_q, *luogo di* $\infty^h S_p$, *tale che gli* S_q *ad essa tangenti nei punti di uno* S_p *stanno in uno* S_{2k-h-l}, *essendo* $0 \leq h \leq k-l$.

Ora, già facevo rilevare in quella Nota come questa proposizione non sia invertibile: dal fatto che una V_k sia situata sopra una varietà U_q, quale è indicata nel precedente teorema, segue bensì immediatamente che la W relativa alla V_k ha dimensione non maggiore di $2k-l$; ma, già lo ricordammo più sopra, da questo non è ancora lecito inferire che la V_k verifichi almeno $\frac{k(k-1)}{2}+l$ equazioni di Lap. lin. ind. Invece, quando si conoscano tutte le V_k che, pur non verificando un tale sistema di equazioni alle derivate parziali, sono tuttavia tali che la W abbia dimensione $2k-l$, si sarà in grado di precisare maggiormente quel risultato sulle V_k che rappresentano più di $\frac{k(k-1)}{2}$ eq. di Lap. lin. ind. e di renderlo invertibile.

In questa Nota, e in una successiva che porterà lo stesso titolo e ne sarà la continuazione, il problema che abbiamo così delineato, problema che si pone solo per le varietà a più di due dimensioni, verrà risolto per le varietà a quattro dimensioni (per quelle a tre la sua soluzione è contenuta in una proposizione ricordata più sopra). Tuttavia i metodi che terremo potranno pure contribuire alla soluzione dello stesso problema per le varietà di dimensione maggiore; e, di più, per varietà a un numero qualunque di dimensioni ho stabilito senz'altro alcune proposizioni che servono ad agevolare la trattazione della nostra ricerca, ma che mi pare possano offrire un certo interesse anche per sè stesse: tale p. es. il teorema secondo il quale, se per ogni punto di una V_k si ha uno S_p tangente, luogo di rette tangenti osculatrici, con $2 \leq p \leq k$, e la V_k non rappresenta altre equazioni di Laplace, se non quelle che traducono questa proprietà, la V_k è necessariamente luogo di S_p;

tale pure un teorema, analogo a questo, che mostra come certe varietà algebriche (sono tra le varietà che, insieme collo SCORZA [6] che ne ha assegnate recentemente alcune nuove proprietà, chiameremo varietà di SEGRE) si possano caratterizzare mediante una proprietà di natura differenziale. Si aggiunge così un nuovo esempio agli altri, noti, di varietà algebriche che, in alcuni casi sole, in altri insieme con varietà dipendenti da funzioni arbitrarie, vengono definite da condizioni di carattere non algebrico [7].

Inoltre alcuni di questi stessi teoremi offrono degli utili elementi per lo studio di un altro problema: la determinazione delle varietà tali, che le loro sezioni iperpiane generiche verifichino un sistema di equazioni di Laplace di dimensione maggiore di quello che sarebbe lecito aspettarsi dalla dimensione del sistema di equazioni di Laplace rappresentato dalle varietà stesse, come si dirà più minutamente in seguito: pertanto la soluzione di questo problema per le varietà la cui dimensione è minore di 5 formerà l'oggetto dell'ultima parte di questo lavoro (cap. II della Nota II).

Ci sia infine permesso di osservare come alcuni dei risultati che troveremo dovrebbero non essere totalmente privi di interesse, anche prescindendo dalla loro interpretazione geometrica; in quanto, da un punto di vista analitico, per parecchi sistemi di equazioni di Laplace, nell'ipotesi che da tali equazioni non discendano nè altre equazioni di Laplace che non

---

(6) SCORZA, *Sulle varietà di Segre*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", t. 45 (1910), pp. 119-131.

(7) Ricordo come tali, oltre alla superficie di Veronese (cfr. DEL PEZZO, *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, " Rend. del Circ. Mat. di Palermo ", t. I (1887), pp. 241-271, n.° 12; e SEVERI, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti*, ibid., t. 15 (1901), pp. 33-51, n.° 8); alcune varietà che compaiono nelle due Note dello SCORZA, *Determinazione delle varietà a tre dimensioni dello* S_r $(r \geq 7)$ *i cui* S_3 *tangenti si tagliano a due a due; Sulle varietà a quattro dimensioni di* S_r $(r \geq 9)$ *i cui* S_4 *tangenti si tagliano a due a due* (ibid., t. XXV (1908), pp. 193-204, e t. XXVII (1909), pp. 148-178); e infine le varietà che rappresentano al modo di GRASSMANN uno spazio rigato, insieme con certe loro proiezioni (cfr. la mia Nota: *Sulle varietà di spazii con carattere di sviluppabili*, " Atti della R. Acc. di Torino ", t. 48 (1913), pp. 411-433).

siano loro combinazioni lineari, nè equazioni lineari del primo ordine, riusciamo, introducendo un opportuno sistema di nuove variabili, ad assegnare la forma che necessariamente dovrà essere assunta da un numero convenientemente grande di soluzioni del sistema [8].

2. — Sia una V_k di S_n, data [9] in coordinate proiettive omogenee mediante le formole:

$$x = x(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k), \tag{1}$$

le x essendo coordinate proiettive omogenee nello S_n. Avremo in seguito a considerare il caso che tale V_k rappresenti una o più equazioni del tipo:

$$ax + \sum_{i=1}^{k} a_i x^{(i)} + \sum_{i=1,j=1}^{k,k} a_{ij} x^{(ij)} = 0. \tag{2}$$

Accanto a tali equazioni introdurremo le rispettive " forme quadratiche associate " in k variabili omogenee $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$:

$$F(\theta) = \sum_{i=1,j=1}^{k,k} a_{ij} \theta_i \theta_j ;$$

o anche le loro quadriche associate, intendendo come tali le quadriche che, in uno $S_{k-1}[\theta]$ dove si assumano le θ come coordinate proiettive omogenee di punto, sono rappresentate dalle equazioni ottenute annullando le rispettive forme associate. A tale proposito osserviamo che *i sistemi lineari di forme quadratiche associate a un sistema di equazioni di Laplace rappresentato da una* V_k, *i cui punti si esprimano come funzioni di diversi si-*

[8] Cfr. per una questione analoga il n.° 5 della mia Nota, *loco cit.* [4] *b)*.

[9] Seguo in questo lavoro le stesse notazioni di cui mi sono valso nella mia Nota, *loco cit.* [4] *b)*, cioè indico con x il punto che ha per coordinate proiettive omogenee $x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}$, o non omogenee $x_1 \ldots x_n$: scrivo brevemente la (1) per indicare che le coordinate del punto x sono funzioni di $\tau_1, \ldots, \tau_k$; e pongo $x^{(i)} = \frac{\partial x}{\partial \tau_i}$, ecc...

stemi di k *parametri, sono tutti fra loro proiettivamente equivalenti* ([10]).

Supponiamo infatti di prendere un nuovo sistema di parametri $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, che si esprimano mediante i primitivi τ con formole, invertibili:

$$\sigma_i = \sigma_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k). \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Avremo:

$$x^{(i)} = \sum_{p=1}^{k} \frac{\partial x}{\partial \sigma_p} \sigma_p^{(i)} \quad , \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$$x^{(ij)} = \sum_{p=1}^{k} \frac{\partial x}{\partial \sigma_p} \sigma_p^{(ij)} + \sum_{p=1, q=1}^{k,k} \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma_p \, \partial \sigma_q} \sigma_p^{(i)} \sigma_q^{(j)} \, , \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

cosicchè la (2) diviene:

$$ax + \sum_{p=1}^{k} \frac{\partial x}{\partial \sigma_p} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_p^{(i)} + \sum_{i=1, j=1}^{k,k} a_{ij} \sigma_p^{(ij)} \right) + \sum_{p=1, q=1}^{k,k} \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma_p \, \partial \sigma_q} \sum_{i=1, j=1}^{k,k} a_{ij} \sigma_p^{(i)} \sigma_q^{(j)} = 0.$$

La forma associata a questa nuova equazione sarà:

$$F'(\theta') = \sum_{i=1, j=1}^{k,k} a_{ij} \sum_{p=1}^{k} \sigma_p^{(j)} \theta'_p \sum_{q=1}^{k} \sigma_q^{(j)} \theta'_q \, .$$

Se dunque poniamo ([11]):

$$\theta_i = \sum_{p=1}^{k} \sigma_p^{(i)} \theta'_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

la $F(\theta)$ si trasforma nella $F'(\theta')$. E poichè nella trasformazione lineare delle θ' nelle θ non compaiono i coefficienti della (2),

---

([10]) Si osservi anche che il sistema lineare delle forme quadratiche associate ha la stessa dimensione del sistema delle equazioni di Laplace rappresentato dalla V_k, perchè altrimenti questa varietà rappresenterebbe anchè delle equazioni del primo ordine, e perciò avrebbe dimensione minore di k.

([11]) Il determinante di questa sostituzione non è altro che $\dfrac{\partial(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)}{\partial(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)}$ ed è perciò, nell'ipotesi fatta di sopra, diverso da zero.

vediamo che effettivamente una stessa trasformazione lineare muta il sistema delle forme associate a un sistema lineare di equazioni di Laplace nel sistema delle forme associate al sistema trasformato di quello mediante un cambiamento di variabili.

3. — Le coordinate di un punto y dello S_k tangente in un punto x alla V_k definita dalla (1) del n.° precedente saranno della forma:

$$y = x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}.$$

Poichè, al variare delle λ e delle τ, il punto y descrive la varietà W degli S_k tangenti alla V_k, se la W ha da essere di dimensione $2k - l$, $(l > 0)$ dovranno il punto y e i suoi $2k$ derivati rispetto alle λ e alle τ essere legati, per ogni sistema di valori di quelle variabili, da l relazioni lineari omogenee linearmente indipendenti; e perciò un fatto analogo si dovrà presentare per i punti:

$$x,\ x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(k)},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i1)},\ \sum_{i=2}^{k} \lambda_i x^{(i2)},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(ik)}.$$

Ciascuna di queste relazioni, per un determinato sistema di valori delle λ, costituirà una equazione di Laplace soddisfatta dalle coordinate di un punto variabile sulla V_k. Questa varietà rappresenterà pertanto un certo sistema di equazioni di Laplace; dal quale sistema noi, in base a quanto abbiamo detto nel n.° 1, supporremo che non si possano estrarre che $d \leq \frac{k(k-1)}{2} + l - 1$ equazioni linearmente indipendenti. È facile vedere come la determinazione effettiva di tutti questi sistemi si riconduca al problema algebrico della determinazione dei sistemi di forme quadratiche linearmente indipendenti, la cui matrice jacobiana è identicamente nulla.

Infatti la V_k dovrà verificare un sistema di equazioni di Laplace tale che, date ad arbitrio $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$, se ne possano estrarre l linearmente indipendenti, le cui forme associate contengano il fattore $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \theta_i$. Il sistema delle quadriche-inviluppo

apolare a questo, di dimensione $\frac{(k-1)(k+2)}{2} - d \geq k - l$, dovrà quindi essere tale che un iperpiano sia, rispetto a tutte le quadriche del sistema, coniugato a tutti gli iperpiani per uno S_{k-l-1} dello S_{k-1} ambiente; cosicchè, estratto da questo sistema il massimo numero possibile di forme linearmente indipendenti, la loro matrice jacobiana dovrà essere identicamente nulla, di caratteristica $k - l$. E, poichè il ragionamento è invertibile:

Se una V_k *ha da essere tale che la* W *abbia dimensione* $2k - l$, *e se la* V_k *deve rappresentare* $d \leq \frac{k(k-1)}{2} + l - 1$ *equazioni di Lap. lin. ind., il sistema di forme quadratiche associate a questo sistema di equazioni di Laplace ha un sistema lineare apolare, di dimensione* $\frac{k(k+1)}{2} - d - 1$, *la cui matrice jacobiana* (12) *è nulla, di caratteristica* $k - l$, *e viceversa.*

II.

Alcuni sistemi di equazioni di Laplace le cui varietà integrali sono coni.

4. — In relazione col risultato finale del n.° precedente, è facile stabilire, quando siano fissati k e l, quale è il minimo valore che può essere assunto da d.

Intanto, se $l = 1$, tra le forme associate alle equazioni di Laplace rappresentate dalla V_k ve ne è una che contiene un fattore lineare arbitrario, cosicchè quelle forme sono almeno ∞^{k-1}; e, se $k > 2$, sono proprio ∞^{k-1} quando e solo quando esse contengano tutte uno stesso fattore lineare (13); il che equivale anche a dire che, in S_{k-1}, per $k > 2$, la massima dimensione possibile di un sistema lineare di quadriche-luogo, tale che la corrispondente matrice jacobiana sia nulla di caratteristica $k - 1$, viene raggiunta quando e solo quando il sistema

(12) Dicendo che la matrice jacobiana di un sistema lineare è nulla, con una certa caratteristica, intendiamo dire che è tale quella matrice per un sistema di forme che serva a individuare quel sistema lineare.

(13) Cfr., p. es., Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*. Pisa, 1907, p. 232.

è costituito dalla totalità dei coni quadrici che hanno un dato vertice.

Se $l > 1$, consideriamo entro uno S_{k-1} un sistema lineare Δ ampio quanto è possibile di quadriche luogo, la cui matrice jacobiana sia identicamente nulla, di caratteristica $k - l$, cosicchè gli iperpiani polari di un punto generico P dello S_{k-1} rispetto alle quadriche di Δ si taglieranno in uno S_{l-1}. Un iperpiano generico dello S_{k-1} non fa certamente parte di nessuna quadrica di Δ. (Infatti non può avvenire che ogni iperpiano contato due volte faccia parte di Δ, perchè allora il sistema Δ abbraccerebbe tutte le quadriche dello S_{k-1}; quindi, se un iperpiano generico π facesse parte di qualche quadrica di Δ, un suo punto generico avrebbe come iperpiano polare rispetto a quelle quadriche di Δ che contengono π lo stesso π, e perciò π dovrebbe contenere lo S_{l-1} comune a tutti gli iperpiani polari di P rispetto alle quadriche di Δ. E questo è assurdo, poichè, preso nello S_{k-1} un punto P in modo generico, un iperpiano generico per esso non conterrà quello S_{l-1}). Adunque su un iperpiano generico π il sistema lineare Δ segherà un sistema lineare di V^2_{k-3} della stessa sua dimensione, sia Δ', dotato della proprietà che gli S_{k-3} polari di un punto generico di π rispetto alle quadriche di Δ' passano per uno stesso S_{l-2}. Operando su Δ' come abbiamo fatto su Δ per ottenere Δ' ecc...., si otterranno successivamente certi sistemi di quadriche, Δ'', Δ''' ecc.... tutti della stessa dimensione, finchè si giungerà a un sistema $\Delta^{(l-1)}$ di quadriche di uno S_{k-l}, tale che gli S_{k-l-1} polari di un punto generico dello S_{k-l} rispetto alle V^2_{k-l-1} di $\Delta^{(l-1)}$ si taglieranno in un punto. Ora, come abbiamo visto più sopra, la dimensione di questo sistema sarà, se $l < k - 1$, uguale o minore di $\frac{(k-l-1)(k-l+2)}{2}$; e anzi, se uguaglia proprio questo numero, sarà $\Delta^{(l-1)}$ costituito dalla totalità dei coni che hanno per vertice un punto. In tal caso Δ avrà (una varietà base doppia, che taglia in un punto uno S_{k-l} generico, ossia) uno S_{l-1} base doppio. Viceversa il sistema delle quadriche che hanno un dato S_{l-1} doppio gode evidentemente della proprietà che gli iperpiani polari di un punto si tagliano in uno S_{l-1}: esso, per quanto abbiamo visto, è il più ampio sistema possibile che goda di una tale proprietà. Operando su Δ con una reciprocità, e passando al sistema apolare, concludiamo:

Se la W *relativa a una* V_k *ha dimensione* $2k - l$ $(0 < l \leq k)$ [14], *la* V_k *verifica* $d \geq lk - \frac{l(l-1)}{2}$ *eq. di Lap. lin. ind. Se* $l < k - 1$, *e* d *raggiunge il suo limite inferiore* $lk - \frac{l(l-1)}{2}$, *il sistema delle quadriche associate a quel sistema di equazioni di Laplace è necessariamente costituito dalle* V^2_{k-2} *di* S_{k-1} *che passano per uno* S_{k-l-1}.

5. — In base a quanto abbiamo visto nel n.° precedente, se $l = 1$ e se la V_k $(k > 2)$ soddisfa il minimo numero possibile, cioè k eq. di Lap. lin. ind., assumendo coordinate proiettive non omogenee $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e prendendo inoltre $\tau_1 = x_1$, $\tau_2 = x_2, \ldots, \tau_k = x_k$, il sistema delle equazioni soddisfatto dalla V_k si potrà supporre della forma:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x^{(11)} + a_2 x^{(12)} + \ldots + a_k x^{(1k)} = 0 \\ a_1 x^{(21)} + a_2 x^{(22)} + \ldots + a_k x^{(2k)} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1 x^{(k1)} + a_2 x^{(k2)} + \ldots + a_k x^{(kk)} = 0 . \end{array} \right.$$

Le a non saranno certo tutte nulle: non diminuiremo la generalità supponendo diverse da zero le prime p $(p \leq k)$.

Ora dalle (3) segue subito:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i^{(r)} x^{(is)} = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(s)} x^{(ir)}. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, k)$$

Ciascuna delle (4), in quanto non sia soddisfatta identicamente, costituisce una nuova equazione verificata dalle soluzioni del sistema (3), e dovrà perciò essere una combinazione lineare di quelle equazioni. In tal caso, se $m \leq p$ $(m \neq r,\ m \neq s)$, cosicchè a_m non è identicamente nullo, nella combinazione lineare delle (3) per cui si esprime una equazione (4) relativa a certi valori di r

---

[14] Se $l = k - 1$, oppure $l = k$, sarà certo $d = \frac{k(k-1)}{2} + l$. Perciò questi due casi (che conducono rispettivamente a V_k di uno S_{k+1} o ∞^1 di S_{k-1} sviluppabili ordinarie, e a S_k) saranno esclusi nel seguito del lavoro.

e di s, non può comparire la m^{esima} equazione (3), perchè essa è la sola che contenga $x^{(mm)}$ che non compare nella equazione (4) considerata; ma anche se $m > p$, cosicchè $a_m = 0$, si arriva alla stessa conclusione, perchè allora la m^{esima} equazione (3) sarà la sola a contenere termini della forma $x^{(mn)}$ con $n \leq p$, mentre questi termini non compaiono nella (4). In ogni caso adunque la equazione (4) considerata sarà combinazione lineare della r^{esima} e della s^{esima} fra le (3). Potremo perciò porre (anche se la (4) è identicamente soddisfatta):

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_i^{(r)} = q a_i & (i = 1, 2, \ldots, k;\ i \neq r) \\ -a_i^{(s)} = Q a_i & (i = 1, 2, \ldots, k;\ i \neq s) \\ a_r^{(r)} - a_s^{(s)} = Q a_s + q a_r . & \end{array} \right.$$

Da queste equazioni segue intanto:

$$\left\| \begin{matrix} a_i^{(r)} \\ a_i \end{matrix} \right\| = 0 ; \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ r = 1, 2, \ldots, k;\ r \neq i)$$

quindi, se $m \leq p$, $n \leq p$, il rapporto di a_m e a_n non dipende dalle τ con indici diversi da m e da n. Distinguiamo ora il caso $p \leq k$ dal caso $p = k$. Nel primo caso si prenda $s > p$, e allora le (5) permettono di concludere (togliendo la limitazione $i\ r$):

$$\left| \begin{matrix} a_i^{(r)} \\ a_i \end{matrix} \right| = 0 ; \qquad (i = 1, \ldots, p;\ r = 1, \ldots, k)$$

cosicchè i rapporti delle a non identicamente nulle saranno costanti, e si potrà perciò supporre che le stesse a siano costanti. Se invece $p = k$, essendo $k > 2$, il fatto che il rapporto di due fra le a dipende solo dalle τ cogli stessi indici di quelle due a permette ([15]) di concludere che, a meno di un fattore comune a

([15]) Posto infatti:

$$a_r : a_s = \varphi_{rs}(\tau_r, \tau_s) , \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, p)$$

si avrà:

$$\varphi_{rs}(\tau_r, \tau_s) \,.\, \varphi_{st}(\tau_s, \tau_t) \,.\, \varphi_{tr}(\tau_t, \tau_r) = 1.$$

Questa equazione mostra che il prodotto $\varphi_{rs}(\tau_r, \tau_s)\, \varphi_{st}(\tau_s, \tau_t)$ non dipende

tutte le a, ogni a dipende solo dalla τ collo stesso suo indice. Allora, supposto di aver liberate le a da quel fattore comune, il primo gruppo delle (5) mostra che dovrà sempre essere $Q = q = 0$, e perciò:

$$a_1^{(1)} = a_2^{(2)} = \ldots = a_k^{(k)} = c\,,$$

c essendo una costante. Avremo perciò, le b essendo costanti,

$$a_i = c\tau_i + b_i\,. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Anche il caso trattato prima di $p \leq k$ si può fare rientrare in questo prendendo $c = 0$ e supponendo nulle le b con indice maggiore di p. Tutto questo permette di concludere che i piani tangenti alla V_k passano per un punto fisso: basterà perciò provare che, fissato un sistema generico di valori per le τ, si possono determinare le λ in modo che uno dei due punti:

$$x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, x^{(i)}\,, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, x^{(i)}$$

non dipenda dalle τ. Ora, se $c = 0$, basterà prendere $\lambda_i = b_i$ affinchè il secondo di questi due punti sia fisso. Invece affinchè il primo dei due punti considerati sia fisso occorre e basta che sia:

$$x^{(r)} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(r)}\, x^{(i)} = 0\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

e questo si può ottenere, se $c \neq 0$, prendendo $\lambda_i = -\dfrac{c\tau_i + b_i}{c}$. La V_k considerata sarà tale che i suoi S_k tangenti passano per un punto fisso e sarà perciò un cono.

---

da τ_s, cosicchè dovrà essere:

$$\varphi_{rs}(\tau_r, \tau_s) = \frac{A(\tau_r)}{B(\tau_s)} \quad , \quad \varphi_{st}(\tau_s, \tau_t) = \frac{B(\tau_s)}{C(\tau_t)}$$

da cui:

$$\varphi_{tr} = \frac{C(\tau_t)}{A(\tau_r)}.$$

Perciò:

$$a_r : a_s : a_t = A(\tau_r) : B(\tau_s) : C(\tau_t),$$

ecc.

Se $k > 2$, una V_k rappresentante k sole equazioni di Laplace linearmente indipendenti, e tale che la W abbia dimensione $2k - 1$ è necessariamente un cono generico (proiettante da un punto un V_{k-1} che non soddisfaccia nessuna equazione di Laplace); e viceversa ([16]).

6. — Prima di procedere vogliamo fare un'osservazione, che ci permetterà pure di dedurre in modo assai semplice dal teorema finale del n.° precedente una proprietà, del resto già nota, della superficie di Veronese e di alcune varietà ad essa analoghe.

Se una V_k è tale che la W abbia dimensione $2k - l$, due spazi tangenti della V_k infinitamente vicini tra loro si tagliano in una S_l e viceversa.

Infatti pel verificarsi della prima proprietà è necessario e sufficiente che la matrice:

$$\| x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i1)}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i2)}, \ldots, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(ik)} \|$$

sia identicamente nulla, di caratteristica $2k - l$; mentre la seconda si traduce analiticamente nel fatto che, qualunque siano le $d\tau$, i punti:

$$x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, x^{(1)} + \sum_{i=1}^{k} d\tau_i x^{(i1)}, x^{(2)} + \sum_{i=1}^{k} d\tau_i x^{(i2)}, \ldots, x^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} d\tau_i x^{(ik)}$$

stanno in uno S_{2k-l}, ossia ci riporta alla stessa condizione detta di sopra.

D'altra parte, se una V_k gode della proprietà che due suoi S_k tangenti generici si taglino in una retta ([17]), avverrà in

([16]) È chiaro che un sistema discreto di tali coni costituirebbe ancora una varietà a k dimensioni, dotata di una W di dimensione $2k - 1$, mentre la dimensione dello spazio osculatore in un punto generico è $\frac{k(k+1)}{2}$. Ma, qui e nel seguito, intenderemo sempre che tali varietà (varietà riducibili, dove però questa parola non ha il consueto significato della geometria algebrica) siano escluse dalle nostre considerazioni.

([17]) Questa ipotesi equivale all'altra che le corde di una tale varietà riempiano una varietà di $2k - 1$ dimensioni (cfr. la mia Nota: *Sulle V_k per cui la varietà degli S_h $(h+1)$-seganti ha dimensione minore dell'ordinario.* " Rend. del Circ. Mat. di Palermo ", t. XXXI (1911), pp. 392-396); e questo mostra di nuovo che la W ha dimensione $\leq 2k - 1$.

particolare che due S_k tangenti infinitamente vicini della V_k si taglieranno in una retta (almeno) ([18]).

Consideriamo ora una V_k tale che la sua sezione iperpiana generica sia una varietà $F^{2\,k-1}_{k-1}$ di uno $\left[\frac{(k-1)(k+2)}{2}\right]$ rappresentabile su uno S_{k-1} mediante il sistema di tutte le quadriche di questo spazio. La varietà F non rappresenta nessuna equazione di Laplace (infatti essa sta in uno spazio $\left[\frac{(k-1)(k+2)}{2}\right]$, e d'altra parte la sua rappresentazione iperpiana mostra che non c'è in quello spazio nessun iperpiano la cui intersezione colla F abbia un punto triplo), cosicchè la V_k non può verificare più di k equazioni di Laplace linearmente indipendenti (poichè altrimenti in un punto generico la V_k ammetterebbe uno spazio osculatore di dimensione $\leq \frac{k(k+3)}{2} - k - 1$ cioè $\leq \frac{(k-1)(k+2)}{2}$, e perciò la F sua sezione iperpiana ammetterebbe in un suo punto generico uno spazio osculatore di dimensione $\leq \frac{(k-1)(k+2)}{2} - 1$, e verificherebbe perciò qualche equazione di Laplace). D'altra parte, poichè le F sono tali che due loro S_{k-1} tangenti si tagliano in un punto, due S_k tangenti della V_k (in particolare due S_k tangenti infinitamente vicini) si tagliano in una retta ([19]). Applicando l'osservazione fatta in principio di questo numero, e il risultato che chiude il n° precedente, si conclude che la V_k è un cono. Quindi:

Una V_k *tale che la sua sezione iperpiana generica sia una* $F^{2\,k-1}_{k-1}$ *di uno* $\left[\frac{(k-1)(k+2)}{2}\right]$, *rappresentabile su uno* S_{k-1} *mediante il sistema di tutte le quadriche di questo spazio, è necessariamente un cono proiettante dal suo vertice una tale* $F^{2\,k-1}_{k-1}$ ([20]).

([18]) Questo spiega perchè alcune delle V_4 che noi troveremo più avanti come caratterizzate dal fatto che la relativa W ha dimensione 7, mentre esse non verificano più di 6 eq. di L. lin. ind., compaiono anche tra quelle che lo Scorza (v. il n.° 10 della prima delle sue Memorie citate alla nota ([7])) ha caratterizzato come V_4 i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due in una retta.

([19]) Due S_k tangenti infinitamente vicini non si potranno tagliare in uno spazio più ampio, perchè se no la V_k verificherebbe (cfr. il n.° 5) più di k eq. di Lap. lin. ind.

([20]) Per $k = 3$ cfr. Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni com-*

7. — In seguito avremo occasione di servirci del fatto che un risultato analogo a quello stabilito alla fine del n.° 5 continua a sussistere anche quando si consideri una V_k che rappresenti un sistema di equazioni di Laplace ottenuto da un sistema di k equazioni le cui forme associate contengano uno stesso fattore lineare, quando ad esso si aggreghino delle altre equazioni di Laplace, purchè in numero convenientemente limitato.

Precisamente dimostreremo il seguente teorema:

Se una V_k $(k > 3)$ *rappresenta un sistema di* $d \leq 2k - 3$ *equazioni di Laplace linearmente indipendenti, ed entro quel sistema ve ne è uno* ∞^{-1} *di equazioni le cui forme associate contengono uno stesso fattore lineare, quella* V_k *è un cono proiettante da un punto una* V_{k-1} *rappresentante* $d - k$ *equazioni di Laplace linearmente indipendenti; e viceversa* ([21]).

---

poste di serie semplici razionali di piani, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXI (1885), pp. 95-115; e Bertini, op. cit. ([13]), p. 321. Per k qualsiasi, delle proposizioni che comprendono questa come caso particolare si trovano in Tanturri, *Sopra una proprietà della superficie di Steiner e sue estensioni agli spazi superiori*, " Giorn. di Matematiche ", vol. XLV (1907), pp. 291-297, e in Scorza, *Sopra una certa classe di varietà razionali*, " Rend. del Circ. Mat. di Palermo ", t. XXVIII (1909), pp. 400-401.

([21]) Si osservi che se fosse $d > 2k - 3$, non solo non sussisterebbe più il ragionamento che faremo in seguito, ma cesserebbe di sussistere la proposizione stessa. Si consideri, p. es., in uno spazio abbastanza ampio, una V_k luogo delle rette che incontrano una curva e una V_{k-2} generiche e in posizione mutuamente generica. Come equazioni parametriche della V_k si potranno assumere le seguenti:

$$x = A(\tau_2)\,\tau_1 + B(\tau_2, \tau_4, \ldots, \tau_k);$$

cosicchè la V_k verifica le $2k - 2$ equazioni di Lap. lin. ind.:

$$\begin{cases} x^{(11)} = 0\,,\ x^{(12)} = \dfrac{1}{\tau_1}\, x^{(2)}\,;\ x^{(13)} = x^{(14)} = \ldots\, x^{(1k)} = 0\,; \\ x^{(23)} = x^{(24)} = \ldots = x^{(2k)} = 0\,; \end{cases}$$

di cui le prime k hanno precisamente le forme associate contenenti uno stesso fattore lineare. Sarà poi:

$$x^{(22)} = \frac{d^2 A}{d\tau^2_2}\,,$$
$$x^{(mn)} = B^{(mn)}\,; \qquad (m, n = 3, 4, \ldots; k);$$

cosicchè, se la V_k verificasse delle equazioni di Lap. che non fossero com-

Supponiamo infatti (fatte sul sistema di coordinate e sulla scelta dei parametri le stesse ipotesi che al principio del n.° 5) che una V_k verifichi un sistema di $d \leq 2k - 3$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, tra cui vi siano le k equazioni (3). Operiamo su queste k equazioni come si è fatto nel n.° 5 fino a dedurne le (4), che dovranno pure essere verificate dalla V_k. Orbene, nelle nostre ipotesi, le forme quadratiche associate alle equazioni (3) e a quelle tra le (4) che non sono identicamente soddisfatte, e perciò anche le quadriche associate a quelle equazioni, dovranno appartenere a un sistema lineare di dimensione $\leq 2k - 4$. Ora le equazioni delle quadriche associate alle (4) si ottengono annullando i singoli determinanti di 2° ordine della matrice:

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_k \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{(1)} \theta_i & \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{(2)} \theta_i & \dots & \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{(k)} \theta_i \end{matrix} \right\| ;$$

mentre le quadriche associate alle (3) sono tutte quelle che contengono l'iperpiano $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \theta_i = 0$: pertanto la dimensione del sistema lineare che le quadriche associate alle (4) segano sull'iperpiano $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \theta_i = 0$ dovrà essere $\leq k - 4$. Facciamo ora nello $S_{k-1}[\theta]$ la trasformazione di coordinate (di determinante non nullo poichè $a_1 \neq 0$):

$$\rho\, \theta_1' = \sum_{i=1}^{k} a_i \theta_i ,$$
$$\rho\, \theta_j' = \theta_j \qquad ; \qquad (j = 2, 3, \dots, k)$$

e indichiamo con B_1, B_2, ecc., le espressioni assunte dalle forme lineari $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{(1)} \theta_i$, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{(2)} \theta_i$, ecc., scritte nelle nuove coor-

---

binazioni lineari delle $2k - 2$ soprascritte, dovrebbe passare qualche relazione lineare omogenea tra

$$A, \frac{dA}{d\tau_2}, \frac{d^2 A}{d\tau^2_2}, B, B^{(3)}, B^{(4)}, \dots B^{(k)}, B^{(33)}, B^{(4)}, \dots B^{(kk)};$$

il che contraddice alla ipotesi che la curva e le V_{k-2} direttrici della V_k siano state scelte in posizione generica.

dinate, e con B_1, B_2, ecc., le stesse espressioni dove si ponga $\theta'_1 = 0$; cosicchè la matrice (6) si trasforma nella

$$(6') \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{1}{a_1}(\theta'_1 - \sum_{i=2}^{k} a_i \theta'_i) & \theta'_2 \ldots \theta'_k \\ B_1 & B_2 \ldots B_k \end{matrix} \right\| .$$

Allora nello S_{k-2} $\theta'_1 = 0$ il sistema delle quadriche le cui equazioni annullano i singoli determinanti della matrice:

$$(6'') \qquad \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{a_1}\sum_{i=2}^{k} a_i \theta'_i & \theta'_2 \ldots \theta'_k \\ \overline{B}_1 & \overline{B}_2 \ldots \overline{B}_k \end{matrix} \right\|$$

deve aver dimensione $\leq k - 4$, il che implica che altrettanto avvenga per la matrice ottenuta trascurando la prima colonna della precedente. Ora, se quest'ultima matrice non fosse identicamente nulla, le quadriche (certo non tutte evanescenti):

$$\theta'_2 \overline{B}_r - \theta'_r \overline{B}_2 = 0 \qquad (r = 3, 4, \ldots, k)$$

segherebbero lo $S_{k-3} = \theta'_2\, 0$ nel sistema

$$\theta'_r (B_2)_{\theta'_2 = 0} = 0 , \qquad (r = 3, 4, \ldots, k)$$

sistema che risulterebbe, contrariamente alle nostre ipotesi, di dimensione $k - 3$, qualora non fosse $(\overline{B}_2)_{\theta'_2=0} = 0$. Dovrebbe quindi essere $\overline{B}_2 = b_2 \theta'_2$, e analogamente $\overline{B}_3 = b_3 \theta'_3, \ldots, \overline{B}_k = b_k \theta'_k$; e di più, come si riscontra facilmente [22], $b_2 = b_3 = \ldots = b_k$;

[22] Infatti nello S_{k-2} $\theta'_1 = 0$ un qualsiasi gruppo di quadriche

$$(b_r - b_s)\, \theta'_r \theta'_s = \sigma \qquad (r, s = 2, 3, \ldots, k)$$

in ciascuna delle quali il coefficiente $b_r - b_s$ sia diverso da zero, è costituito da quadriche tra loro linearmente indipendenti: quindi, se quelle quadriche devono appartenere a un sistema di dimensione $\leq k - 4$, le differenze $b_r - b_s$ sono tutte nulle, salvo forse $k - 3$. Ma pure queste differenze dovranno ridursi a zero; perchè, se fosse, p. es., $b_2 - b_3 \neq 0$, dovrebbe essere diversa da zero una almeno delle differenze $b_2 - b_p$, $b_3 - b_p$, per ogni valore di p tale che sia $4 \leq p \leq k$; cosicchè le differenze non nulle tra le b sarebbero almeno $1 + k - 3 = k - 2$.

cosicchè si giungerebbe ancora alla conclusione che l'ultima matrice considerata sarebbe identicamente nulla. E anche la matrice (6″) deve essere identicamente nulla; poichè per quanto si è detto sarà:

$$\overline{B}_r = b\,\theta_r' \,, \qquad (r = 2, 3, \ldots, k),$$

e perciò la considerazione dei determinanti:

$$\theta_r' \begin{vmatrix} -\frac{1}{a_1}\sum_{i=2}^{k} a_i\,\theta_i' & 1 \\ \overline{B}_1 & b \end{vmatrix} \qquad (r = 2, 3, \ldots, k)$$

estratti dalla matrice (6″) mostra che, nelle nostre ipotesi,

$$\overline{B}_1 = -\frac{b}{a_1}\sum_{i=2}^{k} a_i\,\theta_i' \,.$$

Potremo pertanto porre:

$$B_1 = c_1\,\theta_1' - \frac{b}{a_1}\sum_{i=2}^{k} a_i\,\theta_i' \,; \qquad B_r = c_r\,\theta_1' + b\,\theta_r' \,; \qquad (r = 2, 3, \ldots, k)$$

il che prova che tutti i determinanti estratti dalla (6′) contengono come fattore θ_1', e perciò tutti i determinanti estratti dalla (6) contengono come fattore $\sum_{i=1}^{k} a_i\theta_i$: le forme quadratiche associate alla (4) dovranno essere combinazioni lineari delle sole forme associate alle k equazioni (3), senza che a formarle intervengano le forme associate alle ulteriori equazioni, non facenti parte del sistema (3), verificate dalla V_k. E poichè nel n.° 5, dopo aver osservato che le (4) dovevano essere combinazioni lineari delle (3), non ci siamo più serviti dell'ipotesi che la V_k integrale del sistema (3) verificasse k sole eq. di Lap. lin. ind., si potrà ora continuare a ragionare come in quel n.°, e concludere che la V_k è un cono, proiettante da un punto una V_{k-1} rappresentante $d-k$ eq. di Lap. lin. ind., se la V_k deve verificarne d.

8. — Supposto $l > 1$, la ricerca analoga a quella compiuta al n.° 5 per $l = 1$ si può agevolmente ricondurre ai risultati già ottenuti mediante il seguente teorema, che troverà pure applicazione nell'ultima parte di questo lavoro.

Se una V_k *e la sua sezione iperpiana generica* V'_{k-1} *ammettono in un loro punto generico degli spazi osculatori le cui dimensioni siano rispettivamente* ω *e* ω', *affinchè sia* $\omega' < \omega - 1$ *è necessario e sufficiente che si presenti uno dei due seguenti casi:*

a) ω' *raggiunge il massimo valore possibile cioè* $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$, *mentre* ω *soddisfa alla condizione* $\frac{(k-1)(k+2)}{2} + 2 \leq \omega \leq \frac{k(k+3)}{2}$.

b) *La* V_k *soddisfa a un sistema di* $d = \frac{k(k+3)}{2} - \omega$ eq. *di Lap. lin. ind. tale, che la matrice jacobiana delle loro forme associate è identicamente nulla, di caratteristica* $k - (\omega - \omega' - 1)$.

Sia infatti π_k lo S_k tangente in un punto generico P della V_k, e sia π'_{k-1} uno S_{k-1} generico passante per P e giacente in π; consideriamo poi gli iperpiani α generici passanti per π'_{k-1} (e perciò, in quanto sono generici, non contenenti ulteriormente nessun punto di π_k), e la figura Φ (come luogo di punti) costituita dalla totalità dei piani che osculano in P la V_k, secondo una tangente variabile contenuta in π'_{k-1} (figura che sarà costituita da una totalità algebrica di S_{k+1} passanti per π_k e quindi anche per π'_{k-1}) ([23]). Φ viene tagliata da ciascuno degli iperpiani α nella totalità dei piani osculatori in P alla V'_{k-1} sezione della V_k con α, totalità il cui spazio di appartenenza è per ipotesi uno $S_{\omega'}$; quindi lo spazio di appartenenza della Φ è uno $S_{\omega'+1}$. La V_k dovrà essere tale, che i piani ad essa osculatori secondo tangenti contenute in uno S_{k-1} tangente generico in P stiano in uno $S_{\omega'+1}$; e viceversa quest'ultima proprietà importa che lo spazio osculatore a una sezione iperpiana generica della V_k,

([23]) Cfr., p. es., Bompiani, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, " Atti della R. Accad. di Torino ", t. 48 (1913), pp. 593-410, v. il n.° 2.

I piani osculatori a una V_k secondo una sua tangente riempiono uno S_k anzichè uno S_{k+1} solo quando la V_k è uno S_k: quindi in tale ipotesi e anche se si supponesse $\omega' = k - 1$, il ragionamento che segue esigerebbe delle modificazioni, ma evidentemente si avrebbe allora $\omega = \omega' + 1$.

in un suo punto generico, abbia dimensione ω'. Perciò, se quello S_{k-1} tangente in P corrisponde agli incrementi $d_1\tau, \ldots, d_{k-1}\tau$ (fissati in modo arbitrario), dovranno, qualunque siano le ρ, stare in uno $S_{\omega'+1}$ i punti:

$$x, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \sum_{i=1,j=1}^{k,k} x^{(ij)} \left(\sum_{p=1}^{k-1} \rho_p\, d_p\, \tau_i\right) \left(\sum_{q=1}^{k-1} \rho_q\, d_q\, \tau_j\right),$$

cioè i punti, in numero di $1 + \frac{k(k+1)}{2}$:

$$x, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \sum_{i=1,j=1}^{k\,k} x^{(ij)}\, d_p\, \tau_i\, d_q\, \tau_j \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Questo avviene certo se $\frac{k(k+1)}{2} = \omega' + 1$, cioè se $\omega' = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$; altrimenti sarà $\omega' + 1 < \frac{k(k+1)}{2}$, e la V_k dovrà verificare un certo sistema di equazioni di Laplace e precisamente un sistema tale che, fissato nello S_{k-1} delle quadriche associate un punto generico M, vi siano $\infty^{\frac{k(k+1)}{2} - \omega' - 2}$ quadriche del sistema aventi in M un punto doppio. Ora la V_k verifica un sistema di $d = \frac{k(k+3)}{2} - \omega$ eq. di Lap. lin. ind., cosicchè, in generale, quelle quadriche sono $\infty^{\frac{k(k+1)}{2} - \omega - 1}$; perciò, quando sia $\omega > \omega' + 1$, si ha che la matrice jacobiana delle forme associate dovrà essere identicamente nulla, di caratteristica $d - (\omega - \omega' - 1)$; e viceversa.

9. — Consideriamo ora una V_k che verifichi un sistema di $lk - \frac{l(l-1)}{2}$ eq. di Lap. lin. ind. $(1 < l < k-1)$, del tipo indicato nel teorema del n.° 4, tale cioè che il sistema delle quadriche associate sia costituito dalle quadriche per uno S_{k-l-1}. La sezione iperpiana generica V'_{k-1} della V_k verificherà almeno

$$\frac{(k-1)(k+2)}{2} - \left[\frac{k(k+3)}{2} - lk + \frac{l(l-1)}{2} - 1\right] =$$
$$= (l-1)(k-1) - \frac{(l-1)(l-2)}{2}$$

eq. di Lap. lin. ind.; anzi precisamente tante e non più, poichè (cfr. il teorema del n.° 8) il sistema delle quadriche associate alle equazioni soddisfatte dalla V_k è attualmente tale che la sua matrice jacobiana *non* è identicamente nulla; mentre, d'altra parte, il luogo degli S_{k-1} tangenti a quella V'_{k-1} ha dimensione $2k - l - 1 = 2(k-1) - (l-1)$. Così continuando si trova che la varietà di $k - l + 1$ dimensioni, sezione generica della V_k con uno S_{n-l+1}, verifica un sistema di $k - l + 1$ eq. di Lap. lin. ind. e ha una W di dimensione $2(k - l + 1) - 1$, ed è perciò un cono (cfr. il n.° 5): tanto basta per concludere che la V_k è uno S_{l-1} — cono generico. Quindi possiamo completare il teorema finale del n,° 4 nel seguente modo:

Se la W *relativa a una* V_k *ha dimensione* $2k - l$ $(0 < l < k - 1)$, *e la* V_k *verifica il sistema di minima dimensione di equazioni di Laplace compatibile con tale ipotesi (sistema la cui natura è indicata dal teorema finale del n.° 4), la* V_k *è uno* S_{l-1} *— cono generico (cono proiettante da uno* S_{l-1} *una* V_{k-l} *che non verifica nessuna equazione di Laplace) e viceversa.*

III.
Alcune proposizioni ausiliarie.

10. — Oggetto di questo terzo capitolo è la determinazione delle V_k che soddisfanno a certi particolari sistemi di equazioni di Laplace: i risultati ai quali giungeremo troveranno applicazione nella Nota II.

Consideriamo gli operatori differenziali [24]:

$$A_l = \sum_{\tau} a_{l\tau} \frac{\partial}{\partial \tau_\tau} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

con $2 \leq p \leq k$, le a essendo funzioni delle τ tali che la matrice:

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pk} \end{matrix} \right\|$$

[24] Per tutto il capitolo sottintenderemo che le lettere variabili apposte ai simboli di sommatoria, senza ulteriori indicazioni, variino da 1 a k.

non sia identicamente nulla; e proponiamoci di determinare una V_k che verifichi il sistema di $\frac{p(p+1)}{2}$ eq. di Lap. (tra loro linearmente indipendenti, poichè la matrice (7) è diversa da zero):

$$(8) \qquad A_m A_l x + \sum_r g_{lmr} x^{(r)} + g_{lm} x = 0 \quad (l, m = 1, 2, ..., p\,;\, l \leq m),$$

ma non verifichi nessun'altra equazione di Laplace che non ne sia una combinazione lineare. Le (8) hanno un significato geometrico molto semplice: per ogni punto della V_k integrale ([25]) esiste uno S_p $(2 \leq p \leq k)$ luogo di tangenti a contatto tripunto, lo S_p delle tangenti individuate da:

$$d\tau_1 : d\tau_2 : ... : d\tau_k = a_{l1} : a_{l2} : ... : a_{lk} \qquad (l = 1, 2, ..., p).$$

Orbene, dimostreremo che, nelle nostre ipotesi, quegli S_p stanno sopra la V_k, cioè che la V_k è una ∞^{k-p} di S_p.

Stabiliremo anzitutto che quegli S_p inviluppano un sistema ∞^{k-p} di V_p; da questo fatto seguirà poi facilmente la proposizione accennata. Osserviamo che tra le equazioni verificate dalla V_k ve ne è, per ogni valore di l e di m, entrambi minori o uguali a p, una della forma (8), anche a prescindere dalla limitazione posta di sopra $l \leq m$, che aveva il solo scopo di assicurarci della indipendenza lineare delle equazioni (8) sopra scritte; e osserviamo anche che, applicando uno qualsiasi degli operatori A al primo membro di una equazione (8), si ha per risultato zero. Quindi sarà:

$$A_n (A_m A_l x + \sum_r g_{lmr} x^{(r)} + g_{lm} x) = A_m (A_n A_l x + \sum_r g_{lnr} x^{(r)} + g_{ln} x)$$
$$(l, m, n = 1, 2, ..., p).$$

Ora, a riduzioni fatte, i termini di questa nuova equazione con-

---

([25]) Per questa proprietà, che del resto si verifica subito direttamente, cfr. C. L. Moore, *Surfaces in Hyperespace which have a tangent line with three point contacts through each point*, " Bull. of the American Math. Soc. „ (2), vol. 18, 1912, v. la p. 287.

tenenti le derivate terze si elidono; il risultato è un'equazione di secondo ordine, che, posto:

$$(9) \qquad \sum_t (a_{nt}\, a_{ms}^{(t)} - a_{mt}\, a_{ns}^{(t)}) = \varphi_{m,n;s}\,, \qquad (m, n = 1, 2, \ldots, p\,;\ s = 1, 2, \ldots, k)$$

prende la forma:

$$(10) \qquad \sum_{rs} a_{lr}\, \varphi_{m,n;s}\, x^{(rs)} + \sum_{r,s} (g_{lmr}\, a_{ns} - g_{lnr}\, a_{ms})\, x^{(rs)} \sim 0\,; \qquad (l, m, n = 1, 2, \ldots, p)$$

dove il segno $\sim$ sta ad indicare che il primo membro di questa relazione differisce da zero per una espressione lineare omogenea nella x e nelle sue derivate prime, la cui forma effettiva non ci interesserà nel seguito. Le soluzioni del sistema (8) verificano dunque anche le (10); e perciò, nelle nostre ipotesi, ciascuna delle (10) sarà combinazione lineare delle (8). Ora nello $S_{k-1}\,[\theta]$ il sistema delle quadriche associate al sistema (8) è costituito dalle quadriche che ammettono come doppio lo spazio π_{k-p-1} intersezione degli iperpiani:

$$\sum_r a_{lr}\, \theta_r = 0\,; \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

e perciò dovrà π_{k-p-1} essere doppio anche per le quadriche associate alle (10). Quindi (prendendo nelle (10) $n = l$) nei punti di π_{k-p-1} dovranno essere soddisfatte le:

$$a_{ls} \sum_r (\varphi_{m,l;r} + g_{lmr})\, \theta_r + (\varphi_{m,l;s} + g_{lms}) \sum_r a_{lr}\, \theta_r - g_{lls} \sum_r a_{mr}\, \theta_r - \\ - a_{ms} \sum_r g_{llr}\, \theta_r = 0\,; \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, p\,;\ s = 1, 2, \ldots, k)$$

cioè le:

$$a_{ls} \sum_r (\varphi_{m,l;r} + g_{lmr})\, \theta_r - a_{ms} \sum_r g_{llr}\, \theta_r = 0\,; \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots, k)$$

il che, essendo $k > 1$, ed essendosi supposta non identicamente nulla la matrice (7), implica che nei punti di π_{k-p-1} sia:

$$\sum_r (\varphi_{m,l;r} + g_{lmr})\, \theta_r = \sum_r g_{llr}\, \theta_r = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, p).$$

Osserviamo ora che $\varphi_{m,l;r} = -\varphi_{l,m;r}$, e che, non potendo la V_k rappresentare delle equazioni del primo ordine, si ha:

$$g_{lmr} - g_{mlr} = \sum_s (a_{ls}\, a'^{(s)}_{mr} - a_{ms}\, a^{(s)}_{lr}) = \varphi_{m,l;r}\,;$$
$$(l, m = 1, 2, \ldots, p\,;\, r = 1, 2, \ldots, k)$$

cosicchè nei punti di π_{k-p-1} sarà:

$$0 = \sum_r (\varphi_{m,l;r} + g_{lmr})\,\theta_r = \sum_r (-2\varphi_{l,m;r} + g_{mlr})\,\theta_r\,;$$
$$\sum_r (\varphi_{l,m;r} + g_{mlr})\,\theta_r = 0\,;$$

e perciò:

$$\sum_r \varphi_{l,m;r}\,\theta_r = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, p).$$

Si ha dunque identicamente:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pk} \\ \varphi_{l,m;1} & \varphi_{l,m;2} & \ldots & \varphi_{l,m;k} \end{vmatrix} = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, p).$$

Ricordando il significato delle φ, definite dalla (9), questo equivale a dire che il sistema lineare omogeneo del primo ordine nella funzione incognita F:

$$A_1 F = A_2 F = \ldots = A_p F = 0$$

è completo; cosicchè esso ammette $k - p$ integrali distinti $F_1, F_2, \ldots F_{k-p}$; e il sistema ∞^{k-p} di V_p:

$$(12) \qquad F_1(\tau) = \text{cost.},\ F_2(\tau) = \text{cost.},\ \ldots,\ F_{k-p}(\tau) = \text{cost.}$$

sarà inviluppato precisamente dagli S_p luoghi delle tangenti tripunte pei singoli punti della V_k.

Eseguito ora il cambiamento di variabili (che, se non fosse invertibile, si potrebbe certo rendere tale mediante una opportuna permutazione tra le τ'):

$$\tau'_i = F_i(\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-p),$$
$$\tau'_j = \tau_j \qquad (j = k-p+1, \ldots, k),$$

su ciascuna delle V_p (12) variano solo gli ultimi p parametri del nuovo sistema: se indichiamo ancora con $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ anche i nuovi parametri, la V_k verificherà un sistema della forma:

$$(13) \qquad x^{(lm)} + \sum_r g_{lmr}\, x^{(r)} + g_{lm}\, x = 0 \qquad (l, m = k-p+1, \ldots, k).$$

Poichè tutte le equazioni di Laplace rappresentate dalla V_k devono essere combinazioni lineari della (13), sarà:

$$g_{lmr} = 0 \qquad (l, m = k-p+1, \ldots, k;\ r = 1, 2, \ldots, k-p)$$

(come si vede paragonando le diverse espressioni che da queste equazioni si ricavano per una stessa derivata terza). Ciascuna delle V_p su cui variano solo $\tau_{k-p+1}, \ldots, \tau_k$ rappresenta adunque $\frac{p(p+1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, ed è perciò uno S_p: la V_k è luogo di S_p. Viceversa una V_k luogo di S_p verifica precisamente un sistema della forma (8); e, se è generica, non verifica ulteriormente altre equazioni.

Concludiamo dunque:

Nell'ipotesi che la matrice (7) *non sia identicamente nulla, una* V_k *rappresentante tutte e sole* [26] *le equazioni di Laplace di un sistema del tipo* (8), *è, per* $2 \leq p \leq k$, *una generica* ∞^{k-p} *di* S_p,

---

[26] Qui, e in seguito, parlando di un sistema di equazioni di Laplace, intendiamo che il sistema non comprenda solo quelle equazioni che servono a definirlo, ma anche tutte le loro combinazioni lineari.

e viceversa. In altre parole: Una V_k *tale che per ogni suo punto vi sia uno* S_p *costituito di tangenti tripunte* $(2 \leq p \leq k)$, *e che non verifichi altre equazioni di Laplace se non quelle che traducono analiticamente questa proprietà, è una generica* ∞^{k-p} *di* S_p.

11. — Consideriamo ora una V_k che rappresenti tutte, e sole, le equazioni di un sistema lineare Σ, ottenuto associando al sistema (8) uno o più altri sistemi costituiti in modo analogo. Supporremo inoltre che, se indichiamo con p_1, p_2, ecc. i valori di p relativi ai vari sistemi parziali del tipo (8) di cui è costituito Σ, sia $1 < p_1 < k$, $1 < p_2 < k$, ecc., e $p_1 + p_2 + \ldots \leq k$; e, di più, che, indicando in relazione col primo, col secondo, ecc. dei sistemi parziali del tipo (8) contenuti in Σ rispettivamente con a, b, ecc. le quantità che nel n.° precedente chiamavamo a, la matrice:

$$
(14) \qquad \left\| \begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p_1 1} & a_{p_1 1} & \cdots & a_{p_1 k} \\
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{p_2 1} & b_{p_2 2} & \cdots & b_{p_2 k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{matrix} \right\|
$$

non sia identicamente nulla. Applichiamo allora le considerazioni del n.° precedente p. es. al primo di quei sistemi parziali: potremo così dedurre che le soluzioni del sistema Σ verificano anche le (10). Ora però, a priori, potremo soltanto affermare che le (10) dovranno essere combinazioni lineari delle equazioni del sistema Σ, e non già di quelle sole tra esse che costituiscono quel sistema parziale del tipo (8) che abbiamo considerato: tuttavia non è difficile verificare che le cose stanno precisamente in quest'ultima maniera.

Infatti, nello $S_{k-1}[\theta]$, il sistema delle quadriche associate

al sistema Σ si può considerare come il sistema congiungente un certo numero di sistemi lineari, ciascuno dei quali è costituito dalle quadriche che hanno uno spazio doppio π_{k-p_1-1}, π_{k-p_2-1}, ecc.; questi spazii essendo tra loro linearmente indipendenti, in quanto la matrice (14) non è identicamente nulla. Ora le quadriche associate alle equazioni del tipo (10) dedotte p. es. dal primo sistema del tipo (8) contenuto in Σ contengono tutte π_{k-p_1-1}, e perciò, data la natura del sistema associato a Σ, lo dovranno contenere doppiamente; il che equivale a dire che quelle equazioni (10) dovranno essere combinazioni lineari delle equazioni del sistema (8) considerato.

Si potrà allora continuare a ragionare come al n.° precedente, fino a concludere che, se in relazione coll'r^{esimo} dei sistemi parziali del tipo (8) chiamiamo ora $A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rp_r}$ gli operatori che nel n.° precedente indicavamo con $A_1, A_2, \ldots, A_p$, ciascuno dei sistemi di equazioni lineari omogenee del prim'ordine in una funzione incognita F:

$$A_{r1}F = A_{r2}F = \ldots = A_{rp_r}F = 0 \tag{15}$$

è un sistema completo. Ora, nelle nostre ipotesi, per ogni punto generico P della V_k considerata vi saranno uno S_{p_1}, uno S_{p_2}, ecc. tra loro linearmente indipendenti nella stella di centro P (poichè la matrice (14) non è identicamente nulla), ciascuno dei quali è luogo di tangenti tripunte alla V_k: orbene, quegli S_{p_1}, quegli S_{p_2}, ecc. inviluppperanno rispettivamente una ∞^{k-p_1} di V_{p_1}, una ∞^{k-p_2} di V_{p_2}, ecc. Si potrà dunque, in relazione coll'r^{esimo} di questi sistemi di varietà, eseguire una opportuna trasformazione di parametri (invertibile) analoga a quella operata nel n.° precedente, in modo che sulle singole V_{p_r} dell'r^{esimo} sistema variino solamente gli ultimi p_r tra i nuovi parametri. E allora, applicando di nuovo l'osservazione che più sopra ci ha permesso di concludere che ciascuno dei sistemi (15) è completo, troveremo che nelle $\frac{p_r(p_r+1)}{2}$ equazioni della forma (13) (dove si faccia $p = p_r$) contenute nel sistema Σ trasformato compaiono, tra le derivate prime, soltanto $x^{(k-p_r+1)}, \ldots, x^{(k)}$; e perciò quelle V_{p_r} ve-

rificheranno $\frac{p_r(p_r+1)}{2}$ eq. di Lap. lin. ind., ossia saranno degli S_{p_r}.

Concludiamo dunque:

Se una V_k *ammette in ogni suo punto generico* P *uno* S_{p_1}, *uno* S_{p_2}, *ecc. luoghi di tangenti tripunte, linearmente indipendenti nella stella di centro* P, *con* $1 < p_1 < k$, $1 < p_2 < k$, *ecc.*, *e* $p_1 + p_2 + \ldots \leq k$, *mentre la dimensione dello spazio osculatore in* P *non è minore di* $\frac{k(k+3)}{2} - \frac{p_1(p_1+1)}{2} - \frac{p_2(p_2+1)}{2} - \ldots$ *(ossia, se una* V_k *verifica tutte e sole le equazioni di Laplace di un sistema* Σ *ottenuto dalla riunione di varii sistemi* (8) *dove sia rispettivamente* $p = p_1$, $p = p_2$, *ecc.*, *colle limitazioni sopra dette per* p_1, p_2, *ecc.*, *e se i* $p_1 + p_2 + \ldots$ *operatori differenziali che definiscono il sistema* Σ *sono tra loro linearmente indipendenti), quegli* S_{p_1}, S_{p_2}, *ecc. giacciono necessariamente sulla* V_k.

Si supponga ora, ferme restando le altre ipotesi fatte sin qui, che il sistema Σ sia costituito da due soli sistemi (8), essendo $p_1 + p_2 = k$. Allora si potrà con un'unica trasformazione di parametri (invertibile, cfr. più avanti la nota ([28])) ridurre a una forma analoga alla (13) ciascuno di quei sistemi (8), cosicchè il sistema Σ diverrà:

$$\begin{cases} x^{(hl)} + \sum_{r=1}^{p_1} g_{hlr}\, x^{(r)} + g_{hl}\, x = 0 & (h, l = 1, 2, \ldots, p_1) \\ x^{(mn)} + \sum_{r=p_1+1}^{k} g_{mnr}\, x^{(r)} + g_{mn}\, x = 0 & (m, n = p_1 + 1, \ldots, k). \end{cases}$$

Consideriamo uno S_{p_2} della V_k (definito dai valori di $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{p_1}$): per ogni suo punto passa uno S_{p_1} della V_k, e perciò, siccome lo S_{p_1} e lo S_{p_2} uscenti da un punto generico della V_k non hanno ulteriormente alcun punto in comune, gli S_{p_1} della V_k incidenti a quello S_{p_2} sono ∞^{p_2}, cioè ∞^{k-p_1}, e ricoprono una varietà di dimensione k, che noi (conformemente a quanto abbiamo detto nella nota ([16])) potremo ammettere abbracci tutta la V_k; cosicchè uno S_{p_1} e uno S_{p_2} risulteranno sempre tra loro incidenti.

D'altra parte $p_1 + 1$ S_{p_2} generici della ∞^{k-p_2} sono tra loro linearmente indipendenti; poichè, se ciò non avvenisse, non sarebbero tra loro linearmente indipendenti uno S_{p_2} generico e

altri p_1 ad esso infinitamente vicini; ossia i $(p_1+1)(p_2+1)$ punti:

$$\begin{array}{llll} x, & x^{(p_1+1)}, & \ldots & x^{(k)}, \\ x^{(1)}, & x^{(1,p_1+1)}, & \ldots & x^{(1,k)}, \\ x^{(2)}, & x^{(2,p_1+1)}, & \ldots & x^{(2,k)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{(p_1)}, & x^{(p_1,p_1+1)}, & \ldots & x^{(p_1,k)} \end{array}$$

dovrebbero essere legati da qualche relazione lineare omogenea, il che contraddice alle nostre ipotesi. Quindi p_1+1 S_{p_2} generici della ∞^{k-p_2} stanno in uno $[(p_1+1)(p_2+1)-1]$, e questo spazio conterrà tutti gli S_{p_1} della V_k (che incontrano quegli S_{p_2} in p_1+1 punti certo linearmente indipendenti, tali essendo quei p_1+1 S_{p_2}). La V_k appare dunque come generata dagli S_{p_1} di uno $[(p_1+1)(p_2+1)-1]$ che incontrano in un punto p_1+1 S_{p_2} di questo spazio, tra loro linearmente indipendenti: tanto basta per conchiudere che la V_k è una $V_{p_1+p_2}$ di Segre.

Le sole $V_{p_1+p_2}$ *dotate in ogni punto di uno* S_{p_1} *e di uno* S_{p_2} *luoghi di tangenti tripunte, non segantisi ulteriormente, e per cui la dimensione degli spazii osculatori generici non sia minore di* $(p_1+1)(p_2+1)-1$ *(tale ipotesi si può esprimere analiticamente in modo analogo a quello tenuto nel precedente enunciato) sono le* $V_{p_1+p_2}$ *di Segre* ($V_{p_1+p_2}^{\frac{(p_1+p_2)!}{p_1!+p_2!}}$ *di uno* $[(p_1+1)(p_2+1)-1]$ *che rappresentano nel modo indicato dal Prof. Segre* [27] *le coppie di punti di uno* S_{p_1} *e di uno* S_{p_2}).

12. — Vogliamo ora accanto ai p operatori A definiti in principio del n.° 10 introdurne altri q $(p>1, q>1, p+q=k)$, siano:

$$B_u = \sum_t b_{ut} \frac{\partial}{\partial \tau_t} \qquad (u=1,2,\ldots,q)$$

[27] *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, " Rend. del Circ. Mat. di Palermo ", tomo V (1891), pp. 192-204.

nell'ipotesi che la matrice:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots\dots\dots & a_{pk} \\ b_{11} & b_{12} & \dots\dots\dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots\dots\dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots\dots\dots & b_{qk} \end{vmatrix}$$

non sia identicamente nulla; e considerare una V_k che verifichi tutte e sole le equazioni di Laplace del sistema (di dimensione $pq - 1$):

$$(17)\qquad A_l B_u x + \sum_r h_{lur} x^{(r)} + h_{lu} x = 0$$
$$(l = 1, 2, \dots, p;\ u = 1, 2, \dots, q).$$

Ora, le soluzioni di questo sistema soddisfanno anche alle equazioni:

$$A_m (A_l B_u x + \sum_r h_{lur} x^{(r)} + h_{lu} x) = A_l (A_m B_u x + \sum_r h_{mur} x^{(r)} + h_{mu} x)$$
$$(l, m = 1, \dots, p;\ u = 1, \dots, q);$$

ossia, definite ancora le φ colle formole (9) del n.° 10, alle equazioni:

$$\sum_{r,s} \varphi_{l,m;r}\, b_{us}\, x^{(rs)} + \sum_{rs} (a_{ms} h_{lur} - a_{lr} h_{mus})\, x^{(rs)} \sim 0$$
$$(l, m = 1, \dots, p;\ u = 1, \dots, q);$$

che dovranno dunque essere combinazioni lineari delle (17). Perciò le quadriche associate a queste ultime equazioni dovranno passare per i due spazii α_{k-1-p}, β_{k-1-q} dello $S_{k-1}[\theta]$, in cui si tagliano rispettivamente gli iperpiani:

$$\sum_r a_{lr}\, \theta_r = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, p); \qquad \sum_t b_{ut}\, \theta_t = 0 \quad (u = 1, 2, \dots, q);$$

i quali spazii costituiscono la varietà base del sistema di quadriche associate alle (17). In particolare, si deduce che le quadriche composte dei due iperpiani:

$$\sum_r \varphi_{l,m,r}\,\theta_r = 0\,,\ \sum_s b_{us}\,\theta_s = 0 \qquad (l,\, m = 1, 2, \ldots, p;\ u = 1, 2, \ldots, q)$$

devono contenere lo spazio α_{k-1-p}; e, poichè la matrice (16) non è identicamente nulla, cioè gli spazii α_{k-1-p} e β_{k-1-q} sono indipendenti, dovrà α_{k-1-p} stare entro il primo di quei due iperpiani. Dunque anche attualmente la matrice (11) del n.° 10 è identicamente nulla, cosicchè si conclude che il sistema del primo ordine:

$$A_1 F = A_2 F = \ldots = A_p F = 0$$

è un sistema completo; e analogamente è pure completo il sistema:

$$B_1 \Phi = B_2 \Phi = \ldots = B_q \Phi = 0.$$

Siano $F_1, F_2, \ldots, F_{k-p}$; $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k-q}$ rispettivamente $k-p$ e $k-q$ integrali distinti di questi due sistemi; e facciamo il cambiamento di parametri [28]:

$$\tau'_i = \Phi_i(\tau) \quad (i = 1, 2, \ldots, p)\,; \qquad \tau'_{p+j} = F_j(\tau) \quad (j = 1, 2, \ldots, q).$$

Il sistema (17) scritto nei nuovi parametri è della forma:

$$\sum_{rs} a_{lr}\, b_{us} \sum_{ij} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau'_i\, \partial \tau'_j}\, \frac{\partial \tau'_i}{\partial \tau_r}\, \frac{\partial \tau'_j}{\partial \tau_s} \sim 0\,, \qquad (l = 1, \ldots, p;\ u = 1, \ldots, q)$$

[28] Il determinante jacobiano $\dfrac{\partial(\tau'_1, \ldots, \tau'_k)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_k)}$ non è certo identicamente nullo, perchè, se no, vi sarebbe un'equazione del tipo $\sum_r c_r\, \psi^{(r)} = 0$ soddisfatta quando al posto della ψ si ponesse una qualsiasi tra le F o tra le Φ; il che, essendo completi i sistemi del prim'ordine che definiscono le F e le Φ, implicherebbe l'annullarsi identico della matrice (16).

ossia:

$$\sum_{ij} A_l(\tau_i') B_u(\tau_j') \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_i' \partial \tau_j'} \sim 0 ; \qquad (l = 1, ..., p; u = 1, ..., q)$$

cosicchè delle derivate seconde delle x rispetto alle τ' compariranno nelle equazioni del sistema soltanto quelle, in numero di pq, in cui la derivazione è fatta rispetto a uno dei primi p e a uno degli ultimi q parametri. Dalle equazioni del sistema si potranno certo ricavare queste pq derivate espresse linearmente nella x e nelle sue derivate prime; e perciò, scrivendo ora per semplicità τ al posto di τ', al sistema (17) potremo sostituire il seguente:

$$(17') \quad x^{(lu)} = \sum_r f_{lur} x^{(r)} + f_{lu} x \quad (l=1,2,...,p; u=p+1, p+2,...,k).$$

Ora, poichè tutte le equazioni di Laplace rappresentate dalla V_k, e in particolare quelle che si ottengono dalle precedenti paragonando le diverse espressioni di alcune tra le derivate terze della x, devono rientrare nel sistema ora scritto, si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} & f_{lur} = 0 \qquad \text{se } r \neq l,\ r \neq u; \\ & f_{1u1} = f_{2u2} = ... = f_{pup} && (u = p+1, p+2, ..., k) \\ & f_{l,p+1,p+1} = f_{l,p+2,p+2} = ... = f_{l,k,k} && (l = 1, 2, ..., p). \end{aligned}$$

Il sistema precedente è dunque della forma:

$$x^{(lu)} = \gamma_u x^{(l)} + \gamma_l x^{(u)} + f_{lu} x \qquad (l = 1, 2, ..., p; u = p+1, ..., k).$$

Di più, il fatto che la V_k non può verificare equazioni lineari omogenee del primo ordine porta alle condizioni:

$$(18) \quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} & \gamma_l f_{mu} + f_{lu}^{(m)} = \gamma_m f_{lu} + f_{mu}^{(l)} \\ & \gamma_u^{(l)} = \gamma_u \gamma_l + f_u \\ & \gamma_l^{(m)} = \gamma_m^{(l)} \end{aligned}\right\} (l, m = 1, 2, ..., p; u = p+1, ..., k); \\ \left.\begin{aligned} & \gamma_u f_{lv} + f_{lu}^{(v)} = \gamma_v f_{lu} + f_{lv}^{(u)} \\ & \gamma_l^{(u)} = \gamma_l \gamma_u + f_{lu} \\ & \gamma_u^{(v)} = \gamma_v^{(u)} \end{aligned}\right\} l = 1, ..., p; u, v = p+1, ..., k); \end{cases}$$

da cui segue:

$$\gamma_s^{(t)} = \gamma_t^{(s)} \qquad (s, t = 1, 2, \ldots, k).$$

Potremo pertanto porre:

$$\gamma_r = \frac{\partial \log \Omega}{\partial \tau_r} = \frac{\Omega^{(r)}}{\Omega}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

e allora dalle (18) si deduce:

$$f_{ul} = \frac{\Omega^{(ul)}}{\Omega} - 2\,\frac{\Omega^{(u)}\,\Omega^{(l)}}{\Omega^2};$$

cosicchè il sistema sopra scritto di equazioni di Laplace soddisfatte dalla V_k prende la forma:

$$x^{(lu)} = \frac{\Omega^{(u)}}{\Omega}\,x^{(l)} + \frac{\Omega^{(l)}}{\Omega}\,x^{(u)} + \left(\frac{\Omega^{(ul)}}{\Omega} - 2\,\frac{\Omega^{(u)}\,\Omega^{(l)}}{\Omega^2}\right)x$$
$$(l = 1, \ldots, p;\ u = p + 1, \ldots, k).$$

Posto $x = \Omega y$, si ricavano allora per le y le equazioni:

$$y^{(lu)} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p;\ u = p + 1, \ldots, k);$$

da cui segue che y è della forma $\varphi(\tau_1, \ldots \tau_p) + \psi(\tau_{p+1}, \ldots \tau_k)$; ossia che le soluzioni x del sistema (17′) sono tutte della forma

$$x = \Omega\,.\,(\varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) + \psi(\tau_{p+1}, \ldots, \tau_k))$$

dove Ω è una funzione che dipende solo dal sistema (17′) ed è la stessa per tutte le soluzioni (si noti che Ω risulta definita a meno di un fattore costante, che non ha influenza su questo risultato); cosicchè per la nostra questione, considerando coordinate omogenee, potremo supporre $\Omega = 1$. Conchiudiamo dunque:

Se una V_k *verifica tutte e sole le equazioni di Laplace di un sistema della forma* (17) ($p > 1$, $q > 1$, $p + q = k$), *con un oppor-*

tuno cambiamento di variabili le coordinate di un punto che descriva la V_k *si possono ridurre alla forma:*

$$x = \varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) + \psi(\tau_{p+1}, \ldots, \tau_k); \tag{19}$$

cosicchè la V_k *contiene un sistema* ∞^q *di* V_p *e uno* ∞^p *di* V_q *tali che gli* S_q *tangenti alla* V_q *del sistema* ∞^p *nei punti di una* V_p *del sistema* ∞^q *passano per uno stesso* S_{q-1}; *e gli* S_p *tangenti alle* V_p *nei punti di una* V_q *passano per uno stesso* S_{p-1} [29]. *Viceversa, se una* V_k *è data dalle* (19), *in generale essa verifica tutte e sole le equazioni di un sistema della forma* (17).

Si osservi anche qui come le ipotesi fatte abbiano una semplice interpretazione geometrica; e come da una proprietà della V_k che interessa solo un intorno di un suo punto generico, l'ipotesi che gli spazi osculatori abbiano dimensione abbastanza alta permetta di dedurre per la V_k una proprietà integrale.

Altri esempi dello stesso tipo si vedranno nella Nota II.

Torino, 29 novembre 1913.

---

[29] Su alcune di queste varietà, cfr. Segre, *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti* (" Atti della R. Acc. di Torino ". vol. XLIII, 1908), dove si troveranno altre citazioni; e Cairo, *Sopra un sistema* Σ *di superficie* P *di* S_n (" Periodico di Matematica ", tt. XXVII-XXVIII, 1912, 1913).

Sugli integrali estesi al contorno di un campo qualunque.

Nota di CINO POLI.

1. — In questi ultimi anni molti teoremi del calcolo infinitesimale hanno acquistato una semplicità e generalità veramente notevole per merito della nuova definizione di integrale dovuta al Lebesgue.

Vi sono però ancora alcune parti che non ne hanno ritratto finora notevole vantaggio in questo senso: tali ad esempio i teoremi sulla trasformazione degli integrali multipli. Essi infatti sono dimostrati rigorosamente solo facendo ipotesi assai restrittive sulla natura dei contorni dei campi che si considerano.

In questa nota mi propongo appunto di fare uno studio dettagliato della costituzione dei campi più generali e dei relativi contorni per mostrare in qual modo si possano porre in essi i problemi al contorno, ed estendere infine le definizioni degli integrali curvilinei e superficiali in modo che valgano ancora le formole di Gauss e di Green.

2. — Nello spazio a n dimensioni, S_n (cioè nella classe delle disposizioni con ripetizione di tutti i numeri reali ad n ad n) chiamo sfera di centro x e raggio $a > 0$ che indico con $\sigma(x, a)$ l'insieme dei punti di S_n la cui distanza dal punto x è minore di a.

Dato un insieme u di punti di S_n dico che x *è un punto interno di* u *se esiste una sfera di centro* x *e raggio non nullo contenuta in* u, cioè *se esiste un numero* a > 0 *tale che tutti i punti di* S_n *distanti da* x *meno di* a *appartengano ad* u.

Il concetto di punto interno è dunque strettamente legato al numero delle dimensioni dello spazio in cui si considera il gruppo dato. Esso è stato introdotto per la prima volta da G. Peano nel 1889 per S_1 e da C. Jordan nel 1893 per S_2, ed è di fondamentale importanza per la definizione matematica del

concetto intuitivo di porzione continua di uno spazio. Poichè quando penso p. es. un pezzo continuo di piano la prima proprietà che vedo è che ogni suo punto è interno, tranne quelli del contorno che posso attribuire tanto al pezzo considerato che al rimanente.

Quindi *chiamerò campo aperto di* S_n *un gruppo di punti di* S_n *formato di soli punti interni.* Quando non vi sia luogo ad equivoci tralascerò l'aggettivo aperto.

Se il campo aperto u non esaurisce l'intero spazio, i punti non appartenenti ad esso si distinguono in due categorie: quelli *esterni* ad u, che sono centri di sfere non contenenti nessun punto di u, e quelli del *contorno* di u che sono i punti x tali che qualunque sia il numero $a > 0$, $\sigma(x, a)$ contiene sempre dei punti di u e dei punti non di u.

L'insieme dei punti esterni ad u forma pure un campo aperto v il cui contorno è contenuto in quello di u.

Se u non coincide con S_n, ma è illimitato, cioè non esiste un punto x e un numero $a > 0$ tali che $\sigma(x, a)$ contenga tutto u, i punti esterni possono mancare ma esiste almeno un punto del contorno.

Se u è limitato esistono anche punti esterni: precisamente sono tali di certo tutti quelli esterni alla sfera che racchiude u.

Ogni punto interno è punto limite di punti interni, quindi ogni campo aperto u è condensato. Un punto limite di punti del contorno appartiene necessariamente al contorno il quale è dunque chiuso. Infine l'insieme di u e del suo contorno è perfetto.

3. — Teorema. — *Un campo aperto si può determinare in infiniti modi come l'insieme dei punti interni a una successione di sfere* (1).

Dim. — Dato il campo aperto u, per ogni suo punto x chiamo sfera inscritta in u, che indico con $\sigma(u; x)$, quella che ha per raggio il limite superiore l dei raggi delle sfere di centro x e contenute in u. Essa è pure tutta contenuta in u, poichè se y è un

(1) Per brevità di linguaggio invece di *classe numerabile* (finita o no) userò sempre il vocabolo equivalente *successione*.

punto qualunque di $\sigma(u; x)$ dista da x meno di l, sia $l - \epsilon$, quindi è interno alla $\sigma\left(x, l - \frac{\epsilon}{2}\right)$ che è contenuta in u.

Scelto ora un qualunque gruppo numerabile di punti denso in u, l'insieme dei punti interni alle sfere inscritte coi centri nei punti di quel gruppo esaurisce il campo u. Per fissare le idee considero l'insieme dei punti di u che hanno coordinate razionali. Basta dimostrare che un qualunque punto y di u è contenuto in una $\sigma(u; x)$ dove x è razionale. Detto infatti h il raggio di $\sigma(u; y)$ esiste un punto razionale x distante da y meno di $k < \frac{h}{2}$ per cui y è contenuto in $\sigma(x, k)$, la quale a sua volta essendo contenuta in $\sigma(u; y)$ sta tutta in u e quindi in $\sigma(u; x)$.

Con ciò rimane dimostrato il teorema enunciato in principio.

Esso dà anche il modo più generale di costruire gli insiemi chiusi osservando che *l'insieme dei punti non appartenenti a un qualunque insieme chiuso è un campo aperto.*

Poichè se v è un insieme chiuso e u è l'insieme dei punti non di v, ogni punto di u non può essere limite di punti di v ed è quindi centro di una sfera contenente soli u.

Dunque *ogni insieme chiuso di* S_n *si ottiene togliendo da* S_n *i punti interni a una successione di sfere* [1].

In S_1, cioè sulla retta, le sfere diventano segmenti senza estremi e il più generale campo aperto è costituito dai punti di una successione di segmenti che si possono supporre senza punti interni comuni, poichè due segmenti che abbiano un punto interno comune costituiscono un unico segmento.

I punti di un campo u di S_n che stanno in un dato spazio di minor dimensione, cioè l'insieme dei punti che si ottengono sopprimendo nei punti di u un certo numero di coordinate di posto determinato, formano ancora un campo; in particolare i punti di u che stanno su una qualsiasi retta saranno i punti interni a una successione di segmenti i cui estremi apparterranno al contorno di u.

Infine dai precedenti teoremi segue immediatamente che i campi aperti, gli insiemi chiusi e le loro sezioni rettilinee

[1] Questo risultato è già stato dimostrato per altra via e per insiemi limitati da L. Zoretti. V. " Encyclopédie des sc. mathém. ", t. I.

sono misurabili nel senso di Borel e *a fortiori* nel senso di Lebesgue.

4. — Per esprimere completamente l'idea intuitiva di porzione continua di uno spazio, bisogna tradurre in linguaggio matematico il concetto di essere formata o meno di un sol pezzo, cioè bisogna definire la connessione.

Un campo aperto si dirà *connesso* se dati due suoi punti qualunque x e y si può trovare un numero finito p di sfere tutte contenute in u e di raggio non nullo, $s_1, s_2, \ldots, s_p$ tali che due consecutive abbiano dei punti interni comuni e x sia contenuto in s_1 mentre y sta in s_p.

Nel seguito dirò brevemente che x e y si possono collegare mediante una successione finita e continua di sfere.

Questa definizione è equivalente a quella che chiama connesso u se x e y si possono congiungere con una spezzata di un numero finito di lati tutta contenuta in u, ma è da preferirsi perchè non fa uso del concetto di segmento rettilineo che è estraneo all'*analysis situs*.

Teorema. — *La somma di due campi aperti connessi* u *e* v *aventi un punto comune* z *è un campo connesso;* intendendo per somma l'insieme dei punti che appartengono a qualcuno dei due campi.

Dim. — È evidente infatti che l'insieme w somma di u e v è ancora un campo aperto; inoltre, detto x un punto qualunque di u e y un punto qualunque di v, esiste una successione finita e continua di sfere contenute in u che collega x a z ed un'altra pure finita e continua contenuta in v che unisce z ad y, onde queste due insieme costituiscono una successione ancora finita e continua contenuta in w e che permette di passare da x ad y dimostrando la connessione di w.

Allora le sfere di raggio massimo inscritte in due campi senza punti comuni non possono avere punti comuni e poichè esiste al più una infinità numerabile di sfere senza punti comuni, ne risulta immediatamente che *il più generale campo aperto è la somma di una classe numerabile di campi connessi a due a due senza punti interni comuni.*

5. — Dirò che una successione di sfere $s_1, s_2 \ldots$ tende ad un punto x quando per ogni numero $h > 0$ esiste un intero m tale che per qualunque $n > m$ sia s_n contenuta in $\sigma(x, h)$.

Allora *dato un campo aperto* u *dico che* x *è un punto raggiungibile del suo contorno se esiste una successione continua di sfere* (cioè tale che due sfere consecutive abbiano qualche punto comune) *tutte contenute in* u e *tendenti ad* x.

I punti raggiungibili così definiti sono tutti e soli i punti del contorno che possono essere estremi di una curva di Jordan tutta interna ad u.

Infatti se x è raggiungibile esiste per definizione una successione continua di sfere s_1, s_2..... interne ad u e tendenti ad x. I punti del segmento rettilineo che congiunge i centri di due sfere consecutive sono interni all'una o all'altra sfera, quindi interni ad u. Allora la successione di questi segmenti costituisce una spezzata tendente al punto x, i cui punti insieme ad x formano precisamente una linea di Jordan tutta interna ad u tranne l'estremo x.

Viceversa sia data una curva di Jordan C interna ad u tranne un estremo che è un punto x del contorno. Le coordinate dei suoi punti siano funzioni continue di un parametro t nell'intervallo $0 \div 1$ in modo che x corrisponda a $t = 0$. Chiamo allora C_1, C_2,..... C_n,..... i punti di C corrispondenti ai valori $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ del parametro. L'arco compreso fra i punti C_n, C_{n+1} è costituito di punti che sono tutti centri di una sfera inscritta in u. Per il teorema di Heine-Borel si potrà trovare un numero finito di queste sfere tali che ogni punto dell'arco considerato sia interno ad almeno una di esse, e si potranno disporre in successione continua. Allora l'insieme di queste successioni di sfere relative a ciascuno degli archetti in cui ho diviso C costituisce una successione infinita di sfere contenute in u che dimostrerò tendente ad x. Infatti, qualunque sia $h > 0$, a causa della continuità delle funzioni che definiscono C posso trovare un punto c_n tale che tutti i segmenti siano distanti da x meno di $k < \frac{h}{2}$. I raggi delle sfere inscritte in u che hanno il centro nei punti di C compresi fra c_n e x saranno quindi al più uguali a k e perciò tutte le sfere della successione considerata, che seguono quella contenente c_n, sono contenute in $\sigma(x, h)$.

L'insieme dei punti raggiungibili è sufficiente ad individuare il contorno, poichè dimostrerò il seguente

Teorema. — *Il contorno di un campo è la somma dell'insieme dei suoi punti raggiungibili e del derivato di questo.*

Se x è un punto del contorno, basta che dimostri che è esso stesso raggiungibile o che qualunque sia $h > 0$ esistono punti raggiungibili di s interni a $\sigma(x, h)$. Ora per la definizione di contorno esisterà certo un punto y di u interno a $\sigma(x, h)$, e lo congiungo a x con un segmento rettilineo, il quale risulta di punti tutti interni a $\sigma(x, h)$. Se tutti i punti interni del segmento xy appartengono ad u, x è raggiungibile perchè estremo di una linea di Jordan contenuta in u; altrimenti i punti di u formano su xy più segmenti senza punti interni comuni i cui estremi sono punti raggiungibili di s.

6. — Prima di procedere a mostrare che nella posizione dei problemi al contorno è di importanza fondamentale la considerazione dei punti raggiungibili, mentre gli altri che non possono essere raggiunti con una linea continua dall'interno e non sono che i punti limiti dei primi non hanno alcuna importanza, è necessario mettere in chiaro il concetto di multiplicità dei punti raggiungibili.

Se x è un punto raggiungibile del contorno di un campo aperto connesso u, i punti di u interni a $\sigma(x, h)$ per un dato $h > 0$ possono dividersi in più campi connessi. Indico con n_h il numero di quelli che hanno ancora x come punto raggiungibile del proprio contorno mentre con p_h indico ciascuno di essi. In ogni p_h fisso una successione continua di sfere contenute in esso e tendente ad x, in modo da ottenere n_h successioni distinte. Se ora $k < h$, i punti di u contenuti in $\sigma(x, k)$ formano pure dei campi connessi, dei quali n_h contengono le date successioni da un certo termine in poi e quindi hanno x come punto raggiungibile del contorno. Essi sono distinti fra loro, perchè ognuno di essi è contenuto per intero (altrimenti non sarebbe connesso) in qualche p_h, e se due fossero contenuti nel medesimo p_h questo conterrebbe due successioni di sfere contrariamente all'ipotesi. Dunque $n_k \geq n_h$, e allora facendo tendere h a zero n_h avrà un limite superiore (finito o no) che chiamerò l'*ordine di multiplicità* del punto x considerato. Si potrà anche dire che i punti non raggiungibili hanno la multiciplità zero.

Limitatamente ai campi piani vale il seguente notevole teorema relativo all'ordine di multiplicità.

Teorema. — *Il contorno comune a due campi piani connessi non ha punti multipli* [1].

Dim. — Siano u e v due campi piani connessi senza punti comuni, aventi il medesimo contorno s, cioè ogni punto di s sia limite di punti interni ad u come di punti interni a v. Dimostrerò che se x è un punto raggiungibile rispetto ad u del contorno s e multiplo, allora v non è connesso.

Infatti esisterà un numero $h > 0$ tale che in $\sigma(x, h)$ u formi due campi connessi distinti m ed n aventi entrambi a per punto raggiungibile del proprio contorno. Fisso un punto y in m ed uno z in n. Unisco y con x mediante una linea di Jordan interna ad m, z ad x con altra linea di Jordan interna ad n, y con z mediante una terza linea interna ad u. Se questa taglia, per es., la prima linea, considero fra tutti i punti di incontro quello il cui parametro (sulla yx) è il più prossimo al valore assunto sul punto x, e lo assumo per nuovo punto y anche se coincidesse con x. Analogamente opero sulla linea zx. L'insieme delle linee congiungenti x, y, z è così una linea chiusa J di Jordan tutta costituita di punti non di v. Ora esisterà un $k \leq h$ tale che qualche punto di y sia esterno a $\sigma(x, k)$. Chiamo p la porzione di m contenuta in $\sigma(x, k)$, q la parte analoga di n. Tanto p che q contengono punti di J. Infatti m contiene punti di J prossimi quanto voglio ad x, e similmente n. Quindi in ciascuna delle due regioni in cui J divide il piano vi sono sia punti p che punti q e quindi punti s. Ma ogni punto s è limite di punti v, quindi ciascuna delle dette regioni contiene punti di v, il quale perciò non è connesso.

È importante notare che il teorema vale esclusivamente sul piano e non è più vero già nello spazio ordinario.

7. — *Detto* x *un punto raggiungibile del contorno di un campo* u, *dirò che due successioni continue di sfere tendenti ad* x, *tendono al medesimo elemento del contorno di* u *se esiste un* $h > 0$ *tale che per ogni* $k < h$ *tutte le sfere delle due successioni conte-*

[1] In particolare, una curva chiusa di Jordan non può avere punti multipli, perchè divide il piano in due campi connessi, e nemmeno una linea aperta di Jordan ha punti multipli, poichè unendone gli estremi, p. es. con un arco di cerchio, si ottiene una linea chiusa.

nute in σ (x, k) *siano contenute in uno stesso di quei campi connessi che* u *determina in* σ (x, k). E in modo analogo parlerò di curve di Jordan aventi un estremo comune in un medesimo elemento.

Cosicchè ad ogni punto del contorno corrispondono tanti elementi quanto è il suo ordine di multiplicità.

Supponiamo che in u sia data una funzione f continua sui punti interni e tale che per ogni linea di Jordan interna ad u tranne un estremo x che è sul contorno il valore di f in un punto y della curva tenda a un limite determinato quando y tende ad x. Allora su tutte le curve che hanno un estremo in un medesimo elemento di s, la f ha lo stesso limite, così che f rimane definita univocamente in ogni elemento del contorno. Se infatti sono C_1, C_2 due linee di Jordan interne ad u che tendono al medesimo elemento z di un punto x di s, prendo su C_1 una successione di punti $p_1, p_3, p_5, \ldots$ e su C_2 una successione analoga $p_2, p_4, p_6, \ldots$ entrambe tendenti a z, in modo che detta d_i la distanza di p_i da x, sia $d_1 > d_2 > d_3 > \ldots$ Allora posso congiungere p_1 a p_2 con un pezzetto di linea di Jordan contenuto in $\sigma(x, d_1)$, quindi p_2 a p_3 con un altro pezzetto contenuto in $\sigma(x, d_2)$, ecc. La catena di questi successivi pezzetti costituisce un'unica linea di Jordan C_3 tendente al medesimo elemento z. Se ora $fp_1, fp_3, \ldots$ avesse un limite diverso da $fp_2, fp_4, \ldots$, la f su C_3 non tenderebbe a nessun limite determinato contrariamente all'ipotesi.

Dunque il valore di f nell'elemento z del punto x di s sarà il limite dei valori di f nei punti di u interni al campo di $\sigma(x, h)$ che determina l'elemento z, quando h tende a zero [1]. E si potrà dire che la f è continua anche sul contorno di u, poichè nel caso che i punti di s siano funzione biunivoca continua di un parametro t, la f è funzione continua di t.

Infatti se nel punto x corrispondente al valore t la f non è continua vuol dire che esiste una quantità $m > 0$ tale che esistono punti z del contorno prossimi quanto voglio a x in cui

$$|fz - fx| > m. \tag{1}$$

[1] Altrimenti esisterebbe una successione di punti tendente all'elemento z nei quali f non tenderebbe a fz; ma riunendo ogni punto al successivo con un tratto di curva di Jordan si otterrebbe una linea avente un estremo in z e su cui f non tende a fz che è stato dimostrato assurdo.

Invece esisterà per quanto si è detto un $h > 0$ tale che nei punti y di u interni a $\sigma(x, h)$ sia [1]

$$(2) \qquad |fx - fy| < \frac{m}{2}.$$

Così scelto z distante da x meno di $\frac{h}{2}$, esisterà un $k < \frac{h}{2}$ tale che per ogni y di u interno a $\sigma(z, k)$ (e *a fortiori* interno a $\sigma(x, h)$) sia

$$(3) \qquad |fz - fy| < \frac{m}{2}.$$

Allora sottraendo dalla (1) la (3) si ha

$$|fy - fx| > |fz - fx| - |fz - fy| > \frac{m}{2}$$

che contraddice alla (2).

E così rimane dimostrata la continuità di f anche sul contorno.

Se il contorno è generale la f in un punto multiplo può avere più valori distinti, ciascuno dei quali è individuato dando una linea che abbia un estremo nell'elemento al quale esso corrisponde.

Così siamo condotti naturalmente a porre la seguente DEFINIZIONE: *Dico che* f *è una funzione del contorno* s *di un campo dato, quando* z *essendo un elemento di* s, fz *è una quantità reale.*

8. — Sul contorno s di un campo piano m sia definita la funzione f nel modo detto. Su una retta $x = \text{cost}$ i punti di m formano una successione di intervalli senza punti interni comuni i cui estremi inferiori sono individuati dalle ordinate $y_1, y_2, \ldots$ e i relativi estremi superiori da $y'_1, y'_2 \ldots$ Ciascuno di questi estremi è un punto raggiungibile del contorno e, se è multiplo, il segmento di cui è l'estremo ne individua un elemento.

Se quindi con $f(x, y_i)$ indico il valore di f nel detto elemento del punto che ha le coordinate x, y_i e supposto che il gruppo dei punti x in cui la somma

$$\varphi x = \sum_i [f(x, y_i') - f(x, y_i)]$$

[1] Si ricordi l'osservazione a piè di pagina relativa al teorema del n° 6, che cioè ogni linea di Jordan ha solo punti semplici.

non è assolutamente convergente, abbia misura nulla, *pongo per definizione*

$$\int_s f(x, y)\, dx = -\int_a^b \varphi x\, dx$$

dove a e b sono i limiti inferiore e superiore delle ascisse dei punti di m.

Invece segando m con una retta $y =$ cost ottengo una successione di segmenti i cui estremi superiori abbiano per ascisse $x'_1, x'_2, \ldots$ e quelli inferiori rispettivamente $x_1, x_2, \ldots$ e supponendo che il gruppo dei punti y in cui

$$\psi y = \sum_i [f(x_i', y) - f(x_i, y)]$$

non è assolutamente convergente abbia misura nulla, porrò ancora per definizione

$$\int_s f(x, y)\, dy = \int_c^d \psi y\, dy$$

dove c e d sono i limiti delle ordinate dei punti di m.

Se m è costituito da più campi connessi senza punti comuni i cui contorni siano $s_1, s_2, \ldots$ raccogliendo fra loro i termini della sommatoria definente ψ che provengono da un medesimo campo connesso, si dimostra facilmente che

$$\int_s f\, dy = \int_{s_1} f\, dy + \int_{s_2} f\, dy + \ldots$$

e analogamente per $\int_s f\, dx$.

Osservo infine che le condizioni di convergenza richieste per le serie che definiscono φ e ψ sono certamente soddisfatte in ogni campo contenuto nel rettangolo di lati $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ se $f(x, y)$ è funzione assolutamente continua [1] di y quando x varia fra a e b escluso un insieme di misura nulla, ed è funzione assolutamente continua di x quando y varia fra c e d escluso ancora un insieme di misura nulla.

---

[1] G. Vitali, *Sulle funzioni integrali.* " Atti d. R. Accademia d. Scienze di Torino ", vol. 40 (1904-5), p. 1021-1036.

9. — Teorema. *Dato un campo piano aperto* σ *di contorno* s, *e due funzioni* P (x, y), Q (x, y) *delle variabili reali* x *e* y *per le quali suppongo:*

α) *l'insieme dei valori* x *pei quali* P (x, y) *non è funzione assolutamente continua di* y, *come pure quello dei valori* y *in cui* Q (x, y) *non è funzione assolutamente continua di* x, *hanno misura (lineare) nulla*;

β) $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ *sono integrabili superficialmente in* σ;

allora vale la identità (1)

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxy = \int_s (P\,dx + Q\,dy).$$

Dim. — Nelle ipotesi poste, per il teorema di Fubini sugli integrali superficiali, si ha

$$\int_\sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxy = \int \left(\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\right) dy$$

$$\int_\sigma \frac{\partial P}{\partial y}\, dxy = \int \left(\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\right) dx$$

dove $\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx$ è esteso alla sezione fatta in σ da una retta $y = \text{cost}$, cioè a una successione di intervalli non sovrapposti, e quindi per la assoluta continuità di Q vale la somma degli incrementi di Q relativi a ciascuno di questi intervalli. Ora l'integrale di questa somma, che è funzione di y, è appunto per definizione $\int_s Q(x, y)\, dy$ onde

$$\int_\sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxy = \int_s Q\, dy.$$

(1) Uso la notazione $\int_\sigma f(xy)\, dxy$ per indicare l'integrale di f esteso all'area σ invece di $\iint_\sigma f\, dx\, dy$ oppure $\int f\, d\sigma$ perchè il primo di questi integrali si può confondere con un integrale iterato che può non essergli equivalente e può indurre in errori nel cambiamento di variabili, mentre la notazione del secondo è incompleta.

Similmente ragionando per $\int \frac{\partial P}{\partial y} dy$ si ottiene una somma di incrementi di P che è funzione di x e il cui integrale è per definizione $-\int_s P dx$, onde

$$\int_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} dxy = -\int P dx$$

e rimane dimostrato il teorema.

Ne risulta immediatamente che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale* $\int P\,dx + Q\,dx$ *esteso al contorno di qualunque campo contenuto in* σ *sia nullo, nelle ipotesi del teorema precedente è che l'insieme dei punti in cui* $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ *non è uguale a zero abbia misura nulla.*

Quindi p. es. il teorema di Cauchy

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_s \frac{w(z)}{z-t} dz$$

varrà quando s sia il contorno di un campo qualunque in cui $w(t)$ è funzione regolare dei punti t del campo.

10. — *Supposto* u *e* v *funzioni assolutamente continue di due variabili insieme alle loro derivate prime e i cui quadrati, come pure quelli delle derivate seconde, siano integrabili in* σ, *si ha:*

$$\int_s \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx = \int_\sigma (u \Delta v - v \Delta u)\, dxy.$$

Infatti nelle ipotesi poste si ha per il teorema del n. 9

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dxy =$$
$$= \int_s \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx$$

mentre

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$
$$= u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = u \Delta v - v \Delta u,$$

così resta dimostrato in campi qualunque il 2° lemma di Green.

Le stesse ipotesi fatte per la u in questo teorema sono sufficienti a legittimare i calcoli che si fanno ordinariamente per dimostrare la *formola di Green*:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_s \left[\left(u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx - \right.$$

$$\left. - \left(u \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right] - \int_\sigma \log \frac{1}{r} \Delta u \, dxy$$

dove (ξ, η) è un punto interno a σ e nel 2° membro al posto di u si intende $u(x, y)$ mentre $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

11. — Giunti a questo punto sorge il problema di risolvere particolari problemi al contorno nei campi qualunque; ad es., quello delle funzioni armoniche.

Data una funzione continua dei punti raggiungibili del contorno di un campo trovare la funzione armonica che sul contorno coincide colla data.

L'unicità della soluzione si può dimostrare ancora col solito metodo dell'integrale di Dirichlet senza alcuna modificazione. Il teorema di esistenza si può ricondurre, come è noto, a una equazione integrale di Fredholm se il contorno è una curva rettificabile; ma se il contorno è generale si ha una equazione di tipo nuovo.

Siamo così condotti a un problema di fondamentale importanza: lo studio delle equazioni integrali del tipo

$$u(x, y) = \int_s u(\xi, \eta) \left[P(\xi, \eta ; x, y) \, d\xi + Q(\xi, \eta ; x, y) \, d\eta \right] + \varphi(x, y)$$

dove φ è funzione nota e (x, y) varia in un campo σ di contorno s.

Savona, 28 luglio 1913.

Relazione sulla Memoria del Dr Alfonso Bovero, *Sulla fine struttura e sulle connessioni del ganglio vestibolare del nervo acustico.*

Nonostante il rifiorire rigoglioso di ricerche sulla fine struttura dei gangli annessi ai nervi cerebro-spinali, provocata nell'ultimo decennio particolarmente dall'introduzione nella tecnica microscopica del metodo all'argento ridotto di Cajal, mancano quasi del tutto studî sistematici sull'organizzazione dei gangli annessi alle due radici del nervo auditivo.

In questa sua Memoria il Dr Bovero rende note le risultanze delle sue osservazioni sul ganglio vestibolare o ganglio di Scarpa, osservazioni compiute su materiale abbondante tolto dall'uomo nelle differenti età, e da parecchi altri mammiferi dei varî ordini.

L'A. ha usato nelle sue ricerche prevalentemente delle diverse formule del metodo all'argento ridotto di Cajal e subordinatamente di altri metodi acconci per la delucidazione dei differenti quesiti impresi a trattare.

Premesso un capitolo in cui è riferita la letteratura sulla fine costituzione del ganglio vestibolare, l'A. dà minute notizie delle varie forme offerte dalle cellule gangliari vestibolari, delle dimensioni e della intima organizzazione delle stesse.

In seguito studia le modalità di origine, di comportamento ed il volume relativo dei processi di dette cellule ed in base al numero od alle qualità dei processi distingue e descrive cellule bipolari, cellule monopolari, cellule pluripolari (con 3 o 4 processi), cellule con processi a clava.

Un altro capitolo è dedicato alla struttura delle capsule delle cellule gangliari. Infine nell'ultima parte viene trattata la questione, quasi affatto nuova, dell'esistenza di fibre nervose esogene nel ganglio vestibolare. A questo riguardo l'A. dimostra come tutte le cellule gangliari siano in rapporto con reti e con particolari terminazioni di fibre simpatiche, le quali formano dei plessi o direttamente accollati alle cellule gangliari o situati

nelle capsule pericellulari e nel tessuto interstiziale. L'A. fa risaltare l'importanza grande di questi nuovi reperti per le deduzioni fisiologiche che se ne possono trarre e per la possibilità di spiegare, mediante i fatti anatomici constatati, determinati fenomeni clinici, finora rimasti oscuri nella loro genesi.

Il lavoro è corredato di una tavola con 16 figure illustrative. La parte di esso che riguarda la letteratura sull'argomento è condotta con quella particolare accuratezza che si distingue in tutti i lavori dello stesso Dr Bovero; la parte che si riferisce alle ricerche delucida molte questioni importanti e contiene osservazioni veramente originali; perciò i commissarii ne propongono la lettura alla Classe e, qualora questa l'approvi, la stampa nei volumi accademici.

R. Fusari, *Relatore*
Pio Foà.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Dicembre 1913.

PRESIDENZA DEL PROF. ITALO PIZZI
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: De Sanctis, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Renier Segretario. — Scusano l'assenza i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Carle, e Brondi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 7 dicembre 1913.

Il Socio Ruffini, anche a nome del Socio Chironi, presenta l'opera in tre volumi del prof. avv. Luigi Abello, *Della locazione secondo la dottrina e la giurisprudenza*, Torino-Napoli, Unione Tipogr. Editrice, 1908-1913, encomiandone altamente il valore dottrinale e pratico.

Il Socio Baudi di Vesme offre una Memoria di Adolf de Ceuleneer, *La dernière Cène de Balthasar Mathysens à la Superga*, estratto dall'opera *Les arts anciens de Flandre*, Bruges, 1913. Insieme con le lodi di questa ricerca dell'erudito belga, il Socio Baudi di Vesme espone una serie di buone e nuove osservazioni che valgono a completarla, sicchè la Classe lo invita a scriverne una Nota per gli *Atti*, ed egli accondiscende.

Dal Socio Sforza è fatta presentazione d'una sua monografia, di cui espone il contenuto, su *Ortensio Lando e gli usi ed i costumi d'Italia nella prima metà del Cinquecento.* A voti segreti unanimi la Classe accoglie codesto scritto nelle *Memorie* accademiche.

Rispondendo a quesiti di massima posti dal Segretario Renier in nome di persone interessate, la Classe delibera:

1° che al concorso pel premio Pollini possono essere ammesse monografie che abbraccino, anzichè un Comune solo, una serie di Comuni della regione stabilita, purchè in essa serie non siano compresi i capoluoghi di provincia e di circondario;

2° che al suddetto concorso possa accettarsi anche un'opera che rappresenti un rifacimento di lavoro pubblicato qualche anno prima del periodo compreso nei termini del programma, lasciandosi alla Commissione giudicatrice il compito di constatare se veramente la seconda redazione del lavoro rappresenti un vero rifacimento, con l'uso di materiale nuovo e con elaborazione nuova.

PREMIO DI FONDAZIONE POLLINI

Rinnovazione del bando pubblicato nel gennaio 1904.

Alla fine dell'anno 1915, l'Accademia Reale delle scienze di Torino conferirà un premio di fondazione del cav. Dr. Giacomo Pollini. Esso sarà di Lire 1200, dedotte le tasse e le spese di amministrazione, e sarà conferito alla migliore monografia storica degli attuali Comuni delle antiche provincie piemontesi, manoscritta ovvero stampata negli anni 1904-1914, sul genere di quella dello stesso Dr. Pollini pubblicata in Torino nel 1896 sul comune di Malesco. Sono esclusi i Comuni capoluogo di provincia e circondario, ad eccezione di quelli di Domodossola e di Pallanza.

A tale premio potranno concorrere solamente scrittori di dette provincie.

I concorrenti dovranno consegnare i loro lavori stampati o manoscritti non più tardi del 31 dicembre 1914.

L'Accademia non restituirà agli autori nè le opere a stampa, nè quelle manoscritte presentate al concorso.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Dicembre 1913.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe Naccari, ed i Soci Salvadori, D'Ovidio, Peano, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario.

Vien letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente.

La R. Accademia di Scienze ed Arti di Barcellona ha invitato la nostra Accademia a farsi rappresentare alle feste che si celebreranno il 18 gennaio 1914, nella ricorrenza del 150° anniversario della sua fondazione.

Il Socio Guidi offre in dono un suo opuscolo, *Alcune formole per il calcolo dei solai.*

Il Socio Peano presenta, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota di M. Bottasso, *Sulla determinazione del tasso di una rendita temporanea, variabile e continua*; ed il Socio Segre un suo scritto, *Sulle congruenze rettilinee* W, *di cui una od ambe le falde focali sono rigate.*

Sulla determinazione del tasso di una rendita temporanea, variabile e continua.

Nota di MATTEO BOTTASSO

Il Prof. Boggio in una sua Memoria (*) ha indicato varî metodi per determinare dei valori approssimati del tasso (discontinuo, continuo, anticipato) di una rendita immediata e temporanea. Questa può supporsi, indifferentemente, certa o vitalizia e si ammette di conoscerne il valore attuale A, le singole rate (positive) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pagabili alla fine degli intervalli considerati di tempo e di conoscere inoltre, nel caso di rendita vitalizia, le probabilità $p(t, 1)$, $p(t, 2), \ldots, p(t, n)$ (**) che il beneficiario della rendita — di età attuale t — sia in vita alla fine dei detti periodi di tempo.

Tutto si riduce alla risoluzione dell'equazione:

$$b_1 v + b_2 v^2 + \ldots + b_n v^n = A, \tag{1}$$

indicando, come d'uso, l'incognita v il valore attuale d'una lira pagabile quando sia trascorsa una unità di tempo; ed essendo $b_i = a_i$ ovvero $b_i = p(t, i)\, a_i$; $(i = 1, 2, \ldots, n)$ secondo che si tratta d'una rendita certa o vitalizia.

L'importanza consiste nell'avere ben stabilito, per ciascuno dei metodi di risoluzione approssimata della (1), quando il valore della radice ottenuto è approssimato per difetto e quando per eccesso (indagando il segno del resto); cosa affatto trascurata nei trattati preesistenti di Matematica finanziaria ed attuariale, nei quali inoltre si accenna alla risoluzione della (1) nella

(*) T. Boggio, *Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella matematica finanziaria e attuariale*, " Mem. della R. Accad. di Torino ", 1909, serie 2ª, vol. XL, pp. 107-138.

(**) La notazione $p(t, n)$ è assai più comoda della "p_t usata dagli Attuari inglesi, sovratutto quando le lettere t, n portano degli indici.

sola ipotesi delle b_i tutte fra loro eguali, nel quale caso può anzi supporsi siano tutte eguali ad 1.

In questo Lavoro mi sono proposto di estendere i risultati ottenuti dal Prof. Boggio al caso di una *rendita continua*, e di fissare quali dei detti risultati presentano una forma analoga a quella ottenuta quando il numero delle rate della rendita è finito, ovvero quando e come tale forma viene a modificarsi.

Per precisare, mi occuperò della ricerca delle soluzioni dell'equazione trascendente in v (*):

$$\int_0^n v^u b_u \, du = A \,, \tag{2}$$

ove si avrà rispettivamente:

$$v = (1 + x)^{-1}, \tag{3}$$

$$v = e^{-y}, \tag{4}$$

$$v = 1 - z, \tag{5}$$

secondo che si considera il tasso d'interesse (unitario) come *discontinuo* (x), *continuo* (y) od *anticipato* (z). Tanto questi tassi come, di conseguenza, v si ritengono numeri positivi inferiori ad uno, e s'ammette pure sia positivo il valore attuale A della rendita.

La funzione b_u si riterrà pure positiva ed integrabile nell'intervallo $0 \urcorner n$; essa rappresenterà in ogni istante u il valore della rata di rendita riferita all'unità di tempo nel caso di rendite certe, mentre nel caso delle rendite vitalizie sarà eguale al prodotto di tale rata per un conveniente fattore demografico, il quale nel caso per es. di una rendita vitalizia immediata (temporanea) sopra un individuo di età t, sarà $p\,(t, n)$.

Si potrebbe in modo affatto analogo, con una scelta opportuna dei limiti nell'integrale di (2), considerare il caso delle rendite *differite*.

(*) La (2) ha la fórma di un'equazione integrale di 1ª specie di cui v^u, funzione di due variabili, sarebbe il nucleo; ma il problema nostro è ben distinto dal problema di risoluzione di una tale equazione integrale, il quale ultimo consiste (com'è noto) nella determinazione della funzione b_u, da considerarsi come incognita, soddisfacente alla (2).

Nei primi numeri 1, ..., 6 si sono esaminati i metodi più convenienti per ottenere direttamente dei valori approssimati della soluzione di (2), ovvero per ottenere termini di correzione a valori già noti, indicando sempre il *senso dell'approssimazione* e, per lo più, anche la forma del resto.

In seguito (n^i 7, 8) si è fatto altrettanto per le più semplici forme d'interpolazione, indicando poi (n° 9) un altro metodo di risoluzione approssimata quando b_u soddisfa a certe particolari condizioni.

Come applicazione si è considerato nel n° 10 il caso di una rendita certa e continua la cui rata b_u è un polinomio del tempo u, esaminando in modo particolare il caso d'una rendita la cui rata è variabile in progressione aritmetica, od in particolare è costante, per il quale ultimo s'è anche fatta una applicazione numerica.

Infine si è mostrato come i risultati ultimi, relativi a rendite certe, si possono render validi anche per le *rendite vitalizie*, supposto sia costante il tasso o coefficiente istantaneo di mortalità μ_t.

1. — Converrà anzitutto osservare che, in virtù delle ipotesi fatte, il 1° membro della (2), considerato come funzione di v e per valori positivi di questa variabile, è definito (positivo) e crescente. Limitandoci a considerare per v i valori dell'intervallo $0 \urcorner 1$, il 1° membro della (2) assume il suo minimo valore — annullandosi — per $v = 0$, ed assume come valore massimo in detto intervallo $\int_0^n b_u du$, corrispondente a $v = 1$.

Ne segue che *la* (2) *ammette sempre una ed una sola soluzione reale, positiva e non maggiore di 1, quando sia:*

$$0 \leq A \leq \int_0^n b_u du, \tag{6}$$

condizione che riterremo sempre soddisfatta, volendo limitare lo studio della (2) nelle sue applicazioni effettive alle rendite continue (certe o vitalizie).

Vediamo dopo ciò i procedimenti più semplici per determinare, con approssimazione, la radice positiva (unica) della (2).

Poichè è:

$$(1+x)^{-u} = 1 - ux + \theta_u \frac{u(u+1)}{2} x^2, \tag{7}$$

$$e^{-yu} = 1 - uy + \theta'_u \frac{u^2}{2} y^2, \tag{7'}$$

$$(1-z)^u = 1 - uz + \theta''_u \frac{u(u-1)}{2} z^2, \tag{7''}$$

ove si è posto:

$$\theta_u = (1+\eta x)^{-u-2},$$
$$\theta'_u = e^{-\eta' uy},$$
$$\theta''_u = (1-\eta'' z)^{u-2},$$

essendo η, η', η'' dei valori convenienti dell'intervallo $0 \vdash 1$; intervallo nel quale son pure compresi θ_u, θ'_u per ogni valore di u e θ''_u per $u \geq 2$, mentre per $u < 2$ il θ''_u si conserva positivo ma maggiore di 1. Precisamente, θ''_u è una funzione definita decrescente di u (poichè la sua derivata $\theta''_u \log(1-\eta'' z)$ è negativa) ed ammette quindi nell'intervallo $0 \vdash n$ come massimo valore $\frac{1}{(1-\eta'' z)^2}$, cioè un numero non molto superiore ad 1 per gli ordinari valori del tasso z.

Sostituendo successivamente nella (2) i secondi membri delle (7), (7'), (7'') al posto di v^u ed osservando che nell'intervallo $0 \vdash n$ la funzione ub_u è sempre positiva, per un noto teorema d'analisi si potrà scrivere:

$$\int b_u du - x \int u b_u du + \frac{x^2}{2} \theta_1 (n_1 + 1) \int u b_u du = A, \tag{8}$$

$$\int b_u du - y \int u b_u du + \frac{y^2}{2} \theta_2 n_2 \int u b_u du = A, \tag{8'}$$

$$\int b_u du - z \int u b_u du + \frac{z^2}{2} \theta_3 (n_3 - 1) \int u b_u du = A, \tag{8''}$$

ove n_1, n_2, n_3 indicano valori determinati dell'intervallo $0 \vdash n$; θ_1, θ_2 son valori convenienti compresi fra 0 ed 1, e θ_3 è un valore determinato compreso fra 0 e $(1-\eta'' z)^{-2}$.

Negli integrali scritti si sono sottintesi per brevità i limiti $0, n$; a questo solo intervallo dovrà però supporsi estesa

l'integrazione tanto in essi come in tutti gli integrali che nel seguito non saranno altrimenti definiti.

Trascurando l'ultimo termine nel 1° membro delle (8), (8'), (8''), per ciascuno dei tre tassi soddisfacenti alla (2) si ottengono i valori approssimati x_1, y_1, z_1 espressi da:

$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{\int b_u du - A}{\int u b_u du}, \tag{9}$$

e l'errore commesso in ciascuno dei tre casi è rispettivamente

$$\theta_1 (n_1 + 1) \frac{x^2}{2}, \qquad \theta_2 n_2 \frac{y^2}{2}, \qquad \theta_3 (n_3 - 1) \frac{z^2}{2}.$$

Ne segue che x_1, y_1 sono sempre approssimati per *difetto* e l'errore che si commette assumendo per tali tassi discontinuo o continuo il valore (9) è minore rispettivamente di $\frac{1}{2}(n+1)x_0^2$, $\frac{1}{2} n y_0^2$, essendo risp. x_0, y_0 un valore maggiore o uguale del tasso vero.

2. — L'espressione (9) nel caso del *tasso anticipato* può rappresentare un valore approssimato sia per *difetto*, sia per *eccesso* a seconda che in (8'') è $n_3 > 1$ ovvero $n_3 < 1$.

In modo più esplicito, z_1 sarà approssimato per difetto o per eccesso secondo che l'integrale

$$\int_0^n \theta''_u u (u-1) b_u du$$

risulta positivo o negativo. Esisterà pertanto, com'è evidente, un numero positivo ν tale che:

$$\int_0^\nu \theta''_u u (u-1) b_u du = 0, \tag{10}$$

per cui quando $n > \nu$ il valore z_1 è approssimato per difetto, mentre risulta approssimato per eccesso quando $n < \nu$.

L'errore commesso, assumendo in luogo di z il valore z_1, è sempre inferiore a $\frac{1}{2}(n-1) z_0^2$ per $n > \nu$ ed a $\frac{1}{2} z_0^2 (1 - z_0)^{-2}$

per $n < \nu$, ove sia z_0 un valore non inferiore al tasso considerato.

Poichè poi da $x_1 = y_1 = z_1$, segue essere:

$$(1 + x_1)^{-1} > e^{-y_1} > 1 - z_1,$$

e siccome a valori approssimati per difetto dei tassi corrispondono per le (3), (4), (5) valori approssimati per eccesso di v, è facile riconoscere che x_1 è meno approssimato di y_1, il quale a sua volta è meno approssimato di z_1 quando questo sia approssimato per difetto.

Si deve osservare che non è facile determinare il valore ν della (10), perciò, anche per ottenere per z, invece di z_1, un valore approssimato in un solo senso qualunque sia n, conviene assumere quello che si ricava per es. dall'equazione di equivalenza del detto tasso con il tasso continuo, cioè dall'equazione ottenuta eguagliando i secondi membri delle (4) e (5).

Così si ha un valore $z_1' = 1 - e^{-y_1}$ il quale è approssimato per *difetto* come y_1, qualunque sia n; e l'errore, che si commette assumendo z'_1 in luogo di z, è minore di

$$e^{-y_1}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}ny_0^2}\right) = e^{-y_1}\left[1 - (1 - z_0)^{\frac{1}{2}n\log^2(1 - z_0)}\right],$$

ossia è minore di $1 - (1 - z_0)^{\frac{1}{2}n\log^2(1 - z_0)}$ per $z_0 \geq z$.

Osserveremo che qualora si ritenga nulla la funzione b_u nell'intervallo $0 \frown 1$, il che equivale a supporre la rendita continua *differita di un anno*, nella (10) si ha $\nu = 0$ e quindi, in tale ipotesi, z_1 è un valore sempre *approssimato per difetto* del tasso anticipato z.

3. — Per i tassi x, y, z si possono ottenere valori approssimati in senso opposto a quello dei valori ottenuti nei numeri precedenti, considerando un altro termine negli sviluppi (7), (7′), (7″) e quindi nelle successive (8), (8′), (8″). In tal modo, invece per es. della (8), s'avrà:

$$\int_0^n b_u\,du - x\int_0^n u\,b_u\,du + \frac{x^2}{2}\int_0^n u\,(u+1)\,b_u\,du -$$
$$- \theta\,\frac{x^3}{6}\int_0^n u\,(u+1)\,(u+2)\,b_u\,du = A,$$

ove $0 \leq \theta \leq 1$, e quindi l'ultimo termine del primo membro è negativo.

Indicando questo termine con $-\Omega$, la relazione scritta diventa un'equazione di secondo grado in x; se la risolviamo trascurando Ω, e ci limitiamo a considerare la radice che è sempre minore di qualunque sia n, cioè quella corrispondente al valore negativo del radicale, si ha:

$$(11) \qquad x_2 = \frac{\int u\, b_u\, du - \sqrt{(\int u\, b_u\, du)^2 - 2\,(\int u\, b_u\, du - A) \int u\,(u+1)\, b_u\, du}}{\int u\,(u+1)\, b_u\, du},$$

che si riconosce facilmente essere approssimato per *eccesso*.

In modo analogo si potrà pure ottenere, per il tasso continuo y, il seguente valore anch'esso approssimato per *eccesso*:

$$(11') \qquad y_2 = \frac{\int u\, b_u\, du - \sqrt{(\int u\, b_u\, du)^2 - 2\,(\int u\, b_u\, du - A) \int u^2\, b_u\, du}}{\int u^2\, b_u\, du}.$$

Non è conveniente invece considerare l'analogo valore approssimato del tasso anticipato, poichè nel determinare il senso dell'approssimazione s'incontra una difficoltà simile a quella indicata nel n° 2. Si potrà pertanto anche qui ricorrere all'equivalenza dei tassi, la quale ci dà, per es., il valore:

$$z_2 = 1 - e^{-y_2}$$

approssimato a z per *eccesso*.

4. — Possiamo ricavare per i tassi dei valori per difetto più approssimati di quelli espressi dalla (9), nel modo seguente.

Se nella nota diseguaglianza (*):

$$(12) \qquad \Pi\, \alpha_i^{b_i} \leq \left(\frac{\Sigma\, b_i\, \alpha_i}{\Sigma\, b_i}\right)^{\Sigma b_i},$$

ove tanto le sommatorie come il prodotto del 1° membro sono

(*) Cfr., per es., G. Peano, *Formulario Mathematico*, t. V (Torino, Bocca, 1905), p. 128.

tutti estesi agli stessi valori interi 1, 2, ..., m dell'indice i, poniamo $\alpha_i = v^{\frac{n}{m} i}$, essendo $n > 0$, si avrà:

$$(12') \qquad v^{\frac{n}{m} \Sigma i b_i} < \left(\frac{\Sigma v^{\frac{n}{m} i} b_i}{\Sigma b_i} \right)^{\Sigma b_i}.$$

Sia ora b_u una funzione di u integrabile nell'intervallo $0 \sqsupset n$ e, diviso questo in un numero m di parti eguali, indichiamo con $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ i valori che essa assume negli estremi superiori di ognuno degli intervalli parziali ottenuti. Poichè si ha allora:

$$\int_0^n b_u \, du = \lim_{m=\infty} \left(\frac{n}{m} \sum \beta_i \right),$$

$$\int_0^n u \, b_u \, du = \lim_{m=\infty} \left(\frac{n^2}{m^2} \sum i \beta_i \right),$$

$$\int_0^n v^u b_u \, du = \lim_{m=\infty} \left(\frac{n}{m} \sum v^{\frac{n}{m} i} \beta_i \right),$$

dalla (12') seguirà subito la seguente diseguaglianza:

$$(13) \qquad v^{\int u b_u du} < \left(\frac{\int v^u b_u \, du}{\int b_u \, du} \right)^{\int b_u du}.$$

Da questa, per la (2) e per le ipotesi fatte, si ha:

$$(14) \qquad \log v < \frac{\int b_u \, du}{\int u \, b_u \, du} \log \frac{A}{\int b_u \, du}.$$

Indicando con v_1 il valore, approssimato per *eccesso*, che si ottiene per v assumendo il secondo membro della (14) quale valore di $\log v_1$, i valori x_1', ... che ne conseguono per i tassi risulteranno approssimati per *difetto*. È facile riconoscere che tali valori sono maggiori di quello dato dalla (9), sempre quando quest'ultimo rappresenti un valore approssimato per difetto. Così, per es., si ha:

$$(15) \qquad \log (1 + x_1') = - \frac{\int b_u \, du}{\int u \, b_u \, du} \log \frac{A}{\int b_u \, du},$$

da cui segue immediatamente:

$$(16) \qquad x_1' = -1 + \left\{1 - \left(1 - \frac{A}{\int b_u\,du}\right)\right\}^{-\frac{\int b_u\,du}{\int u\,b_u\,du}} > \frac{\int b_u\,du - A}{\int u\,b_u\,du}.$$

Similmente si riconosce essere:

$$(16') \qquad y_1' = -\frac{\int b_u\,du}{\int u\,b_u\,du}\log\frac{A}{\int b_u\,du} > y_1.$$

5. — Quando già si conosce un valore approssimato del tasso, si può ottenere un altro valore più approssimato, applicando il procedimento di Newton alla ricerca di un *termine di correzione.*

Qui però, per ragioni analoghe a quelle esposte a proposito del tasso anticipato nei n^i 1, 2, non è opportuno valersi del detto procedimento sia per v (com'è stato invece fatto dal Boggio nella Memoria cit. al n° 5) sia per il tasso anticipato z. Possiamo piuttosto applicare il metodo di Newton ad uno dei due tassi discontinuo o continuo, e ricavare poi per l'altro e per il tasso anticipato i valori che si ottengono mediante la relazione di equivalenza d'ognuno di essi al tasso primo considerato.

Ponendo, per es.:

$$(17) \qquad x = x_1 + \alpha,$$

essendo x_1 un valore approssimato di x, poichè è:

$$(1 + x_1 + \alpha)^{-u} = (1 + x_1)^{-u}\left[1 - u\frac{\alpha}{1 + x_1} + \theta_u\frac{u(u+1)}{2}\left(\frac{\alpha}{1 + x_1}\right)^2\right],$$

ove $0 \leq \theta_u < 1$, sostituendo nella (2) e ricavando α dall'eguaglianza ottenuta, si ha:

$$\alpha = \frac{A_1 - A}{\int u(1 + x_1)^{-u-1}\,b_u\,du} + \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{\int u(u+1)\,\theta_u(1 + x_1)^{-u}\,b_u\,du}{\int u(1 + x_1)^{-u+1}\,b_u\,du},$$

nella quale si è indicato con A_1 il valore assunto dal 1° membro della (2) per $x = x_1$, cioè per $v = (1 + x_1)^{-1}$ (*).

Il secondo termine del 2° membro, nell'eguaglianza ultima, è sempre positivo e minore di $\frac{n+1}{2} \frac{\alpha_0^2}{1+x_1}$ per $\alpha_0 \geq \alpha$; cioè:

$$(18) \qquad \alpha_1 = (A_1 - A) \Big/ \int_0^n u\,(1 + x_1)^{-u-1}\, b_u\, du\,,$$

ci dà un valore approssimato per difetto di α, ed $x_2 = x_1 + \alpha_1$ è un valore più approssimato di x_1, ed approssimato per *difetto*.

Quindi, applicando replicatamente il procedimento esposto, si avrà una successione di valori ordinatamente crescenti x_2, x_3, ..., che tendono ad x come limite superiore.

In simil modo, se y_1 è un valore approssimato del tasso continuo y si otterrà, come altro valore più approssimato, ed approssimato per difetto:

$$(19) \qquad y_2 = y_1 + (A_1 - A) \Big/ \int_0^n u\, e^{-y_1 u}\, b_u\, du\,,$$

con un errore minore di $\frac{n}{2} \gamma_0^2$, per $\gamma \geq \mathrm{mod}\,(y - y_1)$.

Dato un valore approssimato z_1 del tasso anticipato z, col mezzo dell'equivalenza dei tassi si potrà ottenere, per es., un valore y_1 del tasso continuo, ed allora come corrispondente al valore y_2 dato dalla (19) s'avrà un nuovo valore z_2 più approssimato a z di z_1 ed approssimato per difetto.

Anche per il tasso discontinuo x può ricavarsi il valore $x_2' = e^{y_2} - 1$ dato dalla relazione di equivalenza di esso col tasso continuo; ed è facile riconoscere che x_2', pure approssimato per difetto, è maggiore e quindi più approssimato di $x_1 + \alpha_1$.

(*) Il valore del 1° membro della (2), corrispondente ad un valore assegnato di v, si potrà calcolare (quando la forma particolare della funzione b_u non permetta di eseguire altrimenti l'integrazione) con una delle formule di quadratura dei trapezî, di Simpson, ovvero con quella di Eulero-Maclaurin, della quale ho indicato un modo di trovare il resto nella Nota: " *Sopra alcune formule di quadratura usate in attuaria* " (Rivista Italiana di Ragioneria, Roma, 1914).

6. — Possiamo ottenere per la (17) del n° precedente un termine di correzione α_1' più approssimato del valore α_1 dato dalla (18)

Per questo si osservi che se nella (13) o (14) sostituiamo $\frac{v}{v_1}$ a v e $v_1^u b_u$ a b_u, si ottiene subito:

$$\log\left(\frac{v}{v_1}\right) < \frac{A_1}{\int u\, v_1^u\, b_u\, du} \log\left(\frac{A}{A_1}\right).$$

e siccome nel caso del tasso discontinuo per la (17) è:

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{1 + x_1 + \alpha}{1 + x_1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\alpha}{1 + x_1}\right)^{-1},$$

si avrà:

$$\log\left(1 + \frac{\alpha}{1 + x_1}\right) > \frac{A_1}{\int u\,(1 + x_1)^{-u}\, b_u\, du} \log \frac{A_1}{A};$$

perciò assumendo:

$$\log\left(1 + \frac{\alpha_1'}{1 + x_1}\right) = \frac{A_1}{\int u\,(1 + x_1)^{-u}\, b_u\, du} \log \frac{A_1}{A}, \tag{20}$$

α_1' rappresenta un valore approssimato per difetto di α.

Con procedimento analogo a quello seguito nel n° 4 per dimostrare che il valore x_1' ricavato dalla (15) è maggiore del valore x_1 dato dalla (9), si riconosce che α_1' è maggiore e quindi più approssimato di α_1; e sarà pure $x_2' = x_1 + \alpha_1'$ più approssimato di x_2.

Similmente, per il tasso continuo si ottiene il valore approssimato per difetto:

$$y_2' = y_1 + \frac{A_1}{\int u\, e^{-y_1 u}\, b_u\, du} \log \frac{A_1}{A}, \tag{21}$$

più prossimo ad y del valore y_2 espresso dalla (19).

7. — I precedenti procedimenti permettono di ottenere dei valori di v approssimati per difetto e per eccesso. Ora, noti due

valori v_1, v_2 approssimati il primo per difetto ed il secondo per eccesso, si possono dedurre infiniti altri valori mediante l'interpolazione per parti proporzionali, il che può farsi sotto varie forme.

Si può, per es., ritenere che *gl'incrementi del capitale* A *siano proporzionali agli incrementi della variabile* v.

Siccome però in questo modo, nella determinazione esatta del senso dell'approssimazione, s'incontrano difficoltà analoghe a quelle indicate nel n° 2 per la determinazione del segno di $z - z_1$, essendo z_1 espresso dalla (9), potremo invece considerare l'interpolazione fra i capitali ed i tassi.

Ammetteremo cioè che *gli incrementi del capitale* A *siano proporzionali agli incrementi del corrispondente tasso (discontinuo, continuo).*

Così, se x_1, x_2 sono due valori approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso di x, ed A_1, A_2 son i valori del capitale ad essi corrispondenti, cioè i valori assunti dal 1° membro della (2) quando si sostituisca v successivamente con $(1 + x_1)^{-1}$, $(1 + x_2)^{-1}$, un nuovo valore approssimato di x sarà:

$$x' = x_1 + \frac{A - A_1}{A_2 - A_1}(x_2 - x_1). \tag{22}$$

Quale espressione del resto $R = x - x'$ di questa formula, si ha (*):

$$R = \frac{1}{2}(A - A_1)(A - A_2)\left(\frac{d^2x}{dA^2}\right)_B, \tag{23}$$

indicando $\left(\frac{d^2x}{dA^2}\right)_B$ il valore che la derivata in parentesi assume per un certo valore B compreso fra A_1 ed A_2; e poichè si ha:

$$\frac{d^2x}{dA^2} = -\frac{\frac{d^2A}{dx^2}}{\left(\frac{dA}{dx}\right)^3} = \frac{\int u(u+1)(1+x)^{-u-2} b_u\, du}{(\int u(1+x)^{-u-1} b_u\, du)^3},$$

(*) V., per es., G. Peano, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, t. I, p. 106.

si riconosce essere sempre $R < 0$, cioè x' risulta approssimato per *eccesso*. Facendo una nuova interpolazione, partendo dai valori x_1, x', si ottiene un altro valore x'' di x approssimato ancora per eccesso, ma più approssimato di x'; e così proseguendo s'ottiene una successione x', x'', ... di valori, ordinatamente decrescenti, aventi per limite il tasso x.

Similmente si può procedere per il tasso continuo, di cui un nuovo valore, approssimato per *eccesso*, sarà:

$$y' = y_1 + \frac{A - A_1}{A_2 - A_1}(y_2 - y_1). \tag{24}$$

che si ottiene partendo dai due valori y_1, y_2 approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso.

Per il tasso anticipato si può trovare un nuovo valore approssimato z' per mezzo, ad es., di y', considerando l'equivalenza fra i due tassi z ed y, il che equivale a fare l'interpolazione fra A e $\log(1 - z)$.

Si può seguire la stessa via per il tasso discontinuo, cioè eseguire l'interpolazione fra il capitale A e $\log(1 + x)$; in tal modo si otterrà per x un valore approssimato per eccesso, che si riconosce subito essere minore e quindi più approssimato di x'.

8. — Un altro modo di applicare l'interpolazione segue dall'ammettere che *gli incrementi del logaritmo del capitale* A *siano proporzionali agli incrementi del corrispondente tasso continuo* y.

Si ha allora:

$$y_1' = y_1 + \frac{\log A - \log A_1}{\log A_2 - \log A_1}(y_2 - y_1) \tag{25}$$

ed il resto corrispondente (cfr. n° precedente) è:

$$-\frac{1}{2}(A - A_1)(A - A_2)\left(\frac{d^2 \log A}{dy^2}\right)_0 + \left(\frac{d \log A}{dy}\right)_0^3.$$

ove $y_1 < \omega < y_2$. E poichè si ha:

$$\frac{d \log A}{dy} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dy} = -\frac{1}{A} \int_0^n u\, e^{-yu}\, b_u\, du < 0\,,$$

$$\frac{d^2 \log A}{dy^2} = \frac{1}{A^2} \left[A \frac{d^2 A}{dy^2} - \left(\frac{dA}{dy} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{A^2} \left[\iint u^2\, e^{-(u+w)y}\, b_u\, b_w\, du\, dw - \iint uw\, e^{-(u+w)y}\, b_u\, b_w\, du\, dw \right] =$$

$$= \frac{1}{2A^2} \iint (u - w)^2\, e^{-(u+w)y}\, b_u\, b_w\, du\, dw > 0\,,$$

ne segue che il resto suddetto è sempre negativo, cioè y_1' è approssimato per *eccesso*.

Dopo ciò, ripetendo un ragionamento fatto dal Boggio (Mem. cit., n° 9), si può dimostrare che l'ultimo valore y_1' ottenuto per y è minore e quindi più approssimato del valore y', ottenuto nel precedente numero, espresso dalla (24).

Si può pure eseguire l'interpolazione fra il *logaritmo del capitale ed il tasso discontinuo*; si ottiene in tal modo un valore di x approssimato per *eccesso*, poichè, nel caso considerato, dalla

$$A = \int_0^n (1 + x)^{-u}\, b_u\, du\,,$$

si deduce facilmente:

$$\frac{d \log A}{dx} = -\frac{1}{A} \int_0^n u\, (1 + x)^{-u-1}\, b_u\, du < 0\,,$$

$$\frac{d^2 \log A}{dx^2} = \frac{1}{2A^2} \int_0^n \int_0^n \frac{(u - w)^2 + u + w}{(1 + x)^{u+w+2}}\, b_u\, b_w\, du\, dw > 0.$$

Peraltro, dal valore y_1' ottenuto poco fa per il tasso continuo, si può dedurre un valore approssimato x_1'' per quello discontinuo, considerando l'equivalenza fra i due tassi, il che equivale a fare l'interpolazione fra $\log A$ e $\log (1 + x)$; il valore x_1'' risulta più approssimato di quello che si ricava dall'interpolazione or ora accennata (Boggio, loc. cit., n° 9, pag. 120).

In simil modo, si potrà ottenere un valore approssimato per il tasso anticipato considerandone l'equivalenza col tasso continuo, cioè eseguendo l'interpolazione fra $\log A$ e $\log (1 - z)$.

Si può ancora applicare l'interpolazione ammettendo la proporzionalità fra *gli incrementi del reciproco del capitale ed i corrispondenti incrementi del tasso discontinuo*, nel qual caso però, come per le rendite non continue (Boggio, loc. cit., n° 10), non si può in generale determinare il segno del resto.

9. — La (2) si può pure risolvere in altro modo, mediante approssimazioni successive, quando la funzione b_u si supponga soddisfare, nell'intervallo $0 \frown n$, a speciali condizioni; per es. se si ha:

$$b_u \geq b_{n-u}\,, \tag{26}$$

essendo u un valore qualsiasi dell'intervallo $0 \frown \frac{n}{2}$.

Infatti, poichè dalla (2) segue:

$$v^{\frac{n}{2}} = A \Big/ \int_0^n b_u\, v^{-\frac{n-2u}{2}}\, du\,,$$

e può scriversi:

$$\int_0^n b_u\, v^{-\frac{n-2u}{2}}\, du = \int_0^{\frac{n}{2}} \left(b_u\, v^{-\frac{n-2u}{2}} + b_{n-u}\, v^{\frac{n-2u}{2}} \right) du\,,$$

indicando con v_1 un valore di v approssimato per eccesso, cioè supposto $1 \geq v_1 > v > 0$, dalla (26) seguirà essere:

$$b_u\, v^{-\frac{n-2u}{2}} + b_{n-u}\, v^{\frac{n-2u}{2}} > b_u\, v_1^{-\frac{n-2u}{2}} + b_{n-u}\, v_1^{\frac{n-2u}{2}}\,, \tag{27}$$

e quindi:

$$v^{\frac{n}{2}} < \frac{A}{\int_0^n b_u\, v^{-\frac{n-2u}{2}}\, du}\,,$$

od anche:

$$v^{\frac{n}{2}} < v_1^{\frac{n}{2}}\, \frac{A}{A_1}\,. \tag{28}$$

Se perciò si assume:

$$(28') \qquad v_2^{\frac{n}{2}} = v_1^{\frac{n}{2}} \frac{A}{A_1},$$

sarà v_2 un valore approssimato per *eccesso*, minore (perchè $A < A_1$) e quindi più approssimato di v_1.

Quando si supponga invece v_1 approssimato per difetto, le diseguaglianze (27), (28) cambiano di senso, di modo che il valore v_2 della (28') è in tal caso approssimato pure per difetto, e risulta più approssimato di v_1, poichè, essendo allora $A > A_1$, è $v_2 > v_1$.

Casi speciali ed applicazioni.

10. — Consideriamo ora il caso speciale in cui nella (2) si abbia:

$$b_u = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_m u^m,$$

ove le $a_0, a_1, \ldots a_m$ sono costanti assegnate; si verrà così a studiare, per es., il caso d'una *rendita certa e continua la cui rata, riferita all'unità di tempo, è un polinomio di grado* m *del tempo* u *contato a partire dall'istante attuale, dal quale deve iniziarsi il pagamento della rendita.*

In tal caso la (2) diventa:

$$(2') \qquad \sum_0^m {}_i a_i \int_0^n u^i v^u \, du = A.$$

Mediante l'integrazione per parti e ricordando che $\log v = -y$, si ha:

$$\int_0^n v^u u^i \, du = -\left[\frac{v^u}{y} u^i + \frac{i v^u}{y^2} u^{i-1} + \frac{i(i-1) v^u}{y^3} u^{i-2} + \ldots + \frac{i! \, v^u}{y^{i+1}}\right]_0^n =$$

$$-\frac{v^n}{y}\left[n^i + \frac{i}{y} n^{i-1} + \frac{i(i-1)}{y^2} n^{i-2} + \ldots + \frac{(i-1)!}{y^{i-1}} n + \frac{i!}{y^i}\right] + \frac{i!}{y^{i+1}}.$$

Se quindi sostituiamo nella (2′), si ha:

$$A = \sum_{0}^{m}{}_i\, a_i \frac{i!}{y^{i+1}} - \frac{v^n}{y} \sum_{0}^{m}{}_i \sum_{0}^{i}{}_k \frac{i!}{(i-k)!}\, a_i \frac{n^{i-k}}{y^k},$$

ossia:

$$A = \sum_{0}^{m}{}_i\, a_i \frac{i!}{y^{i+1}} - \frac{v^n}{y} \sum_{0}^{m}{}_k \frac{1}{y^k} \sum_{0}^{m-k}{}_i \frac{(i+k)!}{i!}\, a_{i+k}\, n^i;$$

ed indicando con b_n', b_n'', ... i valori delle successive derivate di b_u per $u = n$, cioè ponendo:

$$b_n^{(h)} = h!\, a_h + \frac{(h+1)!}{1!}\, a_{h+1}\, n + \frac{(h+2)!}{2!}\, a_{h+2}\, n^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m!}{(m-h)!}\, a_m\, n^{m-h} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

si avrà:

$$(29) \qquad A = -\frac{v^n}{y}\left(b_n + \frac{b_n'}{y} + \frac{b_n''}{y^2} + \ldots + \frac{b_n^{(m)}}{y^m}\right) + \frac{a_0}{y} + \frac{a_1}{y^2} +$$
$$+ \frac{2!\, a_2}{y^3} + \ldots + \frac{m!\, a_m}{y^{m+1}}.$$

od anche:

$$A y^{m+1} = -v^n\left[b_n y^m + b_n' y^{m-1} + \ldots + b_n^{(m)}\right] + a_0 y^m + a_1 y^{m-1} +$$
$$+ 2!\, a_2 y^{m-2} + \ldots + m!\, a_m.$$

Ora, se dopo aver sostituito a $v^n = e^{-ny}$ il suo sviluppo in serie, eseguiamo il prodotto di questa per il polinomio scritto in [...], poichè è, in generale:

$$h!\, a_h = b_n^{(h)} - n\, b_n^{(h+1)} + \frac{n^2}{2!}\, b_n^{(h+2)} - \ldots + (-1)^{m-h} \frac{n^{m-h}}{(m-h)!}$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

si riconoscono esser nulli i coefficienti dei termini di grado inferiore ad $m + 1$; dividendo perciò per y^{m+1}, la relazione scritta diventa:

$$(29') \qquad A = \sum_{1}^{\infty}{}_i (-1)^{i-1}\left[\frac{n^i}{i!}\, b_n - \frac{n^{i+1}}{(i+1)!}\, b_n' + \ldots +\right.$$
$$\left. + (-1)^m \frac{n^{i+m}}{(i+m)!}\, b_n^{(m)}\right] y^{i-1}.$$

Abbiamo così ottenuto, per la rendita considerata, un'equazione in y in cui non compaiono più integrali pur risultando sempre, in generale, trascendente.

Essa ha forma simile alla (1) considerata dal Prof. Boggio, dalla quale differisce in quanto la sommatoria è, nel nostro caso, estesa ad un numero infinito di termini ed il segno dei coefficienti non è più costante; questi si possono peraltro riconoscere aver segno alternato, quando si suppongano positivi a_0, a_1, ... a_m.

Alla (29') si possono ancora applicare i metodi d'approssimazione del Prof. Boggio, il che ci limiteremo a vedere (per brevità) in qualche caso particolare.

11. — Il caso particolare di $m = 0$ corrisponde ad una rendita continua la cui rata, riferita all'unità di tempo, è sempre costante; e poichè questa costante a_0 può supporsi eguale ad uno senza ledere alla generalità del problema, l'equazione (29) si ridurrà alla seguente in v:

$$A = \frac{v^n - 1}{\log v}, \tag{30}$$

poichè $y = -\log v$; od anche:

$$v^n - A \log v = 1. \tag{30'}$$

Il primo membro dell'ultima equazione, considerato come funzione di v presenta un minimo nel punto $v_0 = \sqrt[n]{\frac{A}{n}}$, è crescente per $v > v_0$ e decrescente per $v < v_0$. Perciò, volendo ottenere per tentativi dei valori approssimati di v si attribuirà a questo un valore qualsiasi (minore di 1), ed a seconda che per tale valore il 1° membro della (30') risulta minore o maggiore di 1, per avvicinarsi maggiormente alla soluzione occorrerà rispettivamente diminuire od aumentare il valore considerato per v (ovvero aumentare o diminuire il corrispondente valore del tasso).

Peraltro, possiamo ottenere dei valori approssimati della radice di (30) procedendo in modo analogo a quello seguito nei n^i 1 e 3; e ci limiteremo a considerare il tasso continuo y, dal quale si possono dedurre subito i valori corrispondenti del tasso

discontinuo x e di quello anticipato z con le note relazioni d'equivalenza:

$$x = e^y - 1\,, \qquad z = 1 - e^{-y}.$$

Posto adunque nella (30) $v = e^{-y}$, si ha:

$$e^{-ny} + Ay - 1\,,$$

dalla quale, mediante lo sviluppo di e^{-ny}, si deducono le seguenti equazioni:

$$(31) \qquad \begin{cases} -n + \frac{1}{2} n^2 y - \frac{1}{6} \theta n^3 y^2 + A = 0\,, \\ -n + \frac{1}{2} n^2 y - \frac{1}{6} n^3 y^2 + R_1 + A = 0\,, \end{cases}$$

ove $0 < \theta < 1$ ed $R_1 > 0$.

Se risolviamo la 1ª delle (31), dopo aver trascurato il termine con il fattore θ, otteniamo un valore approssimato per *difetto* del tasso y espresso da:

$$(32) \qquad y_1 = \frac{2(n - A)}{n^2}\,,$$

(positivo perchè si suppone $n > A$) e l'errore commesso risulta minore di $\frac{1}{3} n y_0^2$, essendo $y_0 \geq y$.

Risolvendo invece la 2ª delle (31), si ha:

$$y = \frac{3n^2 \pm \sqrt{24n^3(A + R_1) - 15n^4}}{2n^3}\,,$$

e poichè per ogni valore di n dev'essere $y < 1$, non è accettabile innanzi al radicale il segno $+$, quindi sarà:

$$(33) \qquad y = \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n}\sqrt{24\,\frac{A + R_1}{n} - 15}.$$

Se trascuriamo R_1 sotto il radicale, s'avrà un valore y_2, di y, approssimato per *eccesso*, che è:

$$(33') \qquad y_2 = \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n}\sqrt{24\,\frac{A}{n} - 15}\,.$$

sempre quando sia $\frac{A}{n} \geq \frac{3}{8}$. Quando invece è $\frac{A}{n} < \frac{3}{8}$ l'espressione scritta di y_2 risulta imaginaria; si potrà però ovviamente assumere quale valore approssimato per *eccesso* $y_2' = \frac{3}{2n}$, ottenuto trascurando il radicale che compare nell'espressione (33) di y, il quale deve sempre essere reale.

Trovati così due valori y_1, y_2 del tasso y, approssimati l'uno per difetto e l'altro per eccesso, si potranno dedurre infiniti altri valori sempre più approssimati coll'applicazione dell'interpolazione, in una delle diverse forme considerate nei n^i 7, 8; per es. coll'interpolazione fra il tasso continuo ed il logaritmo del capitale come s'è indicato nel n° 8.

12. — Per meglio mostrare l'applicazione pratica delle cose esposte, supporremo per esempio nella (30′) $A = 15$, $n = 20$; cioè di dover risolvere l'equazione:

$$(30'') \qquad v^{20} - 15 \log v = 1.$$

Quali valori y_1, y_2 del tasso continuo, espressi nel n° precedente, si trovano:

$$y_1 = 0{,}025\,, \qquad y_2 = 0{,}032\,,$$

mentre gli equivalenti valori del tasso discontinuo sono:

$$x_1 = 0{,}0253\,, \qquad x_2 = 0{,}0324\,;$$

e sostituendo nella (30″), quali valori del 1° membro si hanno rispettivamente 0,988 e 1,007.

Calcolato dello stesso primo membro di (30″) il valore corrispondente ad $x' = 0{,}03$ si ha 0,99705, perciò x_1' sarà ancora un valore approssimato per *difetto*; e poichè il detto primo membro per $x_2' = 0{,}031$ diventa:

$$0{,}54303 + 0{,}45793 = 1{,}00096,$$

si conclude che il tasso discontinuo cercato è compreso fra il 3 % ed il 3,10 %.

Applico ora l'interpolazione seguendo la via indicata nel n° 8; per il nuovo tasso approssimato x', in virtù della (24), si ha:

$$\log(1+x') = \log 1{,}031 + \frac{\log A - \log A_1}{\log A_2 - \log A_1}(\log 1{,}031 - \log 1{,}03),$$

ove A_1 ed A_2 sono i valori dei capitali corrispondenti rispettivamente ai valori 0,031 e 0,03 di x; da cui, eseguendo i calcoli, s'ottiene $x' = 0{,}03066$, valore approssimato per *eccesso*.

Se invece adottiamo l'interpolazione fra x ed $\frac{1}{A}$, come si è accennato alla fine del n° 8, cioè poniamo:

$$x'' = 0{,}03 + \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{A_1}}{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}}(0{,}031 - 0{,}03),$$

si ottiene $x'' = 0{,}0305336$, il quale valore è approssimato per *difetto* perchè il valore di A che ad esso corrisponde è $15{,}25 > 15$.

Per le applicazioni pratiche sarà, in generale, più che sufficiente l'avere stabilito che si ha:

$$0{,}03053 < x < 0{,}03066.$$

13. — Si può trattare in modo analogo, per la (29), il caso di $m = 1$, in cui *la rata della rendita continua varia in progressione aritmetica*, cioè è una funzione lineare del tempo:

$$b_u = a + bu.$$

In tale ipotesi, dalla (29') si ha subito:

$$A = \sum_1^\infty {}_i (-1)^{i-1}\left[\frac{n^i}{i!}(a+bn) - \frac{n^{i+1}}{(i+1)!}b\right] y^{i-1},$$

ossia:

$$A = \sum_1^\infty {}_i (-1)^{i-1}\frac{n^i}{(i+1)!}[(i+1)a + ibn]\, y^{i-1}:$$

ove per a e b positivi (come supporremo) la serie del secondo membro ha i suoi termini con segno alternato.

Si possono allora ottenere immediatamente due valori del tasso, risolvendo le equazioni seguenti:

$$A = \frac{n}{2!}(2a + bn) - \frac{n^2}{3!}(3a + 2bn)\,y + R$$

$$A = \frac{n}{2!}(2a + bn) - \frac{n^2}{3!}(3a + 2bn)\,y + \frac{n^3}{4!}(4a + 3bn)\,y^2 - R_1,$$

ove R ed R_1 sono positivi; trascurandoli si ha:

$$y_1 = \frac{3n(2a + bn) - 6A}{n^2(3a + 2bn)},$$

$$y_2 = \frac{2n(3a + 2bn) - 2\sqrt{6n(4a + 3bn)A - n^3(15a^2 + 5b^2n^2 + 18abn)}}{n(4a + 3bn)}.$$

Il 1° di questi valori è approssimato per difetto ed il secondo per eccesso; essi ci permettono quindi, sia per interpolazione, sia col metodo del termine di correzione, di determinare altri valori più approssimati per y e quindi anche per v o per gli altri due tassi x e z.

Le espressioni ora ottenute di y_1, y_2 contengono naturalmente le analoghe ottenute nel n° 11 per $a = 1$, $b = 0$.

14. — Possiamo domandarci se, ferma l'ipotesi che *la rata di rendita riferita all'unità di tempo sia un polinomio di grado* m *del tempo* u *contato a partire dall'istante attuale*, anche per il *caso di una rendita vitalizia continua* sia possibile trasformare la (2) in altra *equazione priva di integrali*, analoga a quella ottenuta nel n° 10 per le rendite certe.

Ora, se si ammette la legge di sopravvivenza del Makeham (che contiene come caso particolare quella del Gompertz per $a = 0$), cioè si suppone che il coefficiente istantaneo di mortalità per l'età t sia:

$$\mu_t = a + bc^t,$$

ove a, b, c sono costanti, e quindi per la probabilità $p(t, u)$ che un individuo di età t sopravviva all'età $t + u$ si abbia:

$$\log p(t, u) = -au - \frac{b}{\log c}\,c^t(c^u - 1),$$

in generale non sarà possibile eseguire sotto forma finita l'integrazione nella (2). E lo stesso può ripetersi anche quando si suppone:

$$\mu_t = a - bt,$$

e quindi:

$$p(t, u) = e^{-au - \frac{b}{2}(u+2t)u}.$$

Se invece, in una prima approssimazione, si suppone costante $\mu_t = a$, e quindi

$$p(t, u) = e^{-au},$$

questo fattore potrà riunirsi nella (2) con e^{a} e sarà facile in tal caso, cioè per $b_u = e^{-au}(a_0 + a_1 u + \ldots + a_m u^m)$, ottenere in luogo della (2) una forma analoga alla (29) senza integrali. È sufficiente anzi, come si vede subito, nella (29) sostituire v con $e^{-a} v$ per ottenere senz'altro l'equazione cercata.

Quindi, quanto s'è detto nei n^i 11, 12 e 13 in merito a casi particolari della (29) si può ancora ripetere per le analoghe equazioni particolari relative a rendite vitalizie, tenendo presente la sostituzione indicata, il che equivale a togliere a da ogni valore prima ottenuto per il tasso continuo, onde ottenere il nuovo tasso relativo alla rendita vitalizia.

Torino, dicembre 1913.

Sulle congruenze rettilinee W, di cui una od ambe le falde focali sono rigate.

Nota del Socio C. SEGRE

1. — Una *curva* L sia tale che, per ogni suo punto, entro al piano osculatore, passi una retta di una congruenza lineare fissa N. Dico che la curva (cioè ogni sua tangente) starà in un complesso lineare di rette passante per N.

La cosa riesce intuitiva se riguardiamo L come costituita di punti *successivi*, infinitamente vicini, $\ldots a\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ Nel fascio dei complessi lineari passanti per N consideriamo quello che contiene la retta (tangente) aa_1. Per ipotesi nel piano (osculatore) aa_1a_2 sta una retta di N passante per a_1, e diversa in generale da aa_1. Così al complesso lineare considerato appartengono due rette di quel piano, passanti per a_1; e quindi gli apparterrà pure la retta a_1a_2. Da ciò si dedurrà similmente che il complesso contiene la a_2a_3; poi la a_3a_4, e così via.

Volendo invece una dimostrazione analitica, rappresentiamo le coordinate omogenee projettive $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ dei punti x di L come funzioni di un parametro t; indichiamo con apici le derivazioni rispetto a t, e con x', x'' i punti che han per coordinate le x_i', x_i''. La tangente in x ad L è allora la retta dei punti x, x', retta le cui 6 coordinate sono

$$(x\, x')_{ik} = x_i\, x_k' - x_k\, x_i'.$$

Il piano osculatore in x è il piano dei punti x, x', x'' (che non sono in generale allineati). Quindi una retta passante per x e giacente in questo piano ha le coordinate

$$\lambda\, (x\, x')_{ik} + \mu\, (x\, x'')_{ik}.$$

Per ipotesi, prendendo per λ e μ convenienti funzioni di t, si ha così una retta di una congruenza lineare fissa, cioè di due complessi lineari fissi. Ossia:

$$\sum a_{ik} [\lambda (x x')_{ik} + \mu (x x'')_{ik}] = 0$$
$$\sum b_{ik} [\lambda (x x')_{ik} + \mu (x x'')_{ik}] = 0,$$

ove le a_{ik}, b_{ik} son costanti. Poniamo, per brevità,

$$A = \sum a_{ik} (x x')_{ik}.$$

sicchè, derivando (rispetto a t),

$$A' = \sum a_{ik} (x x'')_{ik};$$

e similmente

$$B = \sum b_{ik} (x x')_{ik}, \qquad B' = \sum b_{ik} (x x'')_{ik}.$$

Allora le due equazioni precedenti, eliminandone λ e μ, danno:

$$AB' - BA' = 0,$$

il cui integrale

$$\alpha A + \beta B = 0$$

(ove α, β indicano costanti) esprime che le tangenti xx' di L stanno in un complesso lineare passante per la data congruenza: il che appunto volevamo dimostrare.

2. — Ciò premesso, consideriamo una congruenza rettilinea W, che abbia per una falda focale una rigata sghemba R, e faccia corrispondere alle generatrici rettilinee di questa (o ad *un* sistema di tali generatrici, se R è una quadrica) un sistema di asintotiche dell'altra falda focale S, che non siano rette [1].

Sia L una di queste asintotiche di S, l la corrispondente generatrice di R. Le ∞^1 rette della congruenza che hanno i loro

[1] Ricordo che (seguendo il sig. Bianchi) si chiamano *congruenze W* quelle congruenze di rette che determinano tra le due falde focali una tal corrispondenza da mutare le asintotiche di un sistema in asintotiche: onde anche le asintotiche dell'altro sistema si muteranno in asintotiche.

fochi risp. su quelle due linee, stanno nella congruenza lineare speciale composta delle tangenti a R nei punti di l (congruenza lineare che ha per *direttrici* l e la generatrice di R infinitamente vicina ad l). D'altronde ognuna di esse è pur tangente a S, per ipotesi, in un punto di L; sta cioè nel piano che in quel punto è tangente a S, vale a dire (essendo L asintotica) osculatore a L. Possiamo dunque applicare a L il lemma del n. 1; e concludiamo: *Ogni asintotica di* S, *del suddetto sistema, appartiene* (*con le sue tangenti*) *ad un complesso lineare di rette.* Questo complesso contiene la congruenza lineare delle tangenti ad R nei punti della generatrice l corrispondente a quell'asintotica L di S.

3. — Supponiamo ora che anche S, come R, sia rigata. Si tratti cioè di *congruenze* W *le cui falde focali siano entrambe rigate.* In un'altra Nota (²) io mi ero occupato, come già aveva fatto il sig. Bianchi, del caso in cui alle generatrici rettilinee di una falda focale (o ad un sistema di tali generatrici, se si tratta di una quadrica) corrispondano sull'altra falda focale generatrici rettilinee. Ora invece siamo (secondo il n. 2) nell'altra ipotesi: che alle generatrici considerate di R corrispondano sulla S le asintotiche che *non* son rettilinee. Vedremo facilmente che quest'ipotesi non dà nulla di nuovo (³).

Applichiamo in fatti la proposizione del n. 2, tenendo conto che adesso la superficie S è rigata. Per ognuna, L, delle *curve* asintotiche di cui ivi si parla, il complesso lineare di rette, che ne contiene le tangenti, contiene tutte le rette che passano per un punto di L e giacciono nel rispettivo (piano osculatore di L,

(²) *Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate,* in questi Atti, vol. 42 (1907), p. 539.

(³) Cfr. M. Picone, *Sulle congruenze rettilinee W*, Rendic^i Circolo matem^o di Palermo, t. 37, (1914)₁. (L'estratto è uscito nell'ottobre 1913). Il risultato di questo Autore, per quel che riguarda l'attuale problema, non coincide con quello che qui otterremo (n. 6). Informato di ciò, il sig. Picone ha proseguito ulteriormente i suoi calcoli, giungendo infine a conclusioni concordanti colle nostre: come apparirà in una nuova Nota di lui, in quei Rendiconti.

Cfr. anche le parole di E. J. Wilczynski alla fine del § 9 della sua Memoria premiata *Sur la théorie générale des congruences,* Mém. (in-4°) de l'Acad. de Belgique, (2) t. 3, 1911.

ossia) piano tangente di S: cioè tutte le tangenti ad S nei punti di L. In particolare tutte le generatrici della rigata S staranno in quel complesso lineare.

Variando L, il complesso lineare dovrà variare: perchè non possono tutte le tangenti di una superficie S (non piana) giacere in uno stesso complesso lineare. Varierà in un fascio di complessi lineari: se no, le generatrici di S, essendo comuni a tre complessi lineari, linearmente indipendenti, starebbero in una schiera di generatrici di una quadrica; non vi sarebbero asintotiche *curve*. Dunque *tutte le generatrici di* S *stanno in una congruenza lineare fissa*. — Diciamo m n le direttrici (distinte od infinitamente vicine, ma sghembe fra loro) di questa.

4. — Abbiam rilevato al n. 2 che il complesso lineare che contiene L contiene pure la congruenza lineare delle tangenti a R nei punti di l: in particolare conterrà la stessa l. Ne segue intanto che non possono tutte le generatrici l di R appoggiarsi ad m; perchè in tal caso dovrebbero stare nella congruenza lineare $(m\,n)$ testè definita. Le due rigate R, S starebbero in una stessa congruenza lineare: dal che si trae subito che, chiamando omologhi su R, S i punti di contatto delle rette che le toccano entrambe, ai punti di una stessa generatrice di R corrisponderebbero su S i punti di una generatrice (o di più generatrici) [4], e non già quelli di un'asintotica curva.

Considerando su R una successione di generatrici infinitamente vicine $l\,l_1\,l_2\,l_3\ldots$, potremo esprimere il fatto ricordato or ora (dal n. 2) così: la congruenza lineare che ha per direttrici $l\,l_1$ sta in uno stesso complesso lineare colla congruenza $(m\,n)$. Tenuto conto che le quattro rette $l\,l_1\,m\,n$ sono sghembe fra loro, ciò equivale a dire che queste rette stanno in una stessa

[4] In fatti, se una retta g tocca due rigate R, S di una stessa congruenza lineare, risp. in due punti che non siano singolari per la congruenza, ciò equivale a dire che due generatrici infinitamente vicine di R e due generatrici infinitamente vicine di S incontrano g, e quindi stanno nella schiera costituita dalle rette della congruenza lineare appoggiate a g. Le infinite rette dell'altra schiera che è incidente a questa toccheranno R, S nei punti delle generatrici passanti risp. pei due punti di contatto di g.

V. anche il n. 9 della Nota citata in [2].

schiera rigata (vale a dire sistema di generatrici di una quadrica sghemba). Similmente staranno $l_1\, l_2\, m\, n$ in una stessa schiera rigata, la quale coinciderà colla precedente, avendo comuni con essa tre rette; e così $l_2\, l_3\, m\, n$, ecc. Ossia R non è altro che una quadrica passante per m, n, e della quale si assumono come generatrici $l \ldots$ quelle della stessa schiera di m, n.

5. — Alla stessa conclusione si giunge analiticamente. Le coordinate l_{ik} della generatrice variabile l di R siano date funzioni di t. Per brevità scriviamo (p, q) in luogo del polinomio $p_{12}\, q_{34} + \ldots$ che, uguagliato a zero, dà la condizione d'incidenza di due rette p, q. Le rette p tangenti a R nei punti di una l (ossia incidenti ad l ed alla infinitamente vicina) son quelle che soddisfano alle due condizioni

$$(p, l) = 0 \quad , \quad (p, l + l'\, dt) = 0,$$

vale a dire

$$(p, l) = 0 \quad , \quad (p, l') = 0$$

(sempre indicando con un apice la derivazione rispetto a t). Questa congruenza lineare di rette p sta in un complesso lineare che, al variar di t, varia entro un dato fascio. Ciò significa che da quelle due equazioni nelle p deve seguire:

$$\lambda\, (p, a) + \mu\, (p, b) = 0,$$

ove le a e b sono i coefficienti di due complessi lineari fissati in quel fascio, e λ, μ son convenienti funzioni di t. Sarà dunque, per ognuna delle 6 combinazioni ik:

$$\rho\, l_{ik} + \sigma\, l_{ik}' = \lambda a_{ik} + \mu b_{ik},$$

ove ρ, σ son funzioni di t.

Riguardando questa relazione come equazione differenziale per la funzione l_{ik} di t, e tenendo conto che a_{ik}, b_{ik} son costanti, si trova subito che l'integrale avrà la forma

$$l_{ik} = a_{ik}\, \varphi\, (t) + b_{ik}\, \psi\, (t) + c_{ik}\, \chi\, (t),$$

ove c_{ik} è costante, e le funzioni φ, ψ, χ non dipendono dagli indici ik.

Da queste espressioni delle coordinate della retta l segue che questa varia appunto entro una schiera rigata, ecc. ecc.

6. — Sulla quadrica R sta, oltre alla schiera descritta da l, una seconda schiera rigata, avente per direttrici m, n, cioè situata in una stessa congruenza lineare colla serie delle generatrici di S. Perciò, applicando di nuovo un'osservazione ricordata al n. 4, la corrispondenza fra i punti di R, S che son fochi di una stessa retta della congruenza W muterà le generatrici di S in quella 2ª schiera di R. Ciò s'accorda col fatto che, la congruenza essendo una W, deve mutare ogni sistema di asintotiche di S in un sistema di asintotiche di R.

Così siam giunti al seguente risultato. intorno alla questione posta al n. 3: *Se una congruenza avente per falde focali due rigate sghembe* R, S, *fa corrispondere ad un sistema di asintotiche essenzialmente curve di* S *un sistema di generatrici rettilinee di* R, *sarà* R *una quadrica, e due di queste sue generatrici* (*distinte od infinitamente vicine*) *saranno direttrici per la rigata* S. *La congruenza farà corrispondere alle generatrici rettilinee di* S *la seconda schiera di generatrici di* R.

7. — Alla proposizione del n. 2 aggiungiamo un'osservazione quasi evidente (e che non sarà certo nuova) intorno alle superficie S che hanno un sistema di asintotiche *curve* appartenenti a complessi lineari di rette.

Fissata una, L, di quelle asintotiche, le *seconde* tangenti principali di S nei punti di L (cioè le tangenti in questi punti alle asintotiche del secondo sistema) stanno tutte in una congruenza lineare, limite dell'intersezione del complesso lineare che contiene L con quello che contiene l'asintotica L_1 infinitamente vicina ad L.

Geometricamente ciò risulta subito dal fatto che ognuna di quelle tangenti, riguardata come congiungente due punti infinitamente prossimi, a e a_1, di L e L_1, essendo tangente principale di S, può pure considerarsi come intersezione dei piani tangenti in a, a_1: è dunque comune ai fasci di rette che vanno

in quei piani da questi punti, fasci che stanno nei due complessi lineari di L, L_1.

Analiticamente: le 4 coordinate x_i dei punti x di S siano date funzioni di u, v, sì che le linee $u =$ cost., $v =$ cost. siano i due sistemi di asintotiche. Indicando con a_{ik} $(i, k = 1, \ldots 4)$ delle funzioni di u tali che $a_{ik} + a_{ki} = 0$, scriviamo l'equazione del complesso lineare di rette a cui appartenga, per ipotesi, la $u =$ cost., così:

$$\sum a_{ik}\, x_i\, y_k = 0$$

(essendo $x\,y$ due punti di una retta del complesso). Il piano che corrisponde al punto x di S rispetto a quel complesso lineare è il piano tangente in x ad S, e quindi il piano osculatore in x alla $v =$ cost. Contiene dunque i punti x', x'' (se cogli apici indichiamo le derivazioni rispetto ad u); sicchè:

$$\sum a_{ik}\, x_i\, x_k' = 0$$
$$\sum a_{ik}\, x_i\, x_k'' = 0.$$

Derivando rispetto ad u la 1ª di queste identità e tenendo conto della 2ª abbiamo:

$$\sum a_{ik}'\, x_i\, x_k' = 0.$$

Questa esprime che la retta dei punti $x\,x'$, vale a dire la tangente in x alla $v =$ cost., sta nel complesso lineare a_{ik}', ben determinato quando u è fissata, e diverso dal complesso a_{ik} in cui pure varia quella retta.

8. — Così gli ∞^1 complessi lineari di rette a cui appartengono, per ipotesi, le asintotiche L di un sistema, della superficie S, portano a considerare ∞^1 congruenze lineari, colle loro coppie di direttrici g, h, e le rigate G, H descritte da queste ([5]). Quelle congruenze lineari costituiscono un complesso particolare

([5]) Si vede subito che G, H sono, in generale, le due falde focali di una congruenza W che fa corrispondere su esse due generatrici, come g, h. Cfr. ([2]).

(l'*inviluppo* della ∞^1 di complessi lineari), che contiene la congruenza delle *seconde* tangenti principali di S.

Se siamo nel caso del n. 2, cioè S è, con una rigata R, falda focale di una congruenza W che fa corrispondere alle L le generatrici di R; abbiam visto che il complesso lineare cui appartiene una L contiene la congruenza lineare che ha per direttrici la generatrice l di R, omologa della L, e la generatrice successiva l_1. Similmente il complesso lineare cui appartiene la successiva della L conterrà la congruenza lineare (l_1, l_2). Quindi la congruenza lineare (g, h), intersezione dei due complessi lineari, conterrà la schiera rigata comune alle congruenze (l, l_1), (l_1, l_2), vale a dire la schiera rigata delle tangenti principali di R nei vari punti di l (diverse da l). In altre parole, g ed h stanno nella schiera rigata $l\, l_1\, l_2$ osculatrice ad R lungo l.

9. — Se, in particolare, R è una quadrica, staranno g ed h nella schiera di generatrici di R che è descritta da l. E considerando anche l'altra schiera di R, e le corrispondenti asintotiche di S, otteniamo la seguente proposizione:

Se una congruenza W *ha per falda focale una quadrica (non cono)* R, *l'altra falda focale* S *(quando non sia rigata) gode della proprietà che le sue tangenti principali dell'un sistema determinano, per sezione, fra i punti di* R, *una corrispondenza che fa accoppiare fra loro le generatrici di una schiera di* R; *e similmente le tangenti principali di S del secondo sistema, per la seconda schiera di generatrici di* R. Le tangenti principali di S (del 1° sistema), che s'appoggiano ad una coppia (g, h) di generatrici di R della 1ª schiera, escono dai punti di un'asintotica L di S del 2° sistema (cioè asintotica inviluppata da tangenti principali del 2° sistema). Quest'asintotica appartiene al complesso lineare di rette che contiene la congruenza lineare (g, h), e quella analoga infinitamente vicina (g_1, h_1). — Similmente, scambiando i due sistemi, e mutando la 1ª schiera di R nella 2ª.

Si noti poi che, *se per una superficie* S *avviene che ognuna delle sue tangenti principali di un sistema si appoggi a due generatrici di una schiera di una data quadrica* R, *omologhe in una corrispondenza involutoria assegnata entro quella schiera, ciò basta perchè* R *ed* S *si possan riguardare come le falde focali di una, anzi, di due congruenze* W.

Invero, siano $a\, a_1\, a_2$ punti infinitamente vicini di S tali che la retta aa_1 sia tangente principale di S, del detto sistema, appoggiata alla coppia g, h di generatrici omologhe della schiera nominata di R, e la retta a_1a_2 lo stesso, per la coppia g_1, h_1 infinitamente vicina a quella. Il complesso lineare C che congiunge le due congruenze lineari (g, h), (g_1, h_1), contiene le due rette aa_1, a_1a_2, e quindi fa corrispondere ad a_1 il piano aa_1a_2, che è osculatore in a_1 ad un'asintotica, ossia tangente in a_1, o (ciò che al limite fa lo stesso) in a ad S (6). — Di qui intanto si trae che il luogo L dei punti a le cui tangenti principali (del sistema considerato) si appoggiano ad una stessa coppia g, h della data corrispondenza involutoria è un'asintotica di S: perchè luogo dei punti a cui, rispetto ad un complesso lineare fisso C, corrispondono i piani tangenti in essi a S.

Consideriamo ora le tangenti comuni ad R, S; e precisamente le due rette che da un punto qualunque a di L, entro al piano α tangente in a ad S, si posson condurre a toccare la conica sezione di R con α. La corrispondenza che è data fra le generatrici di una schiera di R, produce per sezione con α una corrispondenza fra i punti della conica. Il fatto che le due congruenze lineari (g, h), (g_1, h_1) stanno nel complesso lineare C che contiene il fascio di rette $a\,\alpha$ si traduce in quest'altro: che le traccie di g, h sulla conica, e così pure le tracce di g_1, h_1 (infinitamente vicine a quelle), sono allineate con a. Ne segue che i punti di contatto b, b' della conica colle tangenti tirate da a si posson definire come le tracce di quelle rette l, l' della schiera rigata R, che son limiti delle rette doppie di quell'involuzione fra rette della schiera stessa, che è determinata dalla coppia g, h e da un'altra coppia g_1, h_1 della data corrispondenza, infinitamente vicina a quella. Perciò se un punto a si muove su S, in modo che la coppia g, h non muti, e descrive quindi un'asintotica L, il corrispondente punto b (o b') su R descriverà una generatrice determinata l (o l'). La congruenza generata dalle tangenti comuni ab (oppure ab') di R, S è dunque una W.

---

(6) Anche questa considerazione infinitesimale si può sostituire con un breve calcolo, analogo ad altri che abbiam fatto precedentemente.

10. — Le considerazioni del n. 9 conducono naturalmente ad una soluzione del problema: *data una quadrica (non degenere)* R, *costruire le congruenze* W *di cui essa è falda focale* (7). Sarà anzi la seconda falda focale S quella che noi costruiremo.

Dimostreremo che *si può prendere ad arbitrio la corrispondenza involutoria fra le generatrici della 1ª schiera di* R, *determinata dalle tangenti principali di* S *del 1° sistema; e così pure l'analoga corrispondenza fra le generatrici della 2ª schiera* R: *con la condizione che nessuna delle due corrispondenze sia un'involuzione ordinaria (cioè quadratica)* (8).

Si osservi che questo enunciato si può anche presentare in altro modo. Per ogni coppia g, h di generatrici omologhe della 1ª schiera di R, e per la coppia infinitamente vicina g_1, h_1, si considerino le due congruenze lineari che le hanno risp. per direttrici, e si chiami di nuovo C il complesso lineare contenente queste due congruenze. Al variar della coppia (g, h) il complesso C descrive il sistema ∞^1 dei complessi lineari che contengono le asintotiche del 2° sistema di S (9). Dare, ad arbitrio, la corrispondenza fra le generatrici, come g, h, della 1ª schiera di R equivale a dare ad arbitrio un sistema di ∞^1 complessi lineari come C, entro la rete dei complessi lineari passanti per la 2ª schiera di R: giacchè la congruenza lineare intersezione di ogni complesso C col suo infinitamente vicino C_1 del dato sistema ∞^1 avrà per direttrici appunto due rette g, h, della 1ª schiera, omologhe nella 1ª corrispondenza. — Analogamente per un 2° sistema ∞^1 di complessi lineari F, passanti per la 1ª schiera di R, e legati alla corrispondenza fra le generatrici della 2ª schiera.

Per un punto a si consideri il cono delle rette che vanno da a ad incontrare le varie coppie di generatrici g, h della 1ª schiera di R, omologhe nella corrispondenza data: cono che può anche riguardarsi come inviluppato dai piani che corrispon-

(7) Cfr. un'altra costruzione nella nota a pag. 5 della Memª del Bianchi *Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche*, Rendic. Accad. Lincei (5) 22, 1913_2, pag. 3.

(8) Abbiamo così due funzioni di una variabile *arbitrarie*.

(9) Il complesso C risulterebbe *fisso* solo quando la data corrispondenza tra le generatrici della 1ª schiera di R fosse un'ordinaria involuzione: perciò appunto si è escluso questo caso.

dono ad a rispetto agli ∞^1 complessi lineari C. Se a sta su una superficie S, soluzione del nostro problema, il piano α tangente ad S in a sarà uno dei piani ora nominati. Così pure, se, invece di quel cono, prendiamo il cono inviluppato dai piani corrispondenti ad a rispetto agli ∞^1 complessi lineari F.

Ciò posto, ad ogni punto a dello spazio si associ un piano α quando questo sia tangente ad entrambi quei coni uscenti da a. Otterremo così, in generale, (se esistono tali piani tangenti comuni) ∞^3 *elementi* composti di punto e piano incidenti (*faccette*, come dice il sig. Bianchi). Ciò è l'equivalente geometrico di un'equazione (di Pfaff) ai differenziali totali fra le 3 coordinate non omogenee $x\,y\,z$ di punto, della forma

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

(ove X, Y, Z son funzioni date di quelle 3 coordinate). Noi vogliamo dimostrare che quegli ∞^3 elementi si posson raggruppare in ∞^1 sistemi costituiti ognuno dagli *elementi* (punto e piano tangente) di una superficie (*integrale*). E ciò è come dire che il 1° membro di quell'equazione, alterato per un conveniente fattore, si può esprimere come il differenziale totale di una funzione di x, y, z. È ben noto che la condizione perchè ciò avvenga (condizione d'integrabilità) è:

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \ldots = 0.$$

Dobbiamo mostrare che essa è verificata ([10]).

11. — A questo scopo mettiamo quella condizione sotto forma geometrica.

Fissato un elemento (a, α) di una varietà ∞^3 di elementi, prendiamo un punto a_1 infinitamente vicino ad a, nel piano α ([11]);

([10]) Possiamo anche dire così. Ognuno dei due coni uscenti da a, fra i cui piani tangenti deve trovarsi α, ci dà un'equazione alle derivate parziali, di 1° ordine, per la funzione z di x, y, che definisce la superficie S. Il nostro asserto equivale a questo: che queste due equazioni alle derivate parziali sono *in involuzione*.

([11]) Od anche a una distanza da a che sia infinitesima d'ordine superiore rispetto al segmento aa_1.

e sia α_1 il piano infinitamente prossimo ad α che forma elemento con a_1. Le rette aa_1, $\alpha\alpha_1$ hanno per limiti due rette del fascio di centro a e piano α, le quali si corrisponderanno in una ben determinata projettività. La condizione d'integrabilità che abbiamo ricordata equivale a dire ([12]) che *questa projettività è un'involuzione* [Sarà poi l'involuzione delle *tangenti coniugate* per la superficie integrale contenente l'elemento (a, α)].

Ora la varietà ∞^3 di elementi sia precisamente quella definita al n. 10, coi due sistemi ∞^1 di complessi lineari, o colle corrispondenze tra le due schiere di R. Sia (a, α) un suo elemento, sicchè il piano α corrisponda ad a rispetto ad un complesso lineare C del 1° sistema, e ad uno F del 2°. Diciamo C_1 e F_1 risp. due complessi lineari di quei sistemi, infinitamente vicini a C e F. La congruenza lineare di C, C_1 abbia per direttrici g, h (della 1ª schiera di R); e quella di F, F_1 abbia per direttrici r, s (della 2ª schiera). Siano p e t risp. le rette delle due congruenze, che stanno nel fascio di rette $a\alpha$.

La retta p è comune a C_1 e F, e quindi contiene due punti per ognun dei quali passa un fascio di rette della congruenza C_1F. Sia b quello, fra questi due punti, che è infitamente vicino ad a (a essendo un analogo punto singolare per la congruenza CF, infinitamente prossima a quella). La retta t_1 condotta da b ad incontrare r, s sta nei complessi F, F_1: sicchè il piano che corrisponde a b rispetto ad F, e quindi anche rispetto a C_1, è il piano pt_1. La retta t_1 starà pure nel complesso C_1: è dunque comune a C_1 e F_1.

Analogamente si trova su t un punto c, infinitamente vicino ad a, tale che la retta p_1 condotta da c ad appoggiarsi su g, h risulta comune a C_1 e F_1.

Le due rette p_1, t_1 così ottenute, infinitamente prossime risp. a p, t, s'incontrano. Questo fatto essenziale appare subito considerando la quadrica Q, che contiene le due coppie di rette, mutuamente appoggiate, g, h e r, s, e che inoltre passa per a. Su essa in fatti giaceranno di conseguenza p, t e poi anche p_1, t_1, le quali risultano generatrici di diverso sistema.

([12]) Voss, *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme*, Math. Annalen, 23 (1884), p. 45 (v. p. 51).

Sia a_1 il punto d'incontro di p_1, t_1. Sarà infinitamente vicino ad a. Poichè le rette p_1, t_1 sono comuni ai complessi C_1 e F_1, il punto a_1 forma elemento, della nostra varietà ∞^3 di elementi, col piano α_1 che unisce le rette stesse. Questo piano taglia α secondo la retta bc. In conseguenza nella projettività fra rette del fascio $a\alpha$, che abbiam definito in generale al principio di questo n°, saranno rette omologhe i limiti delle due rette aa_1, bc. Ora queste sono evidentemente rette polari l'una dell'altra rispetto a Q; e tali si conserveranno al limite. Quella projettività sarà dunque l'involuzione che ha per raggi doppi le due generatrici p, t di Q. La integrabilità della varietà ∞^3 di elementi è così dimostrata.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Gennaio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Manno, Carle, De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Renier Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 21 dicembre 1913.

Il Presidente augura alla Classe un anno felice ed operoso, augurio che gli viene corrisposto.

Il Segretario Renier presenta per gli *Atti*:

1° *La canzone di quattro rime*, del dott. Ferdinando Neri.

2° *La resistenza dei Bresciani contro Enrico VII giudicata a Firenze*, del Socio C. Cipolla;

La canzone di quattro rime.

Nota del dott. FERDINANDO NERI.

Così traduco il termine che Benvenuto da Imola impiega nel commento al canto XXVI del *Purgatorio*: " Arnaldus... a quo Petrarcha fatebatur sponte se accepisse modum et stilum *cantilene de quatuor rithimis*, et non a Dante „ (1). Poi che sugli *excerpta* del Muratori (2), il Diez n'ebbe riconosciuto la difficoltà (3), la discussione ha una sua storia. A qual genere, a quale componimento petrarchesco si allude in quel passo?

Il Wolf (4), movendo dalle " prose di romanzi „, attribuì ad Arnaldo una strofe quaternaria di alessandrini; il Galvani (5) pensò al sonetto, diviso in quattro periodi ritmici.

Delle due interpretazioni fece agevolmente giustizia il Canello (6), proponendo l'ipotesi che oggi ancora sembra a critici valenti (7) la più accettabile: si tratterebbe della sestina, per errore di un IV " male trascritto o male scritto per un VI „: Dante infatti derivò la sestina da Arnaldo, e il Petrarca le diede maggior fortuna.

Ma osserva il Mari (8), che la scrittura dei codici darebbe un .iiij. di fronte ad un .vj., ciò che non lascia supporre uno sbaglio, e comunque, nei vari mss. del commento di Ben-

(1) Vedi lo spoglio dei mss. in Mari, *La sestina d'Arnaldo, la terzina di Dante*, in " Rendiconti „ del R. Istituto Lombardo, S. II, vol. 32 (1899), p. 980

(2) *Antiquitates*, T. I, col. 1229.

(3) *Leben und Werken der Troubadours*, ed. Bartsch, p. 282, n. 2 (orig., 348).

(4) *Ueber die Lais, Sequenzen und Leiche*, Heidelberg, 1841, pp. 305-06.

(5) *Fiorita provenzale*, in " Rivista filol.-letter. „, di Verona, II (1872), p. 107.

(6) *La vita e le opere del trovatore Arnaldo Daniello*, Halle, 1883, p. 56, n. 3.

(7) Scherillo, *Il Canzoniere di F. Petrarca*, Milano, 1908, p. lviii; Debenedetti, *Gli studi provenzali in Italia nel Cinquecento*, Torino, 1911, p. 8, n. 1.

(8) Op. cit., pp. 980-84.

venuto, il numero figura sempre in tutte lettere; ricorda inoltre un'obbiezione del Wolf: è difficile che la voce *cantilena* indichi una specie di canzone (" ... eigentlich Minne- oder Kunstlied „), com'è la sestina: per Dante, *De vulgari eloquentia*, II, VIII, 7 (ed. Rajna), la canzone è " tragica coniugatio „: " cum comice fiat hec coniugatio cantilenam vocamus per diminutionem „. Finalmente: " non c'era proprio nessun bisogno che il Petrarca si scusasse d'aver preso da Dante ciò che Dante stesso replicatamente afferma d'aver tolto ad Arnaldo „. Il Mari è indotto a pensare alla terzina, di cui ricerca le affinità con la sestina arnaldesca, e il *modus et stilus* che il Petrarca, dei *Trionfi*, avrebbe tratto da Arnaldo non sarebbe che il *collegamento cruciato continuo* " l'unica cosa che in una serie *A B A . B C B . C D* ... di fronte ad un serie *A A A b . B B B c . C C* ... a quei nostri trecentisti doveva parer notabile „.

Per parte mia, non sono persuaso nemmeno della nuova ipotesi: nè i *quatuor rithimi* possono stare come una denominazione propria della terzina (1), nè questa è suggerita così chiaramente da Arnaldo che altri, dopo Dante, potesse negar tale esempio; lo stesso rapporto fra Dante ed Arnaldo — e dirò altrove com'io sia disposto ad ammetterlo — volge su condizioni intime dello stile, e non sulla genesi diretta di una forma metrica (2).

Credo che il Petrarca alludesse alla sua canzone

Lasso me, ch'i' non so in qual parte pieghi,

quella che termina la prima stanza con un verso, " Drez et

(1) Cfr. FLAMINI, in " Giornale storico „, XXXVIII, p. 139; anche gli altri critici del lavoro del Mari si mostrarono restii su questo punto: VANDELLI, " Bull. della Soc. dantesca ital. „, N. S., IX, p. 315; BIADENE, " Rassegna bibliogr. „, VIII, p. 93.

(2) Mette conto di ricordare che l'ipotesi dell'origine della terzina dalle rime di Arnaldo era già balenata al Plumptre, sì che il Toynbee, nell'*Academy* del 31 marzo 1888, analizzò gli schemi di quel trovatore, giungendo a conclusioni negative: la breve nota fu riprodotta nei *Dante Studies and researches* del TOYNBEE, London, 1902, pp. 304-6 (*Dante, Arnaut Daniel, and the: terza rima*); nel frattempo era uscito in Italia lo scritto del Mari, ma i due studiosi s'ignorarono a vicenda. Della traduzione dantesca del Plumptre si ha una ristampa del 1899.

rayson es qu'ieu ciant e 'm demori „, che per il Petrarca, come per i suoi commentatori, è di Arnaldo (1).

Fra tutte le canzoni del Petrarca è la sola di cui la stanza sia costrutta su quattro rime (2); e questa proprietà non si affida al caso di un numero, ma importa una differenza organica. Infatti, il suo schema

A B B A A c c A D D

non offre la netta divisione tra fronte e sirima ch'è quasi una legge della stanza nel Petrarca (3): la rima *A* comprende in due quartetti le minori *B* e *c* e tace soltanto nella coppia finale.

La speciale struttura, conclusa in ogni stanza da un verso di poeti famosi, ed il fatto che di tutte le canzoni sorelle, solamente questa, e *Mai non vo' più cantar com'io soleva* (composta nei modi della frottola) vanno senza commiato, ci spiegano forse il nome di *cantilena*, che il Petrarca stesso adopera nel citare una canzone di Arnaldo, *Amors e jois e liocs e tems*, onde tolse il v. 40 per la fine del sonetto *Aspro core e selvaggio*: " 1350 . septembris 21 . martis hora 3 . die Mathei apostoli; propter unum quod leggi (*sic*) Padue in cantilena Arnaldi Danielis, Aman

(1) Scarano, *Fonti provenzali e italiane della lirica petrarchesca*, in " Studi di filologia romanza „, VIII, p. 266, n. 2; Debenedetti, op. cit., p. 7, n. 2.

(2) Una ve n'ha di tre, sempre uguali per tutte le stanze (*S'i'l dissi mai*); tutte le altre sono di cinque o più; il massimo è nove con *Di pensier*.

(3) La rima del verso di chiave non si ripete nella sirima: le sole eccezioni son date da *S'i'l dissi*, per il suo evidente artificio, *Qual più diversa* (*a B b C . c D d A : a B E e B F f · A*) e *Vergine bella*. Dobbiamo osservare come proprio in queste canzoni apparisca la rima interna (le due ultime, nel verso finale d'ogni stanza; *S'i'l dissi*, nel commiato; la canzone a stanze indivisibili, *Verdi panni*, ha pure due rime interne e continuate, nel 4° e 6° verso, rispettivamente al trisillabo e al quinario iniziali). In *Mai non vo'* la concatenazione sta nella rim'al mezzo del 7° verso, ma nemmen questa non ricorre più nella sirima (v. Flamini, *Studi di storia letter. ital. e stran.*, Livorno, 1895, p. 192). Il Biadene ha studiato di proposito *Il collegamento delle due parti principali della stanza per mezzo della rima nella canzone italiana dei secoli XIII e XIV* (in " Scritti vari di filologia „, offerti al Monaci: cfr. pp. 29, 30, 31); si veda come, posto lo schema di *Lasso me* con la fronte di quattro versi, esso si distingua tuttavia dagli esempi dello stesso tipo in altri poeti, dove l'intera stanza ha maggiore sviluppo.

prians s'afrancha cor uffecs „ (1). Il Wolf credo in un punto avesse ragione, in quanto il Petrarca stesso, chiamando " cantilena „ quella di Arnaldo [" mon chantar „, v. 44], doveva mirare ad un'ascosa distinzione di tecnica: perciò avrà potuto dir " cantilena „ *Lasso me* — e fors'anco *S'i'l dissi*, ch'è un " escondic „ (2), *Mai non vo'*, la " frottola „ — quando non avrebbe dato quel nome a *Di pensier in pensier*, a *Chiare fresche*, a *Spirto gentil*...; per noi, l'uso della parola confonde queste sfumature: canzone è la " cantilena „ d'Arnaldo, canzone ciascuna di quelle del Petrarca.

" Rithimus „ per " rima „ è dell'uso nei trattati di poetica volgare del '300, e, come sapeva già il Trissino, " Dante Alighieri et Antonio da Tempo, i quali scrissero in latino di questi poemi, sempre la rima nominarono rithmus „ (3).

Il termine " canzone di quattro rime „ è dunque legittima traduzione di " cantilena de quatuor rithimis „, e denota con proprietà e pienamente distingue dalle altre del Petrarca quella che comincia *Lasso me*.

Ma perchè il Petrarca avrebbe avvertito che quella poesia non gli era stata suggerita da un'altra di Dante? Perchè la canzone si accosta, come fu più volte osservato, al *discordo* (4).

(1) De Nolhac, *Pétrarque et l'Humanisme*, 2ª ediz., II, p. 225, n. 2; Mascetta-Caracci, *Sulle pretese rime prepostere del Petrarca*, in " Zeitschr. f. rom. Philol. „, XXXI, pp. 38-42. — " Cantilenam pulcherrimam „ scrive ancora Benvenuto alludendo a *Drez et rayson* (il passo era stato rilevato dal Barbieri, *Dell'orig. della poesia rimata*, p. 97: cfr. Canello, pp. 57-58); nomina invece " cantiones „ quelle di Dante: *Comentum*, ed. Lacaita, III, p. 75 (var. *cantationem*), IV, 75 e 485; con " duae cantiones placibiles „ (II, 411), allude, come pare, alle corone di Folgore e di Cene. Nella traduzione di G. Tamburini, vol. II, Imola, 1856, pp. 521-22, il passo che ci occupa è reso grossamente: " da cui Petrarca confessa d'aver tolto ed imparato rispetto a stile e ritmo delle canzoni „.

(2) Galvani, *Osservaz. sulla poesia de' trovatori*, Modena, 1829, pp. 193-94; Scherillo, *Dante e Bertram dal Bornio*, in " N. Antologia „, 1° sett. 1897, pp. 85-86; Scarano, cit., pp. 255 e 316-17; Biadene, *Il collegamento*, ecc., cit., p. 35 e n. 2.

(3) Mari, *Ritmo latino e terminol. ritmica medievale*, in " Studi di filol. romanza „, VIII, p. 68 e n. 1; e per l'etimo stesso di " rima „, D'Ovidio, *Versificazione ital. e arte poetica medioevale*, Milano, 1910, p. 236, n.

(4) Galvani, *Osservaz.*, pp. 117-18; Scarano, p. 343, n. 1; Scherillo, ed. cit. del *Canzoniere*, p. lxii e 92. Il tipo della canzone petrarchesca vien

di cui l'esempio italiano più insigne era appunto di Dante: *Ai fals ris* (1). Si guardi, anche oggi, un commento al Petrarca, del Carducci, dello Scherillo, del Moschetti: nessuno dimentica la canzone " in lingua trina „ di Dante, ed è il solo esempio ch'essi ricordino di poeti italiani.

Quell'uso era provenzale (" *cantilena* habens sonos diversos „ come il discordo è definito nel *Donats* (2)); il Petrarca, che vi si conformò per una piccola parte, inserì, fra tutte le sue rime, un solo verso straniero e lo prescelse dal " gran maestro d'amor „, il cui nome appare, solo dei Provenzali, nelle chiose latine del poeta. Non dunque, s'avverta, che il *modus et stilus* del " descort „ sia tutto derivato da Arnaldo: di tale mescolanza, questi non porgeva — che per noi si sappia — l'esempio; Arnaldo e Dante non istanno di fronte come due rappresentanti di un genere; ma il Petrarca, per quella canzone, mosse di sua elezione (*sponte*) dal primo, nè volle — come altri poteva credere — imitar Dante che aveva intrecciato versi provenzali nella canzone trilingue e, in ogni modo, nella *Comedia*, dove proprio Arnaldo si esprime nel " parlar materno „. Mentre la sestina petrarchesca ritrae manifestamente del modo e stile di quella di Dante, sì che il Petrarca, per escludere il grande precursore, avrebbe alterato il vero, quanto al *descort* s'intende ch'egli facesse i conti pari pari e dichiarasse che non si era conformato all'esempio di Dante: esso, infatti, non si può dire necessario.

Se così è, riman tolta, per la storia aneddota del *Canzoniere*, una causa tenace di brevi errori.

---

così a presentarci delle deviazioni metriche nelle forme più vicine alla *frottola*, all'*escondic*, al *descort*, e si potrebbe aggiungere, non senza restrizioni, alla *lauda* (*Vergine bella*): son questi i componimenti che fra le rime del Petrarca si piegherebbero al nome latino di " cantilena „, corrispondente al generico " chantar „, ed anche al " serventese „ dei Provenzali. — In *Lasso me* è pur notevole il numero di rime equivoche: *preghi – ripreghi, tempo – per tempo, passo – passo*, ecc.: cfr. Biadene, *La rima nella canzone ital. dei sec. XIII e XIV*, in " Raccolta D'Ancona „, p. 736.

(1) A Dante lo assegna l'autorità dei mss., che non ha trovato alcuna seria contestazione.

(2) Appel, *Vom Descort*, in " Zeitschr. f. rom. Philol. „, XI, p. 212 (cfr., per Dante, p. 225); Zingarelli, *Intorno a due trovatori in Italia*, Firenze, 1899, p. 55.

La resistenza dei Bresciani contro Enrico VII giudicata a Firenze.

Nota del Socio C. CIPOLLA.

In una nota che apposi al libro IV della *Historia* (1) di Ferreto dei Ferreti raccolsi varie notizie sulle relazioni fra i Fiorentini e i Bresciani nel momento in cui questi coraggiosamente resistettero contro Enrico VII. I Fiorentini bene avevano inteso che il fato di Brescia era decisivo anche per la Toscana; e così fu, giacchè se è vero che Brescia cedette, non è men vero che la lunga resistenza dai Bresciani opposta all'imperatore, spuntò l'impeto di quest'ultimo, sicchè quando Enrico VII scese in Toscana spingendosi fino a Roma, i Guelfi si erano ormai organizzati ed i Ghibellini erano indeboliti. L'esito della spedizione di Enrico VII devesi, per non piccola parte, ai Bresciani e al loro capo Tebaldo Brusati, che morì vittima di una sentenza inumana, atrocissima, dell'*alto Arrigo*.

Durante l'assedio i Bresciani ricevettero soccorsi in denari anche dai Fiorentini; così, a cagion d'esempio, addì 3 settembre 1311 i Fiorentini scrissero al comune di Lucca, raccomandando un ambasciatore dei Bresciani, che, dopo aver ottenuti contribuzioni in denari dai Fiorentini, si indirizzava col medesimo scopo a Lucca (2). Leggendo, l'una dopo l'altra, le lettere che i Fiorentini scrissero ai Bresciani dal 31 agosto al 17 settembre 1311, partecipiamo quasi all'ansietà di quei momenti. Vero che in queste lettere si leggono elogi, e non altro che elogi ai Bresciani per la loro costanza, mentre nella lettera, ora citata, ai

(1) Roma, Istit. stor. ital., 1908, I, 329.

(2) Documenti presso Bonaini, *Acta Henrici VII*, Firenze, 1877, II, 37, n. 46.

Lucchesi, si parla dell'interesse che i Guelfi di Toscana avevano nel protrarsi della resistenza dei Bresciani (1).

Fino dalla lettera del 30 agosto i Fiorentini li incoraggiano " quatenus prosequi velitis in constantia consueta et circam defensionem civitatis et libertatis vestre „ (2). Simili incoraggiamenti fecero i Fiorentini il 9 settembre (3). Le lettere del 13 e del 16 settembre dicono ai Bresciani: " per totum iam orbem commendata vestra constantia „ (4). In altra lettera del 16 settembre (5) leggesi: " ..... Quatenus in solita, vitali, firma et per totum iam orbem commendata et diffusa vestra constantia permanentes circa custodiam et defensionem civitatis et libertatis vestre continue vigilatis „. E in altra lettera del 17 settembre (6): " famam vestram per universi mundi climata seminatam, continuata constantia roboratis et ampliatis „.

Nella primavera del 1317 Cangrande mosse coll'esercito contro Brescia, e quando nell'estate i legati di Giovanni XXII vennero a Verona per indurre lo Scaligero a pensieri pacifici, egli non vi si piegò (7).

Al 1327 nella Cronaca Veronese, secondo il testo della Bodleiana, abbiamo: " dominus Canisgrandis de la Scala existens in exercitu, cum eius militia circa civitatem Brixie et castrum Lonadi, districtus Brixie, audito quod Veronsenes et Vicentini extinseci, una cum comite Sancti Bonifacii, venerunt Vincentiam cum Paduanis, credentes obtinere civitatem Vincentia per tractatum..... equitavit subito..... „ (8).

---

(1) Nella *Nicolai episcopi Botrontinensis Relatio*, pur nella edizione curata da E. Heyck, Innsbruck, 1888, p. 24, si legge: " potestas Brixiensis, qui tunc erat Florentia, Pynus nomine „, con che si accenna a Pino della Tosa. Giustamente il Davidsohn, *Geschichte von Florenz*, Berlin, 1912, III, 637, osserva che in luogo di " Florentia „ si deve leggere " Florentinus „. Colla lezione volgata il senso cade.

(2) Bonaini, II, 36, n. 44.

(3) Bonaini, II, 38, n. 48.

(4) Bonaini, II, 41, n. 52.

(5) Bonaini, II, 42, n. 54.

(6) Bonaini, II, 43, n. 55.

(7) Spangenberg, *Cangrande I della Scala*, Berlin, 1892, I, 129.

(8) Giac. Malvezzi, *Chronicon*, ap. Murat., XIV, 984, sul cadere del 1317, parla dei danni da Cangrande recati ai Bresciani intrinseci.

Ai Fiorentini premevano assai le vicende della valle Padana. Essi diedero (1) 100 cavalieri quando Giberto da Correggio era all'impresa di Parma, nella primavera del 1317. Insieme con Bologna, Siena e Padova cercarono di organizzare una lega guelfa di Lombardia. Sul cadere del novembre del medesimo anno, Giberto da Correggio fu preposto ai cavalieri che Firenze e Bologna tenevano in Lombardia. E fu allora che, a preghiera dell'ambasciatore di Brescia, Firenze mandò denari a quest'ultima città, come risulta da un documento del giorno 11 novembre 1317, che il Davidsohn accenna di passata, e che a me ora interessa per il ricordo che casualmente in esso si fa di Enrico VII.

In questo volger di tempo il pericolo che assai prima incombeva sopra Firenze, si presentava per cagione dello Scaligero, che mirava oramai apertamente all'Emilia e alla Romagna: da Reggio, da Modena, da Bologna sarebbe stato breve il passo verso Firenze.

I Fiorentini nei loro Consigli (2) addì 11 novembre 1317 deliberarono di sovvenire di 1000 fiorini d'oro i Bresciani. La provvisione comincia: " Post hec etiam infrascripte provisiones, pro evidenti Comunis Florentie utilitate, per dominos Priores Artium et Vexilliferum Iustitie Populi et Comunis Florentie super infrascriptis, cum diligenti examinatione et deliberatione noviter edite et facte, et infra proxime et immediate per ordinem et distincte annotate et scripte, et que in ipsis provisionibus et qualibet earum continentur et scripta sunt per me Gratiolum notarium infrascriptum in predictis Consiliis, ut supra dicitur, congregatis lecte et lecta fuerunt, modo, forma et sub tenore, salvis etiam (3) conditionibus inferius annotatis et scriptis. Quarum quidem provisionum tenor talis est:

" Audita et diligenter intellecta querula naratione et expositione per oratores Comunis Brixie dictis dominis Prioribus Artium et Vexillifero Iustitie Populi et Comunis Florentie super infrascriptis pro parte ipsius Comunis Brixie porrecta et facta, ante omnia supradicti domini Priores et Vexillifer recol-

(1) Davidsohn, III, 627-8.
(2) *Provvigioni*, XV, 102, Arch. di Stato di Firenze.
(3) *Ms.*: et

lentes *antiquam et veram amicitiam et sinceram dilectionem, quibus olim unita erat et uniti sunt et hodie unitur civitas Brixie civitati Florentie. Et considerantes quod ipsa civitas Brixie in adventum imperatoris Henrici exposuit se, et sua quibuscumque periculis pro generali defensione totius Partis Guelfe Ytalie* et quod hodie in tantum premitur incursibus hostium et guerrarum procellis, quod necessario pro sui defensione expedit, quod per Comune Florentie dicto Comuni Brixie impendatur auxilium et sucursus, sine quo a suis hostibus defensari non posset. Volentesque quod ipsa civitas Brixie a prefatis hostibus defendatur, habito namque super hiis consilio et tractatu cum quam pluribus nobilibus et sapientibus viris civitatis Florentie..... „.

Appare adunque che, anche mutate in parte le condizioni politiche, e passati non pochi anni, pure il ricordo della resistenza contro Enrico VII era vivissimo ancora in Firenze, siccome di un fatto politico e militare veramente memorabile. La costanza dei Bresciani restò in ammirazioue ai Guelfi di Toscana, che la rammentavano come una delle cause precipue della loro salvezza: infatti l'ammirazione verso quei di Brescia, presso di essi rimaneva saldamente unita all'utilità riportatane.

—

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

CLASSI UNITE

Adunanza dell'11 Gennaio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano ed i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, D'Ovidio, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Balbiano;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Manno, Carle, Renier, Chironi, De Sanctis, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi e Baudi di Vesme.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 22 giugno 1913.

Vengono comunicati i R. Decreti 5 giugno e 11 luglio 1913 coi quali furono approvate le rielezioni dei Soci Boselli e Camerano a Presidente e Vice-Presidente dell'Accademia.

Il Comitato per l'Esposizione internazionale di S. Francisco del 1915 invita la Presidenza ed i Membri dell'Accademia a tenere sedute colà fra il febbraio ed il dicembre 1915.

Si procede alla votazione per l'elezione del Socio Tesoriere per compiuto sessennio del Socio Parona, e riesce eletto il Socio Einaudi, salvo l'approvazione Sovrana.

Invitato dal Presidente, il Socio Naccari, Segretario della 2ª Giunta per il XVIII premio Bressa, quadriennio 1909-1912 (Nazionale), legge la Relazione della Giunta stessa. Questa, dopo

aver discussi minutamente i pregi delle opere prese in considerazione, deliberò a maggioranza di proporre all'Accademia per primo Vittorio Fiorini e in seconda linea Aldo Perroncito.

Infine il Socio Ruffini legge la Relazione della Commissione del premio Gautieri per la Storia (triennio 1910-1912). La Relazione, firmata dai Soci Sforza, De Sanctis e Ruffini, propone che il premio sia assegnato per metà al Prof. Pietro Silva pel volume *Il Governo di Pietro Gambacorta in Pisa e le sue relazioni col resto della Toscana e coi Visconti, contributo alla Storia delle Signorie italiane* (Pisa, Nistri, 1912), e per l'altra metà al Prof. Nino Tamassia per l'opera *La famiglia italiana nei secoli XV e XVI* (Milano-Palermo-Napoli, Sandron, 1910).

Relazione della seconda Giunta per il XVIII premio Bressa.

Nell'adunanza del giorno 13 aprile dell'anno scorso ebbi l'onore di leggere all'Accademia la relazione intorno ai lavori della prima Giunta per il XVIII premio Bressa. Le opere che la Giunta stessa aveva ritenuto meritevoli di essere prese in considerazione per il premio erano le seguenti:

1° La nuova edizione dell'opera *Rerum italicarum Scriptores* del Muratori, diretta da Vittorio Fiorini,

2° Varie memorie di argomento biologico del Dr Aldo Perroncito.

Il Perroncito s'era presentato al concorso, l'altra opera invece era stata proposta da quattro soci.

Non essendo stata fatta in quell'adunanza nessun'altra proposta, alla seconda Giunta spettava soltanto l'ufficio di esaminare quelle due opere e di farvi le sue proposte per il premio.

Riferirò qui sotto con qualche ampiezza i giudizi relativi alle opere proposte, valendomi dell'aiuto cortese dei miei colleghi della Giunta competenti nei rispettivi argomenti.

Nel 1900, Vittorio Fiorini con arditezza somma imprendeva una nuova edizione, recata a giorno delle recenti ricerche e sorretta dai progressi metodici degli studi, di quella grande e fondamentale raccolta storica che costituisce i *Rerum italicarum Scriptores* del Muratori. Alla nuova stampa dell'opera insigne, che esce pei tipi del Lapi di Città di Castello, andò innanzi uno splendido discorso di Giosuè Carducci, ora ristampato nel vol. XVI delle *Opere*. Fu quella una delle ultime prose magistrali a cui il Carducci attese con vero fervore; e volle l'opera dedicata *Alla Maestà | della | Regina Margherita | fra la storia antica d'Italia | e la novissima | stella ferma candida propiziatrice.*

L'impresa grandiosa fu proseguita in mezzo a difficoltà d'ogni genere, materiali e non materiali. Il Fiorini seppe trovare un manipolo di studiosi, che ben presto crebbe a legione; a costoro si deve la ristampa, condotta con tutti gli accorgimenti scientifici, commentata talora dottissimamente, di testi storici ormai irreperibili fuorchè nelle maggiori biblioteche. Rintracciò e incoraggiò il Fiorini quei valentuomini, li diresse, disciplinò le loro fatiche, sicchè ormai nella gran mole dei 110 fascicoli sinora usciti dei nuovi *Scriptores* si ha una serie ragguardevolissima, e quasi sempre sicura, di fonti storiche di straordinario valore.

Ben si può dire che se Lodovico Antonio Muratori, nel sec. XVIII, fece il miracolo di dare da solo all'Italia il fondamento primo della sua storia, nel sec. XX, la cooperazione degli studiosi, addestrati al miglior metodo nelle scuole universitarie della nazione rivendicata, riesce, sotto la direzione del Fiorini, a rinnovare l'opera insigne, a noi invidiata dagli stranieri. Con la differenza che se in tempi di politico servaggio il Muratori rinvenne nella generosa Società Palatina di Milano (accolta di patrizi tanto diversi dal " giovin signore „ pariniano) chi fece largamente le spese dei suoi volumi, il Fiorini, nei tempi progrediti d'oggi, dovette vincere difficoltà economiche straordinarie, sia quando era ancora in vita il Lapi (editore disinteressato e animoso), sia, ancor più, dopo la morte di lui. Gli ostacoli furono sormontati mercè la tenacia del volere, e l'impresa, nobile e grande, cammina franca verso il termine, universalmente lodata.

I nostri colleghi della Giunta, che proposero quest'opera, stimano che difficilmente fra le opere pubblicate in Italia nel quadriennio potrebbesi trovarne un'altra, che al pari di questa onori la patria e meriti il premio.

Nel periodo di tempo a cui è destinato il presente premio, essa è venuta arricchendosi di ben 43 fascicoli (1). All'obbiezione che l'opera fu iniziata prima del quadriennio e non è finita, si risponde che la parte pubblicata nel quadriennio è degna per sè sola del premio. E si ricorda che fu dato il

(1) Vedi nota in fine.

premio Bressa alla *Bibliografia* del Pitrè, con che s'è voluto premiare tutta intera la sua ricerca originale di demopsicologo, come premiando gli ultimi scavi fortunati di Ernesto Schiaparelli s'è voluto riconoscere tutta la sua degna e assidua attività di ricercatore delle antichità egizie.

L'Accademia delle Scienze ha più d'una volta dimostrato che nell'assegnare i suoi premi essa ha di mira unicamente l'utilità degli studi, l'incoraggiamento ed il guiderdone alle nobili iniziative, senza lasciarsi sviare da pregiudizi meschini e pedanteschi. Nè altro nome, a parere dei proponenti, meriterebbero le obiezioni che si movessero contro l'opera del Fiorini per essere essa opera continuativa e frutto d'una larga collaborazione di dotti. Uno dei premi Gautieri fu pure conferito al Croce e al Gentile per la pubblicazione del periodico *La Critica*. In uguale senso e seguendo il medesimo criterio potrebbe l'Accademia aggiudicare il premio a Vittorio Fiorini per la nuova, gigantesca edizione rinnovellata degli *Scriptores* muratoriani.

Gli scritti che il Dr Aldo Perroncito presentò al concorso possono venir divisi per i loro argomenti in più gruppi. Il più importante di questi tratta della struttura della cellula e della natura di certi organi endocellulari.

L'autore, dopo aver passato in rassegna le diverse formazioni che furono negli ultimi anni osservate entro la cellula, fa rilevare il significato attribuito ad alcune di esse e la tendenza di molti istologi a considerarle tutte come variazioni di una formazione unica. Per chiarire tale questione il Perroncito scelse le cellule della serie spermatica tanto dei vertebrati quanto degli invertebrati e trovò condizioni favorevoli specialmente negli elementi della *Paludina vivipara*. Un primo fatto importante che egli potè osservare è che esistono due categorie di formazioni mitocondriali con evoluzione, situazione e destino finale differenti. Gli elementi di una categoria, i *mitocondrii del Benda*, riunendosi vanno a formare il filamento elicoidale situato nello strato periferico del corpo degli spermii; gli elementi dell'altra categoria, i *mitocondrii del Meves*, si dispongono a fascio e vanno a costituire il filamento assiale degli stessi spermii. Ancora più interessanti sono le osservazioni che riguardano l'apparato reticolare interno del Golgi. Il Perroncito riuscì a di

mostrare l'esistenza contemporanea, nella stessa cellula, dell'apparato reticolare interno (prima non conosciuta nelle cellule sessuali), dei mitocondrii e di una formazione avente i caratteri del centrosoma. Circa all'apparato reticolare egli dimostra che al momento della divisione mitotica della cellula ed alquanto prima che appaiano nel nucleo i segni di tale divisione, esso si decompone in filamenti (dittiosomi), i quali si dividono in due gruppi e poi ricostituiscono l'apparato reticolare interno nelle due cellule figlie. Questo fenomeno, che dall'autore ha ricevuto il nome di *dittiocinesi*, si esplica attraverso una serie di figure caratteristiche le quali ricordano quelle formate dai cromosomi durante la cariocinesi. Il fenomeno della dittiocinesi ha un grande interesse per la citologia, perchè per esso resta dimostrato che l'apparato reticolare interno del Golgi è una parte integrante caratteristica delle cellule e che esso, al pari del nucleo, al pari del centrosoma, si divide e durante la scissione cellulare passa dalla cellula madre alle cellule figlie.

Le conclusioni del Perroncito furono accettate dall'Heidenhain, il quale, modificando le sue idee precedenti, incluse nel 1911 fra gli organi essenziali della cellula e distinto dai mitocondrii l'apparato reticolare del Golgi e le parti in cui esso si scompone durante la scissione. I professori P. Hertwig e W. Waldeyer, dopo aver avuto occasione di esaminare i preparati del Perroncito, pubblicarono un ampio riassunto del lavoro di lui nell'*Archiv für mikroskopische Anatomie*, fatto che è eccezionale per questo periodico, il quale non pubblica che lavori originali. Devesi aggiungere che la dittiocinesi venne da parecchie parti successivamente osservata in altri elementi cellulari: vanno qui ricordate le osservazioni del Deinika sulle cellule di parecchi epitelii, quelle del Fañanás e quelle del Barinetti in cellule di diversi altri tessuti.

In un secondo gruppo di pubblicazioni il Perroncito riferisce che le imagini di catene di cellule, che si osservano nei processi di degenerazione dei nervi e che dai più furono interpretate come indizii della rigenerazione delle fibre nervose per parte delle cellule di Schwamm, hanno invece il significato di cordoni di giovani cellule connettivali derivate dagli elementi del tessuto connettivo interstiziale. I lavori di questo gruppo riuniti ad altri precedenti dello stesso autore sulla rigenerazione

dei nervi furono onorati nel 1910 col premio Lallemand dal l'Accademia delle Scienze di Parigi.

In due note preliminari l'A. dà notizia di un fenomeno osservato per la prima volta da lui e da lui chiamato isotossicità del sangue. Per esso il sangue di animali, i quali si trovano in condizioni apparentemente fisiologiche, può riuscire fortemente tossico per altri animali della stessa specie qualora sia iniettato nelle loro vene. Questi studi ebbero larga conferma all'estero, tanto che si tende ora ad ammettere che l'isotossicità del sangue sia un fenomeno generale di grande importanza nella patologia.

In altre due note l'A. tratta delle variazioni di resistenza delle cellule degli organismi superiori di fronte a diverse pressioni osmotiche e cerca di trarne delle leggi sulla regolazione osmotica degli organismi. Dagli studi fatti sulle cellule dei tuboli contorti del rene e sulle emazie risulta che è possibile, modificando l'alimentazione, variare la resistenza degli elementi di fronte alla pressione osmotica. Gli elementi degli animali lungamente trattati con vitto povero di albuminoidi e di sali divengono molto più resistenti alle soluzioni ipotoniche che non gli elementi degli animali normalmente alimentati.

Due scritti riferiscono i risultati di una serie d'esperienze istituite a controllo delle asserzioni di Jammes e Mandous, i quali ammisero che i vermi cestodi ritardano o arrestano lo sviluppo dei batterii patogeni, mentre i vermi nematodi non sarebbero atti a ciò. Il Perroncito trovò invece che gli estratti dei cestodi e dei nematodi non hanno alcuna influenza che sia dannosa al bacillo della tubercolosi o ad altri organismi patogeni dell'intestino. Fanno eccezione gli estratti di alcune specie di vermi: ad esempio gli estratti di ascaridi e di alcune tenie agiscono contro il bacillo di Flexner e quelli della tenia inerme dell'uomo contro il vibrione del colera. Un'altra nota del Perroncito tratta della presenza del grasso nelle ghiandole linfatiche in conseguenza dell'azione delle sostanze contenute nel bacillo della tubercolosi.

Riassumendo si può dire che il Dott. Perroncito con la serie di pubblicazioni presentate al concorso ha confermato la sua fama di valente ricercatore che s'era già acquistata con i suoi primi lavori. I suoi risultati ebbero già molte conferme in Italia ed all'estero e molti fra i contributi da lui dati alla Biologia sono

di grande importanza. Notiamo l'osservazione dell'isotossicità del sangue e soprattutto i lavori citologici, i quali possono dirsi i migliori del genere che sieno apparsi in tutto il mondo scientifico nel quadriennio 1909-1912. Il Perroncito con tali studi, in cui con continue prove e riprove e seguendo i migliori e più fini metodi della tecnica microscopica dovette superare gravi difficoltà, riuscì ad apportare una viva luce su parecchie questioni insorte intorno al significato ed al valore di certe formazioni endocellulari ed a far conoscere un fenomeno nuovo nel periodo della scissione delle cellule, cioè quello della dittiocinesi che si accompagna alla cariocinesi. La scoperta è troppo recente per poter ora dire se la dittiocinesi costituisca un fatto così generale come la cariocinesi, ma molti istologi si occupano ora di tale questione. Ciò non fa maraviglia perchè chi considera che nelle cellule stanno racchiusi, si può dire, tutti i misteri della vita, può facilmente comprendere quale immenso valore abbia l'acquisto di una nuova nozione sull'organizzazione di questi elementi nei diversi periodi della loro attività.

La Giunta discusse minutamente i pregi delle opere, di cui Vi ho parlato, e, venendo poi a deliberare intorno alle proposte da farsi all'Accademia, decise a maggioranza di proporre ai vostri voti per primo Vittorio Fiorini e in seconda linea Aldo Perroncito.

Il Segretario della Giunta
A. Naccari.

Nota. Nel quadriennio che ci riguarda uscirono in luce 43 fascicoli di cui diamo qui l'elenco:

Fasc. 66 (1° del Tomo XIV - parte I) *Antonii Astesani. De ejus vita et fortunae varietate Carmen* a cura di Armando Tallone — Da pag. I a XCIV e da 1 a 16 con due tavole fuori testo (*continua*).

Fasc. 67 (2° e ultimo del Tomo III - parte II) *Il Diario romano di Gaspare Pontani già riferito al "Notaio del Nantiporto"* a cura di Diomede Toni — Da pag. 33 a 134 (completo).

Fasc. 68 (1° del Tomo XVII - parte I) *Galeazzo, Bartolomeo e Andrea Gatari, Cronaca carrarese* a cura di Antonio Medin e Guido Tolomei — Vol. I; da pag. 1 a 112 (*continua*).

Fasc. 69 (1° del Tomo XXIV - parte I) *Annales Arretinorum maiores et minores* a cura di Arturo Bini e Giovanni Grazzini — Da pag. *a* a *k*, da I a XXVI e da 1 a 80 (*continua*).

Fasc. 70 (3° e ultimo del Tomo XII - parte III) *Dominici de Gravina notarii Chronicon de rebus in Apulia gestis* a cura di Albano Sorbelli — Da pag. 161 a 240, con due tavole fuori testo (completo).

Fasc. 71 (unico del Tomo VIII - parte II) *Cronaca di Antonio Godi vicentino* a cura di Giovanni Soranzo — Da pag. I a XXVIII e da 1 a 52 (completo).

Fasc. 72 (2° e ultimo del Tomo XXII - parte II) *Annales forolivienses* a cura di Giuseppe Mazzatinti — Da pag. I a XX e da 113 a 232 (completo).

Fasc. 73 (4° del Tomo XXXII [Accessiones novissimae - Cronache romane] - parte I - vol. I) *Johannis Burckardi Liber notarum* a cura di Enrico Celani — Da pag. 321 a 432 (*continua*).

Fasc. 74 (2° del Tomo XXIV - parte I) *Annales Arretinorum maiores et minores* a cura di Arturo Bini e Giovanni Grazzini — Da pag. 81 a 192 (*continua*).

Fasc. 75 (2° del Tomo III - parte XVI) *Le Vite di Paolo II scritte da Gaspare da Verona e da Michele Canensi* a cura di Giuseppe Zippel — Da pag. 65 a 176 (*continua*).

Fasc. 76 (2° del Tomo XXIV - parte XIII) *Breve Chronicon monasterii mantuani sancti Andree ord. bened. di Antonio Nerli (aa. 800-1431)* a cura di Orsini Begani — Da pag. 65 a 176 (*continua*).

Fasc. 77 (5° del Tomo XVIII — parte I) *Corpus Chronicorum Bononiensium* a cura di Albano Sorbelli — Vol. I del testo: da pag. 401 a 480 (*continua*).

Fasc. 78 (5° e ultimo del Tomo XXXI - [Accessiones novissimae - Cron. napolet.] - parte I) *Petri Ansolini de Ebulo De rebus siculis carmen* a cura di Ettore Rota — Da pag. 171 a 256 con 11 tavole fuori testo (completo).

Fasc. 79 (5° del Tomo XXXII - [Accessiones novissimae - Cronache romane] - parte I - vol. I) *Johannis Burckardi Liber notarum* a cura di Enrico Celani — Da pag. 433 a 544 con 2 tavole fuori testo (*continua*).

Fasc. 80 (3° e ultimo del Tomo XXIV - parte XIII) *Breve Chronicon monasterii mantuani sancti Andree ord. benedictini di Antonio Nerli (aa. 800-1431)* a cura di Orsini Begani — Da pag. 177 a 236 (completo).

Fasc. 81 (2° del Tomo XIV - parte I) *Antonii Astesani De ejus vita et fortunae varietate Carmen* a cura di Armando Tallone — Da pag. 17 a 128 (*continua*).

Fasc. 82 (2° del Tomo XVII - parte I) *Galeazzo, Bartolomeo e Andrea Gatari, cronaca carrarese* a cura di Antonio Medin e Guido Tolomei — Vol. I: da pag. 113 a 224 (*continua*).

Fasc. 83 (4° del Tomo XXX - [Accessiones novissimae - Cronache toscane] - parte I) *Cronaca fiorentina di Marchionne di Coppo Stefani* a cura di Niccolò Rodolico — Da pag. 209 a 320 (*continua*).

Fasc. 84 (6° del Tomo XXXII - [Accessiones novissimae - Cronache romane] - parte I - vol. I) *Johannis Burckardi liber notarum* a cura di Enrico Celani — Da pag. 545 a 664 (completo).

Fasc. 85 (1° del Tomo XXIV - parte II) *La Mesticanza di Paolo di Lello Petrone, 18 agosto 1434 - 6 marzo 1447* a cura di Francesco Isoldi — Da pag. I a LXXXIV e da 1 a 32 (*continua*).

Fasc. 86 (1° del Tomo IX - parte I) *Fratris Stephanardi de Vicomercato Liber de gestis in civitate Mediolani* a cura di Giuseppe Calligaris — Da pag. *a* a *p*, da I a LXXVIII e da 1 a 34, con una tavola fuori testo (*continua*).

Fasc. 87 (1° del tomo XXIII - parte I) *Antonii Galli Commentarii de rebus Genuensium et de navigatione Columbi* a cura di Emilio Pandiani — Da pag. *a* a *k*, da I a XL e da 1 a 48 (*continua*).

Fasc. 88 (2° e ultimo del Tomo XXII - parte III) *Cronica gestorum in partibus Lombardie et reliquis Italie* a cura di Giuliano Bonazzi — Da pag. I a IV e da 113 a 262, con una tavola fuori testo (completo).

Fasc. 89 (6° del Tomo XVIII - parte I) *Corpus Chronicorum Bononiensium* a cura di Albano Sorbelli — Vol. II del testo; da pag. 1 a 112, con una tavola fuori testo (*continua*).

Fasc. 90 (5° del Tomo XXIII - parte III) *Il Diario romano di Jacopo Gherardi da Volterra* a cura di Enrico Carusi. Appendice: *Diario romano* di *Sebastiano di Branca Tedallini* a cura di Paolo Piccolomini — Da pag. 343 a 446 (*continua*).

Fasc. 91 (3° del Tomo XVII - parte I) *Galeazzo, Bartolomeo e Andrea Gatari, cronaca carrarese* a cura di Antonio Medin e Guido Tolomei — Vol. I: da pag. 225 a 336, con una tavola fuori testo (*continua*).

Fasc. 92 (3° del Tomo XXVIII - [Mittarelli] - parte III) *Bernardini Azzurrini Chronica breviora aliaque monumenta faventina*, Vol. I, a cura di Antonio Messeri; da pag. 49 a 144 (*continua*).

Fasc. 93 (7° del Tomo XXXII - [Accessiones novissimae - Cronache romane] - parte I - vol. II) *Johannis Burckardi liber notarum* a cura di Enrico Celani — Da pag. 1 a 112, con una tavola fuori testo (*continua*).

Fasc. 94-95 (6°-7° e ultimo del Tomo XXIII - parte III) *Il Diario romano di Jacopo Gherardi da Volterra* a cura di Enrico Carusi. Appendice: *Il Diario della città di Roma dall'anno 1480 all'anno 1492 di Antonio de Vascho* a cura di Giuseppe Chiesa. — Da pag. 447 a 602, con due tavole fuori testo (completo).

Fasc. 96 (3° e ultimo del Tomo III - parte XVI) *Le Vite di Paolo II scritte da Gaspare da Verona e da Michele Canensi* a cura di Giuseppe Zippel — Da pag. 177 a 286 (completo).

Fasc. 97 (5° e ultimo del Tomo XXII - parte IV) *Le vite dei Dogi di Marin Sanudo* a cura di Giovanni Monticolo — Vol. I; da pag. 433 a 576 (completo).

Fasc. 98 (8° del Tomo XXXII - [Accessiones novissimae - Cronache romane] - parte I - vol. II) *Johannis Burckardi liber notarum* a cura di Enrico Celani — Da pag. 113 a 224 (*continua*).

Fasc. 99 (2° e ultimo del Tomo XXIII - parte I) *Antonii Galli Commentarii de rebus Genuensium et de navigatione Columbi* a cura di Emilio Pandiani — Da pag. 49 a 136 (completo).

Fasc. 100 (unico del Tomo XVII - parte III) *Chronicon parvum Ripaltae* a cura di Ferdinando Gabotto — Da pag. I a XXIV e da 1 a 96 (completo).

Fasc. 101 (3° del Tomo XXIV - parte I) *Annales Arretinorum maiores et minores* a cura di Arturo Bini e Giovanni Grazzini — Da pag. 193 a 304 (*continua*).

Fasc. 102 (1° del Tomo XXIII - parte II) *Cronica gestorum ac factorum memorabilium civitatis Bononie edita a fratre Hyeromino de Bursellis con la continuazione di Vincenzo Spargiati* a cura di Albano Sorbelli — Da pag. 1 a 112 (*continua*).

Fasc. 103 (4° del Tomo XVII - parte I) *Galeazzo, Bartolomeo e Andrea Gatari, cronaca carrarese* a cura di Antonio Medin e Guido Tolomei — Vol. I; da pag. 337 a 448 (*continua*).

Fasc. 104 (9° del Tomo XXXII - [Accessiones novissimae - Cronache romane] - parte I - vol. II) *Johannis Burckardi liber notarum* a cura di Enrico Celani — Da pag. 225 a 336 (*continua*).

Fasc. 105 (2° e ultimo del Tomo XXIV - parte II) *La Mesticanza di Paolo di Lello Petrone (18 agosto 1434 - 6 marzo 1447)* a cura di Francesco Isoldi — Da pag. 65 a 138 (completo).

Fasc. 106 (2° e ultimo del Tomo IX - parte I) *Fratris Stephanardi de Vicomercato Liber de gestis in civitate Mediolani* a cura di Giuseppe Calligaris — Da pag. 35 a 202 (completo).

Fasc. 107 (7° del Tomo XVIII - parte I) *Corpus Chronicorum Bononiensium* a cura di Albano Sorbelli — Vol. II del testo; da pag. 113 a 224 (*continua*).

Fasc. 108 (3° e ultimo del Tomo XIV - parte I) *Antonii Astesani De ejus vita et fortunae varietate Carmen* a cura di Armando Tallone — Da pag. *a* a *l*; 129 a 240 (completo).

Chi abbia qualche esperienza negli studi storici potrà rilevare che in quest'elenco si trovano opere di fondamentale importanza, annotate magistralmente. Per la storia di Lombardia hanno valore insigne lo Stefanardo curato dal compianto prof. Calligaris e la *Cronica* curata da Giuliano Bonazzi. Per Bologna è segnalabilissimo il *Corpus Chronicorum* esemplarmente illustrato da Albano Sorbelli. Per Venezia è ormai considerata generalmente come indispensabile la serie delle *Vite dei Dogi* di Marin Sanudo per la ricca ed illuminata documentazione di cui la corredò il compianto prof. Monticolo. Per l'edizione della storia padovana è pietra angolare la

Cronaca Carrarese dei Gatari, commentata da due espertissimi conoscitori di quella storia, Antonio Medin e Guido Tolomei. Roma trova illustrazione nei *Diarii* chiariti da Enrico Carusi e da Paolo Piccolomini; e Roma è tanta parte del Rinascimento nel preziosissimo *Diario* del Burcardo che Enrico Celani, giovandosi di nuovi testi a penna, ha ridato al pubblico studioso in un assetto tanto più corretto e compiuto di quello contenuto nell'unica edizione integra prima esistente, la parigina del Thuasne. Alla storia delle lettere interessa il *Carmen* di Pietro da Eboli curato da Ettore Rota; a quella delle lettere e della cultura in genere il commento, mirabile per ricchezza e compiutezza, di Giuseppe Zippel alla *Vita di Paolo II*, il cardinal Pietro Barbo, che fondò il grandioso palazzo Venezia in Roma. Bisognerebbe essere ciechi per non riconoscere che anche nel quadriennio a cui l'attuale premio Bressa si rivolge, l'accuratissima direzione del Fiorini ha saputo arricchire il paese nostro di un tesoro di documentazione storica, che sovranamente lo onora e che rivaleggia con ciò che fanno di meglio Società storiche straniere largamente sovvenute dai loro Governi.

Relazione della Commissione dei Premi GAUTIERI, triennio 1910-1912 (Storia).

Egregi Colleghi,

La Commissione, a cui deste l'onorifico incarico di indagare e di riferire intorno alle pubblicazioni storiche, apparse in Italia nel triennio 1910-1912, e di proporvi quella o quelle fra di esse, che si potessero ritenere meritevoli del premio Gautieri, ha preso anzitutto in accurato esame tutte le opere, che furono inviate dai loro autori all'Accademia per concorrere a tale premio, consegnando i suoi giudizi su ciascuna di esse in una relazione manoscritta, della quale vi sarà data lettura nella seduta del prossimo giorno 11 di gennaio; ed ha, poi, come era suo dovere, allargato la propria indagine anche a quelle opere, comprese nel detto triennio, delle quali però gli autori non fecero invio all'Accademia. Risultato ultimo dei lavori della Commissione fu quello di proporvi per il premio due libri, di cui l'uno, del Prof. Pietro Silva, è fra i presentati al concorso, e l'altro, del Prof. Nino Tamassia, è fra i non presentati.

Pietro Silva, nel volume intitolato *Il Governo di Pietro Gambacorta in Pisa e le sue relazioni col resto della Toscana e coi Visconti, contributo alla storia delle signorie italiane* (Pisa, Nistri, 1910), studia profondamente un periodo non meno importante che oscuro della Storia Pisana. Accanto alla cronaca di Ranieri Sardo e alla cronaca pisana pubblicata dal Muratori nel XV vol. dei *Rer. It. Scr.*, sue fonti sono sopratutto documenti inediti dei quattro archivi di Stato toscani, di Firenze, Lucca, Pisa, e Siena; dei quali documenti una scelta pubblica l'autore in appendice al libro. Ma queste fonti il Silva non si è limitato a studiare accuratamente; il suo libro non è nè vuole essere una raccolta di appunti eruditi; è un tentativo, il primo, di una vera storia di Pisa dal 1369 al 1392.

A superare le gravi difficoltà, che l'argomento gli opponeva, era spianata in parte la via al Silva da parecchi lavori recenti sulla Toscana nel Medioevo, e sopratutto, per la storia interna della città, dall'eccellente libro del Volpe *Studi sulle istituzioni comunali di Pisa* e, per la storia esterna, dal saggio dello stesso Volpe *Pisa, Firenze, Impero ai principî del 1300.* Ma, pure usando gli spunti che il Volpe ed altri gli offrivano, può dirsi che il Silva ha saputo fare opera organica ed originale. Egli lumeggia efficacemente il contrasto di interessi tra Firenze e Pisa. Spiega come le esigenze che aveva Firenze, centro commerciale, di trovare ai suoi prodotti un facile sbocco sul mare, la inducevano necessariamente ad aprirsi la via del basso Arno; e come, se gli armatori pisani e le società di mercanti che si occupavano del traffico coi paesi stranieri potevano trovare il loro conto in accordi opportuni che aprissero il porto di Pisa al commercio fiorentino, non si acconciavano agevolmente a tali accordi i produttori pisani che temevano di essere per tal modo sopraffatti dalla concorrenza fiorentina nei mercati che avevano saputo aprirsi oltre mare.

Così la lotta con Firenze si intrecciava col contrasto fra i due elementi preponderanti della borghesia pisana, che prendono nome gli uni, la classe dei produttori, di Raspanti, l'altro, la classe degli armatori, di Bergolini. Il cozzo furibondo delle fazioni e il contrasto irreconciliabile degli interessi facilitarono in Pisa, come negli altri comuni italiani, il sorgere del principato. E Pietro Gambacorta, assunto il potere, credette di trovare la salvezza per la città in una politica d'accordo leale con la vicina Firenze; sola via del resto di fronteggiare sui mari la concorrenza genovese.

Del Gambacorta illustra il Silva non la sola politica estera, ma anche i provvedimenti economici, e studia in specie accuratamente la unificazione da lui tentata del debito pubblico con la creazione di una nuova *massa praestantiarum* e i tentativi per renderlo meno gravoso all'erario del Comune, la riforma dell'estimo, diretta a meglio proporzionare i carichi agli averi, i provvedimenti per porre termine allo spopolarsi del contado tutelando gli interessi dei contadini, che i Comuni solevano in tutto trascurare per promuovere egoisticamente gli interessi cittadini.

Nè con minor cura cerca il Silva di determinare in qual modo e con quale veste giuridica si esercitasse il governo gambacortiano. Ufficialmente Pietro Gambacorta non è che il comandante perpetuo delle milizie di Pisa: di fatti, avendo in mano la forza e impersonando gli interessi della classe degli armatori e dei maggiori trafficanti, governa a sua posta la città, senza per altro diminuire in alcun modo le apparenze del governo repubblicano, sopratutto per mezzo dei Consigli dei Savi, che dirige di persona, o con l'opera dei suoi parenti ed amici.

Con tale autorità, badando sempre agli interessi della classe che lo sostiene, il Gambacorta cerca di destreggiarsi in mezzo alle contese politiche che si svolgono in Toscana al suo tempo, sempre fedele alla direttiva dell'amicizia con Firenze; finchè una forza perturbatrice che interviene in Toscana e vi sposta l'equilibrio, ormai entro certi limiti raggiunto, delle forze in contrasto, la potenza dei Visconti, dà in Pisa agli avversari del Gambacorta e dell'amicizia con Firenze, gli industriali, il sopravvento e travolge nel sangue la signoria gambacortiana, spingendo Pisa a nuove lotte con la potente vicina.

Tale il quadro che il giovane studioso offre del governo di Pietro Gambacorta; lodevole anche per la forma sobria e precisa, aliena da ogni declamazione rettorica, pel giudizio misurato e sereno, di cui l'autore dà prova, e per la sicurezza con cui egli si muove in mezzo alle difficoltà non lievi che l'argomento presenta.

Designando a Voi, egregi Colleghi, il Prof. Pietro Silva, la Commissione vi ha proposto di premiare e di incoraggiare un giovane studioso, il quale di primo acchito si è acquistato un bel posto nel campo degli studi storici; e se lo è acquistato, come ai giovani meglio si conviene, con un lavoro di indagine coscienziosa e penetrante in un terreno esattamente circoscritto. Designando ora a voi il Prof. Nino Tamassia, essa vi propone invece di riconoscere le benemerenze di uno studioso provetto, di un maestro degli studi storico-giuridici, il quale ha, come ai provetti e ai maestri unicamente è consentito, affrontato col suo libro un vasto e complesso argomento, recandovi quel corredo di cognizioni, quel sussidio di esperienza e quella superiorità di vedute e di giudizio, che sono il risultato dei lunghi anni dati per intiero a indefessamente ricercare tutti gli aspetti della propria disciplina.

Ma l'opera del Tamassia, che si intitola *La famiglia italiana nei secoli XV e XVI* (Milano-Palermo-Napoli, Sandron, 1910), è fatta per interessare ogni maniera di studiosi e non i soli giuristi. Poichè essa è una di quelle sintesi di quanto le fonti storiche più svariate possono fornire e di quanto la scienza ha potuto assodare in un determinato momento intorno ad un dato istituto, alle quali possono ricorrere con piena fiducia e con sicuro profitto tutti coloro, che lo studio di tale istituto tocchi; e non occorre dire quanto larga ne debba essere la cerchia nel caso nostro, trattandosi dell'istituto della famiglia.

Il lavoro si apre con un ampio capitolo, forse il meglio costruito o quanto meno il più attraente di tutta l'opera, destinato a scrutare quanto nella fisionomia del popolo italiano dei due primi secoli dell'Evo moderno fosse rimasto dell'uomo medioevale e quali nuovi tratti invece vi avesse segnati l'epoca nuova. Sempre considerando il campo della sua indagine da un punto di vista, diremo così, panoramico, il Tamassia ricerca poi l'influenza, che nella costituzione della società italiana ebbero, per un verso, quei due elementi disgregatori e perturbatori, che sono la delinquenza e — residuo di antica e non ancora eliminata barbarie — la vendetta privata, e, per un altro verso, quei due elementi di coesione e di disciplina, che sono la morale e la religione; e, quasi a coronamento di questa duplice ricerca, egli esamina quale fosse l'ordinamento giuridico, da cui società e famiglia traevano le norme del loro vivere quotidiano.

Entrando poi nel cuore stesso dell'istituto famigliare, egli lo considera prima di tutto nella sua unità o, come chi dicesse, nella sua compagine generale; e tratta, subito di poi, del rapporto giuridico, che ne è come il nucleo, vale a dire del matrimonio; il quale viene esaminato in tutti i suoi aspetti e positivi e negativi, che sono la separazione, il divorzio, ecc. Accanto al matrimonio legittimo è pure considerato quello, che possiamo designare come l'illegittimo, e cioè l'unione, la quale nei tempi andati assumeva pur tuttavia, per la sopravvivenza delle tradizioni classiche e la sopravvenienza delle consuetudini germaniche, aspetto di vero istituto giuridico, il concubinato.

L'indagine si volge quindi ai rapporti di figliazione, che sono anche essi considerati in tutti i loro varî aspetti, della

figliazione legittima, della naturale e della adottiva. Con cura e ampiezza particolare è ricercata la condizione della donna, come figlia, come moglie, come vedova, e non solo nella famiglia, ma in quell'ambiente, che era nel passato quasi un succedaneo necessario di essa, il convento.

A questo quadro della famiglia un tocco sarebbe mancato, ove non ne fosse stato studiato pure quell'elemento integratore, che è la servitù; argomento tanto più importante in un'epoca, in cui la famiglia era ancora fondamentalmente concepita alla romana, come il complesso di tutti coloro che sono sottomessi al capo di casa anche per ragione diversa dal vincolo del matrimonio e del sangue, e in cui accanto alle persone di servizio, le quali locano liberamente l'opera propria al padrone, permane — inestirpabile residuo di tempi e di ordinamenti per tutto il resto superati — la schiavitù.

Il Tamassia designa, con modestia che gli fa onore, questo suo come un semplice tentativo o un saggio; noi gli contrapporremo solo, e con sicura coscienza, che il suo lavoro rappresenta indubbiamente quanto di più fino e di più completo si abbia in Italia intorno al delicatissimo e gravissimo argomento.

La Commissione pertanto è concorde nel proporvi, egregi Colleghi, che il premio Gautieri per la Storia sia assegnato, per una metà, al Prof. Pietro Silva, e, per l'altra metà, al Prof. Nino Tamassia.

Giovanni Sforza, *Presidente.*
Gaetano De Sanctis } *Relatori.*
Francesco Ruffini }

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Gennaio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe Naccari ed i Soci Salvadori, D'Ovidio, Peano, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Balbiano e Segre Segretario.

Vien letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio corrispondente Taramelli ha inviato in omaggio due sue Note: *Ricordo dello Spallanzani come vulcanologo*, e *Sul lembo pliocenico di S. Bartolomeo presso Salò.*

Il Socio Mattirolo, per incarico dell'Autore, presenta due pubblicazioni del Dott. G. Negri: *Appunti di una escursione botanica nell'Etiopia meridionale*, e *Contributo alla Briologia dell'Isola di Rodi.*

Per la stampa negli *Atti*, i Soci Guidi e Somigliana offrono, rispettivamente, le seguenti Note:

G. Albenga, *La cerchiatura delle condotte forzate.*

F. Vercelli, *Sul gradiente termico alla superficie dei pianeti e sulla loro temperatura interna.*

LETTURE

La cerchiatura delle condotte forzate.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA

Per aumentare la resistenza di condotte forzate sottoposte a battente molto elevato si usa talora ricorrere alla cerchiatura dei tubi. La condotta vien rinforzata o infilando su di essa anelli di acciaio, generalmente piatti, più di rado sagomati, i quali appoggiano sul tubo per semplice contatto o vi sono chiodati, oppure applicando a caldo anelli i quali contraendosi durante il raffreddamento serrano con forza la condotta e provocano in essa sforzi di senso contrario a quelli che saranno dovuti alla pressione interna. Quest'ultimo procedimento, suggerito dal Rogé verso il 1895 per tubi di ghisa, viene impiegato dalla Société Anonime des Hauts Fourneaux et des Fonderies di Pont-à-Mousson per la preparazione dei tubi *frettés* ed ha avuto di recente applicazioni grandiose (1). In qualche caso si è anche ricorso al *frettage* con fili metallici avvolti a spirale sulla condotta.

Il problema di determinare le tensioni interne in un sistema così costituito presenta un grande interesse pratico e venne già da molto tempo risoluto per alcune particolari disposizioni. Nel caso di anelli di rinforzo perfettamente rigidi Hermann Scheffler ne indicò una soluzione in alcuni punti discutibile fin dal 1859 nell' " Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens „ (2). Queste prime ricerche diedero origine ad un magistrale studio di Winkler, pubblicato nel 1860, dove sono largamente studiate

---

(1) Bechmann et Babinet, *Notice sur la dérivation du Loing et du Lunain* in " Annales des Ponts et Chaussées „, 1905, III trimestre, pag. 5 e segg.

(2) *Die Elastizitätsverhältnisse der Röhren, welche einer hydrostatischen Drucke ausgesetzt sind*, edito anche a parte, Wiesbaden, 1860.

e discusse numerose questioni relative ai tubi sotto pressione ed alle caldaie [1].

Ad alcuni dei risultati di Winkler vennero mossi appunti nel secondo volume della *History of the Theory of Elasticity* di Todhunter e di Pearson [2], ma per quanto riguarda la influenza delle cerchiature su condotte forzate le obbiezioni di Pearson non reggono, almeno sotto il punto di vista tecnico, quando il tubo sia aperto ai due estremi, di parete abbastanza sottile e se gli anelli di rinforzo non sono troppo discosti gli uni dagli altri.

Problemi che presentano una stretta analogia con quello qui trattato sono la ricerca della influenza delle flangie, di cui si occupò Wetsphal [3] e l'esame dell'efficacia di nervature circolari, che venne studiata da Rudolf Lorenz [4].

Le memorie degli autori sopra citati contengono lunghi sviluppi algebrici e conducono a formule di una grande complessità. Una soluzione molto rapida del problema si ottiene invece applicando a questo caso il principio di Ritz, di cui mi sono valso recentemente nello studio della deformazione di un anello circolare soggetto a forze distribuite lungo il contorno [5].

*
* *

Supponiamo la condotta orizzontale, sufficientemente lunga perchè non sia risentito l'effetto delle estremità; di spessore costante ed abbastanza piccolo perchè il tubo possa considerarsi di parete sottile e non si debba tener conto della curvatura, soggetta a pressioni così elevate che riescano trascurabili le deformazioni e le tensioni interne provocate dal peso proprio

(1) *Festigkeit der Röhren, Dampfkessel und Schwungringe.* " Civilingenieur ", 1860 (VI), col. 325 e 427 e segg.

(2) Pag. 447.

(3) Westphal, *Berechnung der Festigkeit loser und fester Flanschen.* " Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure ", 1897, pag. 1036.

(4) R. Lorenz, *Achsensymmetrische Verzerrungen in dünnwandigen Hohlzylindern* in " Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure ", 1908, p. 1706.

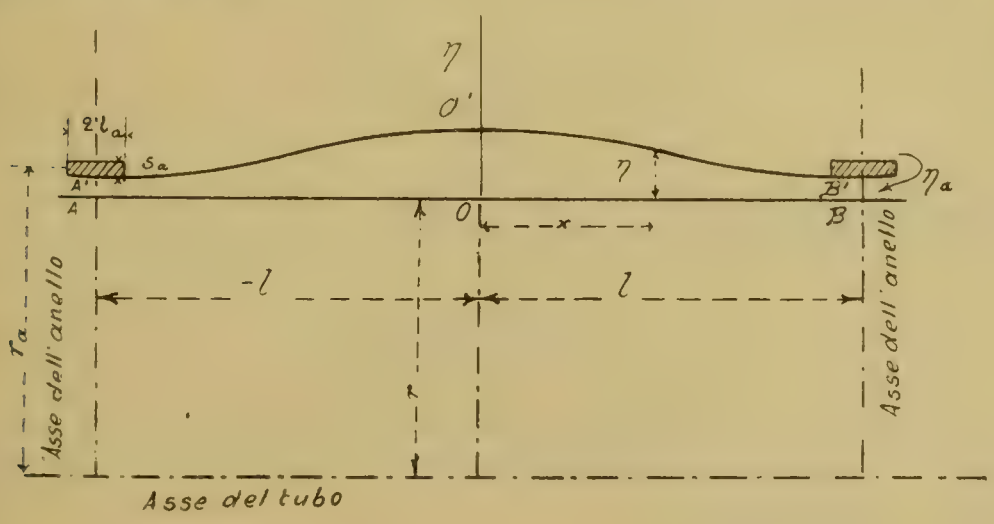
(5) " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", 1912-13, pag. 142.

e dalla variazione del battente ai diversi livelli della sezione trasversale. Riteniamo ancora che gli anelli di rinforzo siano uniformemente spaziati; tutte queste condizioni si verificano molto prossimamente in quei casi della pratica, ai quali si è in principio accennato.

In grazia della simmetria basterà considerare l'equilibrio di una striscia di tubo di larghezza uno e della corrispondente porzione di anello e ci limiteremo al tratto di striscia compreso fra le mezzerie di due anelli consecutivi.

***

Consideriamo dapprima il caso di anelli posati a freddo. Quando nel tubo non si ha pressione interna gli anelli non esercitano alcuna azione sulla condotta; per effetto d'una pressione unitaria p le generatrici del tubo prendono la forma disegnata in figura.



Se con r_i e con r si indicano rispettivamente il raggio interno e quello medio della parete la pressione agente sull'elemento dx di striscia varrà notoriamente $p \frac{r_i}{r} dx$ ed il lavoro L_a da essa compiuto durante la deformazione del tubo sarà, nella solita ipotesi di p crescente con continuità da zero al valore finale e con le indicazioni della figura:

$$L_a = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \eta \, p \, \frac{r_i}{r} \, dx.$$

Il lavoro interno di deformazione L_i sarà la somma del lavoro dovuto alla flessione del tubo e di quelli provocati dalla dilatazione del tubo e dell'anello. Il primo di questi lavori, osservando che le deformazioni delle faccie laterali delle striscie sono impedite, varrà notoriamente [1]

$$\frac{1}{2}\,\frac{m^2-1}{m^2}\int_{-l}^{l}\frac{M^2}{EJ}\,dx$$

o per essere

$$M = \pm\,\frac{m^2}{m^2-1}\,EJ\,\frac{d^2\eta}{dx^2}$$

e indicando con s lo spessore del tubo

$$\frac{1}{2}\,\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{Es^3}{12}\int_{-l}^{l}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Il lavoro di dilatazione del tubo, se ϵ è l'allungamento unitario, varrà:

$$\frac{1}{2}\,Es\int_{-l}^{l}\epsilon^2\,dx$$

e per essere $\epsilon = \frac{\eta}{r}$

$$\frac{1}{2}\,\frac{Es}{r^2}\int_{-l}^{l}\eta^2\,dx.$$

Il lavoro di dilatazione dell'anello di rinforzo indicando con E_a il modulo di elasticità dell'anello e con le notazioni della figura, sarà dato da

$$\frac{1}{2}\,E_a\,s_a\,2l_a\,\frac{\eta_a^2}{r_a^2}\,.$$

Il principio di Ritz ci dice che le deformazioni η incognite sono quelle per le quali sta la relazione

$$L_i - 2L_a = \text{min.},$$

---

[1] Seguo i simboli contenuti nelle *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni* del prof. Guidi.

o sostituendo ad L_i e ad L_a i valori sopra calcolati

$$(1)\quad \int_{-l}^{l}\left[\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{Es^3}{12}\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)^2+\frac{Es}{r^2}\eta^2-2p\frac{r_i}{r}\eta\right]dx+2E_a s_a l_a\frac{\eta_a^2}{r_a^2}=\min.$$

Perchè la (1) sia soddisfatta occorre notoriamente che sia

$$(2)\qquad \frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{s^3}{12}\,\frac{d^4\eta}{dx^4}+\frac{s}{r^2}\eta=\frac{p}{E}\,\frac{r_i}{r}.$$

Facciamo nella (2) $r_i=r$, ricadremo sulla equazione differenziale di Winkler; poniamo invece $\frac{m^2}{m^2-1}=1$, ritroveremo la equazione di Rudolf Lorenz.

Se per semplicità si pone

$$\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{12}{r^2 s^2}=4k^4$$

e

$$\frac{p}{E}\,\frac{r_i r}{s}=a$$

dove a rappresenta evidentemente la dilatazione del raggio del tubo che si avrebbe quando mancasse ogni cerchiatura, la (2) diventa:

$$(3)\qquad \frac{d^4\eta}{dx^4}+4k^4(\eta-a)=0.$$

*
* *

L'integrale generale della (3) può venir posto sotto forma molto comoda per le applicazioni e tale da mostrare esplicitamente la influenza della natura e delle dimensioni delle cerchiature sulla condotta, quando si scriva:

$$(4)\qquad \eta-a=C_1 e^{kx}\cos(kx+\alpha)+C_2 e^{-kx}\cos(kx+\beta)$$

dove C_1, C_2, α e β sono 4 costanti di integrazione.

Per la scelta del sistema di assi coordinati di riferimento la linea elastica delle generatrici del tubo è simmetrica rispetto all'asse delle η: questo potrà aversi soltanto quando sia

$$C_1 = C_2 = C \quad \text{ed} \quad \alpha = -\beta,$$

con che la (4) diviene

$$(5) \qquad \eta - a = C\left(e^{kx}\cos[kx+\alpha] + e^{-kx}\cos[kx-\alpha]\right).$$

In corrispondenza degli anelli di rinforzo dovrà inoltre aversi per ragioni di simmetria,

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=+l} = 0$$

o avuto riguardo alla (5) e con facili trasformazioni trigonometriche

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tgh}.kl - \operatorname{tg}kl}{1 + \operatorname{tgh}.kl\,\operatorname{tg}kl}.$$

Con il crescere di kl la tangente iperbolica tende al valore 1 e per i casi della pratica molto spesso ne differisce di pochi millesimi; la (6) può quindi spesso venir sostituita dalla

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}kl}{1 + \operatorname{tg}kl}$$

dalla quale

$$(7) \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} - kl.$$

***

Nella (5) rimane così una sola costante incognita; essa dipende dalla forma, dalla elasticità e dalla natura degli anelli di rinforzo.

Per anelli assolutamente rigidi si avrà,

per $\qquad x = \pm l, \qquad \eta = 0$

e quindi per la (5)

$$(8) \qquad -a = C[e^{kl}\cos(kl+\alpha) + e^{-kl}\cos(kl-\alpha)]$$

dalla quale C.

In pratica sarà spesso lecito trascurare il secondo termine in parentesi rispetto al primo e servirci della (7): con queste semplificazioni la (8) diviene

$$-a = Ce^{kl}\cos\frac{\pi}{4}$$

dalla quale

$$(9) \qquad C = -\frac{a\sqrt{2}}{e^{kl}}.$$

Nel caso di anelli elastici, la cerchiatura permette una certa dilatazione η_a del tubo. In luogo della (8) avremo allora

$$(10) \qquad \eta_a - a = C[e^{kl}\cos(kl+\alpha) + e^{-kl}\cos(kl-\alpha)].$$

La η_a può determinarsi osservando che la pressione trasmessa dalla cerchiatura al tubo è eguale e contraria alla pressione che il tubo esercita sull'anello.

Gli anelli sono d'ordinario così sottili che si può ritenere che le tensioni interne si ripartiscano uniformemente sulla sezione di essi: indicando con p_a la pressione unitaria sulla superficie interna dell'anello si avrà subito se con S_a si rappresenta la tensione totale in esso:

$$S_a = p_a r_a 2l_a = 2E_a s_a l_a \frac{\eta_a}{r_a}$$

e quindi sulla striscia considerata, posto

$$\lambda = E_a \frac{s_a l_a}{r}$$

avremo una pressione

$$(11) \qquad \lambda\eta_a.$$

La pressione trasmessa dal tubo all'anello sarà evidente-

mente eguale e contraria allo sforzo di taglio all'ascissa l, cioè a

$$\frac{m^2}{m^2-1}\frac{Es^3}{12}\left(\frac{d^3\eta}{dx^3}\right)_{x=l}=\mu\left(\frac{d^3\eta}{dx^3}\right)_{x=l} \tag{12}$$

ove si ponga

$$\mu=\frac{m^2}{m^2-1}\frac{Es^3}{12}.$$

Dovremo quindi avere

$$\lambda\eta_a=\mu\left(\frac{d^3\eta}{dx^3}\right)_{x=l} \tag{12'}$$

o per la (5) con facili riduzioni

$$\eta_a=-4\frac{\mu}{\lambda}Ck^3[\operatorname{sen}(kl+\alpha)\operatorname{Cosh.}kl+\cos(kl-\alpha)\operatorname{Senh.}kl]. \tag{13}$$

Eliminando η_a fra (10) e (13) si ottiene subito la C. Per kl abbastanza grande la (10) si trasforma nella

$$\eta_a-a=\frac{Ce^{kl}}{\sqrt{2}}$$

e la (13) nella

$$\eta_a=2\frac{\mu}{\lambda}k^3\frac{Ce^{kl}}{\sqrt{2}}$$

dalle quali

$$C=-\frac{a\sqrt{2}}{e^{kl}\left(1+2\frac{\mu}{\lambda}k^3\right)}. \tag{14}$$

***

Se gli anelli sono posati a caldo alle tensioni precedenti si aggiungono quelle dovute alla contrazione delle cerchiature. Indichiamo con $2d$ la differenza fra il diametro della cerchiatura a freddo e quello della condotta, una analisi perfettamente

identica a quella svolta più sopra conduce in luogo della (12′) alla

$$\lambda (d - \eta_a) = \mu \left(\frac{d^3\eta}{dx^3}\right)_{x=l} . \tag{15}$$

Eliminando η_a fra la (13) e la (15) si trova il nuovo valore della costante C. Per kl abbastanza grande si troverebbe invece della (14)

$$C = \frac{-d\sqrt{2}}{e^{kl}\left(1 + 2\,\frac{\mu}{\lambda}\,k^3\right)} . \tag{16}$$

*
* *

Determinata la linea elastica delle generatrici sono facilmente trovati i valori delle tensioni interne.

L'applicazione ai casi della pratica mostra come si abbia un vantaggio sensibile nelle tensioni agenti secondo le direttrici del tubo solo quando le sollecitazioni a flessione raggiungono valori elevati. Questo stato di cose già rilevato da Winkler e molto chiaramente posto in luce negli esempi numerici calcolati da Rudolf Lorenz, mostra come non riesca conveniente la cerchiatura dei tubi di ferro, quando non si abbia di vista la necessità di opporsi allo sfiancamento dei tubi e come invece sia razionale rinforzare con anelli di acciaio le condotte di ghisa, materiale che presenta una resistenza a flessione notevolmente più grande di quella a tensione.

Sul gradiente termico alla superficie dei pianeti e sulla loro temperatura interna.

Nota di FRANCESCO VERCELLI

1. Posizione del problema. — Nel suo celebre studio sul raffreddamento e sull'età della terra, Lord Kelvin [1] suppone il raggio terrestre di grandezza infinita, in guisa che la superficie terrestre sia assimilabile ad un piano indefinito che separi la terra dallo spazio celeste.

Il problema del raffreddamento della terra è ricondotto, in tale ipotesi, a quello che, nella teoria di Fourier, è chiamato problema del muro indefinito raffreddantesi per contatto.

Tale semplificazione è abbastanza legittima, come osserva H. Poincaré, determinando il tempo occorrente perchè il raffreddamento si estenda alle zone profonde [2].

Tuttavia vale solo per la terra ed i pianeti di maggior diametro.

È possibile invece, seguendo un procedimento analogo a quello di Lord Kelvin, e prendendo come corpo rappresentante il pianeta, una *sfera*, anzichè un piano limitante un semispazio, ottenere formole valide in ogni caso, e con esse studiare l'influenza del raggio nel raffreddamento di una sfera e confrontare lo stato termico attuale della terra con quello degli altri pianeti, supponendo beninteso che i loro caratteri fisici non si scostino notevolmente da quelli della terra.

Inoltre l'introduzione delle funzioni ellittiche rende le soluzioni particolarmente agevoli pei calcoli numerici richiesti

(1) *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, XXIII, 1862, pagg. 157-159; *Mathem. and Physical Papers*, III, pagg. 295-311.

(2) H. Poincaré, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*. Paris, 1911, pag. 214.

nelle applicazioni fisiche. Tra queste tratteremo ampiamente anche la questione della età della terra.

Come ipotesi fondamentali del problema conserveremo quelle stesse di Lord Kelvin: temperatura inizialmente uniforme; raffreddamento per contatto della superficie verso l'ambiente; conducibilità superficiale grandissima.

Queste ipotesi sono sufficienti ad individuare la soluzione: ma non corrispondono che approssimativamente alle condizioni reali di raffreddamento della terra e dei pianeti: di più non tengono conto veruno di due fattori a cui oggidì si attribuisce una influenza, non ben precisata ancora, ma certa, sul calore interno della terra: *la contrazione della massa* e *la radioattività*.

Mi pare utile, quindi, cominciare questo lavoro esaminando anzitutto, in base alle moderne vedute nel campo della geologia e dell'astronomia, quali sono le condizioni termiche in cui si trovano ora la terra ed i pianeti e quelle in cui si trovarono nel passato, per dedurre, dal confronto delle condizioni reali con quelle supposte, quale peso si possa poi dare ai risultati del calcolo.

§ 1.

La temperatura della terra.

2. La temperatura negli strati superficiali. — Le cognizioni nostre riguardo alla temperatura della terra, si limitano a quella parte di crosta terrestre, che è accessibile alla osservazione, o a cui si può con qualche fondamento applicare l'induzione matematica.

Le temperature delle acque nei laghi e negli oceani sono distribuite secondo leggi note [1]; le temperature del suolo sono

---

[1] Si può consultare a questo proposito: F. Vercelli, *Relazione e ricerche sulle osservazioni della temperatura del lago di Como*, fatte dai professori M. Cantone, L. De Marchi, C. Somigliana, " R. Istituto Lombardo di S. e L. „; XXI, serie XII, 1911.

L. De Marchi, *Geografia fisica*, pag. 370 e seg.

distribuite in modo più complesso e che ha relazione con la forma, con la ubicazione e con la natura delle rocce; ma, ad ogni modo, possiamo sempre determinarle con sufficiente approssimazione, sino ad una profondità di qualche chilometro [1].

Come vari la temperatura a maggiore profondità non lo sappiamo, od almeno solo questo possiamo affermare, in base alle manifestazioni vulcaniche: che la temperatura deve crescere sino ad una profondità di circa 30-40 Km. ed ivi raggiungere un valore da 1000 a 1200 gradi centigradi [2]. Tutto induce a credere che la temperatura aumenti oltre ancora, ma più nessuno oggidì crede all'esistenza di quelle temperature di centinaia di migliaia di gradi che pure erano ammesse anni addietro. Allora veniva pure attribuita alla superficie del sole una temperatura di milioni di gradi, mentre è dimostrato oggidì, in base alla legge di Stefan ed al valore della costante della radiazione solare, che tale temperatura si aggira sui 6000-6500 C° [3].

3. La terra si raffredda? — Esaminiamo ora la questione: *se la terra sia effettivamente un corpo che perde continuamente calore verso lo spazio che lo circonda.* La risposta non è evidente ed occorre anzi una sottile indagine sui dati della osservazione.

È comunemente noto che le oscillazioni termiche del suolo vanno rapidamente diminuendo in ampiezza, con la profondità, e che ad una decina di metri sotto il suolo la temperatura si mantiene press'a poco costante tutto l'anno.

La temperatura negli strati sottostanti va crescendo continuamente verso l'interno, o al più, come caso limite, potrà mantenersi costante. La terra quindi si trova attualmente nelle

(1) Vedi: C. Somigliana e F. Vercelli, *Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini.* " Memorie R. Acc. delle Scienze di Torino ", Serie II, tomo LXIII, 1912.

(2) Il Prof. Bartoli durante l'eruzione dell'Etna del 1892 trovò come temperatura della lava numeri compresi fra 976° e 1087°.

(3) A. Rotti, *Elementi di fisica*, vol. III, pag. 31.

condizioni di un corpo che perde calore verso l'esterno. Questa quantità di calore è misurabile ed è circa 52 piccole calorie per cm^2 all'anno: quantità piccolissima, pari a meno di un millesimo del calore, che un cm^2 del suolo terrestre dal sole riceve, nello stesso tempo, alle nostre latitudini (1). Ma per quanto piccola, questa quantità di calore viene perduta incessantemente. Abbiamo ricordato l'esistenza di uno strato la cui temperatura è minima rispetto a quella degli strati sottostanti e che si mantiene all'incirca costante al variare delle stagioni. La temperatura di tale strato è anche minima rispetto alle temperature medie degli strati più prossimi alla superficie, per il riscaldamento che questi subiscono assorbendo le radiazioni solari: per cui il calore da questa zona più esterna dovrebbe propagarsi verso l'interno (2).

Questo però non avviene, perchè quantità notevoli di acqua e di aria sono ognora presenti negli strati esterni del nostro globo e i loro moti convettivi, in modo analogo a quanto avviene nei laghi, nei mari e nell'atmosfera, tendono, in ogni caso, a trasportare calore dall'interno verso la superficie, e sono quindi il veicolo con cui il calore dalla terra si propaga verso lo spazio che ne circonda. *La terra va costantemente perdendo calore.*

4. Calore sviluppato nella contrazione. — Questo però non basta a concludere che la terra vada raffreddandosi. Un globo, che perda calore tende a contrarsi e questa contrazione, per ragioni termodinamiche, tende a scaldarlo: che avviene in definitiva: riscaldamento o raffreddamento? Secondo Helmholtz e Kelvin lo sviluppo di calore che si produce nel sole a causa della contrazione costante a cui sarebbe soggetto, dev'essere considerato come la sorgente stessa del calore solare. Per un globo costituito da un *gas perfetto*, si può dimostrare che si possono avere i due casi: riscaldamento se il gas è mono- o biatomico, raffreddamento se pluriatomico (3).

---

(1) e (2) M. P. Rudzki, *Physik der Erde*. Leipzig, 1911, pag. 118.

(3) H. Poincaré, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*. Paris, 1911, cap. VIII, § III.

Per i corpi solidi di piccole dimensioni, invece, ogni perdita di calore è sempre accompagnata da *diminuzione* di temperatura, tanto che, volgarmente, questi due fatti sono ritenuti come inseparabili.

Quando però si tratti di corpi di grandi dimensioni, il lavoro compiuto dalle forze di attrazione, durante la contrazione della massa, non è più trascurabile, e la quantità di calore sviluppata può essere grandissima: basta pensare difatti che il calore sviluppato da un globo omogeneo contraentesi è proporzionale al quadrato del raggio [1].

Per conseguenza, se nello studio di una sfera, che perde calore verso l'esterno, si trascura il calore di contrazione, come nella teoria classica di Fourier, si fa opera manchevole, e ciò tanto più quanto maggiore è il raggio.

Ma, d'altra parte, neppure è possibile sottoporre al calcolo questo calore sviluppato dal lavoro di contrazione, poichè ignoriamo affatto quali valori i calori specifici e i coefficienti di dilatazione dei materiali interni di un globo, assumono alle enormi pressioni a cui sono sottoposti. Ad ogni modo ci pare si possa ritenere come certo, che *il raffreddamento di una sfera deve essere più lento di quanto si deduce dalle teorie di Fourier e di Kelvin; e ciò tanto più quanto maggiori sono le dimensioni del corpo considerato.*

5. Radioattività e sua influenza sul calore terrestre. — In questi ultimi anni l'osservazione della immensa quantità di energia termica emessa dal radium, fece pensare se non si dovesse cercare la causa prima del calore terrestre nelle emanazioni radioattive, o per lo meno, se il calore dovuto a tali emanazioni non fosse tale da rallentare il raffreddamento della terra, forse anche da impedirlo.

Si è calcolato a circa 133×10^7 grammo-calorie la quantità totale di calore che può essere emessa da 1 grammo di radium nel suo disgregamento: calore equivalente a quello emesso da 2550 m^2 di superficie del suolo terrestre in un anno. Ora, le rocce terrestri, anche quelle d'origine vulcanica, con-

---

[1] M. P. Rudzki, loc. cit., pag. 121.

tengono, secondo J. Joly e J. R. Strutt, una quantità di radium che oscilla da $0,6 \times 10^{-12}$ ad oltre 30×10^{-12} gr. per ogni grammo di sostanza (1): se pure le rocce interne possedessero quantità analoghe di radium, il calore che ne deriverebbe, sarebbe tale da compensare non solo quello perduto dal suolo, ma da produrre altresì un aumento continuo nella temperatura; le teorie di Kelvin sul raffreddamento e sull'età della terra più non avrebbero significato alcuno; le idee di Helmholz sull'origine del calore solare, che inducono a limitare a poche decine di milioni di anni la vita del sole considerato come corpo irradiante energia, perderebbero ogni valore: la dinamica stessa della crosta terrestre verrebbe a dipendere dall'energia prodotta nel disgregamento molecolare ed atomico della materia.

Dinanzi a conclusioni di sì grande portata stettero esitanti gli stessi uomini che le avevano provocate; così J. Strutt emette perfino l'ipotesi che il radium sia diffuso sino ad una profondità di 72 Km. e che il calore sviluppato serva solo a compensare quello perduto dall'esterno. Quest'ipotesi è confortata dal solo fatto, che nelle meteoriti il radium è totalmente assente, o presente appena in piccole tracce: del resto è arbitraria.

Lord Kelvin non volle piegarsi alle nuove teorie: egli " *non ammetteva che vi fosse qualche valida evidenza sperimentale per dimostrare che il calore del radio fosse sufficiente per spiegare il calore del sole e la temperatura sotterranea* „ (2). Nè queste evidenze sperimentali furono trovate ancora.

Neppure è certo se la radioattività sia un fenomeno dell'epoca geologica presente, ovvero sia comune anche alle epoche trascorse.

---

(1) J. Joly, *Uranium and Geology*, " Nature „, vol. 78, Nr. 2028, pag. 456. — *Radioactivity and Geology: An Account of the influence of Radioactivity Energy on Terrestrial Hystory*, 1909 (Constable). — J. R. Strutt, *On radium in the Earths Crust and the Earths internal Heat*, " Proc. R. S. „, Ser. A., vol. 77 (1906), pagg. 472-485.

(2) Lettera al " Times „ del 20 agosto 1906, riportata nella " Life of Lord Kelvin „, by S. Thomson, vol. II, pag. 1190 (Macmillan, 1910).

È interessante anche leggere nella stessa opera, vol. I, le controversie suscitate nel campo della geologia dalla teoria di Kelvin sull'età della terra.

Solo questo ci è noto, che il radium si dissocia in un periodo di circa due millennii e che proviene a sua volta dall'Uranio; questo processo di provenienza non si conosce ancora chiaramente, ma pare sia così lento, che ogni anno si dissocia appena $^1/_{10}{}^{10}$ di Uranio e quindi la dissociazione può durare molte epoche geologiche (1).

Incerta e prematura sarebbe per ora una teoria dei fenomeni radioattivi; è certo tuttavia che le basi delle teorie antiche sul calore terrestre e solare, se non abbattute, sono fortemente scosse, e che le cifre da quelle teorie dedotte, non possono più venire accettate senza esplicite riserve (2).

Contro quelli che vollero esagerare la portata delle influenze radioattive, stanno però dei fatti inoppugnabili. Da taluni, per esempio, si volle attribuire alle emanazioni radioattive l'elevata temperatura che regna nelle viscere dei monti: così fece il Joly a proposito del Sempione. Tali affermazioni però partono dalla falsa concezione, che la temperatura elevata nell'interno delle montagne sia una specie di anomalia fisica: mentre l'esperienza insegna che il calore è distribuito, nell'interno del suolo, in modo conforme alle equazioni di Fourier, come se la distribuzione attuale provenisse effettivamente da un graduale raffreddamento del globo terrestre, il che permette si possa determinare la temperatura nell'interno di un monte per via matematica (3). Ciò non esclude la possibilità che il calore terrestre possa essere di origine radioattiva. È notevole, ad ogni modo, il fatto che nelle località più ricche di radium, la temperatura è distribuita in modo del tutto normale (4).

6. La temperatura primitiva della terra. — Le considerazioni precedenti riguardano lo stato attuale della terra. La storia del suo passato è collegata con il grande problema della sua stessa origine, problema che da secoli preoccupa le menti,

(1) Vedi J. Joly, loc. cit. — A. Battelli, A. Occhialini, S. Chella, *La radioattività*. Bari, 1909. — B. Boltwood, *On the life of Radium*: " American Journal of Science, vol. XXV, 1908.

(2) H. Poincaré, *Leçons, ecc.*, pag. 220.

(3) C. Somigliana e F. Vercelli, *Sulla previsione, ecc.* (cit. a pag. 3).

(4) H. Mache und St. Meyer, " Wien. Ber. ", 1905.

senza che sia stato possibile finora, raggiungere qualche risultato positivo. Le ipotesi cosmogoniche si sono moltiplicate e sono rimaste tutte egualmente incerte [1]. Si ammette generalmente, ad ogni modo, che la terra si trovi ora in quella fase della sua storia, che corrisponde a quella che, per le stelle, suole essere detta *fase di decadenza*. Questa fase segue a quella della nascita e dello splendore di una stella e rappresenta l'inizio di quel lungo periodo di vita latente, oscura e silenziosa, durante il quale essa va via via consolidandosi, salvo, forse, a ridestarsi e ricominciare altra vita, all'urto con qualche altra stella.

Oggidì non si ammette più quello che Laplace supponeva per la sua celebre nebulosa: che, cioè, esista una altissima temperatura nelle nebulose, da cui comunemente le ipotesi cosmogoniche derivano il nostro sistema solare.

Piuttosto si ammette, con Sir Lockyer, che le nebulose siano fredde e la luce di cui brillano sia d'origine elettrica. Le meteoriti che le compongono, con i loro urti incessanti, si scaldano, si vaporizzano, e formano una massa estremamente calda, una *stella*, che per irraggiamento si raffredda e finisce per consolidarsi e spegnersi, ripigliando in questo periodo di decadenza, le temperature assunte nella primitiva formazione.

Anche partendo quindi da ipotesi opposte si giunge alla stessa conclusione: che lo stato attuale della terra, rappresenta una fase di raffreddamento, che dovette essere preceduto da una fase in cui la terra era a temperatura altissima [2].

7. Conclusione. — Tenendo presente la discussione ora fatta, possiamo formulare la seguente conclusione che servirà di guida nella interpretazione dei calcoli.

1° L'ipotesi che la fase attuale della terra sia una *fase di raffreddamento* è giustificata dalle comuni teorie astronomiche e geologiche.

2° La teoria del raffreddamento di *una sfera considerata come rigida*, è applicabile rigorosamente solo a sfere di piccolo

(1) Poincaré, loc. cit.

(2) L. De Marchi, *Geografia fisica*, pag. 16, 17, 25, 504.

raggio: nel caso dei pianeti, il calore sviluppato nella contrazione e quello proveniente da emanazioni radioattive possono compensare, in parte, il calore perduto per irraggiamento e rendere più lento il raffreddamento; e perciò

3° L'età, la temperatura ed il gradiente termico della terra e dei pianeti, calcolati in modo conforme alle teorie di Fourier, vanno ritenuti come valori *minimi*.

8. Le ipotesi sul modo con cui avviene il raffreddamento. — Le ipotesi del problema, enunciate al N. 1, suppongono che il raffreddamento si faccia per *contatto*; cioè, che il globo, trovandosi in uno spazio a temperatura zero, assuma in superficie la temperatura stessa di questo ambiente. Questo non corrisponde alla realtà, poichè il raffreddamento è sopratutto dovuto all'*irraggiamento*. La terra non assume in superficie la temperatura del mezzo che la circonda, ma perde ad ogni istante, una quantità di calore, che è funzione della differenza di temperatura fra la superficie stessa e l'ambiente. Questa funzione è data dalla legge di Stefan-Boltzmann, secondo cui, l'energia totale irraggiata è proporzionale alla *quarta* potenza della sua temperatura assoluta. L'emissione dei corpi reali è sempre minore di quella del corpo nero, e in particolare è piccola sui gas.

In conseguenza, nell'irraggiamento effettivo della terra o di un pianeta verso l'esterno, la superficie ha sempre una temperatura superiore a quella dell'ambiente, e ciò rende il raffreddamento *più lento* di quanto possa avvenire nell'ipotesi da noi supposta.

Questa considerazione dà maggior peso ancora alla proposizione enunciata in fine del numero precedente, che la *temperatura e il gradiente della terra e dei pianeti*, quali risultano dai calcoli, dovranno solo essere interpretati come *valori minimi*.

§ 2.

Raffreddamento di una sfera omogenea.

9. — Sia data una sfera di raggio R ed in essa, all'origine dei tempi, la temperatura sia funzione della distanza r

dal centro. Lo stesso avverrà in ogni altro istante per ragioni di simmetria.

L'equazione di Fourier relativa al movimento del calore assume allora la forma

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \tag{1}$$

ove V è la temperatura e $a^2=\frac{K}{CD}$

ove le quantità K, C, D rappresentano il coefficiente di conducibilità interna, il calore specifico e la densità.

Se poniamo

$$V=\frac{u}{r}$$

la (1) assume la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,. \tag{2}$$

Quest'equazione coincide, nella forma, con quella che si ha nei problemi del raffreddamento di un filo o di un suolo piano e da essa si deduce il noto integrale

$$V=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m}{r}\,e^{-a^2C_m^2t}.\ \text{sen}\ C_m r \tag{3}$$

ove B_m, C_m sono costanti da determinare in guisa che siano soddisfatte le condizioni ai limiti. Queste condizioni possono venire scelte in modo arbitrario: qui ci limiteremo al caso particolare che più interessa le applicazioni che vogliamo fare.

Supponiamo che all'origine dei tempi ($t=0$) la temperatura sia uniforme in tutta la massa, e diciamola V_0; inoltre la conducibilità sia grandissima, in guisa che la temperatura superficiale sia in ogni istante eguale a quella dell'ambiente; questa temperatura dell'ambiente sia assunta come temperatura zero. Con queste ipotesi le costanti B, C della relazione (3) si riducono a

$$C_m=\frac{m\pi}{R}$$

$$B_m=(-1)^{m-1}\,\frac{2V_0R}{m\pi}$$

e la (3) diviene

$$(4) \qquad V = \frac{2V_0 R}{\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} e^{-\left(\frac{m^2\pi^2 a^2}{R^2} t\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{R} r\right).$$

Dalla (4), derivando rispetto ad r e mutando segno, si deduce il gradiente termico α in un punto qualunque della sfera; in particolare sulla superficie.

$$(5) \qquad \alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{2}{R} V_0 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi m a t}{R}\right)^2 t}.$$

Se si pone

$$(6) \qquad e^{-\frac{\pi^2 a^2}{R^2} t} = q \; (q < 1)$$

la (5) assume la forma

$$(7) \qquad \alpha = \frac{2}{R} V_0 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}.$$

Ricordiamo ora la relazione che definisce la funzione $\vartheta_3(x, q)$ di Jacobi:

$$\vartheta_3(x, q) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mx$$

da cui

$$\vartheta_3(0, q) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}.$$

Dalla (7) si deduce quindi

$$\frac{R}{V_0} \alpha = \vartheta_3(0, q) - 1$$

$$(8) \qquad \alpha = \frac{V_0}{R} [\vartheta_3(0, q) - 1].$$

Questo risultato può servire a risolvere i seguenti quesiti:
dati R, V_0, q determinare α;
dati R, V_0, α determinare q.

10. — Se nella (4) poniamo lim. $r = 0$, otteniamo il valore della temperatura V al centro: indichiamolo con V_C. Siccome numeratore e denominatore tendono a zero, possiamo eseguire il calcolo colla regola di *de l'Hospital* e otteniamo

$$V_C = 2 V_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-\frac{m^2 \pi^2 a^2}{R^2} t} =$$

$$= 2 V_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q^{m^2} = - V_0 (2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2}).$$

Ricordando ora la definizione della funzione $\vartheta_{(0,q)}$ di Jacobi:

$$\vartheta(0, q) = 1 + 2 \sum (-1)^m q^{m^2},$$

possiamo scrivere:

$$V_C = V_0 [1 - \vartheta(0, q)] = V_0 \left[1 - \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}, q\right)\right], \tag{9}$$

ovvero:

$$V_C = V_0 [1 - \sqrt{k'}\, \vartheta_3(0, q)] \tag{10}$$

più oppurtuna per i calcoli.

Le formole (8) e (10) possono servire a determinare gli elementi che caratterizzano lo stato termico di un globo che si raffreddi; cioè il *gradiente superficiale e la temperatura interna,* quando siano note la temperatura iniziale e il tempo decorso dall'inizio del raffreddamento; ovvero a determinare *il tempo impiegato* nel raffreddamento, note che siano la temperatura iniziale ed il gradiente termico attuale.

Questi calcoli possono essere risolti facendo uso di tavole delle funzioni ellittiche [1].

---

[1] Nei calcoli seguenti vennero usate le tavole che si trovano in fondo al libro VI del trattato di J. Hoüel, *Cours de calcul infinitésimal.* Paris, 1880.

§ 3.

Applicazioni.

1° L'età della terra.

11. — Per *età della terra* intenderemo, con Lord Kelvin, il tempo decorso, sino ad oggi, dall'epoca in cui la terra, raggiunto uno stato di equilibrio termico in tutta la massa, ha cominciato a solidificarsi.

Le formole date nel paragrafo precedente permettono eseguire rapidamente il calcolo.

L'esperienza dà come valore medio del gradiente termico del suolo

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \cdot 030$$

che corrisponde al *grado geotemico* di 33 m. per grado centigrado [1].

Come raggio terrestre, è sufficiente al nostro scopo assumere il valore approssimato $6 \,.\, 10^6$ metri.

Dalle osservazioni si deduce che la velocità di propagazione delle onde termiche nel suolo è di 1 metro al giorno circa; la teoria della propagazione del calore in un suolo piano conduce allora alla formola [2]

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot$$

Il valore di a si potrebbe anche calcolare direttamente colla relazione che la definisce:

$$a = \frac{K}{CD};$$

ma per la incertezza dei dati che conviene assumere per tali quantità si suole comunemente adottare il valore dato.

---

[1] Vedi il cap. II della memoria citata di C. Somigliana e F. Vercelli.

[2] Questo valore è adottato da Lord Kelvin e da Kirchhoff e viene comunemente usato anche oggidì.

Per temperatura iniziale della terra adottiamo, con Kelvin, il valore $V_0 = 4000^\circ\ C$, temperatura che corrisponde allo stato di fusione di tutte le rocce (almeno alle pressioni ordinarie).

Con questi valori di R, a, $\frac{\partial V}{\partial n}$, V_0 otteniamo dalla (8)

$$0{,}03 = \frac{4000}{6 \,.\, 10^6} \left[\vartheta_3 (0, q) - 1\right]$$

e da questa

$$\vartheta_3 (0, q) = \frac{6 \,.\, 10^6 \,.\, 0 \cdot 3}{4 \,.\, 10^3} + 1 = 46 \,.$$

Da questa relazione possiamo dedurre il valore di q. Il numero **46** non è più contenuto nelle tavole delle funzioni ellittiche; il valore corrispondente di q è perciò molto prossimo ad 1.

Per determinarlo ricorriamo alle formole usualmente adoperate nei calcoli numerici sulle funzioni ellittiche, e che sono dedotte colla *trasformazione di Landen*. Queste formole vengono qui riportate colle notazioni stesse usate nel trattato citato di Hoüel, perchè ci varremo, nei calcoli seguenti, delle *tavole delle funzioni ellittiche (Table I — Fonctions du module)* date in fine del trattato stesso.

12. Formole fondamentali pei calcoli numerici.

1° Gruppo:

$$(a) \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$(b) \qquad k'^2 = 1 - k^2$$

$$(c) \qquad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$(d) \qquad q = \alpha + 2\alpha^5 + 15\alpha^9 + \ldots$$

$$(e) \qquad \rho = \frac{1}{2} \log \frac{1}{q}$$

$$(f) \qquad \frac{2K}{\pi} = [\vartheta_3 (0, q)]^2 = (1 + 2\alpha)^2 (1 + 4\alpha^4 + \ldots)$$

$$(g) \qquad K' = \frac{2K}{\pi} \,.\, \rho = \rho (1 + 2\alpha)^2 (1 + 4\alpha^4 + \ldots) = \\ = \rho (1 + 4q + \ldots)$$

$$(h) \qquad \rho\rho' = \frac{\pi^2}{4} \,.$$

2° Gruppo:

$$(a') \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$(c') \qquad \alpha' = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

$$(d') \qquad q' = \alpha' + 2\alpha'^5 = 15\alpha'^9 + \ldots$$

ecc.

Le formole di questo secondo gruppo differiscono da quelle del primo per lo scambio delle lettere con e senza accento.

Convengono nei calcoli le formole del primo gruppo quando k è prossimo a zero; quando k è prossimo ad 1 e quindi k' è piccolissimo sono preferibili quelle del secondo gruppo.

13. Calcolo di q. — Per risolvere il problema propostoci dovremmo partire da un valore noto per ϑ_3 e risalire al valore di q. Questa inversione di calcoli non pare *facilmente* raggiungibile per via diretta, mentre invece può essere fatta, in modo rapido, con un metodo di interpolazione, col quale è pure possibile raggiungere *sufficiente* approssimazione.

Ricordiamo perciò che la funzione ϑ_3 *è sempre crescente* al crescere del modulo q.

Diamo a q successivi valori $q_1, q_2, \ldots, q_n$: i corrispondenti valori di ϑ_3 siano $\vartheta_3^{(1)}, \vartheta_3^{(2)}, \ldots, \vartheta_3^{(n)}$. Il valore dato alla funzione ϑ_3 è certo compreso tra due numeri di quest'ultima serie: siano $\vartheta_3^{(r)}, \vartheta_3^{(r+1)}$. Il corrispondente q sarà compreso tra q_r, q_{r+1}. Con approssimazione che è tanto maggiore quanto più piccola è la differenza

$$\vartheta_3^{(r+1)} - \vartheta_3^{(r)}$$

si può stabilire la proporzione

$$(11) \qquad \frac{\vartheta_3^{(r+1)} - \vartheta_3}{\vartheta_3^{(r+1)} - \vartheta_3^{(r)}} = \frac{q_{r+1} - q}{q_{r+1} - q_r}$$

(come si vede facilmente applicando il teorema della media) e da questa dedurre il numero q.

Abbiamo già notato che nel caso nostro q è molto prossimo all'unità, e perciò q' è prossimo a zero.

Usiamo quindi le formole del secondo gruppo.

Indichiamo con Log e log rispettivamente i logaritmi decimali e neperiani.

1° Tentativo:

Poniamo

$$q' = 10^{-2000}.$$

Data la piccolezza di questo numero potremo trascurarne le potenze superiori alla prima in tutti i calcoli seguenti in cui occorra una somma di potenze.

Abbiamo per le formole (d'), (f'), ...:

$$\alpha' = 10^{-2000}$$

$$\frac{2K'}{\pi} = 1 + 4 \,.\, 10^{-2000}$$

$$\rho' = \frac{1}{2} \log 10^{2000} = 1000 \log 10 = 2302 \cdot 58$$

$$K = \frac{2K'}{\pi} \rho' = 2302 \cdot 58$$

$$\vartheta_3 (0, q) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 38 \cdot 28$$

valore *minore* di quello dato ($\vartheta_3 = 46$).

2° Tentativo:

$$q' = 10^{-3000}$$

$$\alpha' = 10^{-3000}$$

$$\frac{2K'}{\pi} = 1 + 4 \,.\, 10^{-3000}$$

$$\rho' = \frac{1}{2} \log 10^{3000} = 1500 \log 10 = 3453 \cdot 87$$

$$K = \frac{2K'}{\pi} \,.\, \rho' = 3453 \cdot 87$$

$$\vartheta_3 (0, q) = 46 \cdot 89$$

valore *maggiore* di quello dato.

3° Tentativo:

$$q' = 10^{-2800}$$

$$\alpha' = 10^{-2800}$$

$$\frac{2K'}{\pi} = 1 + 4 \,.\, 10^{-2800}$$

$$\rho' = \frac{1}{2} \log 10^{2800} = 1400 \,.\, \log 10 = 3223 \cdot 61$$

$$K = \frac{2K'}{\pi} \,.\, \rho = 3223 \cdot 61$$

$$\vartheta_3 (0, q) = 45 \cdot 30.$$

Teniamo conto dei soli valori ottenuti nel 2° e nel 3° tentativo e calcoliamo i corrispondenti valori di q.

Per

$$q' = 10^{-3000}$$

abbiamo, per la (h),

$$\log q^{-1} \,.\, \log 10^{3000} = \pi^2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \log q^{-1} &= \operatorname{Log} \pi^2 - \operatorname{Log} \log 10^{3000} \\ &= 0 \cdot 9942997 - 3 \cdot 8393370 \\ &= \bar{3} \cdot 1549627 \\ \log q^{-1} &= 0 \cdot 0014288 \\ \log q &= -0 \cdot 0014288 \end{aligned}$$

In modo analogo per

$$q' = 10^{-2800}$$

si ottiene

$$\log q = -0 \cdot 0015308.$$

Nella formola (11) possiamo, con approssimazione sufficiente nel nostro caso, sostituire i logaritmi ai numeri come si suol fare comunemente nei calcoli di interpolazione di logaritmi. Otteniamo

$$\frac{46 \cdot 89 - 46}{46 \cdot 89 - 45 \cdot 30} = \frac{-0 \cdot 0014288 - \log q}{-0 \cdot 0014288 + 0 \cdot 0015308}$$

da cui

$$\log q = -0 \cdot 0014859.$$

14. Calcolo di t. — Noto il valore di q possiamo calcolare il tempo t per mezzo della formola (6) del paragrafo precedente:

$$q = e^{-\frac{\pi^2 a^2}{R^2} t}.$$

Ricordiamo che quando t è misurato in giorni ed R in metri,

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Allora si deduce

$$t = -\frac{R^2}{\pi^2 a^2} \log q = \frac{36 \cdot 10^{12} \cdot 4}{\pi} \times 0 \cdot 0014859 \text{ giorni}$$

cioè circa **187** *milioni di anni.*

15. Confronto con i risultati ottenuti per altra via. — Come ordine di grandezza questo risultato è in pieno accordo con quello dedotto da Kelvin nell'ipotesi che la terra fosse considerata come piana: secondo Kelvin l'età della terra è compresa difatti fra **20** e **400** milioni di anni.

Lo stesso accordo si mantiene pure nel confronto con alcuni risultati forniti dalla Geologia e che qui riportiamo togliendoli dal trattato parecchie volte citato del Poincaré.

1° Secondo Joly, la salsedine del mare, dovuta al tributo annuo recato dalle acque fluviali, esige un tempo di formazione calcolabile in **100** milioni di anni;

2° I sedimenti depositati a partire dal periodo *Cambriano* inducono a ritenere che il tempo decorso da quell'epoca sino ad oggi sia compreso fra **100** e **600** milioni di anni;

3° Il tempo occorso a sviluppare la quantità di *elium* attualmente presente nelle rocce uranifere è calcolato **400** milioni di anni.

Ricordiamo infine quanto già si disse alla fine del primo paragrafo: che, cioè, l'*età della terra*, calcolata colle ipotesi

semplificatrici poste a base della teória, non può avere altra pretesa che di rappresentare un valore *minimo*.

Possono quindi quei geologi, che ritengono insufficiente un periodo di poche centinaia di milioni di anni a spiegare le evoluzioni del nostro globo, persistere nelle idee loro: la teoria del raffreddamento consente si possa ritenere tale periodo molto maggiore di quello ora trovato.

2° La temperatura nell'interno della terra.

16. Calcolo della temperatura centrale. — La formola (10) dà la temperatura centrale della terra in funzione della temperatura iniziale V_0 e del parametro q.

Ricordiamo che

$$V_0 = 4000^0$$
$$\log q = -0 \cdot 0014859$$

e che il corrispondente q' è compreso fra 10^{-2800} e 10^{-3000}. Bastando al nostro scopo un valore approssimato, poniamo

$$q' = 10^{-2900}.$$

Dalla relazione [1]

$$q' = \frac{k'^2}{16} + \frac{k'^4}{32} + \dots \tag{12}$$

abbiamo, limitando la serie al primo termine,

$$k' = 4\sqrt{q'} = 4 \cdot 10^{-1450}$$
$$\sqrt{k'} = 2 \cdot 10^{-725}.$$

La (10) dà allora

$$V_C = V_0 [1 - 2 \,.\, 10^{-725} \,.\, 46] :$$

poichè la quantità fra parentesi differisce dall'unità solo per una frazione estremamente piccola, possiamo porre $V_C = V_0$.

[1] Hoüel, loc. cit., livre VI, pag. 264.

Il raffreddamento, secondo la teoria della conducibilità, non avrebbe raggiunto ancora, in modo sensibile, la parte centrale del nostro globo.

17. Confronto con le determinazioni di H. Poincaré. — La formola (10), che riduce ad un calcolo semplice e rapido la determinazione della temperatura interna, permette rettificare una idea in parte non esatta espressa da H. Poincaré. L'illustre scienziato fa notare nelle sue *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* (pagg. 214-216), che si potrebbe fare una teoria del raffreddamento della terra con queste ipotesi: supporre che la distribuzione iniziale della temperatura sia, non più uniforme, ma solo funzione della distanza r dal centro, e che il tempo decorso dall'inizio del raffreddamento sia così grande, che la terra abbia raggiunto ora " l'état pénultième, quasi-stationnaire ".

La serie che rappresenta la temperatura può essere ridotta, allora, al primo termine; e si può dedurre che dopo trascorsi 100 miliardi di anni la temperatura centrale dev'essere diminuita nel rapporto di e od 1.

" Nous nous trouvons donc dans des conditions très différentes de celles où nous étions précédemment (nella teoria di Kelvin). C'est que des hypothèses différentes ont été faites... L'une des deux hypothèses n'est pas plus invraisemblable que l'autre ".

Dimostreremo invece che i risultati a cui conducono le due ipotesi sono fra loro in sufficiente accordo.

Poniamo, con Poincaré,

$$t = 10^{11} \text{ anni} = 365 \,.\, 10^{11} \text{ giorni.}$$

Avremo, come di solito,

$$q = e^{-\frac{\pi^2 a^2}{R^2} t} = e^{-\frac{\pi . 365\ 10^{11}}{4.36.10^{12}}} = e^{-\frac{\pi . 365}{4.360}}$$

$$\text{Log}\, q = -\frac{\pi \,.\, 365}{4 \,.\, 360} (0 \cdot 43429)$$

$$= \bar{1} \cdot 65417.$$

Questo valore di q non è contenuto nelle tavole delle funzioni ellittiche, ma valendoci del suo valore più prossimo:

$\operatorname{Log} q = \bar{1} \cdot 6131$, possiamo, con interpolazione, dedurre dalle tavole stesse:

$$\log \frac{2K}{\pi} = 0 \cdot 5905$$
$$\log k' = \bar{3} \cdot 9726$$

da cui

$$\log \vartheta_3 = \frac{1}{2} \log \frac{2K}{\pi} = 0 \cdot 2952$$
$$\log \sqrt{k'} = \bar{2} \cdot 9863$$
$$\log \sqrt{k'} . \vartheta_3 = \bar{1} \cdot 2815$$
$$\sqrt{k'} . \vartheta_3 = 0 \cdot 1912.$$

Per la (10)

$$V_C = V_0 [1 - \sqrt{k'} . \vartheta_3]$$

sarà quindi

$$V_C = \frac{81}{100} V_0 \text{ circa.}$$

Secondo i calcoli di Poincaré

$$V_C = \frac{37}{100} V_0 \text{ circa;}$$

in questo genere di studi non si può dire perciò che le due teorie conducano a risultati fondamentalmente diversi.

3° La temperatura interna e il gradiente termico nei pianeti.

18. — Consideriamo una sfera per la quale valgano le considerazioni fisiche fatte relativamente alla terra, e a cui si possano attribuire le costanti medesime trovate per essa:

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$
$$t = 187 . 10^6 \text{ anni}$$
$$V_0 = 4000^0.$$

Vogliamo anzitutto studiare la temperatura interna. Usiamo a tale scopo la formola (10):

$$V_C = V_0 [1 - \sqrt{k'} . \vartheta_3 (0, q)].$$

Supponiamo sia $R = 50$ km.

Allora, per la (6),

$$q = e^{-\frac{\pi^2 a^2}{R^2} t} = e^{-\frac{\pi . 187 . 10^6 \cdot 365}{4 . 25 . 10^8}},$$

da cui

$$\text{Log}\, q = -\frac{\pi . 365 . 187}{10^4} (0 \cdot 434) = -9 \cdot 31 = \overline{10} \cdot 69$$

i corrispondenti valori di ϑ_3, k' differiscono dall'unità di quantità così piccole che la espressione $1 - \sqrt{k'} . \vartheta_3$ della formola (10) si può ritenere nulla. Una sfera avente le dimensioni supposte, nel termine di $187 . 10^6$ anni è quindi completamente raffreddata.

Se poniamo successivamente

$$R = 100, 200, 250, 500 \text{ km.}$$

otteniamo, tenendo anche conto dei risultati già ottenuti, i valori della seguente tabella.

Temperatura centrale d'una sfera dopo un periodo di raffreddamento eguale a quello della terra.

Raggio	Temperatura relativa $[V_0 = 1]$	Temperatura assoluta $[V_0 = 4000°]$
50 km.	0	0°
100 „	$\frac{1}{100}$	40°
200 „	$\frac{52}{100}$	2080°
250 „	$\frac{79}{100}$	3160°
500 „	$\frac{9999}{10000}$	3996°
6000 „	1	4000°

I calcoli relativi alla prima ed ultima linea di questa tabella furono già dati nelle pagine precedenti; quelli relativi alla 2ª, 3ª e 4ª linea non sono qui riportati ma sono deducibili direttamente coll'uso delle tavole: quando $R = 500$ km. i valori di q, k', ϑ_3 non sono più dati dalle tavole, ma si possono calcolare facilmente in questo modo: ricaviamo prima q' dalla relazione

$$\log q^{-1} \log q'^{-1} = \pi^2.$$

Siccome nel caso nostro

$$\log q^{-1} = 0 \cdot 2144$$

si deduce

$$\operatorname{Log} q'^{-1} = 20 \; ; \qquad \operatorname{Log} q' = -20.$$

Dalla formola (12), n. 16, si deduce

$$k' = 4\sqrt{q'} = 4 \cdot 10^{-10}.$$

Essendo k' piccolissimo vale la formola [1]

$$K = \log \frac{4}{k'}.$$

Perciò

$$K = 10 \log 10 = 23 \cdot 02$$

$$\vartheta_3(0, q) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 3 \cdot 8$$

$$\sqrt{k'} \cdot \vartheta_3(0, q) = 10^{-4} \text{ (circa)}$$

$$V_C = V_0 \frac{9999}{10000}.$$

19. — Passiamo ora al calcolo del gradiente termico superficiale.

---

[1] Hoüel, pag. 299.

Diamo ad R i valori

$$R = 50,\ 100,\ 200,\ 250,\ 500.$$

Per $R = 50$ km. si è trovato

$$\operatorname{Log} q = \overline{10} \cdot 69$$
$$k',\ \vartheta_3(0, q) = 1,$$

perciò il gradiente α, che è dato dalla formola (8),

$$\alpha = \frac{V_0}{R}\left[\vartheta_3(0, q) - 1\right]$$

risulta uguale a zero. Del resto si è già trovato che in questo caso la temperatura interna è nulla, il che equivale a un gradiente nullo in ogni punto.

Se poniamo $R = 100$ km. risulta

$$\operatorname{Log} q = 3 \cdot 672$$

a cui corrisponde, nelle tavole,

$$\operatorname{Log} \frac{2K}{\pi} = 0 \cdot 008;$$

perciò

$$\operatorname{Log} \vartheta_3 = 0 \cdot 004$$
$$\vartheta_3 = 1 \cdot 001$$
$$\alpha = \frac{V_0}{10^5} \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-5}$$

che corrisponde ad un incremento di 1° C per ogni 25 chilometri.

L'*incremento medio* sarebbe invece di 1° C per ogni 2,5 chilometri, cioè *dieci* volte maggiore.

In modo analogo otteniamo i valori dati nella seguente tabella.

Gradiente termico superficiale e gradiente medio.

Raggio	Gradiente superficiale	Gradiente medio
50 km.	0 $\frac{\text{gradi}}{\text{metro}}$	0 $\frac{\text{gradi}}{\text{metro}}$
100 „	$4 \cdot 10^{-5}$ „	$4 \cdot 10^{-4}$ „
250 „	$15 \cdot 10^{-3}$ „	$\frac{1}{80}$ „
500 „	$19 \cdot 10^{-3}$ „	$\frac{1}{125}$ „
1000 „	$27 \cdot 10^{-3}$ „	$\frac{1}{250}$ „
6000 „	$30 \cdot 10^{-3}$ „	$\frac{1}{1500}$ „
10000 „	$30{,}2 \cdot 10^{-3}$ „	$\frac{1}{2500}$ „

20. — I risultati di questi calcoli permettono confrontare in quali condizioni termiche si troverebbero attualmente i diversi corpi del nostro sistema solare, se essi avessero cominciato insieme a raffreddarsi, fossero partiti da una eguale temperatura iniziale e si fossero trovati pure, inizialmente, in condizioni fisiche analoghe a quelle della terra.

Diamo a tale scopo nella pagina seguente un prospetto in cui i corpi celesti sono classificati in ordine di grandezza crescente e sono ripetuti i risultati dati nei due prospetti precedenti per pianeti ideali aventi raggi di 50, 100, 200, 250, 500, 1000, 6000, 10000 km.

Degli asteroidi sono menzionati solo i quattro maggiori e il piccolo pianetino Eros.

Rileviamo subito che il confronto stabilito in questo prospetto è in pieno accordo con quanto l'osservazione rivela sulla costituzione fisica degli astri del nostro sistema.

La temperatura nei globi minori è eguale a quella dello spazio in cui si trovano. La temperatura bassissima che osser-

Confronto delle grandezze, delle temperature e dei gradienti nei pianeti e nei satelliti (1).

Raggio in km.	Pianeti e Satelliti	Temperat. assoluta al centro in C°	Gradiente termico gradi/metro	Grado termico metri/grado
8·4	Deimos (Marte)			
	Phobos „			
13·5	Eros (433)			
	V Sat. Giove			
	VI „ „			
	IX „ Saturno			
	X „ „			
50	. . . . .	0°	0	∞
	VI Sat. Giove			
92	Giunone ③			
100	. . . . .	40°	$4 . 10^{-5}$	3500
	Iperione (Saturno)			
193	Vesta ④			
200	. . . . .	2080°	—	—
	Umbriel (Urano)			
	Mimas (Saturno)			
	Ariel (Urano)			
245	Pallade ②			
250	. . . . .	3160°	$15 . 10^{-3}$	67
	Encelado (Saturno)			
	Japeto „			
383	Cerere ①			
	Dione, Teti (Saturno)			
500	. . . . .	3996°	$19 . 10^{-3}$	53
	Rea (Saturno)			
	Oberon, Titania (Urano)			
1000	. . . . .	4000°	$27 . 10^{-3}$	37
1575	Europa (II Giove)			
1741	*Luna*			
1825	Titano (Saturno)			
1889	Io (I Giove)			
2379	*Mercurio*			
2612	Callisto (IV Giove)			
2921	Ganimede (III „)			
3367	*Marte*			
6000	. . . . .	4000°	$30 . 10^{-3}$	33·3
6372	*Venere*			
6378	*Terra*			
10000	. . . . .	4000°	$30,2 . 10^{-3}$	33·1
24202	*Nettuno*			
36975	*Urano*			
59251	*Saturno*			
70476	*Giove*			

(1) Le dimensioni attribuite ai corpi celesti sono conformi a quelle adottate da V. André, *Les planètes et leur origine*, Paris, 1909.

viamo nell'interno delle meteoriti, è pure quella posseduta dai pianeti il cui raggio non superi di molto i cento chilometri.

Col raggio, cresce poi rapidamente la temperatura interna: i maggiori satelliti di Giove e di Saturno, e la Luna, hanno, internamente, la medesima temperatura dei pianeti a cui appartengono [1].

Il gradiente superficiale cresce, meno rapidamente, sino a globi di 1000 km. di raggio: poi si mantiene quasi costante.

Consegue da questa ineguale distribuzione termica nei diversi corpi, che, nei minori di essi, la solidificazione essendo estesa sino alle parti centrali, e nei medii, inclusa la Terra, sino a notevole profondità, la loro configurazione esterna è in uno stato di assetto quasi definitivo e non presentano quindi indizio di trasformazioni.

Nei maggiori, la crosta solida, che potrebbe essersi formata col raffreddamento, sarebbe così sottile, rispetto alle dimensioni del pianeta, da non poter assumere ancora una configurazione stabile: essi corpi infatti ci appaiono in uno stato di continua trasformazione [2].

Notiamo, ad ogni modo, che nel caso dei pianeti maggiori della terra, i risultati dei calcoli fatti vanno intesi solo come indizio di quanto avverrebbe in essi se avessero struttura fisica analoga alla terra: in realtà invece i maggiori di essi hanno una densità relativa minore: Giove 0·2, Saturno 0·1, Urano 0·2, Nettuno 0·3. Gli altri hanno densità non molto diversa: Mercurio 1·2, Venere 0·8, Marte 0·7.

I risultati trovati non ci permettono però di fare un calcolo, anche lontanamente approssimato, della temperatura sulla superficie dei pianeti: poichè molte cause concorrono a modi-

---

[1] Cioè, per le ipotesi fatte, circa *1000°*. Secondo una formola empirica del Fritz, riportata nella *Geografia fisica* del prof. De Marchi, la temperatura centrale della terra sarebbe *3700°*, in buon accordo quindi coi nostri calcoli.

[2] Una descrizione elementare della configurazione dei pianeti, oltre che nel trattato citato di V. André, è data nel manuale di *Astronomia* di J. Norman Lockyer, tradotto e completato da G. Celoria. — U. Hoepli, Milano.

ficarla: temperatura interna, gradiente, distanza dal sole, atmosfera propria, periodo di rotazione e di rivoluzione, ecc. Inoltre, per i pianeti che hanno periodi di rotazione e di rivoluzione eguali (Mercurio e Venere, secondo lo Schiaparelli) può essere molto diversa sull'emisfero che rivolge sempre la faccia al sole e su quello che non ne viene mai illuminato.

Qualche tentativo per stabilire la probabile temperatura esterna dei pianeti venne fatto dal Poynting e dal Lowell, in base ad ipotesi più o meno attendibili e senza tener conto alcuno delle temperature proprie e dei valori del gradiente: i loro risultati sono dati nel trattato citato dell'André.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 18 Gennaio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano ed i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Salvadori, D'Ovidio, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Balbiano;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Manno, Carle, Renier, Pizzi, Chironi, De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi e Baudi di Vesme.

Letto ed approvato l'atto verbale della precedente adunanza 11 gennaio 1914 a Classi Unite, si procede alla votazione per schede segrete, pel conferimento del premio Bressa, nazionale, relativo al quadriennio 1909-1912.

L'Accademia conferisce il premio Bressa al Comm. Vittorio Fiorini, Direttore Generale per l'Istruzione media al Ministero dell'Istruzione pubblica, per la nuova edizione da lui curata dei *Rerum italicarum Scriptores*.

Si passa quindi alla votazione pel premio Gautieri per la Storia, relativo al triennio 1910-1912.

Si delibera, ad unanimità, di accogliere la proposta della Commissione di dividere il premio per metà fra due Autori.

Una metà viene conferita al prof. Pietro Silva della Regia Accademia Navale di Livorno per l'opera *Il Governo di Pietro Gambacorta in Pisa e le sue relazioni col resto della Toscana e coi Visconti, contributo alla storia delle signorie italiane* (Pisa, Nistri, 1910), e l'altra metà viene conferita al prof. Nino Tamassia della R. Università di Padova per l'opera *La famiglia italiana nei secoli XV e XVI* (Milano-Palermo-Napoli, Sandron, 1910). —

In conformità all'art. 1° del Regolamento interno per il conferimento del premio Bressa, ognuna delle due Classi procede alla votazione per la nomina di quattro membri per ciascuna Classe per comporre la 1ª Giunta del XIX premio Bressa (internazionale) relativo al quadriennio 1911-1914.

Per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali riescono nominati i Soci Naccari, Parona, Mattirolo, Somigliana; per la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche i Soci Renier, De Sanctis, Ruffini, Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Gennaio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Manno, Carle, Pizzi, De Sanctis, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Stampini.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 4 gennaio 1914.

Il Socio De Sanctis offre per gli *Atti* una Nota di Augusto Rostagni, *La vita e l'opera di Pitagora secondo Timeo.*

Il Socio Einaudi presenta per l'inserzione nelle *Memorie* accademiche una monografia largamente documentata del professore Giuseppe Prato, *Un episodio della vita di Giovanni Law*. Il Presidente designa a riferirne il Socio proponente Einaudi ed il Socio Ruffini.

LETTURE

La vita e l'opera di Pitagora secondo Timeo.

Nota di AUGUSTO ROSTAGNI.

Mole rude e informe di svariatissime tradizioni, in buona parte leggendarie, è quella che intorno a Pitagora ed alla scuola pitagorica recano le opere biografiche maggiori, a noi preservate, le Vite scritte, rispettivamente, da Laerzio Diogene, da Porfirio, da Giamblico. Non senza larghezza la critica moderna già ha atteso a sceverare e comporre gli elementi, valendosi delle indicazioni fornite circa le fonti più antiche dai compilatori stessi, districando nelle fila essenziali le memorie di Aristosseno, di Dicearco, di Ermippo, di Neante: e ciò per merito sopra tutti di Erwin Rohde e di G. F. Unger, a non dire dell'ampie disamine dovute allo Zeller ed al Busolt (1).

Ma quasi ignorata rimane la narrazione che sull'argomento, alle sue *Ἱστορίαι* ben inerente, faceva Timeo, ed alla quale pur dovè spettare influenza e valore notevolissimo.

Mentre traccie non se ne sono avvertite fuorchè, naturalmente, nello scarno capitoletto di Giustino (XX 4) e nei pochi

(1) Rohde *Die Quellen des Jamblichus* 'Rhein. Mus.' XXVI (1871) pp. 554-76 XXVII pp. 23-61; Unger *Zur Geschichte der Pythagoreier* 'Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu München' Philos.-philol. Cl. 1883 pp. 140 sgg.; Zeller *Die Philos. d. Griech.* I 1[5] p. 296 sgg.; Busolt *Griech. Gesch.* II[2] pp. 759 sgg. Vedasi poi Cobet *Collectanea critica* (Lugduni 1878) pp. 305-460, nè si dimentichi A. B. Krische *De societ. a Pyth. in urbe Croton. cond. scopo politico* (Gött. 1830). Arruffata e poco attendibile l'esposizione di A. E. Chaignet *Pythag. et la phil. pythagor.* (Paris 1873): priva d'ogni lume di critica quella di F. Lenormant *La Grande Grèce* II p. 35 sgg. In genere leggansi: Gomperz *Griech. Denk.* I 81 sgg.; A. Covotti, *La filos. nella Magna Grecia e in Sic.* 'Annali delle Univ. tosc.' XXIII (1900). Assai involuto e poco profittevole il recente articolo di P. Corssen *Die Sprengung des pythagoreischen Bundes* 'Philologus' LXXI (1912) pp. 332 sgg.

frammenti (1), essa è una tra le meglio diffuse: e riesce possibile ricostruirla nella sua massima estensione mediante un nuovo esame delle fonti, sì che molti elementi cui non s'attribuiva alcun peso vengano in prima linea, e molti ch'erano altrove collocati le appartengano, e molti infine i quali isolatamente non facevansi bene apprezzare, vi rientrino e vi si spieghino come in un ordito organico. Il che tanto più giova in quanto permette, se pur sempre nei limiti della sola tradizione di Timeo oggettivamente considerata — nè altro sarà ora il nostro intento —, una veduta chiara degli avvenimenti, recante ordine fra le molteplici confusioni dei testi superstiti (2).

I.

Un punto cardinale nelle vicende di Pitagora e dei Pitagorici è la famosa rivoluzione che contro il governo oligarchico proprio della Scuola scoppiò a Crotone, per opera della democrazia e sotto il comando di Cilone, e che va ben distinta da una seconda sommossa, la quale, adempiutasi nella medesima città con l'incendio della casa di Milone e col più grave esterminio degli adepti, ebbe luogo ad una certa distanza di tempo, già morto il Maestro (3). Le fonti, come tendono a contaminare queste due fasi (appena Aristosseno, che è la scorta migliore, pone un sicuro intervallo: presso Iambl. §§ 249-50), così non offrono indicazioni cronologiche, nessi o rapporti acconci a definire il seguito dei fatti. Solo, con affermazione recisa, Apollonio di Tiana presso Iambl. § 255 dichiara che il governo, man-

(1) Alcune rimembranze, sparse nel testo di Giamblico, notò H. Kothe *De Timaei vita et scriptis* Diss. Vratisl. 1874. — Accenni più singolari, riferentisi in massima alle teorie pitagoriche, e rimasti inefficaci, ignoti agli studî più recenti e a me stesso sino all'ultima ora, trovo aver dati, sebbene per via indiretta e senz'apposita ricerca, A. Delatte in alcune note a *Un ἱερὸς λόγος pythag.* " Rev. de Phil. „. 1910, pp. 175 sgg. (Nè ho potuto profittare del medesimo, in " Rev. de l'Instr. publ. en Belg. „. 1909, pp. 91 sgg., cui sembrano da attribuire alcuni riscontri tra Laerzio e Giambl. circa l'insegnamento crotoniate).

(2) Per Giamblico seguo l'edizione del Nauck Iamblichi *De vita pythagorica liber* (Petropoli 1884); per Porfirio quella pure del Nauck, teubneriana, in Porphyrii *Opuscula selecta*[2].

(3) Cfr. Busolt *Griech. Gesch.* II[2] pp. 770 e sgg. e III 1 p. 523.

tenutosi saldo finchè fu presente Pitagora e finchè durarono gli antichi confini territoriali, cadde bruscamente dopo la conquista di Sibari, quando i Pitagorici non vollero distribuire al popolo le nuove regioni — e il Maestro era partito —: ... *μέχρι μὲν οὖν τὴν ὑπάρχουσαν χώραν ἐκέκτηντο καὶ Πυθαγόρας ἐπεδήμει, διέμενεν ἡ μετὰ τὸν συνοικισμὸν κεχρονισμένη κατάστασις* (1), *δυσαρεστουμένη καὶ ζητοῦσα καιρὸν εὕρασθαι μεταβολῆς. Ἐπεὶ δὲ Σύβαριν ἐχειρώσαντο, κἀκεῖνος ἀπῆλθε, καὶ τὴν δορίκτητον διῳκήσαντο μὴ κατακληρουχηθῆναι κατὰ τὴν ἐπιθυμίαν τῶν πολλῶν, ἐξερράγη τὸ σιωπώμενον μῖσος, καὶ διέστη πρὸς αὐτοὺς τὸ πλῆθος.* Apollonio tianèo, del quale Giamblico esplicitamente, volendo porgere quei particolari che mancano sia in Aristosseno sia in Nicomaco, riferisce il racconto, per le confusioni commesse, per le ardite invenzioni, per il colorito romanzesco, per il carattere stesso di taumaturgo, non inspira a tutta prima affidamento (2), nè è da menargli buono, sulla sua semplice testimonianza, quel che afferma, e fissare cioè, secondo da alcuno si vuole, la sommossa ciloniana all'anno 509, collegata con la distruzione di Sibari del 510 (3); e ancor meno è da credere, conforme i medesimi criterii, che la notizia risalga ad Aristosseno: opinione a pieno arbitraria (4).

Tuttavia, moveremo accusa, come i più, alle tendenze fantastiche dello scrittore (5), oppure verrà fatto di rintracciare anche qui la fonte erudita?

Apollonio non ha tutto inventato, bensì, travisando, serbò indizio di fatti storici i quali altrove difettano: e, se tale sua caratteristica è per apparire piena in seguito, osservisi ora so-

---

(1) Per *συνοικισμός* non è qui da intendere, come alcuni reputano, la fondazione stessa di Crotone, sibbene, col Kiessling (a q. l. del Nauck), l'insediarsi de' Pitagorici.

(2) V. Rohde, l. c. p. 563. J. Miller in Pauly–Wissowa *R.-E.* II coll. 146 sgg. Il Nauck *Prolegomena* p. LV afferma: " facile patet talem scriptorem sano homini esse abominandum ".

(3) Sulla data della distruzione cfr. Beloch *Griech. Gesch.* I² 1, p. 382, 1; L. Pareti ' Atti dell'Accad. di Torino ' XLVIII p. 1009, 3.

(4) Sostenuta da Unger l. c. p. 144.

(5) Vedasi ad es. con quali parole Corssen l. c. p. 348 respinga l'asserzione di Apollonio. — Duncker *Gesch. d. Altert.* VI⁵ p. 643 pensò a Neante; così Busolt *Griech. Gesch.* II² p. 768, 1.

lamente, a fine di non precorrere i risultati della ricerca, ch'ei menziona gli Achei intervenuti alla pacificazione della Magna Grecia dopo la seconda catastrofe (1). Come l'intervento degli Achei non trovasi narrato se non in un altro ordine di fonti e cioè in Polibio II 39 (2) e in Strabone VIII p. 384 (3), così un rapporto qualunque sia dei Pitagorici con l'impresa di Sibari, oltre che presso Giamblico stesso (§§ 133 e 177) s'incontra solo in Diodoro Siculo XII 9: per consiglio di Pitagora furono accolti a Crotone i profughi sibariti, e questa politica di Pitagora e dei Pitagorici provocava la guerra con la città rivale (4).

Ora importa conoscere donde attinga Diodoro. Da Timeo, sembra verisimile (5): ogni dubbio, se v'ha, è destinato a cadere. — Da Timeo, sappiamo, ricava Giustino XX 4, non solo quanto dice di Pitagora, ma anche tutto ciò che viene esponendo sulla storia dell'Italia inferiore (6). E determinazione capitale è la sua, Pitagora avere dimorato vent'anni in Crotone, prima di prender stanza a Metaponto, dove morì. Senonchè, compendiando, lo storiografo non indica da quale termine i vent'anni vadano computati. Nè giova pensare alla battaglia del Sagra, in

(1) Presso Iambl. § 263: *μεταπεμπόμενοι δὲ πρεσβευτὰς ἐξ Ἀχαΐας δι' ἐκείνων πρὸς τοὺς ἐκπεπτωκότας διελύθησαν καὶ τοὺς ὅρκους εἰς Δελφοὺς ἀνέθηκαν.*

(2) § 4: .. *ἀπὸ τῶν πλείστων μερῶν τῆς Ἑλλάδος πρεσβευόντων ἐπὶ τὰς διαλύσεις, Ἀχαιοῖς καὶ τῇ τούτων πίστει συνεχρήσαντο πρὸς τὴν τῶν παρόντων κακῶν ἐξαγωγήν...*

(3) [Ἀχαιοὶ] *τοσοῦτον ηὐδοκίμησαν περὶ τὰς πολιτείας ὥστε τοὺς Ἰταλιώτας μετὰ τὴν στάσιν τὴν πρὸς τοὺς Πυθαγορείους, τὰ πλεῖστα τῶν νομίμων μετενέγκασθαι παρὰ τούτων σενέβη.*

(4) § 4: ... *ἀπορουμένης τε τῆς συγλήτου καὶ τοῦ δήμου, τὸ μὲν πρῶτον ἔρρεπε ταῖς γνώμαις τὸ πλῆθος πρὸς τὴν ἀπόδοσιν τῶν ἱκετῶν διὰ τὸν πόλεμον· μετὰ δὲ ταῦτα Πυθαγόρου τοῦ φιλοσόφου συμβουλεύσαντος σώζειν τοὺς ἱκέτας, μετέπεσον ταῖς γνώμαις καὶ τὸν πόλεμον ὑπὲρ τῆς τῶν ἱκετῶν σωτηρίας ἀνείλοντο.* Agli avvenimenti interni di Sibari in connessione coi Pitagorici si riferiva forse anche Eraclide Pontico: cfr. oltre p. 392, n. 2.

(5) Cfr. Beloch *Die Oekon. d. Gesch. d. Timaios* 'Jahrb. f. class. Phil.' 1881 p. 699: nel passo di Diodoro la fondazione di Turii offre modo di ricapitolar brevemente quanto erasi detto intorno a Sibari: ciò denota la provenienza da Timeo, contro Volquardsen *Unters. über die Quellen* etc. p. 102. — A torto Busolt *Griech. Gesch.* II² p. 768, 1 pensò ad Eforo.

(6) Cfr. Beloch *Griech. Gesch.* I 1 p. 382, 1 e 2 p. 244; Geffcken *Timaios' Geographie des Westens* p. 138.

seguito a cui per l'appunto egli fa venire Pitagora in Italia a salvare dalla corruzione le genti, poichè la battaglia del Sagra non consta quando si sia svolta, se non tra la distruzione di Siri, intorno al 550, e l'esterminio di Sibari, del 510 (1).

La via è un'altra, donde risulti datato lo stesso grande avvenimento campale: però che, se i vent'anni non si lasciano stabilire direttamente sul testo di Giustino, essi potranno determinarsi come appena sien fatti entrare in un congegno di tradizioni coerente ed unitario.

I testi non sono pochi ad ascrivere la venuta del filosofo in Italia all'olimpiade LXII (532-29) (2); e in particolar modo è esplicito Cicerone che a più riprese, segnatamente nelle *Tusculane* I 16, 38 e nei libri *Della repubblica* II 15, 28-9, determina per ciò i primi anni del regno di Tarquinio il Superbo, anzi l'anno quarto, il 529/8: *De republ.* l. c.: *nam quartum iam annum regnante Lucio Tarquinio Superbo Sybarim et Crotonem et in eas Italiae partis Pythagoras venisse reperitur: Olympias enim secunda et sexagesima eadem Superbi regni initium et Pythagorae declarat adventum. Ex quo intellegi regiis annis dinumeratis potest anno fere centesimo et quadragesimo post mortem Numae primum Italiam Pythagoram attigisse; neque hoc inter eos qui diligentissime persecuti sunt temporum annales ulla est unquam in dubitatione versatum* (3).

Allorquando scrisse, sieno le *Tusculane* sia la *Repubblica*, l'oratore doveva già aver innanzi il *Liber annalis* dell'amico Pomponio Attico e qui trovare i sincronismi greci di cui discute (4). Per altro, dacchè i vent'anni di Giustino coincidono

---

(1) Cfr. Beloch *Siris* 'Hermes' XXIX (1894) pp. 604 sgg. e *Griech. Gesch.* I² 2 pp. 238 sgg.; De Sanctis *Storia dei Romani* I p. 338; Busolt *Griech. Gesch.* II² p. 759, 1 e 2.

(2) Vedansi Unger l. c. pp. 142 sgg. e Zeller o. c. p. 297, 1.

(3) Per Gellio XVII 21, 6 v. innanzi p. 379, in nota.

(4) Molteplice controversia è fatta dai critici, e soprattutto dagli studiosi dei Fasti romani, su questo passo in cui Cicerone si propose di sfatare con la cronologia alla mano la leggenda delle relazioni di Numa e Pitagora (sulla quale leggenda v. De Sanctis *Storia dei Rom.* I p. 377): Matzat *Röm. Chronol.* I p. 149; Soltau *Röm. Chronol.* p. 275; Leuze *Die römische Jahrzählung* p. 244 e p. 152. Radice d'ogni difficoltà è la presunzione

appunto con lo spazio intercedente fra il 529, della venuta di Pitagora, e il 509, successivo allo sterminio di Sibari — sterminio il quale dimostro essere perno al racconto di Timeo —, anche senza scoperta l'identità della fonte, anche *a priori*, ben ogni ragione consiglierebbe di attenerci a sì fatto procedimento. E, già, il *Liber annalis* potè dedurre da Timeo e, in ogni modo, Cicerone, operando il suo riscontro, moveva dal compnto delle olimpiadi (1).

---

che vi fosse seguìta la cronologia polibiana di Nepote, secondo la quale il IV anno di Tarquinio il Superbo cadeva nel 532 cioè alla fine dell'olimpiade LXI. Laddove Cicerone manifestamente, dichiarando che Pitagora venne in Italia nel IV anno del regno di Tarquinio e soggiungendo che dall'olimpiade LXII è designato ad un tempo il principiare del regno di Tarquinio e la venuta di Pitagora in Italia, addita e per essa venuta e per IV anno del Superbo il 529/8, anno IV dell'olimpiade LXII: dunque mostra di assecondare l'altra cronologia, varroniana, secondo la quale il regno di Tarquinio comincia col principiare dell'olimpiade LXII: 532/1–529/8. Perciò, se nel *De Republ.* II 14, 27 compare la cronologia polibiana (cfr. Leuze p. 174) non è da concludere sempre comparisse, ma si oscillasse ancora, come in altre opere (Leuze p. 244, n. 302), tra i due sistemi. E non si può consentire con G. Costa *I fasti consol. rom.* (Milano 1910) p. 115, se nel passo ciceroniano vede ' una patente contraddizione „ — Pitagora essere giunto in Italia nel IV anno del regno di Tarquinio, e poi, invece, l'inizio del costui regno essere contemporaneo con la venuta stessa del filosofo —: poichè, come ognuno noterà, egli attribuisce ad *Olympias* una rara e qui tutt'altro che giustificata interpretazione, nel senso ristretto di 'anno in cui si celebrano i giuochi olimpici ', introducendo contraddizioni che non esistono (v. anche p. 128). — L'asserto di Cicerone ha la sua base, perspicua, in ciò che la venuta di Pitagora apparteneva all'olimpiade LXII e al IV anno del regno di Tarquinio, regno con la medesima olimp. iniziatosi. Che poi i 140 anni dalla morte di Numa, già solo approssimativamente indicati - *fere* - (il *fere*, modo all'oratore abituale, costante, è per Costa o. c. p. 134 sgg. una traccia di Nepote), presuppongano un calcolo diverso da quello di Nepote, è ben chiaro, nè l'approssimazione stupisce: cfr. Leuze p. 152, n. 182. Nei limiti che ci occupano, la cronologia non lascia adito a dubbii, quando si assodi che una tradizione speciale, di Timeo, largamente accolta, fissò l'*adventus Pythagorae* appunto al 529/8. Così viene meno l'appoggio che ad un diverso comprendimento del passo ciceroniano avevasi in credere predominante, per la venuta, la data 532.

(1) È da contraddire ora all'opinione comunemente assodata e ripetuta da Jacoby *Apollodors Chronik* 'Philol. Unters.' XVI pp. 219 sgg. la quale, come ritiene che Cicerone si conformi alla cronologia di Nepote, così vi

Chè poi egli stesso, generalmente e più che mai nelle *Tusculane*, avea innanzi per la parte storica della sua varia esposizione l'opera dello scrittore siceliota (1). Timeo egli ricorda

---

vede traccia d'Apollodoro. Apollodoro avrebbe attribuito la venuta di Pitagora all'anno 532. Ma il Jacoby stesso osserva essere determinato, nel *De Republica*, non il 532, sibbene il 529: nè riesce ad eliminare la difficoltà. Che cade, una volta riconosciuta la dipendenza da Timeo. D'altra parte credo non si possa con ragione riferire a Pitagora il frammento delle *Cronache* apollodoree riferitogli a questo proposito su congettura del Diels (fr. 24 Jacoby). E, scartando questi elementi, scartando come propria di Timeo ogni altra determinazione di olimpiade LXII che l'avviso dei dotti, a partire dal Krische o. c. p. 9 sino al Jacoby e al Beloch *Griech. Gesch.* I², 1, p. 439, 1 (e v. oltre p. 383, n. 2), ascriveva ad Apollodoro, resta solo a discutere, unico dato attendibile, quello fornito da Diodoro X 3, 1: l'*ἀκμή* del filosofo all'olimpiade LXI, anno IV (533/2). Ma che tale dato derivi, come si credeva, da Apollodoro, anche è oltremodo dubbio ed improbabile, se consta ormai la fonte cronologica di Diodoro non dover essere lo storiografo ateniese. Laddove tenendoci ormai all'opinione prevalente che addita la fonte in Castore di Rodi (cfr. Wachsmuth, *Einl.*, p. 102, n. 3) viene fatto di spiegare e ricondurre alla sua origine in modo consentaneo l'elemento controverso. Nel quale presumendo che l'*ἀκμή* coincidesse, come di solito, con l'*adventus*, questa conseguenza si offre. Il 533, anno IV dell'olimp. LXI, designava la venuta di Pitagora ed era il IV anno del regno di Tarquinio il Superbo nei sincronismi di Nepote. Dunque la fonte di Diodoro — e sia Castore, che potè subire l'influsso dei cronografi romani — ha accolto i dati di Timeo circa il nesso degli avvenimenti, e solo ad essi applicato quel computo che compare in Nepote e che porta ad un semplice spostamento di quattro anni. Ciò ha facilitato — ora si vede assai bene — le confusioni degli scrittori: identico l'ordine dei fatti, su un'êra diversa. Ond'è che, parlando del IV anno di Tarquinio per la venuta di Pitagora, Cicerone accennò al 529, e Castore e Nepote al 533; ed altri, ad es. Gellio XVII 21, 6 *postea Pythagoras Samius in Italiam venit, Tarquini filio regnum optinente, cui cognomentum Superbus fuit*, poterono benissimo, pur sembrando identificarsi con Cicerone, dipendere precisamente da Castore e da Nepote così come sembra più verisimile (che Gellio ricavi da Nepote v. Jacoby p. 219). Per la via descritta, oltre a definire la cronologia controversa, eliminiamo anche la difficoltà che pur era in Jacoby o. c. p. 220 di reputare l'olimp. 61ª, 4, data da Diodoro, un errore per il preteso anno olimp. 62ª, 1. Punto fermo è dunque da prima l'olimpiade 62ª 4 fissata da Timeo: di qui le fonti romane deducono il sincronismo col IV a. di Tarquinio il Suberbo, su êra varroniana il 529 — su era polibiana il 533, onde si viene per converso all'olimp. 61ª, 4.

(1) Cfr. Susemihl *Gesch. d. griech. Litt. in d. Alex.-zeit* I, p. 582, 307. Nelle *Tusculane* ciò è contestato, ma soltanto per quel che concerne Dionisio I di

spessissimo, sebbene non ignori, soprattutto sui dettami filosofici della Scuola, e Aristosseno ed Eraclide Pontico (1). Ad una affermazione di cui Timeo con insistenza si compiaceva (fr. 77 Mueller), essersi diffuso nella Magna Grecia a tempo di Pitagora il motto *κοινὰ τὰ φίλων*, l'oratore fa eco ripetutamente (*De leg.* I 12, 34) (2); la casa di Pitagora in Metaponto da lui conosciuta (*De finib.* V 2, 4) è conosciuta da Giustino l. c. 18: la preghiera del filosofo sull'ara incruenta di Apollo in Delo (*De nat. deor.* III 36, 88) è aneddoto desunto dalla medesima miniera (fr. 79 Muell.). Traccie delle *Ἱστορίαι* che si potrebbero accrescere e che solo attendono di essere meglio allineate al loro legittimo posto.

Però che intanto Cicerone, nel divario delle altre fonti biografiche vetuste ch'erano a sua disposizione, si tiene costantemente alla cronologia enunciata (3), facendo punto fermo l'anno 529 per l'avvento in Italia, e conducendosi all'anno 509, dopo Sibari distrutta, per la rivoluzione ciloniana e per l'allontanarsi del filosofo da Crotone: talchè interceda una dimora di

Siracusa V 57–63, da F. Kothe, *Timaios und Ciceros Tusculanen* 'Jahrbb. f. class. Phil.' CXXXIX (1889) pp. 637 sgg.; e nè anche persuasivamente. La cronologia di Dionisio, in Cicerone, sembra infatti suggerita da Timeo: cfr., contro Kothe *De Timaei vita*, etc.; Clasen *Untersuchungen über Timaios* Diss. Kiel 1883 pp. 27 sgg. Le espressioni stesse dell'oratore, V 63–7, animate da vivo odio per la tirannide, risentono di Timeo.

(1) Per Aristosseno cfr. *Tuscul.* I 10, 20; 11, 24; per Eraclide *ibid.* V 3, 8.

(2) Anche Laert. Diog. VIII 1, 10 cita, a questo proposito, come fonte, Timeo: *εἴπέ τε πρῶτος, ὥς φησι Τίμαιος, κοινὰ τὰ φίλων εἶναι καὶ φιλίαν ἰσότητα.*

(3) È ben chiaro che con essa non contrasta quanto lo scrittore afferma pur nelle *Tusculane* IV 1, 2: ... *Pythagoras qui fuit in Italia temporibus isdem, quibus L. Brutus patriam liberavit.* Nulla che accenni alla *venuta*: e si esamini il contesto: gli studii filosofici furono introdotti in Italia, e Roma fu liberata dall'ignoranza per merito dei Pitagorici, nell'epoca medesima in cui ebbe ad essere liberata dalla tirannia per merito di Bruto. — Solino XI 31 (p. 86 Mommsen) fraintende nella guisa che vorrebbero alcuni moderni, e, pur interpretando l'identico concetto di tirannia e di libertà, riporta al consolato di Bruto (509) la *venuta* in Italia: *Pythagoras... offensus fastu tyrannico, relicta domo patria, Bruto consule qui reges urbe exegit, Italiam advectus est.* Su che costruiscono una strana cronologia Röth *Gesch. d. abendl. Phil.* I p. 288 e Unger l. c. p. 154 sgg.

vent'anni. E così come stava scritto — concludiamo ormai — nelle Storie di Timeo.

Nè questo soltanto. A render più evidente la dimostrazione, e prima di averne riprova nel processo della ricerca, sarà appena necessario aggiungere che dal dotto siciliano provengono le altre più precise affermazioni di Apollonio tianeo. L'intervento degli Achei, quale coincide in Polibio II 39, non solo è un particolare storico, ma anche appartiene all'àmbito segnalato. E così dicasi della vittoria crotoniate contro Sibari, la cui impressione, ancor fresca, il compilatore descrive operante su gli spiriti dei rivoluzionarii: presso Iambl. § 260: *αἰσχρὸν εἶναι..... τοὺς τριάκοντα μυριάδων περὶ τὸν Τράεντα* (1) *ποταμὸν περιγενομένους ὑπὸ τοῦ χιλιοστοῦ μέρους ἐκείνων ἐν αὐτῇ τῇ πόλει φανῆναι κατεστασιασμένους*. Dove la cifra incredibile di 300.000 combattenti porta il suggello di Timeo, ricorrendo, la medesima, e nel capitolo di Diodoro già preso in considerazione XII 9, 5 (e di nuovo X 23) e in Strabone VI p. 263. E dove otteniamo in più, da attribuire a Timeo, la designazione del campo di battaglia, il fiume Traeis (Trionto), cui Diodoro e Strabone non si preoccuparono di notare.

Ma con assoluta evidenza viene a galla l'opera del Siracusano, dall'accostamento dei compilatori, allorquando Apollonio in armonia con Giustino annovera e gli affigliati alla lega pitagorica e i caduti nella ribellione: che è cosa tanto più significativa quanto più varia disparità di computi regnava al riguardo nelle tradizioni. Scrive Giustino l. c. 14 sgg.: *Sed CCC ex iuvenibus cum sodalicii iure sacramento quodam nexi separatam a ceteris civibus vitam exercerent, quasi coetum clandestinae coniurationis haberent, civitatem in se converterunt quae eos, cum in unam domum convenissent, cremare voluit. In quo tumultu sexaginta ferme periere; ceteri in exilium profecti.* Ed Apollonio in Iambl. § 254, 10, non senza dar parimente rilievo al carattere aristocratico della Scuola e al malumore che se n'ingenerava nei popolani: *ἦσαν γὰρ ὑπὲρ τριακοσίους* (2). E più innanzi,

(1) Così è da correggere il testo: *τὸν Τετράεντα*, in base a Diod. Sic. XII 22, 1. Vedi la nota del Nauck a q. l. di Giamblico.

(2) Laert. Diog. VIII 1, 3 raccoglie la medesima cifra, 300, in un brano che anche per altri rispetti tiene di Timeo: cfr. appresso p. 385 n. 2. Vedasi

in Iambl. § 264, si fa all'altra cifra, sessanta: *ἦσαν δὲ τῶν Πυθαγορικῶν καὶ περὶ ἑξήκοντα τὸν ἀριθμόν*..., sebbene questa egli, avvezzo a prender nota dei fatti e poi a torcerli liberamente nel proprio contesto, riferisca non già alle vittime, bensì agli scampati. Eppure basta la coincidenza esteriore per segnare un nuovo punto della tradizione di Timeo: non solo, ma per vietare di correggere la cifra di Giustino da LX in XL come i critici per lo più vorrebbero (1) nell'intento di uniformarsi agli altri testi (Dicearco presso Porph. 56, fr. 31 Muell. e Laerzio Diogene VIII 1, 39 parlano infatti di quaranta vittime; Ermippo, fr. 23 Muell. e presso Laert. Diog. VIII 1, 40 si limita a trentacinque): versioni differenti, che, pel loro valore puramente tradizionale, non vanno conciliate, sibbene disposte e contrapposte.

II.

Così i testi comparati di Giamblico, Giustino, Cicerone, Polibio, mentre sono serviti a dimostrare derivante da Timeo la connessione del tumulto ciloniano con la caduta di Sibari, hanno in pari tempo tolto il velo ad un ricco sostrato di tradizione storiografica, proprietà del medesimo autore. Là onde giova continuare in questo indirizzo, perlustrando da prima, così come per avventura anche ripetutamente si offrano, le affermazioni varie o le anella del racconto, disegnando poi, con organica disposizione e col proposito di avviare ad una più ferma conoscenza della storia pitagorica, l'ordine dei fatti: in Timeo, naturalmente.

La trama essenziale è costituita dalla cronologia, di cui i cardini abbiamo intravisti. Nel riportare, come Cicerone riporta, la venuta di Pitagora in Italia all'olimpiade LXII e per l'appunto

altresì Luciano *Βίων Πρ.* 6. Athenag. *Suppl.* c. 31. Giamblico § 29 ha *ἑξακοσίους*: quando si pensi alle infinite rimembranze di Timeo, che rintraccieremo, particolarmente in quella serie di paragrafi, par giusto correggere con Cobet *Coll. crit.* p. 316 sgg. *τριακοσίους*.

(1) Per es. Busolt *Griech. Gesch.* II² p. 771, 3; Unger l. c. p. 166, 1.

all'anno quarto, quarto anno del regno di Tarquinio il Superbo, fu ragione di credere assecondato il Siracusano. Ed ora leggasi, infatti, Giamblico § 35: *Εἰ δὲ δεῖ καὶ τὰ καθ' ἕκαστον ἀπομνημονεῦσαι ὧν [Πυθαγόρας] ἔπραξε καὶ εἶπε, ῥητέον ὡς παρεγένετο μὲν εἰς Ἰταλίαν κατὰ τὴν Ὀλυμπιάδα τὴν δευτέραν ἐπὶ ταῖς ἑξήκοντα, καθ' ἣν Ἐρυξίας ὁ Χαλκιδεὺς στάδιον ἐνίκησεν, εὐθὺς δὲ περίβλεπτος καὶ περίστατος ἐγένετο, καθάπερ καὶ πρότερον ὅτε εἰς Δῆλον κατέπλευσεν. ἐκεῖ τε γὰρ πρὸς μόνον τὸν βωμὸν τὸν τοῦ Γενέτορος Ἀπόλλωνος προσευξάμενος ὃς μόνος ἀναίμακτός ἐστιν, ἐθαυμάσθη παρὰ τοῖς ἐν τῇ νήσῳ.* Che la data, olimpiade LXII (532-29), sia anche qui dello storico di Sicilia, non resta dubbio (1), se tutto il contesto, la menzione della preghiera ad Apollo Genitore in Delo, quale già s'ebbe modo di conoscere da Cicerone, palesa una medesima appartenenza: e tanto più, associandosi ai passi seguenti (fr. 79 Muell.): Censorin. *De die nat.* c. 2 *Denique Deli ad Apollinis genitoris aram, ut Timaeus auctor est, nemo hostiam caedit*; Macrob. *Saturn.* III 6 *Deli ara est Apollinis Γενέτορος in qua nullum animal sacrificatur, quam Pithagoram velut inviolatam adoravisse produnt.*

Quando poi si consideri che questa data è, fra tutte, predominante e che compare, accolta da un maggior numero di compilatori, non tornerà vano saperla diffusa, contro le altre divergenti, da Timeo (2). E sapere altresì ch'essa valse a determinare, generalmente, pur l'età del filosofo. Ne discendono Taziano (*Advers. graec.* c. 41), Eusebio (*Vers. Arm.* II p. 98 Schöne), Cirillo (*in Iul.* I 13 A.) e quanti insomma affermano il filosofo esser salito in fama circa quella olimpiade; dove non è da supporre un calcolo speciale di *ἀκμή* (3), ma un riflesso inerente al concetto di Timeo: che, giunto in Italia, Pitagora tosto attrasse a sè gli sguardi: *εὐθὺς δὲ περίβλεπτος καὶ περίστατος ἐγένετο.*

---

(1) A torto perciò il Cobet *Coll. crit.* p. 445 la attribuiva ad Aristosseno.

(2) Non si può pensare ad Apollodoro, così come vogliono, cominciando da Krische o. c. p. 9, Rohde l. c. p. 570, Unger l. c. p. 145, Jacoby *Apoll. Chron.* pp. 215 sgg. Lo ho dimostrato dianzi in nota.

(3) Con Unger l. c. e Jacoby i quali si riferiscono naturalmente ad Apollodoro.

Ancor altri elementi cronologici emergono, fin dai primi capitoli, nell'opera di Giamblico. E sono connessi — conforme ebbe ad osservare il Rohde (1) — con quelli, non meno espliciti, che occupano la chiusa (§ 265) e che vanno sotto il nome di Apollonio tianeo. La conseguenza si offre, non indifferente: come Apollonio risultò serbare i dati storiografici di Timeo, copiosi, così da quest'ultimo debbonsi, in massima e con ogni verisimiglianza, ripetere pur gli elementi cui alludiamo; e come, per esempio, le particolarità riguardanti la venuta del filosofo, nel contesto di Giamblico § 32, apparvero informate a Timeo, così è a buon diritto presumibile che il racconto apolloniano, attraverso a cui penetrano in Giamblico le impronte delle *Ἱστορίαι*, abbia per grandi tratti rimpolpato di sè l'opera del biografo neoplatonico.

Sulla patria e sulla stirpe di Pitagora non sembra in particolar modo seguìto il nostro storico, se non in quanto anch'egli, conforme leggiamo in Giustino l. c., conveniva coi più nel far sua culla Samo, a differenza, ad esempio, di Aristosseno, Aristotele, Teopompo, i quali asserivano il filosofo esser Tirreno di Samotracia (Aristot. *Fragm.* 190 Rose = Clem. Alex. *Strom.* I 14, 62); ma pel nome del padre, Demarato, la versione di Timeo si opponeva, secondo di nuovo ci apprende Giustino, alla vulgata, designante Mnesarco (e la vulgata ha in proprio favore una testimonianza di Eraclito fr. 17 (2)). — Comincia la relazione dei viaggi. A diciott'anni Pitagora lascia Samo (§ 11). *ὑποφυομένης δὲ ἄρτι τῆς Πολυκράτους τυραννίδος περὶ ὀκτωκαιδέκατον μάλιστα ἔτος γεγονώς, προορώμενός τε οἷ χωρήσει καὶ ὡς ἐμπόδιος ἔσται τῇ αὐτοῦ προθέσει καὶ τῇ ἀντὶ πάντων αὐτῷ σπουδαζομένῃ φιλομαθείᾳ*; soffermatosi presso Ferecide di Siro, Anassimandro, Talete, eccolo in fine percorrere l'Egitto, dove dimora 22 anni (§ 19), conseguendo ampia cultura, per poi passare in Babilonia e rimanervi 12 anni: tornando a Samo è ormai in età di 56 anni (*ibid.*). Ma succedono altri viaggi, a Creta e a Sparta,

(1) Cfr. l. c. p. 573 e vedi in seguito.

(2) V. Zeller, Sitzungsber. d. Berlin. Akad. d. Wiss. 1889 II pp. 985-996. La testimonianza di Eraclito non è ignota a Timeo, al quale, anzi, essa suggerisce parole di vivace contrasto: v. innanzi.

nell'intento di conoscere le vetuste legislazioni, e, frattanto, ha luogo la comparsa a Delo e l'omaggio reso ad Apollo Genitore (§ 25). Poichè in patria Pitagora non rimane: le sue dottrine trovano inciampo negli ordinamenti e nelle norme ivi imperanti — *συνιδὼν ὅτι τοῖς τῆς πατρίδος νόμοις πειθόμενον χαλεπὸν αὐτοῦ μένοντα φιλοσοφεῖν* (§ 28) — e salpa alla volta d'Italia.

Tale la relazione dei viaggi, che, ove si prescinda dall'episodio di Delo, già per altro specificato, collima perfettamente con Giustino: a differenza di altre fonti, cioè di altre speciali tradizioni tendenti ad accrescere il novero dei luoghi visitati (1): l. c.: *magnisque sapientiae incrementis formatus Aegyptum primo, mox Babyloniam ad perdiscendos siderum motus originemque mundi spectandam profectus summam scientiam consecutus erat. Inde regressus, Cretam et Lacedaemona ad cognoscendas Minois et Lycurgi inclitas ea tempestate leges contenderat. Quibus omnibus instructus Crotonam venit populumque in luxuriam lapsum auctoritate sua ad usum frugalitatis revocavit.* Da prima l'educazione variamente asseguita sotto la guida di Ferecide e di altri maestri; poi l'Egitto e la Babilonia; poi il ritorno, sùbito interrotto dai nuovi viaggi a Creta e a Sparta; infine la partenza decisiva. — E questo medesimo procedimento è presupposto, non senza anche diretti riscontri con le espressioni di Giamblico circa la tirannide policratea e circa la *φιλομάθεια* del giovane, ma in maniera compendiosa e di fuggita, da Strabone XIV p. 638: *ἐπὶ τούτου* [*Πολυκράτους*] *δὲ καὶ Πυθαγόραν ἱστοροῦσιν ἰδόντα φυομένην τὴν τυραννίδα ἐκλιπεῖν τὴν πόλιν καὶ ἀπελθεῖν εἰς Αἴγυπτον καὶ Βαβυλῶνα φιλομαθείας χάριν· ἐπανιόντα δ' ἐκεῖθεν, ὁρῶντα ἔτι συμμένουσαν τὴν τυραννίδα πλεύσαντα εἰς Ἰταλίαν ἐκεῖ διατελέσαι τὸν βίον* (2).

---

(1) Su che, e sulle infinite questioni suscitate dalla critica, v. Zeller o. c. pp. 300 sgg.

(2) Così Laert. Diog. VIII 1, 3 in un passo che anche pel computo dei 300 Pitagorici manifesta la provenienza da Timeo: *εἶτ' ἐπανῆλθεν εἰς Σάμον, καὶ εὑρὼν τὴν πατρίδα τυραννουμένην ὑπὸ Πολυκράτους, ἀπῆρεν εἰς Κρότωνα τῆς Ἰταλίας· κἀκεῖ νόμους θεὶς τοῖς Ἰταλιώταις ἐδοξάσθη σὺν τοῖς μαθηταῖς, οἳ πρὸς τοὺς τριακοσίους ὄντες ᾠκονόμουν ἄριστα τὰ πολιτικά, ὥστε σχεδὸν ἀριστοκρατίαν εἶναι τὴν πολιτείαν.*

La tirannia di Policrate samio, del quale era memoria che Pitagora fosse contemporaneo, aveva servito ai biografi e, tra gli altri, ad Aristosseno (presso Porph. 9) da caposaldo onde datare approssimativamente la vita dell'antico filosofo. E Timeo infatti non possedeva altro fondamento quando per la venuta in Italia toccava all'olimpiade LXII. Soltanto, di lui era proprio, oltre che far partire definitivamente alla volta della Magna Grecia il suo personaggio causa la tirannide policratea, fargli già imprendere le lunghe peregrinazioni pel medesimo motivo: e ciò con riguardo forse al dominio cui Policrate ed altri della sua famiglia avrebbero tenuto già prima a certa distanza di tempo (1); e col proposito fors'anche di conciliare fonti disparate, fonti assegnanti la stessa ragione or alla venuta in Italia, or ai viaggi in Oriente (2).

Se Timeo in persona, ovvero, sulla sua scorta, Apollonio, abbia spartito in periodi d'anni ben recisi il peregrinare di Pitagora non può asserirsi con sicurezza (3): ma ch'egli sia stato a porre per la venuta il termine addizionale di 56 anni d'età (o poco più, lasciando un margine fra il ritorno dall'Oriente e la definitiva partenza), in contrasto con Aristosseno il quale propendeva pei 40 (presso Porph. 9), può provarsi, allorchè si combini questo coi dati di Apollonio presso Iambl. § 265. Dove il Maestro governa la scuola per 39 anni, ne vive circa 100: *αὐτὸν μὲν γὰρ Πυθαγόραν ἀφηγήσασθαι λέγεται ἑνὸς δέοντος ἔτη τεσσαράκοντα, τὰ πάντα βιώσαντα ἔτη ἐγγὺς τῶν*

(1) Strab XIV p. 638. Sulla cronologia di Policrate che converrà a parte novamente studiare cfr. per ora Busolt *Griech. Gesch.* II² p. 508, 3; Unger l. c. pp. 149 sgg.; Beloch *Griech. Gesch.* I² 1, p. 376.

(2) Antifonte (che non è il sofista, come erroneamente mostra credere Unger l. c. pp. 145, 150: cfr. Zeller o. c. p. 309, 1), presso Porph. 7 narra esser Pitagora andato in Egitto con raccomandazioni di Policrate al re Amasi (Ahmes II 570–25). Sulle relazioni tra Policrate e Amasi d'Egitto cfr. Beloch *Griech. Gesch.* I² 1 p. 376; De Sanctis *Ἀτθίς*² p. 302.

(3) Ad ogni modo, è da vedere una svista grossolana, un ricamo del compilatore, nella leggenda che a Babilonia Pitagora fosse trascinato, schiavo, da quelli di Cambise: ciò per cui si scenderebbe al 525 circa, data in perfetta contraddizione con le altre pur da Apollonio ammesse. Tuttavia Röth *Gesch. d. abendländischen Philos.* I p. 268 ne costruisce una sua bizzarra cronologia.

ἑκατόν. Non è puro caso: venendo in Italia sulla sessantina, stando a capo della scuola 39 anni, egli raggiunge difatti un'esistenza secolare: così come — di su questa tradizione, è ormai lecito dire — SINCELLO I p. 469 Dindorf computa 99 anni di vita: *Πυθαγόρας ὁ φιλόσοφος τέθνηκεν ἐτῶν ϛ ϑ', οἱ δὲ οε'*, e parimente TETZE *Chil.* XI 92: *ϑνήσκει ἐτῶν ὑπάρχων ἑκατόν, πλὴν ἔτους ἑνὸς μόνου* (1).

Ma l'evidenza maggiore ridonda dalla cifra 39, la quale par appositamente acconciarsi con la cronologia di Timeo: nel 529 Pitagora prende stanza a Crotone; nel 509, preannunziandosi la catastrofe ciloniana, egli passa a Metaponto, e sono vent'anni di dimora a Crotone e ne rimangono diciannove — poichè anni di scuola non sono da registrare, con questo novero, prima della venuta in Italia (2) —: diciannove pel soggiorno in Metaponto.

E sia, anzitutto, il soggiorno di Crotone. Ivi e, per riflesso, nelle città d'intorno, si fece tosto sentire l'influenza benigna di Pitagora. La quale alla mente dello storiografo assume per natura le sembianze d'un fenomeno politico consertantesi con le progressive condizioni della civiltà nell'Italia inferiore. Ecco, per vero, i concetti riepilogati da Giustino: la popolazione, corrotta, coinvolta in vicende disastrose quali e la battaglia del Sagra e la distruzione di Siri, priva di ogni energia, prossima a cadere nelle mani dei tiranni, si risollevò per merito delle dottrine pitagoriche, le quali assiduamente la chiamavano all'esercizio della virtù, alla frugalità, alla temperanza.

(1) Potrebbesi anche pensare che nel testo di Giamblico uno spostamento sia avvenuto di *ἑνὸς δέοντος* da *ἑκατόν* a *τεσσαράκοντα*. Pur conviene tenersi ai 39 anni di scolarcato. — LAERT. DIOG. VIII 1 44 *ὡς δ' οἱ πλείους ἔτη βιοὺς ἐνενήκοντα*. Da che questa cifra non occorre affatto presso altri scrittori, il Casaubon consiglia di aggiungere *ἐννέα*. — Il computo dei 75 anni d'età, offertoci come canonico accanto a quello dei 99, risale — è probabile — ad Apollodoro: cfr. JACOBY *Apollod. Chron.* p. 226, del quale rimane invece contraddetto l'avviso che ad Eratostene appartenga la data di 99. Abbiamo da un lato Timeo, dall'altro Apollodoro (nè forse senza che quest'ultimo assecondi il primo nella data della venuta in Italia).

(2) La tradizione, nel brano sopra esaminato di Giamblico (§§ 26-7), narrava dei tentativi fatti per un insegnamento in Samo fra il ritorno dall'Oriente e la definitiva dipartita; aveva memoria di un antro nel quale il filosofo era venuto meditando. Ma ciò non si collega con la Scuola vera e propria.

Che dire ora di Giamblico? Giamblico coincide nell'avviamento del pensiero: non appena al filosofo ha fatto por piede in Italia, durante l'olimpiade LXII, subito prospetta questa identica azione: §§ 33-6 (1). E le analogie crescono; e qua e là, per ciò che concerne l'insegnamento da Pitagora esercitato, rompe fuori un tocco, una nota di Timeo, tanto che di Timeo sembri esser realmente ricalcata, non che ogni dispersa peculiarità, anche la trama espositiva. — Cominciamo, di nuovo, con Giustino l. c.: *matronarum quoque separatam a viris doctrinam et puerorum a parentibus frequenter habuit. Docebat nunc has pudicitiam et obsequia in viros, nunc illos modestiam et litterarum studium. Inter haec velut genetricem virtutum frugalitatem omnibus ingerebat consecutusque disputationum adsiduitate erat, ut matronae auratas vestes ceteraque dignitatis suae ornamenta velut instrumenta luxuriae deponerent eaque omnia delata in Iunonis aedem ipsi deae consecrarent, prae se ferentes vera ornamenta matronarum pudicitiam, non vestes esse.* Chi, dopo ciò, si volga a Giamblico, troverà parimente classificata l'opera educatrice del Maestro: la speciale attenzione avuta ai fanciulli, con precetti di obbedienza e di studio (§§ 37-54); l'ammonizione diretta alle donne, con esortazioni di pudicizia e di parsimonia (§§ 54-8). E troverà via via, quando felici combinazioni o riscontri lo comportino, più testuale e rispondente imagine della fonte comune: siccome nel tratto che segue, tolto all'ammaestramento delle donne, § 56: *Ἔτι δὲ τὸν σοφώτατον τῶν ἁπάντων λεγόμενον καὶ συντάξαντα τὴν φωνὴν τῶν ἀνθρώπων καὶ τὸ σύνολον εὑρετὴν καταστάντα τῶν ὀνομάτων, εἴτε θεὸν εἴτε δαίμονα εἴτε θεῖόν τινα ἄνθρωπον, συνιδόντα διότι τῆς εὐσεβείας οἰκειότατόν ἐστι τὸ γένος τῶν γυναικῶν, ἑκάστην τὴν ἡλικίαν αὐτῶν συνώνυμον ποιήσασθαι θεῷ, καὶ καλέσαι τὴν μὲν ἄγαμον κόρην, τὴν δὲ πρὸς ἄνδρα δεδομένην νύμφην, τὴν δὲ τέκνα γεννησαμένην μητέρα, τὴν δὲ παῖδας ἐκ παίδων ἐπιδοῦσαν κατὰ τὴν Δωρικὴν διάλεκτον μαῖαν· ᾧ σύμφωνον εἶναι τὸ καὶ τοὺς χρησμοὺς ἐν Δωδώνῃ καὶ Δελφοῖς δηλοῦσθαι διὰ*

(1) Da escludere è ciò che concerne Zaleuco legislatore di Locri a § 33: del quale Timeo negava l'esistenza: fr. 69 Muell. Cicer. *De leg.* II 6. Ma le relazioni di Pitagora e con Zaleuco e con Caronda e con altri leggendarii autori di statuti italici erano un punto molto genericamente e universalmente ammesso nelle compilazioni dei biografi.

γυναικός. διὰ δὲ τῶν εἰς τὴν εὐσέβειαν ἐπαίνων πρὸς τὴν εὐτέλειαν τὴν κατὰ τὸν ἱματισμὸν τηλικαύτην παραδέδοται κατασκευάσαι τὴν μεταβολήν, ὥστε τὰ πολυτελῆ τῶν ἱματίων μηδεμίαν ἐνδύεσθαι τολμᾶν, ἀλλ' ἀναθεῖναι πάσας εἰς τὸ τῆς Ἥρας ἱερὸν πολλὰς μυριάδας ἱματίων.

Dove non solo appartiene a Timeo l'episodio, armonizzante con Giustino, circa la rinuncia delle vanità fatta al tempio di Era; ma tutto il periodo, e, segnatamente, l'idea, tipica, sulle denominazioni di Core, Ninfe, Metere. Però che si affaccia in buon punto, ad integrare le nostre conoscenze. Laerzio Diogene VIII 1, 11: *Τίμαιός τέ φησιν ἐν δεκάτῃ ἱστοριῶν λέγειν αὐτὸν [Πυθαγόραν] τὰς συνοικούσας ἀνδράσι θεῶν ἔχειν ὀνόματα, Κόρας, Νύμφας, εἶτα Μητέρας καλουμένας.* Esaltazione delle virtù femminili: ed è il contesto nel quale Timeo menzionava la figlia del filosofo così: presso Porph. 4 *Τίμαιος δ' ἱστορεῖ τὴν Πυθαγόρου θυγατέρα καὶ παρθένον οὖσαν ἡγεῖσθαι τῶν παρθένων καὶ γυναῖκα τῶν γυναικῶν* (1).

Nè le *Ἱστορίαι* limitavansi all'esposizione della dottrina impartita, sibbene raffiguravano il sorgere della Scuola, e con quanto zelo i giovani ambissero aggregarsi e a quali pratiche, novizî, sottostessero: special importanza assumendo il severo esame, *δοκιμασία*, cui ogni candidato adempiva. E, per vero, intorno alla *δοκιμασία*, è dato afferrare di bel nuovo in Giamblico quasi la forma originaria dello scrittore: si confronti Iambl. § 71: *παρεσκευασμένῳ δὲ αὐτῷ οὕτως εἰς τὴν παιδείαν τῶν ὁμιλητῶν, προσιόντων τῶν ἑταίρων καὶ βουλομένων συνδιατρίβειν οὐκ εὐθὺς συνεχώρει, μέχρις ἂν αὐτῶν τὴν δοκιμασίαν καὶ τὴν κρίσιν ποιήσηται.....* e Schol. Plat. *Phaedr.* 279ᵉ vol. VI p. 275 Hermann: *φησὶ γοῦν ὁ Τίμαιος ἐν τῇ Θ'*(2)*οὕτω· προσιόντων δ' οὖν αὐτῷ τῶν νεωτέρων καὶ βουλομένων συνδιατρίβειν οὐκ εὐθὺς συνεχώρησεν, ἀλλ' ἔφη δεῖν καὶ τὰς οὐσίας κοινὰς εἶναι τῶν ἐντυγχανόντων. εἶτα μετὰ*

(1) Non altrimenti Iambl. § 170, senza citare Timeo (cfr. fr. 78 Muell.). Con ciò era connesso, ancora, nell'esposizione di Timeo quanto segue a p. 393.

(2) Il cod.: *E'*; corr. Kothe *De Timaei vita* etc. p. 35. Vedi in seguito.

πολλὰ φησι· καὶ δι' ἐκείνους πρῶτον ῥηθῆναι κατὰ τὴν Ἰταλίαν ὅτι κοινὰ τὰ τῶν φίλων (1).

Nè senza maggiori conseguenze. Poichè lo scoliaste platonico, il quale, citando, adopera, sul principio, le identiche parole ripetute da Giamblico, mostra poi anche più chiaramente di tenere innanzi la citata opera di Timeo e di seguirne la disposizione, con osservare che, fatto quel principio, esso scrittore " dopo molte altre cose „ veniva al celebre motto intorno la comunione dei beni. E queste " molte altre cose „, d'innanzi a cui non manca di impuntarsi per stupore o sospettosa diffidenza la buona lena di qualche critico più arcigno (' exspectes *μετ' ὀλίγα* ' nota il Nauck p. LIX), parrà tutt'altro che temerario riconoscerle in Giamblico, quando a punto prima del *κοινὰ τὰ φίλων* egli interponga un'esposizione precisa e coerente sul formarsi della Scuola, anzi sui varii gradi occupati dai discepoli §§ 72-4, 80. Ch'è oggetto assai discusso nella storia di Pitagora; ricco di elementi definiti, e pur discordanti a traverso le varie tradizioni. Rivendichiamo a Timeo questa che resulta una delle forme più compiute (2). Narra: consistendo la *δοκιμασία* in un'acuta disamina del carattere individuale, chi era approvato conveniva tollerasse anzi tutto tre anni di dispregio e di indifferenza, a provare la propria costanza e fermezza di proposito; poi susseguivano cinque anni di silenzio; al nuovo discepolo non si concedeva di discutere: ascoltare soltanto, nè anche godere la vista del Maestro. E durante questo periodo era l'obbligo di accomunare i proprî beni, consegnandoli ad alcuni compagni, per tale ufficio designati e detti *πολιτικοί* od *οἰκονομικοί* ovvero anche *νομοθετικοί*. Dopo i cinque anni di difficile prova, chi fosse respinto riaveva doppii i suoi beni — e nella Scuola una tomba stava ad indicare la sua morte spirituale —, chi rimanesse era ammesso alla presenza del Maestro e all'attività dirigente della consorteria col nome di *ἐσωτερικός*. E *Pitagorici* erano detti quelli soltanto che avevano parte attiva e comunione di beni, *Pitagoristi* i discepoli d'ordine inferiore, non in tutto

(1) Il confronto è istituito dal NAUCK nei *Prolegomena* alla sua edizione pp. LVIII-IX dove vedi quel che concerne la lezione *παρεσκευασμένῳ*.

(2) Vedansi i raffronti in ZELLER o. c. p. 316, 1.

partecipanti: *τῶν μὲν οὖν Πυθαγορείων κοινὴν εἶναι τὴν οὐσίαν διέταξε καὶ τὴν συμβίωσιν ἅμα διὰ παντὸς τοῦ χρόνου διατελεῖν, τοὺς δὲ ἑτέρους ἰδίας μὲν κτήσεις ἔχειν [ἐκέλευσε], συνιόντας δὲ εἰς ταὐτὸ συσχολάζειν ἀλλήλοις.*

La Scuola tanto elettamente costituitasi sta per aver fine violenta.

Qui Timeo, dopo essersi rappresentata l'apparizione di Pitagora in particolar modo sotto l'aspetto politico, trova agio di spiegare, coerente, il fenomeno della decadenza, insistendo sul carattere di aristocrazia, sulle tendenze oligarchiche, sulle funzioni da veri e proprii iniziati, onde i discepoli, non più che trecento, stretti da sacro vincolo, provocavano la folla popolana: ap. Laert. Diog. VIII 1, 3 *πρὸς τοὺς τριακοσίους ὄντες ᾠκονόμουν ἄριστα τὰ πολιτικά, ὥστε σχεδὸν ἀριστοκρατίαν εἶναι τὴν πολιτείαν* (1). Alle parole di Giustino interpretanti con fedeltà il pensiero della fonte — *sed CCC ex iuvenibus cum sodalicii iure sacramento quodam nexi separatam a ceteris civibus vitam exercerent, quasi coetum clandestinae coniurationis haberent, civitatem in se converterunt* — risponde, astraendo dalle ridondanze e dai colori drammatici, l'esposizione di Apollonio presso Giamblico §§ 254 sgg., intorno ai prodromi della sommossa ed alla sommossa stessa. Poichè anche gli aneddoti grossolanamente inventati, anche le motivazioni ridicole e piccine di cui il fantasioso Tianeo non fa risparmio s'inspirano però a quell'àmbito d'idee; e, non di rado, una frase, un accenno rispecchia lo sfondo stesso voluto da Giustino: come il quadro dei trecento giovani, coalizzati in possente sodalizio ed usi a primeggiare, anche fuori della vita privata, e a tenersi discosti dai rimanenti cittadini — *ἔπειτα καὶ τῶν νεανίσκων ὄντων ἐκ τῶν ἐν τοῖς ἀξιώμασι καὶ ταῖς οὐσίαις προεχόντων, συνέβαινε προαγούσης τῆς ἡλικίας μὴ μόνον αὐτοὺς ἐν τοῖς ἰδίοις βίοις πρωτεύειν, ἀλλὰ τὸ κοινῇ τὴν πόλιν οἰκονομεῖν, μεγάλην μὲν ἑταιρείαν συναγηοχόσιν, ἦσαν γὰρ ὑπὲρ τριακοσίους, μικρὸν δὲ μέρος τῆς πόλεως οὖσι, τῆς οὐκ ἐν τοῖς αὐτοῖς ἔθεσιν οὐδ' ἐπιτηδεύμασιν ἐκείνοις πολιτευομένης* —, e come questo

(1) Che provenga da Timeo è stato dimostrato sopra, con altre ragioni.

altro punto che traduce la *clandestina coniuratio* di Giustino: § 260: *καθάπαξ τὴν φιλοσοφίαν αὐτῶν συνωμοσίαν ἀπέφαινε κατὰ τῶν πολλῶν.*

Il tumulto è determinato, per quanto dimostrai dianzi, da un'occasione cospicua, dalla lotta di Crotone con Sibari. Nella quale Timeo, inteso a concatenare, a subordinare, ad intuire gli avvenimenti, ben vede una lotta di principii politici, tale che per natura faccia sentire l'influsso sulla Lega di Pitagora o, meglio, dalla Lega ripeta il proprio indirizzo (1). Telys, erettosi a tiranno in Sibari, espulse dalla città i capi dell'aristocrazia: che tosto, non ostante il contrario avviso del popolo, vennero accolti e protetti dal governo dei Pitagorici, aristocratico. Così Timeo presso Diodoro XII 9 (2). La vittoria di Crotone portò straordinario incremento alla potenza dei governanti — così presso Athen. XII 522 *a* (fr. 82 Muell.) *καὶ Κροτωνιάται δ', ὥς φησι Τίμαιος μετὰ τὸ ἐξελεῖν Συβαρίτας ἐξώκειλαν εἰς τρυφήν...* — ed ebbe a suscitare più vivo il contrasto delle passioni popolari.

Pitagora — continua a riferire Apollonio —, Pitagora, il quale aveva consigliato di accogliere i profughi sibariti, si allontana da Crotone.

Che durante la dolorosa vicenda il Maestro fosse assente, riconoscono, unanimi, le varie tradizioni, e solo discordano sul luogo della dimora: gli uni, come Nicomaco (presso Iambl. § 252), facendolo partire alla volta di Delo in cerca di Ferecide (3), gli altri, come Aristosseno e i più (cfr. Iambl. § 251-2) conducendolo a Metaponto. — Fra questi ultimi si schiera anche Timeo: abbiamo, ad esempio, in Iustin. l. c.: *cum annos XX Crotone egisset, Metapontum emigravit; ibique decessit.* Però convien fare una distinzione. Dal rendiconto di Giustino non risulta af-

(1) Intorno a questi stessi avvenimenti vedasi il giudizio del Meyer *Gesch. d. Altert.* II pp. 814 sg.

(2) Eraclide Pontico, lo storico del Pitagoreismo, *ἐν τῷ περὶ δικαιοσύνης* ap. Athen. XI, p. 521 f, narrava la caduta di Telys, complemento alla sconfitta campale e preparazione allo sterminio della città. — Sembra presumibile che a ciò fosse condotto dalla connessione con le vicende pitagoriche.

(3) Così anche Apollodoro: cfr. Jacoby *Apoll. Chron.* p. 218.

fatto che, venuto a Metaponto, Pitagora sùbito morisse, allo stesso modo che neanche risulta da Aristosseno presso Iambl. § 249. 15: *ἀπῆλθεν εἰς τὸ Μεταπόντιον, κἀκεῖ λέγεται καταστρέψαι τὸν βίον*; e a questa versione va contrapposta non assimilata quell'altra di Dicearco presso Porph. 57 e presso Laert. Diog. VIII 1, 40: arrivando a Metaponto il filosofo essersi rifugiato nel tempio delle Muse e, per quaranta giorni astenendosi dal cibo, esser perito. Era memoria infatti del soggiorno di Pitagora fra i Metapontini: varie leggende vi si riferivano (cfr. Aristot. *Fragm.* 191 Rose); monumenti se ne conservavano; reputavasi avervi egli conchiuso la sua esistenza (1).

A ciò pone mente Timeo, descrivendo la casa del filosofo, che i Metapontini fecero tempio di Demetra, e il vico, per lui denominato Museo: Iustin. l. c.: *cuius* [*Pythagorae*] *tanta admiratio fuit ut ex domo eius templum facerent eumque pro deo colerent*; Iambl. § 170: *τοὺς δὲ Μεταποντίνους διὰ μνήμης ἔχοντας ἔτι τὸν Πυθαγόραν καὶ μετὰ τοὺς αὐτοῦ χρόνους τὴν μὲν οἰκίαν αὐτοῦ Δήμητρος ἱερὸν τελέσαι, τὸν δὲ στενωπὸν Μουσεῖον* (2). La dimora in Metoponto rappresenta, a buon diritto, un nuovo ultimo stadio nell'attività di Pitagora, tale da raggiungere, successivamente al ventenne periodo crotoniate, un'estensione di diciannove anni e da prodursi, per conseguenza, sino al 490 circa.

Con che, lo storico siciliano teneva l'occhio ad altri indizi, validi, forniti pel termine approssimativo della morte da Senofane (fr. 7 Diels[3]) e da Eraclito (fr. 129 e cfr. fr. 40 Diels) designanti, intorno al 480-70, Pitagora quale una personalità, ormai famosa, di trapassato (3). Poichè, anzi, sulle aspre parole con le

(1) Lico presso Porph. 5 diceva Pitagora Metapontino.

(2) La fonte è qui indicata da Porph. 4 *Τίμαιος δ' ἱστορεῖ τὴν Πυθαγόρου θυγατέρα καὶ παρθένον οὖσαν ἡγεῖσθαι τῶν παρθένων ἐν Κρότωνι καὶ γυναῖκα τῶν γυναικῶν· τὴν δ' οἰκίαν Δήμητρος ἱερὸν ποιῆσαι τοὺς Κροτωνιάτας, τὸν δὲ στενωπὸν καλεῖν Μουσεῖον*: dove per errore si parla di Crotoniati anzichè di Metapontini. E che sia errore, non diversa tradizione, dimostrano, oltre ai passi di Giustino e di Giamblico, Cicerone *De finib.* V 2, 4; Favorino presso Laert. Diog. VIII 1, 15 (cfr. anche Rohde l. c. p. 28); nè a ciò contraddice il fatto che Timeo stesso ap. Iambl. § 264 ricorda, per quanto vedremo, un Museo pitagorico in Crotone.

(3) Senofane, da Timeo, è fatto vivere a tempo di Jerone (478-67): fr. 92 Mueller = Clem. Alex. *Strom.* I 64 p. 353 P. Su che v. Jacoby *Apoll.*

quali il secondo discorse di Pitagora — le parole stesse di cui noi conosciamo qualcosa ap. Laert. Diog. VIII 1, 6 *Πυθαγόρης Μνησάρχου ἱστορίην ἤσκησεν ἀνθρώπων μάλιστα πάντων καὶ ἐκλεξάμενος ταύτας τὰς συγγραφὰς ἐποίησεν ἑωυτοῦ σοφίην, πολυμαθείην, κακοτεχνίην* — egli soffermavasi parecchio (1): e mentre ne profittava quasi di antico documento (nè anche tanto però, che credesse opportuno attenersi al nome del padre Mnesarco ivi attestato) prendeva poi a ritorcerne le maligne affermazioni, negando, ciò che sembra essere stato più o meno inerente al concetto di Eraclito (Philodem. *Περὶ ῥητορ.* col. 57: *κατὰ τὸν Ἡράκλειτον κοπίδων ἐστὶν ἀρχηγὸς* [*Πυθαγόρας*] (2)), avere Pitagora introdotto " le arti retoriche "; e denotando ciarlatano e vantatore Eraclito stesso, non il filosofo samio: così ap. Schol. Eurip. *Hec.* 134 (p. 26 Schwartz, I p. 254 Dindorf) *Τίμαιος οὕτως γράφει ὥστε καὶ φαίνεσθαι μὴ τὸν Πυθαγόραν εὑράμενον τῶν ἀληθινῶν κοπίδων, μηδὲ τὸν ὑφ' Ἡρακλείτου κατηγορούμενον, ἀλλ' αὐτὸν Ἡράκλειτον εἶναι τὸν ἀλαζονευόμενον* (3). Evidentemente il giudizio eracliteo, quelle *συγγραφαί* (che ancor oggi si vorrebbero dai più espungere), quella *κακοτεχνίη*, davano a credere a molti storici Pitagora inventore delle *τέχναι ῥητορικαί* o *κοπίδες*. Timeo come assegna con ferma conoscenza a Gorgia da Leontini tale attributo (ap. Diod. XII 53 e fr. 95 Muell.), così combatte di lena l'assurda interpretazione, non senza in pari tempo rilevare quanto ingiusta sia stata per parte d'Eraclito l'accusa di dotta ciarlataneria, di furbesca ostentazione, di frodolenta disciplina.

Onde certa immagine si affaccia delle tendenze filosofiche, dal Maestro con serietà perseguite. E Timeo sa molto in buon

---

Chron. pp. 204 sgg. — Per le testimonianze v. Zeller *Ueber die ältest. Zeugn. z. Gesch. d. Pyth.* 'Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss.' 1889 II pp. 985-96 (parim. 'Kleine phil. Schrift.' I (Berlin 1910) pp. 458-72).

(1) Cfr. H. Diels *Ein gefälschtes Pythagorasbuch* 'Archiv für Gesch. d. Philos.' III (1890) pp. 454 sgg.

(2) Frammento illustrato da Th. Gomperz 'Zeitschr. f. öst. Gymn.' X (1866) p. 698 e 'Rhein. Mus.' XXXII (1877) p. 476.

(3) Credo arbitraria la correzione del Diels *τῶν ὑφ' Ἡρακλείτου κατηγορουμένων* con cui egli vuole un contrapposto a *τῶν ἀληθ. κοπ.*; molto meglio s'intende il testo tradizionale. Invece di *εὑράμενον* è probabilmente da leggere col medesimo Diels *ἀρξάμενον*.

punto osservare che carattere precipuo della setta era: concedere ai soli iniziati il patrimonio scientifico, tramandandolo con scrupoloso segreto, fuori da contatti estranei, non già diffondere i preziosi dettami (1). E sa rammemorare, ad esempio, che Empedocle fu escluso dalla Scuola per avere frodato e divulgato negli scritti la dottrina: ap. Laert. Diog. VIII 2, 54 (fr. 81 Muell.): *ἀκοῦσαι δ' αὐτὸν [Ἐμπεδοκλέα] Πυθαγόρου Τίμαιος διὰ τῆς ἐνάτης ἱστορεῖ λέγων ὅτι καταγνωσθεὶς ἐπὶ λογοκλοπίᾳ τότε... τῶν λόγων ἐκωλύθη μετέχειν* (2).

Con questa immagine e con questi richiami, inspirati dalla vivace polemica, lo storico chiude il periodo della diretta influenza di Pitagora.

(1) È probabile che da Timeo provenga la lettera di Liside ad Ipparco, scritta *τινὶ ἐπιπλήττων, μεταδιδόντι τῶν λόγων τοῖς ἀνεισάκτοις καὶ ἄνευ μαθημάτων καὶ θεωρίας ἐπιφυομένοις*, e riportata da Iambl. § 75 frammezzo all'esposizione dei gradi e delle norme della Scuola che già a Timeo facemmo risalire. Trovasi, in parte, anche ap. Laert. Diog. VIII 1, 42. — A questo risultato giunge pure, con speciale indagine. A. Delatte, *La lettre de Lysis à Hipparque* " Rev. de Phil. „ 1911 pp. 255 sgg.

(2) E ad Empedocle Timeo riserbava l'accusa stessa dalla quale difese Pitagora: *ἀλαζόνα καὶ φίλαυτον*: fr. 88 Muell. ap. Laert. Diog. VIII 2, 66. — Ben s'intende che le relazioni di Empedocle con Pitagora, supposte da Timeo, richiedono poi speciale indagine.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze di Torino conferirà nel 1914 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Letteratura, Storia letteraria, Critica letteraria, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1911-1913. Il premio sarà di L. 1900, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Gennaio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, ed i Soci Naccari, Direttore della Classe, Salvadori, D'Ovidio, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Somigliana, e Segre Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Fusari.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica i ringraziamenti dei Professori Silva e Tamassia pel premio Gautieri, a loro conferito, e quelli dei Comm. Fiorini a cui fu assegnato il premio Bressa.

Il Socio Guidi offre in omaggio, a nome dell'Autore, due opuscoli del Prof. M. Panetti, *Le prove dei motori leggeri nel laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino*, e *Note illustrative sui calcoli delle costruzioni stabili alle azioni sismiche*.

Vengono presentate, per la pubblicazione negli *Atti*, le seguenti Note:

I. Guareschi, *Sulla ricerca dei gas e dei vapori bromurati*, Nota VII.

E. Gastaldi, *Cenni sopra alcuni minerali e roccie della Cina*, dal Socio Parona.

S. Dezani, *Ricerche sulla tossicità del succo spremuto da semi germinanti*, dal Socio Mattirolo.

T. Salvadori, *Intorno ad un lavoro ornitologico del Principe Carlo Luciano Bonaparte.*

LETTURE

Sulla ricerca dei gas e dei vapori bromurati.

Nota VII del Socio I. GUARESCHI

Questa nota può essere riguardata anch'essa come una continuazione dei miei studi intorno al bromo ed ai bromuri. Applico la mia reazione, cioè la colorazione violetta o azzurra che si ottiene per l'azione del bromo sulla fucsina decolorata coll'acido solforoso oppure sul violetto d'Hofmann pure decolorato, alla ricerca ossia al riconoscimento, di piccole quantità di gas o di vapori bromurati. Questo studio può avere importanza anche per la ricerca chimica-tossicologica di anestetici bromurati, in casi di avvelenamento.

I.

Riconoscimento di gas e di vapori bromurati.

Il metodo di Beilstein per riconoscere gli alogeni mediante la colorazione della fiamma con un pezzetto di ossido di rame sul quale sta una traccia di sostanza alogenata, non serve per distinguere i tre alogeni perchè il colore della fiamma è verde-azzurro tanto col cloro come col bromo e col jodo. Dunque in questa maniera non si potrebbe riconoscere il bromo. Trattandosi poi di corpi gasosi o in vapore, ed in piccolissima quantità, il metodo non potrebbe servire.

Quando si dovesse esaminare un gas o vapore misto con piccole quantità di un altro gas o vapore bromurato per ritrovare quest'ultimo, cioè per svelarvi il bromo, il procedimento, coi metodi conosciuti, sarebbe molto lungo, non sempre facile e talora non si riescirebbe. È noto che nel caso della ricerca

del cloroformio o di altro anestetico clorurato nell'aria espirata, bisogna far passare l'aria attraverso un lungo tubo scaldato contenente calce viva purissima mista a carbonato sodico secco, oppure attraverso un tubo contenente pezzetti di porcellana scaldati al rosso. Per quantità piccolissime questi procedimenti sono lunghi e non sempre con risultati sicuri, tanto più se trattasi di traccie di gas o vapori bromurati.

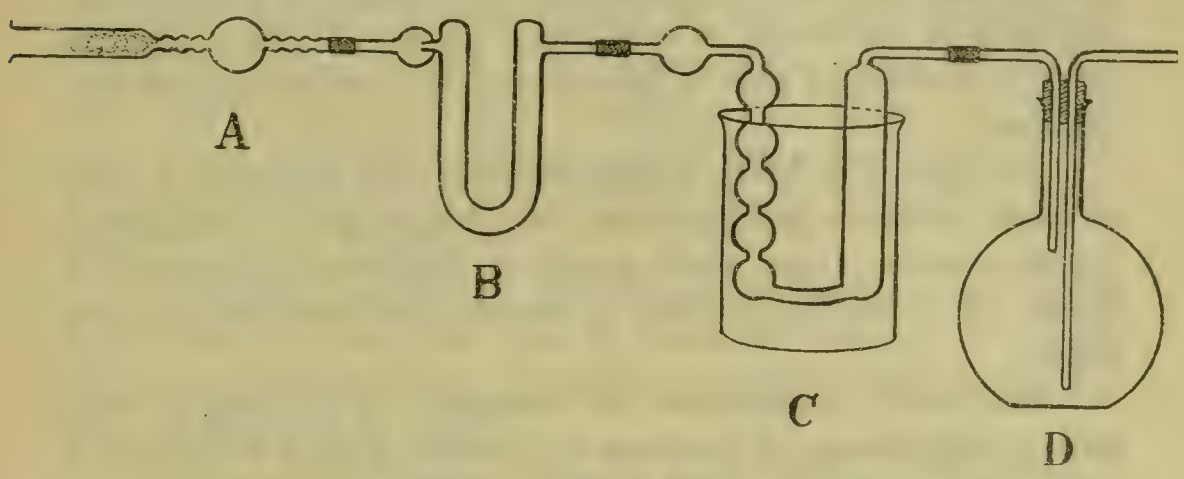
Anche col far passare attraverso al liquido in cui trovasi la sostanza da esaminare una corrente di idrogeno e la fiamma dell'idrogeno farla incontrare su una rete di rame metallico (reazione di Beilstein-Vitali pel cloroformio) in questo caso non serve perchè non si potrebbe distinguere quale sia l'alogeno.

Io invece colla mia reazione del bromo ed applicando l'azione ossidante dell'acido cromico concentratissimo, e, volendo, anche a caldo, ho ottenuto ottimi risultati. Si fa passare l'aria, mista a piccole quantità di gas o vapori bromurati, attraverso una soluzione satura di acido cromico, meglio se insieme a cristallini d'acido cromico, contenuta in un tubo a bolle detto di Mitscherlich e tenuta verso 100° in un b. m. di vetro.

Per molti gas o vapori basta la soluzione di acido cromico al 75 $^0/_0$ ed anche a temperatura ordinaria. Fa seguito al tubo a bolle un secondo tubo vuoto, per trattenere l'umidità e l'acqua che si elimina dal primo tubo, poi il gas passa in un tubetto ove è la carta imbevuta col reattivo. Con un aspiratore si fa passare una regolare corrente d'aria. Non conoscendosi il gas o vapore che si ricerca è bene far passare l'aria quando il tubo ad acido cromico è ben caldo. Se si deve esaminare dell'aria o un liquido quale l'urina, il latte, il sangue, ecc., attraverso a questi si fa passare la corrente d'aria.

La figura seguente rappresenta l'apparecchietto necessario in queste ricerche: *D* è il matraccio od altro recipiente ove è l'aria o il liquido da esaminarsi; *C* un tubo di Mitscherlich contenente la soluzione cromica satura, circa 10 cm^3; *B* un tubo vuoto, semplice o doppio (o un secondo tubo Mitscherlich vuoto) per trattenere la maggior parte dell'acqua trascinata dall'aria; *A* un tubetto colla cartina inumidita col mio reattivo fucsinico; la cartina deve entrare sino entro la strozzatura del tubo. In *A* si applica un aspiratore.

Si fa passare prima per alcuni minuti attraverso l'apparecchio una corrente di aria pura per verificare che non vi sia traccia di bromo; in tal modo il reattivo si concentra anche di più e nella parte destra del tubo rimane dell'acido cromico quasi secco e caldo aderente alla parete; qualunque gas o vapore bromurato difficilmente attaccato dall'acido cromico, come ad esempio il bromuro di metile, il bromuro di etile ecc. che sono fra i più resistenti, rimangono ossidati mettendosi in libertà il bromo. Per taluni composti bromurati, quale il bromuro di cianogeno, non vi è nemmeno bisogno di scaldare il tubo contenente l'acido cromico.



Io ho esperimentato con piccole quantità di gas o vapori bromurati delle sostanze le più diverse ed ho sempre ottenuto ottimi risultati: tali sono ad esempio le miscele di traccie di vapori di bromo libero con molto gas cloro e vapori di jodo, con cloroformio e poco bromoformio, bromuri alcolici diversi, bromuro di etilene e di trimetiletilene, di clorobrommetano, ecc.

Anche i vapori di bromobenzene, di monobromodifenile, di bromonaftalina, di clorobromonaftalina, ecc. misti con grande quantità di aria danno subito la reazione. Anzi i vapori di idrocarburi bromurati aromatici, cioè a doppi legami, sono bruciati meglio dall'acido cromico che non i derivati saturi alifatici quali il bromuro di metile, il bromuro di etile, ecc.

Gas cloro con vapori di jodo e traccie di bromo. — Se si fa passare l'aria che contenga un miscuglio gasoso di cloro, di jodo e di pochissimo bromo, attraverso all'acido cro-

mico (nel qual caso non ve ne sarebbe veramente bisogno) la reazione del bromo sulla carta bagnata col mio reattivo si osserva benissimo. In alcune esperienze, ad esempio, mescolai 0,0020 gr. di bromuro di potassio con 0,0110 gr. di joduro potassico entro un largo matraccio di circa 1,5 litri, poi vi aggiunsi 3 cm^3 di acqua di cloro; si ebbe intensissima la reazione del bromo; come si ebbe intensa anche con solamente 0,0010 di bromuro potassico. In altro modo mi parrebbe impossibile riconoscere così poco bromo misto a tanta aria, con cloro e jodo.

Bromuro di cianogeno CNBr. — Il bromuro di cianogeno è una sostanza velenosissima che anche a temperatura ordinaria si trasforma in aeriforme. In piccolissima quantità misto a moltissima aria si può riconoscere facilmente colla mia reazione.

Gr. 0.0018 di CNBr furono mescolati con 1500 cm^3 di aria, la quale mediante un aspiratore fu poi fatta passare attraverso l'acido cromico. Dopo pochi minuti si manifestò nettamente il bromo, che colorò in violetto la cartina inumidita col mio reattivo.

Gr. 0.0008 di bromuro di cianogeno in 5-6 litri di aria, diedero nettamente la reazione del bromo dopo 6-8 minuti, a temperatura ordinaria. In un altro esperimento 0.0016 di CNBr in un largo matraccio del contenuto di 10 litri d'aria, diedero dopo 3-4 minuti la reazione del bromo; si ebbe ancora indizio netto del bromo con gr. 0.0004 di bromuro di cianogeno in 10 litri di aria, dopo 10 minuti; la sensibilità in questo caso sarebbe di circa 1 : 32000.

Il metodo è dunque di una grande sensibilità. Per mezzo dei sali d'argento mi pare improbabile che si possano identificare delle così piccole quantità di bromo combinato.

Gr. 0.0034 di bromuro di cianogeno furono mescolati con 60 cm^3 di *latte*, poi attraverso al liquido fu fatta passare una corrente d'aria; dopo pochi minuti si ebbe visibilissima la reazione del bromo. Anche con un *latte molto inacidito*, gr. 0.002 di CNBr in 50 cm^3 danno intensa la reazione.

Così pure mescolando gr. 0.0015 di bromuro di cianogeno con 80 cm^3 di acqua e poi facendovi passare una corrente d'aria si ha subito la reazione del bromo.

Invece mescolando gr. 0.0027 di CNBr con 80 cm^3 di sangue e facendovi passare una corrente d'aria non si riuscì anche dopo 10 minuti ad avere la reazione del bromo.

Il bromuro di cianogeno in presenza dell'acqua non è jonizzato; nel maggior numero delle sue reazioni però si comporta come $CN' + Br'$; ma può anche riguardarsi come $C = N.Br$ o meglio $C \equiv N.Br$. Comunque sia, in presenza dell'acido cromico si idrolizza e dà ammoniaca, ossido di cromo, acido carbonico e bromo libero.

Sangue e bromuro di cianogeno. — Pare che il sangue impedisca, ostacoli, il ritrovamento del bromo nel bromuro di cianogeno; questo composto è velenosissimo ed ha odore acuto; perde quest'odore quando è mescolato col sangue. Gr. 10 di sangue di cavia furono mescolati con 40 cm^3 di acqua e gr. 0.004 di CN.Br, operando poi come al solito; non si ebbe indizio nemmeno di traccie di bromo.

In un'altra esperienza con 25 cm^3 di sangue e gr. 0.008 di bromuro di cianogeno, non fu possibile ritrovare il bromo col metodo sovraindicato. Nemmeno quando il sangue era acidulato con acido tartarico.

Invece nelle stesse condizioni gr. 0.0018 di CN.Br sono ancora riconoscibili quando siano mescolati a 25 cm^3 di latte; dopo 3-4 minuti si nota la reazione intensissima.

Mi venne il dubbio che questo risultato negativo fornito dal sangue misto col bromuro di cianogeno dipendesse dall'alcalinità del sangue; ma ciò non è, perchè facendo una soluzione, anche molto diluita, di fosfato e carbonato sodico, e aggiungendovi gr. 0.0043 di CNBr dopo 4 minuti comincia a svelarsi il bromo, il quale colora intensamente due o tre cartine reattive.

Emoglobina e bromuro di cianogeno. — Ho voluto vedere come si comportava la così detta *ossiemoglobina* fornita dalle fabbriche di prodotti chimici. Mescolai gr. 0.10 di ossiemoglobina fornitemi da una delle migliori fabbriche di prodotti chimici tedesche, con 50 cm^3 di acqua e gr. 0.0032 di CNBr; dopo 1-2 minuti si ebbe evidentissima la reazione del bromo.

Siero di sangue e bromuro di cianogeno. — Non ho potuto fare l'esperienza di mescolare il bromuro di cianogeno con siero puro di sangue, privo affatto di globuli.

Bromuro di cianogeno e bianco d'uovo. — Quando si agita il bianco d'uovo con bromuro di cianogeno l'odore di questo scompare. A gr. 26 di bianco d'uovo mescolai gr. 0.0017 di CNBr, feci passare una corrente d'aria; non si ebbe indizio e nemmeno traccia di bromuro di cianogeno.

In un'altra esperienza aggiunsi ad un bianco d'uovo (19 gr.) gr. 0.0054 di bromuro di cianogeno, anche in questo caso l'odore scomparve e non si ebbe traccia di bromo sviluppato.

Ripetei l'esperienza con un altro bianco d'uovo (gr. 25) e gr. 0.0053 di bromuro di cianogeno; si esaminò dopo 15 minuti e non si riuscì ad avere la reazione nemmeno dopo 10 minuti dacchè passava la corrente d'aria. Di confronto e nelle stesse condizioni furono mescolati gr. 0.005 di bromuro di cianogeno a 50 cm^3 di latte, si esaminò dopo un quarto d'ora e subito si ebbe la bella reazione del bromo, già nettissima e intensa dopo due minuti. Interrotta la corrente d'aria e lasciato a sè lo stesso latte per 18 ore non diede più la reazione del bromuro di cianogeno.

Dunque l'albume d'uovo impedisce il riconoscimento di quantità, anche rilevanti, di bromuro di cianogeno. Probabilmente il bromuro di cianogeno forma un composto di addizione con gruppi aminici contenuti nella moleola albuminoide, come fa anche il cianogeno (1).

Estratto di carne e bromuro di cianogeno. — Ho voluto vedere se l'estratto di carne, il quale è ricco di sostanze organiche basiche, impediva il riconoscimento del bromuro di cianogeno, come era prevedibile dopo quanto ho esposto. A gr. 7-8 di estratto di carne sciolto in acqua sino a 50 cm^3 aggiunsi gr. 0.0130 di bromuro di cianogeno; dopo pochi minuti l'odore era scomparso e facendovi passare l'aria nel mio apparecchio, dopo un quarto d'ora dava lievissima la reazione

(1) O. Loew, *Ueber die Einwirkung des Cyans auf Albumin*, " Journ. pr. Chem. ", 1877, t. 16, p. 60.

del bromo, non la dava più dopo circa tre quarti d'ora che il bromuro di cianogeno era in contatto coll'estratto di carne; ripetei l'esperienza con quantità diverse di bromuro di cianogeno ma non si potè svelare dopo che era stato aggiunto da mezz'ora.

Dunque alcuni componenti la carne impediscono la reazione data dal bromuro di cianogeno allo stato gasoso; questo si fissa o si decompone. Si sa che il bromuro di cianogeno reagisce colle amine.

Bromuro di cianogeno e urina. — Quando si aggiunge il bromuro di cianogeno all'urina, a poco a poco il suo odore acuto scompare, ma saggiando col mio metodo lo si riconosce. Però se si lascia a sè l'urina col bromuro di cianogeno, ad esempio durante 16 ore, ed anche meno, il bromuro non si svela più.

Il *vino* impedisce meno o quasi nulla la ricerca del bromuro di cianogeno. Gr. 0.006 di CNBr aggiunti a 50 cm^3 di vino, lasciata a sè la miscela per 15 minuti, diedero subito la reazione del bromo; anche dopo 5 ore gr. 0.0058 di CNBr in 50 cm^3 di vino si riconobbero benissimo.

Bromuro di cianogeno misto a joduro di cianogeno. — La presenza del joduro di cianogeno non impedisce la reazione del bromuro. In una mescolanza di gr. 0.002 di bromuro di cianogeno con 0.269 di joduro di cianogeno contenuta in un matraccio di 1500 cm^3 si fece passare una corrente d'aria. Dopo pochi minuti, può dirsi subito, s'ebbe la reazione del bromo.

Operando nello stesso modo ho potuto svelare il bromo in molte sostanze bromurate anche molto stabili.

Bromuro di metile. — Gr. 0.0019 di bromuro di metile, bollente a $+ 4^{\circ}.5$, in un matraccio di 1500 cm^3, diedero la reazione del bromo dopo dieci minuti. La corrente d'aria era regolare. Il bromuro di metile è intaccato non facilmente dall'acido cromico, ma colla soluzione satura e calda si riesce bene.

Una gocciolina piccolissima di bromuro di metile in 25 cm^3 di *urina* diede nettamente la reazione.

Anche il *bromuro di metilene* CH^2Br^2 (benchè bollente a 98°) misto in piccola quantità con molt'aria dà nettamente la reazione.

Bromuro di butilene $C^4H^8Br^2$. — Anche il bromuro di butilene nella quantità di gr. 0.0015 in 1500 cm^3 di aria dà, a temperatura ordinaria, dopo 1-2 minuti, intensa la reazione del bromo.

Così pure dà bene la reazione una traccia di *bromuro di trimetiletilene* $(CH^3)^2.CBr$ mista con molt'aria. Egualmente il *bromuro di etilene* $CH^3.CHBr$. In questi e in altri casi di sostanze bromurate volatili a temperatura elevata sarà bene scaldare alquanto il matraccio; oppure usare un matraccio più piccolo.

Bromuro di etile C^2H^5Br. — Bastano delle minime traccie di questo corpo, che ha importanza in tossicologia, miste anche a moltissima aria, per dare la reazione del bromo. Gr. 0.0005 in 1500 cm^3 di aria sono ancora facilmente svelabili.

Bromuro di etile misto a joduro di etile ed a joduro di metile. — Il bromuro di etile può essere svelato anche quando trovasi mescolato a molto *joduro di etile* o anche *joduro di metile*. Gr. 0.0046 di bromuro di etile (bollente a 38°.5) furono mescolati con gr. 0.150 di joduro di metile (bollente 43°-44°); dopo 7-8 minuti cominciò a manifestarsi il bromo e la reazione di questo fu nettissima; nessun indizio della presenza del jodo.

Il *joduro di metile* si ossida pure completamente dando anidride carbonica e probabilmente dell'acido jodico, perchè durante la corrente d'aria non si ha indizio di jodo colla salda d'amido se non quando il joduro è in grandissima quantità, forse la reazione ha luogo secondo:

$$CH^3I + 4CrO^3 = CO^2 + HIO^3 + H^2O + 2Cr^2O^3.$$

Dunque anche un grande eccesso di joduro alcolico non impedisce di riconoscere il *bromuro alcolico*. Io non so se in altro modo si potrebbe svelare una così piccola quantità di bromuro etilico mescolato a tanto joduro. Con gr. 0.0045 di bromuro etilico in 0.050 gr. di joduro metilico la reazione del bromo si fa straordinariamente intensa appena dopo due minuti dacchè è cominciato il passaggio dell'aria attraverso al reattivo.

Diclorbrommetano $CHCl^2Br$. — Gr. 0.0062 di diclorbrommetano bollente a 89°, misti a 1500 cm^3 di aria danno dopo 7-8 minuti nettissima la reazione del bromo. Anche con quantità minore si può avere la reazione.

Bromalioidrato. — Grammi 0.0021 di bromalioidrato $CBr^3.CH(OH)^2$ misti con 0.0150 di cloralioidrato in un pallone scaldato a b. m. diedero, benchè lentamente, la reazione del bromo.

Bromoformio. — Gr. 0.0042 di bromoformio in 1500 cm^3 di aria, dopo 7 ad 8 minuti già a temp. ordinaria danno benissimo la reazione.

Gr. 0.003 di bromoformio misti con 0.015 di cloroformio in 1500 cm^3 di aria danno dopo 7-8 minuti nettissima la reazione.

In un'altra esperienza gr. 0.0022 di bromoformio furono posti in un matraccio della capacità di 1500 cm^3 e dopo 2-3 minuti dacchè passava la corrente d'aria, anche senza scaldare, si ebbe ben netta la reazione del bromo. Con gr. 0.0010 di bromoformio si osserva ancora la reazione benchè molto debole.

Bromuro di boro BBr^3. — Questo composto bolle a 90° e manda fumi all'aria.

Gr. 0.0021 di tribromuro, in 1500 cm^3 di aria, dopo circa mezzo minuto dà intensa la reazione del bromo, già a temperatura ordinaria.

Bromuro di jodo IBr. — Era in bei cristallini che a temperatura ordinaria davano lievemente la reazione del bromo col mio reattivo, ma a caldo si scorgeva subito la dissociazione anche con traccie di sostanza; il bromo naturalmente si elimina prima del jodo e dà subito la reazione azzurro-violetta.

Gr. 0.0027 di IBr furono posti in matraccio con 1500 cm^3 di aria, facendo passare con l'aspiratore la corrente d'aria; poco dopo già a temperatura ordinaria o meglio scaldando al b. m. si ha intensissima la reazione del bromo, dopo 4 o 5 minuti. Io credo che in altro modo sarebbe impossibile svelare in presenza di tanta aria una così piccola quantità di bromuro di jodo.

Bromobenzene C^6H^5Br. — Bolle a 155°. Si introdussero gr. 0.0038 di bromobenzene in 1500 cm^3 di aria, poi facendo funzionare l'aspiratore si fece gorgogliare l'aria attraverso all'acido cromico (anche la soluzione cromica al 75 % può servire); dopo 5-6 minuti la carta reattiva si colorò intensamente in violetto. Quantità anche minori sono svelate.

Gr. 0.0044 di bromobenzene misti con gr. 0.0096 di clorobenzene in 1500 cm^3 di aria diedero, dopo 3-4 minuti, la reazione, che era marcatissima, ancora dopo 8 o 10 minuti.

α Bromonaftalina $C^{10}H^7Br$. — Gr. 0.0031 di questa sostanza, bollente a 280°, in 1500 cm^3 di aria danno, già a temperatura ordinaria, la reazione; dopo 10 minuti la reazione è intensissima.

Gr. 0.0032 di α monobromonaftalina mescolati con 0.0105 di monocloronaftalina, in 1500 cm^3 di aria, e scaldando un poco il matraccio, danno netta la reazione del bromo. Dunque anche in questo caso la presenza di grande quantità di composto clorurato non impedisce la reazione del bromo. Ed invero la:

Clorobromonaftalina $C^{10}H^6ClBr$. — Fusibile a 68°; dà nettamente la reazione anche nella proporzione di gr. 0.0020 in 1500 cm^3 di aria. Dopo 5-6 minuti la reazione è intensa. Anche il *monobromodifenile*, scaldando, dà benissimo, e subito, la reazione.

Tribromofenolo. — Il tribromofenolo si ossida assai facilmente coll'acido cromico e dà subito la reazione del bromo. Gr. 0.0025 di tribromofenolo in circa 2000 cm^3 di aria e scaldando leggermente, diedero, dopo 5-6 minuti, intensissima la reazione.

Monobromocanfora. — Una traccia minima di bromocanfora fusibile a 76°, scaldata entro matraccio, diede quasi subito la reazione del bromo.

Coi vapori di *tribromoanilina* e di *ortobromonitrobenzene* si ha pure, subito, la reazione del bromo.

II.

Applicazioni alla ricerca chimico-tossicologica di gas e vapori bromurati.

Questo mio metodo per la ricerca di gas o vapori bromurati può essere utilizzato per la ricerca chimico-tossicologica di alcuni narcotici a base di bromo, quali: il bromuro di metile, il bromuro di etile, il bromoformio, ecc.

Nei trattati di chimica tossicologica si trovano poche notizie (o non se ne trovano affatto (1)) intorno alla ricerca chimica dei gas o vapori bromurati e distinguerli dai composti analoghi clorurati e jodurati. La reazione coll'ossido di rame, di Beilstein, ci potrà dire in certi casi se vi è un alogeno o no, ma per piccole quantità specialmente, è difficile, quasi impossibile dal colore della fiamma, decidere di quale alogeno si tratti.

La mia reazione per la ricerca del bromo può essere applicata quando sia necessario distinguere certi composti bromurati dai corrispondenti derivati clorurati o jodurati, come ad esempio i vapori di bromoformio da quelli del cloroformio, il bromuro di etile dal cloruro o joduro di etile, il bromuro di cianogeno dal cloruro di cianogeno, ecc.; oppure distinguerli quando siano mescolati.

I metodi di Schmiedeberg, di Ludwig, di Vitali e Tornani, scrivono Baumert e Dennstedt (2) per il cloroformio, danno gli stessi risultati col bromoformio. Il prof. Vitali ha indicato un metodo per riconoscere il bromoformio (3), ma non so se possa servire per piccolissime quantità.

Il mio metodo sovradescritto offre il vantaggio di decidere subito se vi sono o no derivati bromurati volatili. Ricorderò qui alcune esperienze che ho fatto con il più importante anestetico bromurato, cioè il bromuro di etile.

(1) L'Autenrieth nel suo *Die Auffindung d. Gifte u. stark wirkender Arzneistoffe*, 1909, non ricorda nessun derivato bromurato.

(2) Baumert e Dennstedt, *Lehrb. d. Gericht. Chem.*, 1907, pag. 280.

(3) " Supplemento Annuale all'Encicl. di Chim. ", 1906, t. XXII, pag. 11.

Bromuro di etile. — La ricerca di piccole quantità di bromuro d'etile è operazione tutt'altro che facile. La reazione di Beilstein per riconoscere gli alogeni modificata anche dal Vitali, come già dissi, non può con sicurezza servire, perchè i tre alogeni si comportano pressochè nello stesso modo. Il bromuro di etile, scrive anche Gadamer nel suo *Lehrb. d. Chem. Toxikologie*, 1909, pag. 291, non ha reazioni caratteristiche.

B. Fischer (1) in un caso di morte di una signora per narcosi con *bromuro di etile*, per ricercare questa sostanza ha dovuto far passare una corrente d'aria attraverso gli organi e l'aria attraverso un tubo rovente (secondo il metodo di Ludwig pel cloroformio) e poi in nitrato d'argento per avere il bromuro d'argento (2); il precipitato fuso con carbonato sodico-potassico, poi la soluzione del prodotto acidulata con acido solforico, fu decomposta con acido nitrico fumante ed estratta con cloroformio per riconoscere il bromo. In alcuni organi trovò il bromo, in altri no.

Come si scorge, è un processo lungo che richiede molte operazioni e che per piccolissime quantità di C^2H^5Br molto probabilmente darebbe risultati incerti o negativi.

Rabuteau (3) ricerca il bromuro di etile nelle urine facendovi passare attraverso una corrente d'aria e poi questa per un tubo di porcellana scaldato al rosso e contenente della calce viva. Naturalmente, si forma del bromuro di calcio. Ma anche questo procedimento è tutt'altro che semplice, quando si tratti di traccie di bromuro d'etile.

Perciò ho voluto vedere se il mio metodo poteva servire a svelare in breve tempo delle piccole quantità di bromuro d'etile in animali narcotizzati con questo composto.

Una cavia del peso di 325 gr. fu narcotizzata con bromuro di etile; circa 20 gr. di sangue esaminati dopo poco tempo diedero in 4 minuti benissimo la reazione del bromo, e colora-

(1) Ricordato da Baumert e Dennstedt, loc. cit., pag. 281.

(2) L'operazione a questo punto sarebbe abbreviata se avuto il piccolo precipitato supposto di bromuro d'argento si saggiasse col mio metodo, cioè riscaldando con soluzione satura di acido cromico; il bromo sviluppato sarebbe riconoscibile col mio reattivo.

(3) Rabuteau, *Comptes Rendus*, 1876, t. 83, pag. 1295.

rono intensamente due cartine. Gli organi sanguigni del medesimo animale ridotti in poltiglia con acqua diedero in 2-3 minuti la reazione del bromo. Dopo circa 6 ore si esperimentò ancora sul sangue, che da rosso scuro si era fatto di color rosso vivo, e dopo 6-7 minuti diede ancora la reazione del bromo benchè lievemente. Il giorno dopo, cioè dopo 24 ore, fatta una poltiglia del cervello dello stesso animale, con poca acqua, dopo 3-4 minuti si ebbe nettissima la reazione del bromo. Meglio se si scalda un poco con lampada ad alcool.

Dopo 24 ore fu esaminata anche la vescica piena di urina e anche questa dopo 3-4 minuti diede la reazione del bromo.

Esperienze analoghe ho fatto col bromoformio.

Si mescolarono intimamente 26 gr. di cuore di bue con 50 cm^3 di acqua, con poco acido tartarico e gr. 0.0082 di *bromoformio*; subito, facendo passare l'aria attraverso l'apparecchio, si ebbe intensissima la reazione del bromo; meglio però è riscaldare moderatamente il palloncino.

Un miscuglio intimo di gr. 22 di fegato di maiale con 150 cm^3 di acqua e 0.0015 di *bromoformio*, dopo 1-2 minuti, diedero evidentissima la reazione del bromo.

In brevissimo tempo si può dunque riconoscere se la narcosi ha avuto luogo per mezzo di un composto bromurato.

Avvelenamento col bromuro di cianogeno. — Avendo osservato che il bromuro di cianogeno CNBr in presenza del sangue oppure del bianco d'uovo, non si riconosce più mediante una corrente d'aria ed il mio reattivo, ho voluto esaminare la questione: se era riconoscibile in caso d'avvelenamento. Una cavia del peso di circa 300 gr. fu posta sotto campana di vetro nella quale avevo introdotto gr. 0.029 di CNBr in cristallini. L'animale diede quasi subito segni di agitazione, lacrimazione pronta e abbondante, difficoltà di respiro, ecc.; dopo circa 25 minuti morì. Dopo quattro ore furono esaminati tutti i visceri, acidulati con acido tartarico, ecc., ma non fu possibile riconoscere la presenza del bromuro di cianogeno.

Visto che dalla poltiglia sanguigna contenente il fegato, i polmoni, il cuore, l'urina, ecc. non si aveva la reazione del bromuro di cianogeno, ne aggiunsi appositamente di questo gr. 0.0091 (quantità relativamente enorme per essere svelata in altre con-

dizioni), agitai bene e m'accorsi che l'odore acuto del bromuro di cianogeno era scomparso; non riuscii ad ottenere colla corrente gasosa nessun indizio di bromo. Invece, quale esperienza di confronto, aggiunsi allo stesso liquido una minima traccia di bromuro di etile e questo si svelò dopo nemmeno due minuti, con reazione intensissima di bromo.

Dunque in queste condizioni molto probabilmente il bromuro di cianogeno, che agisce analogamente al cloruro e joduro di cianogeno, è decomposto entro l'organismo in acido cianidrico (che non ho ricercato) e bromuro, oppure forma un composto stabile con qualcuno dei corpi numerosi che trovansi nell'organismo stesso; probabilmente viene assorbito dalle materie albuminoidi. Non ho più fatto altre esperienze in proposito.

Concludendo, si può affermare che qualunque composto bromurato gasoso o in vapore e misto anche a moltissima aria, ed anche in presenza di cloro, di jodo o di derivati clorurati e jodurati, può essere svelato col mio metodo sopraindicato; io non conosco altro metodo che possa servire in queste condizioni a svelare delle traccie minime di gas o vapori bromurati. Con questo mio procedimento si potrà con sicurezza affermare se in certi casi la narcosi (talora seguìta da morte) ha avuto luogo per l'azione di un derivato bromurato, quale il bromoformio, il diclorbrommetano, il bromuro di etile, anche quando questi siano in piccolissima quantità.

Nel caso del bromuro di cianogeno pare che questo composto resti decomposto entro l'organismo e come tale non possa più essere riconosciuto. Bisognerebbe forse ricercare l'acido cianidrico, ed il bromo che sarà stato trasformato in bromuro. Con questa mia reazione potranno essere risolti altri problemi.

Torino, R. Università, Gennaio 1914.

Cenni sopra alcuni minerali e roccie della Cina.

Nota del Dott. ENRICO GASTALDI

Presso il Museo Mineralogico di Torino ebbi occasione di esaminare una collezione di minerali e roccie adunata dai RR. Padri delle Missioni di Parma nelle prefetture cinesi di Scin-ngan-fu e Han-tsun-fu e da essi presentata all'Esposizione di Torino del 1911 e poi donata, con altre collezioni paleontologiche, ai nostri musei universitari.

Quantunque tale materiale non sia stato da me raccolto, ho tuttavia creduto bene di determinarlo un po' più precisamente di quanto non lo fosse prima, sia perchè esso possa così servire come termine di paragone per ulteriori determinazioni, sia affinchè questo lavoro serva come contributo allo studio geo-mineralogico di questa regione, in cui i RR. Padri spiegano la loro attività. Ritengo utile innanzi tutto riportare testualmente le notizie geologiche con cui Padre Desiderio (Vicario M. A.) accompagnò questa collezione.

" Note intorno alla prefettura di Han-tsun-fu.

" Il carbon fossile si trova a Mien Scien nel cui luogo " viene scavato; si trova pure nella sottoprefettura di Luo-cian " sotto le arenarie di Mao-or-coo; colà spunta appena sul fondo " del letto di un torrente, e non è scavato (Vedi Carta generale " Lean-huo-coo sull'affluente che viene da nord-ovest del Cian- " liu-cian a nord-ovest di Luo-jan sopra Tsie-coo).

" Da questo punto andando a nord-est e ad est il carbon " fossile si fa vedere a U-cia-in, nei monti sud di Pei-suei-cian " e fino nei monti che dividono il corso del Lia-liu-ciau (che " passa da Yan-scien) dalle sorgenti settentrionali del fiume " Han.

" Le roccie ignee (granito) cominciano subito ad oriente di " Luo-ian a Co-lao-lin, dove spuntano appena sotto le roccie " pirosseniche di detto luogo: riappaiono di nuovo molto meglio

" all'oriente di Ts'a-tien-z dando luogo a una piccola catena
" metallifera dove si trova ferro, piombo, manganese e qualche
" filone di quarzo aurifero (Vedi carta topografica). A Co-lao-lin
" invece, il granito al nord è coperto da roccie pirosseniche
" (Diallaggio, amianto, asbesto), al sud-est invece è circondato
" da cloritoschisto il quale include filoni di magnetite; calcare
" siliceo e argilloso fanno un generale cappello a tutte queste
" rocce.

" Il carbone amorfo, l'antracite, il carbone grafitoide si fanno
" vedere qua e là; e generalmente i nidi o piccoli depositi di
" tal materia si trovano immediatamente tra gli strati di cal-
" care soprastante e le rocce di micaschisto e talcoschisto sot-
" tostanti, si trova pure raramente nelle stesse rocce di mi-
" caschisto, ma sembra portato dall'acqua: si trova pure misto
" alle rocce detritiche. Ciò avviene su quasi tutta la linea dei
" monti che circondano la valle al nord fino ai monti di Jan-
" scien dove vi sono dei grandissimi lunghi filoni contenenti
" ferro e manganese in piccola quantità.

" All'oriente di Han-stun-fu, miniere di carbone (Distretto
" di Scin-ngan-fu) all'occidente di Luo-jan Mien-scien altre mi-
" niere di carbone, tra questi due, una grande linea di carbone
" amorfo che li unisce come un ponte ormai disfatto dal tempo
" e dalle acque erodenti: ciò farebbe vedere che anticamente
" formavano un solo grande bacino carbonifero, diviso poi dal
" sollevamento delle tre grandi catene granitiche: *a)* di Mien-
" scien (granito a mica bianca e nera e a feldspato bianco o
" rosso come quel di Mont'Orfano, Baveno, ecc.); *b)* di C'en-cu
" (granito a mica nera, sienite in filoni alternati, smaragdite,
" diorite); *c)* di Jan-scien (Gneis, granito a mica bianca e nera
" e a ortosio bianco e rosso).

" Il raddrizzamento quasi verticale degli strati d'argillo-
" schisto sottostante al litantrace e la pochissima pendenza (dai
" 15° ai 20°) degli strati d'arenaria soprastanti indicherebbe
" che il sollevamento della roccia granitica avvenne appunto
" dopo il periodo carbonifero o al più presto verso la fine di
" esso, ma forse a più riprese o lentamente.

" Questa roccia granitica passando sotto la valle ricom-
" pare al sud del fiume Han e forma le montagne basse al sud
" tra Han-tsun-fu e Si-scian (Sa-huo-c'an); con questa differenza

" che tra Han-tsun e Pa-co-san domina il granito di Mien-scien.
" Dal Pa-co-san a Sa-huo-c'an domina il granito della catena
" del nord di C'en-cu.

" Il terreno alluvionale dell'epoca dei terrazzi che riempie
" tutta la valle, arrivò fino a 250 metri sul livello moderno
" della pianura come ne fan fede i ciottoli d'arenaria, di quarzo
" e di granito abbandonati sui pendii dei monti intorno al Cu-
" lupa. Presentemente esiste ancora in parte a 50 metri sulla
" pianura, al Culupa stesso e a San-cuan-miao (Vedi Carta topo-
" grafica (spaccato geologico a destra)). Ciò avvenne dopo il
" sollevamento della roccia granitica, gli strati del terreno al-
" luvionale essendo ancora orizzontali.

" L'oro del fiume Han ha la sua origine dalla catena che
" divide il Cian-li-cian dalle sorgenti del fiume Han: quello in-
" vece del fiume Cia-lin-cian in parte viene dalla stessa ca-
" tena, in parte viene dai monti dell'ovest che dividono la pro-
" vincia del Can-shù. Il quarzo aurifero si trova nei monti di
" Siao-cia-huo (sorgenti nord occid. del fiume Han). A Jen-z-pieu
" (fiume Cia-lin-cian), a Ts'ai-pa (Mien-scien), a Li-cia-nan (Mien-
" sien) sono depositi antichi di fiume. A trenta li da Jan-scien
" nel letto di un fiumiciattolo si vede pure quarzo aurifero. A
" Fa-se-iuen (sud-est di Han-tsun-fu) finisce il granito; al di
" là del fiume Lien-suei-huo s'alzano le cupole del basalto con
" a occidente l'acque sulfuree.

" Prefettura di Scin-ngan-fu e sue sottoprefetture.

" Nota — L'orizzonte geologico di questa prefettura è diffe-
" rente da quello di Han-tsun-fu, in cui dominano le rocce ignee
" (granito, basalto, ecc.); rassomiglia in parte alle parti occiden-
" tali di Luo-ian. Quivi vi sono rocce più recenti e speciale è il
" bacino del fiume di Han-in-t'in, che non trova pari altrove.

" Il fiume che ha origine nei monti orientali e australi di
" Sce-chuen ha scavato il suo letto tortuoso in direzione sud-est
" erodendo perpendicolarmente parecchie colline che si dirigono
" da nord-est a sud-ovest e terminano bruscamente ai piedi
" delle alte montagne che lo separano dal letto del fiume Han
" al sud-ovest.

" Queste colline a rocce stratificate sono tutte di terra
" rossa di magnifico aspetto: vi si trovano pure strati di are-
" narie e conglomerati; gli strati rialzati verso nord-est di

" forse 20° lasciano che il fiume continui la sua erosione tra-
" sportando il suo letto verso sud-ovest; da questa parte gli
" strati sono a picco, lasciando vedere la loro rottura sul letto
" del fiume, mentre dalla parte nord-ovest lo strato superiore
" discende inclinato fino a lambirne le acque.

" In tutta la prefettura abbonda il litantrace: vi sono
" anche miniere d'oro e di rame, ma è prematuro ora il dire
" altro, essendone lo studio ancora agli inizii ".

La raccolta da me osservata contiene carboni, minerali e roccie. I *carboni* e le *roccie carbonifere* appartengono alla prefettura di Scin-ngan-fu, divisa nelle sottoprefetture Ngan-can-scieu, Pin-li-scien e C'en-pin. Fra essi si trovano dei veri carboni assai ricchi di parte carboniosa e combustibile: tale è il campione N. 17 (contraddistinto dai Padri col N. 3 di Tsu-ci-huo), che brucia facilmente svolgendo abbondanti gas infiammabili e spandendo forte odore catramoso: le ceneri leggere, brune, non fuse sono nella proporzione dell'8 % e prevalentemente silicee. Anche il campione N. 5 (N. 1° di Sciao-sce-ts'a-huo) brucia facilmente e svolgendo gas infiammabili; esso contiene però il 20 % di residuo minerale. Anche questo residuo è siliceo. Si ha quindi una serie di scisti sempre meno carboniosi: così pel N. 19 il residuo alla calcinazione rappresenta il 29 %; pel N. 16 il 42 % e pel N. 21 il 58 %. Il residuo di tutti questi campioni è sempre in massima parte siliceo e più o meno colorato da ossidi di ferro. Alcuni di questi scisti (N. 18 e N. 18 *bis*) presentano ampie faccie lucide di scorrimento. Nel campione N. 21 noto abbondante pirite: essa esiste più o meno alterata e visibile nella massa della roccia, inoltre vi notai presenza di solfato di calcio.

Il campione N. 22 si può classificare anch'esso fra le rocce carboniose, si stacca però dagli altri campioni pel fatto di contenere molti carbonati: attaccato con HCl dil. si disgrega completamente. Nel residuo grigio-nero trovo presenza di grafite, silice ed allumina. Questa roccia appare un argilloscisto grafitoso a cemento calcare.

I *carbonati* sono rappresentati nella collezione da una numerosa serie di campioni: essi furono raccolti nella provincia di Han-tsun-fu e sue sottoprefetture. Fra essi si trovano dei campioni di *calcite* ben cristallizzata formante degli ammassi

bacillari (N. 5-23-24-25) talora in forme radiali (N. 6-26) imitanti la forma dell'aragonite ma da essa facilmente distinguibili per la sfaldatura secondo il romboedro osservabile all'apice dei bacilli. Altri campioni sono di calcare compatto cristallino, a struttura saccaroide, bianco e variamente colorato in grigio-chiaro e grigio-scuro (N. 1-4-11-101).

Altri si presentano con evidente forma concrezionare (N. 27-102), talora stalattitica (N. 22); uno di essi contiene pisoliti con limonite (N. 112).

Tra i *calcari* che presentano qualche particolarità noto: un calcare fetido che al trattamento con HCl dil. svolge H_2S (N. 51), un calcare contenente piriti (N. 7) ed un altro con pirite e grafite (N. 10); ed infine un calcare roseo con venature grigie (N. 3) il quale attaccato con HCl dil. lascia un residuo piuttosto abbondante costituito da granuli incolori lucenti, forse di quarzo, e da cristalli allungati quasi aghiformi di color bianco latteo, probabilmente di *Wollastonite* (silicato di calcio). Vi è pure un campione di *Aragonite* (riconosciuta colla reaz. di Meigen) (N. 12) e alcuni campioni di calcare debolmente magnesifero (N. 2-8); da questi si passa a campioni di calcari con abbondante magnesia e con residuo siliceo (N. 9-13) e ad una *dolomite* (N. 49) compatta, grigiastra che non lascia alcun residuo all'attacco con HCl.

In seguito a questi carbonati noto alcuni altri minerali di calcio: cioè una *fluorite* e due campioni di *gesso*.

Il N. 50 è un bel campione di fluorite azzurra associata a materia di apparenza limonitica e che oltre a ferro contiene anche fosfati.

Il N. 109 è un ammasso di aghetti sottili compatti quasi sericei di gesso che presentano una piegatura, segno evidente delle compressioni subìte dal minerale; l'altro campione (N. 110) è costituito da molti cristalli allungati secondo l'asse C, più o meno tabulari secondo 010, colle faccie 010, 110, 111 solite a riscontrarsi nel minerale. Parecchi fra di essi sono geminati a *ferro di lancia*, secondo la solita legge: asse di geminazione, la normale a 100.

Abbondano nella raccolta i *minerali di ferro*, ossidi, solfuri e loro prodotti di alterazione: anch'essi raccolti nella provincia di Han-tsun-fu.

Notevoli sono tre campioni di *Magnetite* (N. 44-103-104): i campioni N. 103-104 si presentano sotto forma di ciottoli assai pesanti, nerastri, fortemente magnetici; il campione N. 44 presenta alterazione limonitica. Vi è anche qualche ciottolo di *ematite* (N. 35-54) e parecchi campioni di ematite rossa (numeri 37-40-41-43-45) che attaccati con HCl conc. lasciano un residuo siliceo più o meno abbondante.

Notai nel campione N. 40 traccie di rame, e nel campione N. 45 traccie di manganese: ricercai anche altri metalli ma con risultato negativo.

Il campione N. 105 è una *limonite* concrezionare, il campione N. 42 appare un oligisto micaceo. Un minerale di ferro molto manganesifero è il campione N. 31; esso contiene pure abbondante carbonato di calcio e un poco di fosfati: il residuo dell'attacco con HCl conc. è formato da straterelli bianchi e da polvere grigia prevalentemente silicea.

Abbondanti pure sono le *piriti*; nella raccolta trovo due campioni di pirite filoniana (N. 106-105); il campione N. 61 è formato da pirite ben cristallizzata; vi si notano cubi con le tipiche strie del pentagonododecaedro; il campione N. 62 è costituito da cristalli di pirite profondamente limonitizzata; all'interno si trovano ancora residui di pirite, all'esterno si presenta come una limonite pseudomorfa della pirite. Infine i campioni N. 108 e 48 sono prodotti di decomposizione di minerali piritiferi: durante la decomposizione i prodotti di essa hanno reagito sui minerali vicini attaccandoli e trasformandoli.

Così dal campione N. 45 per trattamento con acqua ottenni una soluzione bruno-scura fortemente acida, contenente solfato ferrico e solfato di magnesio.

Cito qui anche due *minerali di manganese* segnati coi N. 32 e 47. Il campione N. 32 appare proveniente da un filone quarzoso e contiene *pirolusite* intimamente mescolata a *Wad*: la pirolusite ha come una struttura cellulare nei cui vani trovasi il Wad. Misto al manganese trovasi anche ferro. Il campione N. 47 è formato da materiale Wadoso tipicamente leggiero, ricco in manganese e con poco ferro.

Il manganese vi appare anche contenuto in forma di silicato, perchè trovasi ancora abbondantemente anche nel residuo dell'attacco con HCl; esso residuo contiene infatti anche silice.

Nella raccolta esistono parecchi campioni di *quarzo* di maggiore e minor limpidezza; v'è del quarzo assai limpido (N. 117), del quarzo così detto affumicato (N. 111) e del quarzo a struttura granulare non trasparente. Alcuni campioni presentano particolari inclusioni; il N. 112 è un cristallo di quarzo coni nclusioni di fini aghetti di *rutilo*; un altro appare includere della mica nerastra (N. 114); un altro presenta un accrescimento zonare alternato incoloro e rosso per inclusioni di ossido di ferro; in un altro (N. 115) si nota un'inclusione lamellare (grigio-nera) di magnetite. Cito qui anche un campione di silice cellulare, spugnosa; esso era probabilmente di formazione filoniana ed includeva pirite: la pirite fu decomposta dagli agenti atmosferici e restò la massa silicea così spugnosa. Vi sono altri minerali silicei più complessi; noto una *oficalce* (N. 39) formata da carbonato di calcio e magnesio e silicato di magnesio; ed alcune masse talcose (N. 29-30-122) con quantità variabili di cemento calcareo; il campione N. 29 all'attacco con HCl lascia un residuo di struttura fibrosa. Noto poi una massa fibrosa di *Amianto* (N. 46); le fibre sottili fondono facilmente al cannello dando un vetro nero, esse contengono alquanta acqua igroscopica ma solo il 0,8 % di acqua d combinazione. Notevole è un campione di scisto paragonitifero segnato col N. 118; in esso notasi un bel cristallo di *Staurolite* geminato secondo la legge: asse di geminazione, la normale a 232. L'individuo più grande del geminate misura 28 mm. secondo C, 14 mm. secondo B, 12 mm. secondo A: ambedue gli individui sono rotti all'estremità dell'asse verticale, e non vi potei riconoscere altre faccie eccetto quelle del prisma 110 (dominante) e del pinacoide 010 (subordinata). Nello stesso campione si trova un cristallo unico di *staurolite*, rotto ai due estremi dell'asse C nella cui direzione raggiunge i 42 mm. Il campione N. 51 è una *muscovite*; coll'esame della figura di percussione stabilii che essa è una mica alcalina della prima serie (infatti i raggi di rottura contengono fra di loro la traccia del piano che unisce gli assi ottici); coll'analisi vi riconobbi presenza di potassio ed assenza di magnesio.

Noto poi un bellissimo campione di *cianite* (N. 67), un *feldspato* (plagioclasio) (N. 119) con un bel cristallo di *granato* rosso presentante la forma dell'icositetraedro; un *pirosseno* (N. 120) ed un *epidoto* (N. 121).

Roccie.

L'indicazione d'origine delle roccie è anch'essa assai vaga: la maggior parte fra esse porta l'indicazione Han ed è citata nelle note di P. Desiderio come raccolta nella provincia di Han-tsun-fu e sue sottoprefetture: ad alcune è pure unita una indicazione più precisa del luogo ove venne raccolta; come pei minerali io scelsi fra esse quelle che apparvero meno alterate. Nel determinarne la specie mi valsi sopratutto della osservazione microscopica delle sezioni sottili. Ho così determinato come *graniti* i campioni N. 58 e 60. Il camp. N. 58 è un granito a grana assai fine, in esso osservai presenza di microclino rivelantesi a nicols incrociati col suo caratteristico aspetto a graticcio; di biotite con toni giallo-verdi; di abbondante muscovite e di quarzo. Nel quarzo notai pure la presenza di prismetti di apatite, senza punta, con frattura trasversa. Il campione N. 60 appare di una formazione filoniana. Abbondantissima in esso è l'*albite* che determinai per tale isolandola per frantumazione dal resto della massa ed osservandone gli angoli di estinzione (risultarono di + 19 per la faccia 010 e di + 1 per la faccia 001) e col metodo di Becke. Vi osservai pure la presenza di quarzo, di biotite e di clorite di colore verde e di basso tono di polarizzazione. Il campione N. 123 appare essere costituito anch'esso da una massa granitica.

Noto poi alcuni bei campioni di *pegmatite* filoniana, a grandi elementi, con mica bianca argentina, e grossi cristalli di tormalina nera (N. 12-124 *bis*) e altri due campioni pure di pegmatite (N. 63-125) in ciottoli.

Esaminai quindi gli scisti contraddistinti coi N. 56 *bis*-57-33. Il N. 56 *bis* è uno *scisto granatifero* superficialmente alterato. Oltre ai granati ben evidenti vi osservai presenza di biotite, con forte policroismo: essa si presenta di colore intensamente verde, quasi nero, per raggi vibranti parallelamente al piano di sfaldatura, e di colore giallo per posizioni ad esso normali; vi si trova pure abbondante muscovite: la parte fondamentale è costituita da quarzo. Il N. 57 è uno scisto compatto, a grana minuta costituito da abbondantissimo quarzo e da biotite analoga alla precedente.

Specialmente degno di nota è il campione N. 33: esso è costituito da strati verdi lamellari facilmente divisibili e riducibili in lamelle brillanti, alternate senza ordine con strati bianchi. All'osservazione microscopica delle sezioni esso appare formato da quarzo e da mica in parte bianca ed in parte verde. La mica verde presenta distinto policroismo: osservata con raggi vibranti parallelamente alla sfaldatura essa è di color verde-gialliccio, normalmente ad essa è bleu-verdiccio. Ne feci anche un saggio chimico scegliendo specialmente la parte verde e disgregandola per fusione con carbonato sodico: trattando la massa fusa con acqua passarono così in soluzione silice, sotto forma di silicato, e cromo sotto forma di cromato; il cromo lo identificai colle sue note reazioni. Nella parte indisciolta in acqua notai presenza di alluminio; erano assenti calcio e magnesio. Questo campione apparirebbe uno scisto con *fuchsite*.

Noto qui anche un *talcoscisto* grigio onduloso (N. 127); un altro talcoscisto è il campione N. 128: esso è bianco con sezioni di un minerale di ferro, limonite. Causa l'alterazione della roccia e del minerale, i contorni si presentano incerti, sì da non poter decidere se trattasi di un carbonato di ferro o di una pirite alterati in limonite.

Il camp. N. 129 appare uno *scisto carbonioso* inglobante cristalli di pirite già in parte limonitizzata. Il camp. N. 54 è anch'esso uno scisto carbonioso: ne determinai la perdita in peso alla calcinazione: essa risultò essere del 3 %. La parte carboniosa è intimamente frammista alla massa fondamentale e brucia assai difficilmente.

Osservando le sezioni esse apparvero formate da una massa caolinica fondamentale a grana finissima in cui si osservano piccolissimi nuclei probabilmente di *sericite*. Affine di fare una migliore osservazione tentai di asportare la parte carboniosa trattando una porzione dello scisto con miscela di clorato potassico e acido nitrico: le sezioni che poi ne ottenni non differivano dalle prime che per essere alquanto più chiare.

Rivolsi pure la mia attenzione al campione N. 61 costituito da una massa gialla, durissima e compatta simile ad un *diaspro*. Ne esaminai le sezioni sottili: apparvero di color caffè, di aspetto granulare e quasi opache. Trattai le sezioni con HCl conc. asportandone così l'ossido di ferro che le colorava: la massa

apparve allora essere costituita da quarzo in granuli finissimi angolosi fra loro cementati a mosaico. Non vi notai radiolarie.

Il campione N. 126 è costituito da alcune amigdali del *basalto*.

Determinai pure nella raccolta alcune *dioriti*. Il camp. N. 56 è un ciottolo di roccia alterata, scura con abbondanti cristalli grigio-verdi. In esso predomina l'orneblenda (di cui misurai l'angolo di sezione prismatica e lo trovai eguale a 56°), che si presenta con netto policroismo coi colori giallo-bruno, giallo-chiaro e verdiccio; vi si notano pure: un plagioclasio alterato, mal determinabile; dei granuli di quarzo; e dei granuli quasi incolori a contorni che s'avvicinano a contorni cristallografici e che sembrano di pirosseno. Il camp. N. 64 è pure un ammasso dioritico analogo al camp. N. 56 e anch'esso con prevalenza di amfibolo. Il camp. N. 62 è costituito da una massa predominante di amfibolo e quarzo e da un plagioclasio alterato mal determinabile; l'amfibolo si presenta colle sue caratteristiche linee di sfaldatura a traliccio, ben evidenti nelle sezioni prismatiche. Il camp. N. 55 è costituito da una massa feldspatica, eventualmente filoniana, a contatto con dioriti, tipica pel suo colore a chiazze verdi e rossicce; essa si presenta parzialmente alterata e con macchie di limonite. Nelle sezioni i feldspati si presentano tutti torbidi ed alterati. Vi domina un oligoclasio acido, alterato, le cui lamine di geminazione si presentano curvate come se avessero subìta una ripiegatura dovuta a rammollimento. Mal determinabile è la presenza di un feldspato potassico molto alterato. V'è inoltre poco quarzo e qualche cubetto di pirite. La massa verdiccia è data da epidoto misto a poca clorite. Probabilmente trattasi di una varietà di diorite, ove, per la forte alterazione, l'orneblenda si sarebbe mutata in clorite ed epidoto. Anche il camp. N. 133 può essere qui citato formato da un ammasso di granati con materiale verde di apparenza pirossenica e con piccole vene di calcite: esso si presenta coll'aspetto di una *eclogite*.

Noto infine un bel campione di *serpentino* nobile (N. 130), un ciottolo pure di serpentino (N. 131) ed un serpentino con una vena di amianto (N. 132).

Torino, R. Istituto di Mineralogia. Giugno 1913.

Ricerche sulla tossicità del succo spremuto da semi germinanti.

Nota di S. DEZANI.

La tossicità degli estratti e dei succhi vegetali su organi e su semi vegetali è stata finora oggetto di poche ricerche, e gli autori che si sono occupati della questione si sono limitati a constatare il fenomeno senza risalire alla ricerca della causa.

Il Soave (1) ha osservato la tossicità dei succhi ottenuti per pressione dai semi germinanti su altri semi della stessa natura. Le esperienze erano fatte lasciando rigonfiare un certo numero di semi in acqua distillata (semi di mais, di frumento, di lupino) ed un certo numero di altri semi nel succo espresso da semi germinanti della stessa specie, e ponendo poi tutti i semi in apposito germinatoio. In altri casi l'autore trapiantava dei semi già in via di germinazione su sabbia silicea in piccoli vasi; di questi taluni venivano inaffiati con acqua comune, altri con succo. Le esperienze hanno dato costantemente lo stesso risultato comprovante l'azione dannosa del succo tanto sui semi ancora allo stato di riposo come su quelli già in via di germinazione. E cioè nei semi allo stato di riposo la facoltà germinativa è notevolmente diminuita, negli individui in cui tuttavia s'inizia ciò avviene con grande ritardo sui semi termine di confronto; nei semi già in via di germinazione l'accrescimento è — si può dire — arrestato al punto in cui comincia la somministrazione del succo.

Il Soave non tenta di dare alcuna spiegazione ai fatti da lui accertati; egli si limita a rammentare che l'acido carbonico emesso in tanta copia dagli organismi animali impedisce di là da certi limiti le più importanti funzioni vitali; l'urea, prodotta pur essa in tanta copia dagli animali, avvelena se iniettata;

(1) *Sopra il succo spremuto da semi germinanti.* " Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino ", vol. XLVIII.

l'alcool, che si produce nella fermentazione alcoolica, agisce quando raggiunge certi limiti paralizzando l'attività delle cellule del fermento stesso.

Van Heiynsbergen (1) ha invece studiato la tossicità degli infusi di piante medicinali e velenose per gli animali su organi o parti di organi vegetali secondo il metodo di Verschaffelt (2). Questo metodo è fondato sul fatto che quando un organo vegetale è immerso ancora vivo nell'acqua esso aumenta — o per lo meno non muta — di peso; quando l'organo invece è morto esso subisce una diminuzione di peso. Van Heiynsbergen immergeva negli infusi organi o parti di organi vegetali ricchi di tessuto parenchimatico e decorticati: prima dell'immersione gli organi venivano lavati, seccati fra carta da filtro, e pesati. Dopo 24-48 ore questi organi venivano tolti, posti nell'acqua e dopo qualche tempo nuovamente seccati e pesati. Poteva così l'autore constatare la tossicità degli infusi dacchè gli organi stati in essi immersi perdevano di peso. Ricercò anche l'autore la tossicità di questi infusi sul processo vegetativo: osservò così spesso un ritardo nel germinare dei semi o la soppressione della germinabilità stessa. L'autore fa osservare che la concentrazione degli infusi non era sufficiente ad uccidere il protoplasma.

La tossicità di questi succhi e di questi infusi appare tuttavia un fatto abbastanza strano se si rammenta che le piante possiedono una certa immunità verso i loro veleni. Lo Starcke (3) che si occupò ampiamente della questione, esperimentando con quattro metodi diversi la tossicità di un veleno sulla pianta che lo produce, trovò che quasi in tutti i casi da lui considerati la pianta presentava una certa resistenza all'azione delle sostanze tossiche da essa prodotte e che questa resistenza si estendeva anche verso altri veleni, fossero o no questi chimicamente affini coi veleni della pianta stessa. Alle stesse conclusioni giungeva — tra gli altri — recentemente il d'Ippolito (4).

(1) " Maly's Jahresber. f. Thierchemie ", 1907, pag. 1169.
(2) Ibid., 1905, pag. 794.
(3) Ibid., 1905, pag. 795.
(4) " Le Stazioni sperimentali agrarie ", 1913, pag. 393.

Quali adunque le cause della tossicità di questi succhi vegetali? — Esse possono essere molteplici: basta infatti richiamare alla mente il concetto di " veleno „ e ricordare quanto svariate sono le azioni dei veleni. In casi della natura di quello qui considerato noi non possiamo limitare il concetto di veleno a quello di una sostanza la quale introdotta in piccola quantità in un organismo lo danneggi o l'uccida. A prescindere dal fatto che piccole quantità di un veleno possono agire favorevolmente sull'organismo o stimolandone certe funzioni o sopprimendo certi disturbi, può avvenire che sostanze le quali per comune consenso non sono ritenute veleni, sono anzi parte della nutrizione, sviluppino un'azione tossica. Così il glucosio, che forma il migliore substrato nutritizio per la maggior parte dei funghi è invece un potente veleno per i Nitrobacteri, così che essi vengono da questa sostanza uccisi più facilmente che dal sublimato. Lo stesso glucosio, che è tanta parte e non sostituibile della nutrizione degli organismi superiori, è perniciosissimo per il diabetico; il cloruro sodico, che non è certo elencato fra i veleni, può in dose eccessiva provocare la morte di un uomo.

È poco probabile, a mio avviso, che nei succhi studiati dal Soave esistano sostanze alle quali possa ascriversi un'azione specifica tossica: noi in questi succhi non troviamo veleni — almeno per gli organismi animali — nel senso ristretto della parola. È ben più probabile che altre siano le cause di questa tossicità.

È bene qui ricordare che anche nei vegetali — sebbene non certo nella stessa misura che negli animali — l'azione tossica di un corpo può assumere diverse forme; dobbiamo cioè distinguere anche qui veleni che uccidono il protoplasma, veleni che sopprimono certe funzioni (assimilatrici, respiratorie), veleni che paralizzano l'azione degli enzimi, ecc. Così il Marcacci (1) ha dimostrato che la chinina, la stricnina e la morfina impediscono nella *Lemna minor* e nell'*Elodea canadensis* la trasformazione dell'amido in zucchero; lo Tschirch (2) ha dimostrato che il rame ha grande tendenza a formare dei composti stabili colla clorofilla; così l'acido cianidrico iniettato nelle piante ne produce la morte sop-

(1) " Nuovo giornale botanico italiano „, 1895, pag. 222.
(2) Kobert, *Lehrbuch der Intoxicationen*, pag. 165.

primendo probabilmente l'attività degli enzimi della respirazione (1). Occorre ancora ricordare che certi sali, di per sè non tossici, possono sviluppare un'azione antagonistica — quando siano assorbiti dalla pianta — su altri sali utili preesistenti nelle cellule o possono produrre dei gravi squilibri nella pressione osmotica delle cellule. Sono poi interessanti assai e debbono essere qui ricordati i fatti messi in luce dal Portheim (2) sulle reazioni che si possono ottenere dagli estratti degli organi di una stessa pianta o di piante diverse quando siano messi a contatto. Il Portheim ha dimostrato che non tutte le cellule ed i tessuti di una stessa pianta si comportano ugualmente in rapporto alle reazioni biologiche. Se si prepara un estratto dei petali di una pianta da una parte e di foglie della stessa pianta dall'altra e si mescolano i due liquidi, il miscuglio rimane perfettamente chiaro. Ma se si impiegano estratti di tessuti omologhi di piante della stessa specie si nota la formazione di un precipitato. Se all'estratto acquoso di un organo si aggiunge un estratto alcoolico delle foglie di piante della stessa specie si ottiene un caratteristico precipitato: se si adopra l'estratto alcoolico di foglie di piante di specie diversa la reazione è negativa.

Bastano queste poche considerazioni per farci comprendere quanto varia può essere l'azione tossica dei succhi spremuti dai semi germinanti e quali difficoltà si oppongono perciò ad un'esatta definizione di questa azione stessa. È stato tuttavia scopo delle ricerche di cui io qui rendo conto di risolvere almeno in parte la complessa questione della tossicità dei succhi, e precisamente di rispondere alle seguenti domande:

1° Costituiscono questi succhi un veleno per il protoplasma dei semi sui quali si fanno agire?

2° La tossicità sui succhi può essere dovuta all'azione antagonistica che i sali del succo possono in seguito al loro assorbimento esercitare su quelli dei semi?

3° Può l'azione tossica dei succhi essere ascritta ad un abbassamento da essi provocato delle varie attività enzimatiche dei semi?

(1) Dezani, " Archivio di farmacologia sperimentale e Scienze affini ", vol. XVI, pag. 539.

(2) Grafe, *Biochemie*, pag. 422, Leipzig, 1913.

*
* *

Per tutte le esperienze mie io mi sono servito del succo ottenuto dai semi germinanti di grano turco (*Zea mais*). I semi venivano fatti rigonfiare durante 48 ore in acqua distillata: in seguito venivano lavati e posti a germinare su cotonina umida in adatto germinatoio dove la temperatura oscillava da 20 a 25°. Dopo otto giorni i teneri germogli, i cui fusticini raggiungevano la lunghezza di 3-5 cm., venivano triturati, la poltiglia ottenuta veniva impastata con sabbia silicea e la pasta sottoposta alla pressa di Buchner. Si otteneva così un succo di color giallo paglierino contenente in sospensione numerosi granuli d'amido, dai quali lo si liberava mediante centrifugazione o ripetute filtrazioni. Le proprietà di questo succo sono quelle già descritte da Soave. Ha reazione acida, sapore dolcissimo: precipita per azione del calore o per aggiunta di alcali e di acidi, ecc. Io ho voluto su di essi determinare, oltre la conducibilità elettrica, alcune altre costanti fisico-chimiche non determinate da Soave.

Conducibilità elettrica a 18°:

Succo N. 1 . . . . $K = 33 \times 10^{-4}$
„ „ 2 . . . . $K = 41 \times 10^{-4}$
„ „ 3 . . . . $K = 43 \times 10^{-4}$.

Punto di congelamento:

Succo N. 1 . . . . $\Delta = -0.84$
„ „ 2 . . . . $\Delta = -1.22$
„ „ 3 . . . . $\Delta = -1.09$.

Pressione osmotica:

Succo N. 1 . . . . $\pi = 10.10$ atmosfere
„ „ 2 . . . . $\pi = 14.67$ „
„ „ 3 . . . . $\pi = 13.11$ „

Concentrazione osmotica:

Succo N. 1 . . . . 0.45
„ „ 2 . . . . 0.65
„ „ 3 . . . . 0.58.

Se in questi succhi si pongono a rigonfiare durante 48 ore dei semi di *zea mais* si nota che la loro facoltà germinativa è sempre notevolmente ritardata, spesso del tutto soppressa.

Riporto qui dal mio diario alcune tabelle delle esperienze fatte.

I semi venivano lasciati per 48 ore nel succo: in seguito venivano lavati e deposti su cotonina imbevuta d'acqua distillata. Si notava ogni giorno od a giorni alterni il numero dei semi germinati: come termine di paragone servivano altri semi lasciati rigonfiare in acqua distillata.

a) N. 10 semi rigonfiati in acqua distillata
b) „ „ „ succo.

Succo N. 1.

Novembre 7		8	9	10	12	14	16	18	20	
Prova *a*	Semi germinati	7	10	10	10	10	10	10	10	Non si sviluppano altri semi nella prova *b*.
Prova *b*		0	0	0	1	2	2	3	5	

Succo N. 2.

Dicembre 2		3	4	5	6	8	10	15	20	
Prova *a*	Semi germinati	6	10	10	10	10	10	10	10	Non si sviluppano altri semi nella prova *b*.
Prova *b*		0	0	2	3	5	5	6	7	

Succo N. 3.

Dicembre 15		16	17	19	21	23	25	28	30
Prova *a*	Semi germinati	8	10	10	10	10	10	10	10
Prova *b*		1	1	4	8	9	10	10	10

Constatata la tossicità del succo dei semi germinanti di mais sui semi di mais, io ho cercato di stabilire il grado di tossicità per rispetto ad un'altra sostanza tossica, " l'alcool „, col metodo proposto dal Vandevelde (1). Questo metodo consiste

(1) Hamburger, *Osmotischer Druck und Jonenlehre*, III, pag. 232.

nell'aggiungere ad una soluzione al 10 % di cloruro potassico l'egual volume di varie soluzioni d'alcool etilico in acqua, e di stabilire per quale concentrazione dell'alcool nel miscuglio non si provochi più la plasmolisi che nella metà delle cellule di una sezione microscopica di pianta adatta. All'alcool si sostituisce in seguito la soluzione della sostanza di cui si vuol stabilire il grado di tossicità per rispetto all'alcool. Come tipo di pianta il Vandevelde propone le cellule epidermoidali, ricche di antociano, della cipolla comune (*Allium cepa*), varietà rossa.

Io ho trovato però più comodo sostituire nelle mie esperienze all'indice di tossicità adottato dal Vandevelde (plasmolisi limitata alla metà delle cellule) quella della plasmolisi incipiente ma subito soppressa. Per dosi tossiche di alcool si nota infatti che nelle cellule, non appena esse vengono a contatto del miscuglio (KCl + alcool), si ha un fugace accenno alla plasmolisi, ma questa subito scompare poichè la massa protoplasmatica viene uccisa e la sostanza colorante riempie tutta la cavità cellulare: tutta la sezione appare allora uniformemente colorata in rosso.

Io ho anzitutto stabilito la " soluzione critica „ dell'alcool: questa corrispondeva ad una soluzione al 18,80 % di alcool (in volume). Essa è inferiore a quella del Vandevelde il quale aveva fissata la soluzione critica in quella contenente il 28,2 % di alcool. La minor resistenza delle cellule dell'*Allium cepa* verso l'alcool nelle mie esperienze può forse essere dovuta alla tarda stagione in cui esse vennero fatte (dicembre): già il Vandevelde aveva constatata una minor resistenza al veleno in agosto che in primavera — (Soluzione critica in agosto = 24,44 % d'alcool).

Io passai in seguito alla determinazione della tossicità dei succhi di semi germinanti di mais sulle stesse cellule di cipolla.

Per questo aggiungevo alla soluzione di KCl quantità crescenti di succo. Dei tre succhi da me esperimentati uno solo (il N. 2) si dimostrò già di per sè solo leggermente ipertonico, per rispetto alla cellula di cipolla. L'osservazione veniva fatta alla distanza di 1 minuto ed in seguito di 15 minuti dal momento in cui la sezione veniva immersa nel miscuglio plasmolizzante.

Riporto qui alcune tabelle dimostrative delle esperienze da me fatte.

	Dopo 1 minuto	Dopo 15 minuti
Succo N. 1.		
a) Sol. KCl cm³ 5 + 5 cm³ d'acqua	Plasmolisi	Plasmolisi duratura
b) „ „ „ + 1 cm³ di succo + 4 d'acqua . . .	„	„ „
c) „ „ „ + 2 „ „ + 3 „	„	„ „
d) „ „ „ + 3 „ „ + 2 „	„	„ ridotta
e) „ „ „ + 4 „ „ + 1 „	„	„ scomparsa
f) „ „ „ + 5 „ „	„	„ „
Succo N. 2.		
a) Sol. KCl cm³ 5 + 5 cm³ d'acqua	Plasmolisi	Plasmolisi stabile
b) „ „ „ + 3 cm³ di succo + 2 d'acqua . . .	„	„ ridotta
c) „ „ „ + 4 „ „ + 1 „	Plasmolisi leggera	„ scomparsa
d) „ „ „ + 5 „ „	Plasmolisi	„ ridotta
Succo N. 3.		
a) Sol. KCl cm³ 5 + 5 cm³ d'acqua	Plasmolisi	Plasmolisi stabile
b) „ „ „ + 3 cm³ di succo + 2 d'acqua . . .	„	„ ridotta
c) „ „ „ + 4 „ „ + 1 „	„	„ „
d) „ „ „ + 5 „ „	„	„ scomparsa

Le prove vennero tutte ripetute ed i risultati furono tutti sostanzialmente gli stessi: in nessun caso si potè osservare un'azione veramente tossica dei succhi nel senso che la plasmolisi non potesse più avere luogo. In tutti i casi esaminati la plasmolisi si è manifestata con la stessa intensità come nelle prove di controllo: è solo dopo qualche tempo (10 minuti almeno) che si può constatare una differenza. La tossicità dei succhi di mais sul protoplasma delle cellule di cipolla è adunque assai piccola.

Già il Vandevelde che aveva esperimentato con estratti acquosi di caffè, di cacao, di the, di tabacco, aveva trovato che essi erano assai poco tossici per rispetto all'alcool: così il coefficiente critico dell'estratto di cacao è = a 1063,8 quando la tossicità dell'alcool è posta = 100: in altre parole l'estratto di cacao ha una tossicità uguale a $^{9}/_{100}$ di quella dell'alcool assoluto.

I.

Dai risultati delle sudescritte esperienze può già dedursi che l'azione tossica dei succhi non può certo paragonarsi a quella di un vero veleno protoplasmatico. Ma poichè le esperienze precedenti furono fatte su cellule di piante assai lontane dal mais, io ho voluto ripetere le ricerche su le cellule dei semi stessi di mais. Per questo i semi venivano fatti rigonfiare per qualche ora in acqua, indi si preparavano sezioni dell'embrione, le quali venivano allora poste a contatto del miscuglio sol. KCl + succo. Ma non mi fu possibile di giungere per questa via ad alcunchè di positivo, poichè la plasmolisi non risultò mai evidente: le cellule dell'embrione del mais male si prestano a ricerche di simile natura.

Io ho tentato allora di stabilire la morte del protoplasma ricercando se dopo la permanenza delle cellule dell'embrione nel succo queste si colorissero con un colore non vitale.

Le sezioni dell'embrione venivano perciò lasciate per un certo periodo di tempo nel succo: dopo di che si estraevano, si lavavano, e si immergevano in una soluzione all'1 $^{0}/_{0}$ di bleu d'anilina per $^{1}/_{4}$ d'ora.

Le sezioni venivano in seguito nuovamente lavate nell'acqua ed osservate allora al microscopio.

Riporto qui alcune tabelle dal diario delle mie esperienze. Come controllo servivano sezioni dello stesso embrione lasciate per gli stessi periodi di tempo in acqua distillata. Ogni osservazione aveva luogo su tre diverse sezioni.

Succo N. 2.

Durata dell'immersione nel succo o nell'acqua	Succo	Acqua
15 minuti . .	nessuna colorazione	nessuna colorazione
1/2 ora . . .	" "	" "
1 " . . .	" "	" "
3 ore . . .	poche cellule colorate	" "
6 " . . .	" " "	" "
10 " . . .	colorazione parziale	" "
18 " . . .	colorazione completa	poche cellule colorate

Succo N. 3.

Durata dell'immersione nel succo o nell'acqua	Succo	Acqua
1/2 ora . . .	nessuna colorazione	nessuna colorazione
1 " . . .	" "	" "
3 ore . . .	" "	" "
6 " . . .	" "	" "
10 " . . .	colorazione parziale	" "
18 " . . .	" "	poche cellule colorate
24 " . . .	colorazione completa	" " "

Una violenta azione tossica dei succhi sul protoplasma non la si osserva dunque nemmeno quando le cellule dell'embrione sono portate a diretto contatto dei succhi. Nei semi, che lasciati 48 ore a contatto dei succhi hanno perduta la facoltà germinativa, il protoplasma viene ucciso già durante la loro permanenza nel succo, o la sua morte non segue che più tardi?

A risolvere la questione io ho pensato di applicare ai semi avvelenati il metodo già applicato agli organi animali per tentare di stabilire la data della loro morte. Come è noto, un organo staccato dall'animale ed immerso nell'acqua distillata cede a questa i suoi sali e con tanta maggior facilità quanto più lontano è il tempo della morte dell'organo. Il crescere della conducibilità elettrica del liquido in cui sta immerso l'organo permette di seguire con tutta facilità il fenomeno (1). Io ho pensato quindi *ex analogia* che qualora i semi avvelenati si potessero considerare senz'altro morti essi potessero pure cedere all'acqua distillata i loro elettroliti.

A verificare questo N. 20 semi di mais si lavano dapprima con soluzione diluita di ac. cloridrico, indi ripetutamente con acqua distillata; si pongono allora a rigonfiare durante 48 ore nel succo. Altri 20 semi che hanno subìto lo stesso lavaggio si pongono a rigonfiare in acqua. In seguito i semi vengono nuovamente lavati ed immersi rispettivamente in 20 cm^3 di acqua distillata. In questa si seguono le variazioni della conducibilità elettrica con tutte le norme indicate per questa operazione (2). La temperatura del termostato è di 25°. Alla stessa temperatura si tengono fra una determinazione e l'altra i liquidi in cui stanno immersi i semi.

	$K \times 10^{-6}$ a $+25°$		
	Semi sani	Semi avvelenati	
Inizio	61	75	
Dopo 1 ora . .	76	93	$\frac{K \text{. finale s. s.}}{K \text{. iniziale s. s.}} = \frac{410}{61} = 6.7$
„ 2 ore . .	96	126	
„ 5 „ . .	144	205	
„ 8 „ . .	186	212	
„ 12 „ . .	212	341	$\frac{K \text{. finale s. a.}}{K \text{. iniziale s. a.}} = \frac{559}{75} = 7.4$
„ 24 „ . .	286	396	
„ 48 „ . .	410	559	

(1) Tomellini, " Archivio di farmacologia sperimentale e Scienze affini ", vol. XII, pag. 217.

(2) Hamburger, *Osmotischer Druk und Jonenlehre*, I.

Nell'esperienza seguente i semi di controllo non erano stati rigonfiati in acqua: questo ad evitare il dubbio che una prolungata immersione di essi nell'acqua, come avviene in queste esperienze, potesse provocare in essi se non la morte almeno dei disturbi di una certa gravità.

	$K \times 10^{-6}$ a $+25°$		
	Semi sani	Semi avvelenati	
Inizio	14	17	
Dopo 2 ore . .	55	136	$\frac{K \text{. finale s. s.}}{K \text{. iniziale s. s.}} = \frac{323}{14} = 23$
„ 4 „ . .	68	186	
„ 8 „ . .	94	219	
„ 12 „ . .	195	256	$\frac{K \text{. finale s. a.}}{K \text{. iniziale s. a.}} = \frac{455}{17} = 26$
„ 24 „ . .	212	292	
„ 48 „ . .	323	455	

Come è facile a vedersi dalle su riportate tabelle, i semi cedono con facilità elettroliti all'acqua distillata in cui stanno immersi, siano essi stati avvelenati o no.

Si può osservare pure che il rapporto fra la conducibilità finale e quella iniziale è maggiore nelle esperienze con l'acqua contenente i semi avvelenati; ma di fronte al forte aumento della conducibilità che presenta anche l'acqua contenente i semi sani, non parmi che si possa da queste differenze trarre alcun elemento di giudizio sulla vitalità o sulla morte dei semi.

Il fatto tuttavia della facilità con cui i semi sani cedono elettroliti all'acqua è degno di essere qui rilevato e non è suscettibile per ora di una spiegazione plausibile: la cosa merita certo di essere ulteriormente e profondamente studiata.

Riuscito vano questo tentativo di dimostrare la morte del protoplasma nei semi avvelenati, io ho voluto verificare se le cellule dell'embrione di questi semi potessero colorarsi trasportate nella soluzione di bleu d'anilina. Le sezioni microscopiche dell'embrione venivano perciò lasciate per $^1/_4$ d'ora nella soluzione della materia colorante; dopo di che venivano lavate in acqua distillata ed osservate al microscopio. Su una cinquantina

di sezioni provenienti ognuna da un seme avvelenato io ho portato il mio esame: ma in nessuna di esse le cellule apparvero colorate. Il protoplasma dei semi rimasti 48 ore immersi nel succo deve adunque considerarsi ancora vivente.

II.

L'azione tossica ed antitossica dei sali è stata ripetutamente osservata non solo sugli animali ma pure sui vegetali; anche per le piante esistono *soluzioni isofisiologiche* (*physiologisch ausgeglichene Lösungen*, dei tedeschi) e soluzioni nutritizie (*nährende Lösungen*). Primo il Loew dimostrò che l'azione dannosa di un eccesso di sali di Magnesio sulle piante può essere annullata per l'aggiunta di sali di Calcio ed inversamente. Ma più estese cognizioni al riguardo noi dobbiamo all'Osterhout il quale ha dimostrato che l'azione antagonistica dei sali è d'impiego generale per le piante così come per gli animali. Mentre ad esempio le zoospore di *Vaucheria sessilis* vivono da tre a quattro settimane nell'acqua distillata, esse muoiono in pochi minuti quando siano immerse in una soluzione $^3/_{32}$ mol. di NaCl. L'aggiunta di $MgCl_2$, $MgSO_4$, KCl, nelle proporzioni in cui questi sali entrano nella soluzione del Van t'Hoff, non prolunga gran che la vita delle spore; ma l'aggiunta di 10 cm^3 di una sol. $^3/_{32}$ mol. di $Ca\,Cl_2$ ad un litro di soluzione $^3/_{32}$ mol. Na Cl, sopprime completamente l'azione tossica di quest'ultimo sale, e permette alle spore di vivere in questa soluzione così a lungo come nell'acqua distillata.

Fatti analoghi l'Osterhout ha osservato sperimentando sulla *Ruppia maritima*, sul *Triticum vulgare*: mentre ognuno dei seguenti sali KCl, NaCl, $CaCl_2$, $MgCl_2$, $MgSO_4$ esplica da solo una decisa azione tossica, poteva il miscuglio di alcuni di essi o di tutti nella proporzione in cui entrano nella soluzione del Van t'Hoff fornire una soluzione isofisiologica.

Altre esperienze sull'azione antagonistica dei sali sui vegetali dobbiamo a Benecke, a Micheels e ad altri (1).

---

(1) Asher und Spiro, *Ergebnisse der Physiologie*, X, pag. 340 e seg.

Ora il succo spremuto dai semi germinanti di *Zea mais*, come del resto anche quello spremuto da altri semi, presenta una conducibilità elettrica discretamente elevata, poco inferiore a quella ad esempio del sangue: questa conducibilità attesta la presenza di ioni liberi nei succhi. Non mi è quindi parso privo di interesse indagare se un assorbimento di elettroliti abbia luogo per parte dei semi quando essi vengono posti a rigonfiare nel succo, ed in caso positivo verificare se all'entrata di questi elettroliti nelle cellule dell'embrione potesse ascriversi una qualche azione dannosa, dovuta all'azione antagonistica che qualcuno di questi elettroliti potesse esercitare su quelli contenuti nelle cellule stesse.

Io non ho creduto di procedere alla determinazione dell'acidità ionica dei succhi, dacchè questa deve naturalmente essere di poco elevata, dovendosi la loro acidità attribuire alla presenza di acidi organici deboli: d'altra parte si sa che agli idrogenioni compete una funzione speciale e favorevole sullo sviluppo dei semi e che gli acidi entro certi limiti di concentrazione accelerano la germinazione.

A constatare un assorbimento di elettroliti del succo per parte dei semi l'unica via a me aperta — data la complessità della composizione del succo — era quella di seguire le variazioni della conducibilità elettrica del succo stesso in cui stanno immersi dei semi: evidentemente se assorbimento avesse luogo questo dovrebbe manifestarsi con una diminuzione della conducibilità.

A questo scopo N. 20 semi di mais, lavati come già è stato detto precedentemente, si immergono in 20 cm^3 di succo: come controllo si segue pure il modificarsi della conducibilità in altri 20 cm^3 di succo solo. La temperatura del termostato in cui si facevano le misurazioni ed in cui venivano tenuti i liquidi fra una determinazione e l'altra era di $+ 25^\circ$.

Prova N. 1.

	$K \times 10^{-4}$ a + 25°	
	Succo solo	Succo + semi
Inizio	51	49
Dopo 1 ora . .	51	49
„ 4 ore . .	52	51
„ 6 „ . .	52	51
„ 12 „ . .	56	55
„ 24 „ . .	55	55
„ 36 „ . .	55	61
„ 48 „ . .	61	68

Prova N. 2.

	$K \times 10^{-4}$ a + 25°	
	Succo solo	Succo + semi
Inizio	49	49
Dopo 1 ora . .	49	49
„ 2 ore . .	51	51
„ 5 „ . .	52	55
„ 10 „ . .	51	55
„ 24 „ . .	52	61
„ 48 „ . .	55	64

Come risulta facilmente dalle su esposte tabelle, non si hanno differenze sostanziali nella conducibilità del succo solo e di quello in cui stanno immersi i semi. In tutti e due si osservano variazioni, ma queste sono indubbiamente dovute a fenomeni autolitici, per cui nei succhi si liberano altri elettroliti; la conducibilità di conseguenza aumenta e maggiormente nel succo in cui stanno immersi i semi: avviene qui precisamente l'opposto di quanto si sarebbe aspettato. Questo aumento può essere dovuto al fatto che dai semi diffondono nel succo enzimi i quali aiutano ed accelerano in esso i fenomeni autolitici, o

può questo aumento essere dovuto ad una diffusione di sali dai semi nel succo. Nell'un caso e nell'altro non si ha assorbimento di sali per parte dei semi; o se un assorbimento può aver luogo, questo viene sopraffatto dal fenomeno inverso. È di conseguenza poco probabile che in questo stato di cose possa aversi un antagonismo fra i sali del succo e quelli dei semi.

III.

Io ho infine rivolto il mio studio a ricercare se nei semi avvelenati coi succhi potesse l'azione di questi provocare un abbassamento nell'attività dei vari enzimi contenuti nei semi stessi, sia uccidendoli, sia creando condizioni sfavorevoli allo sviluppo della loro attività, sia anche provocando delle modificazioni del protoplasma tali che questo abbia a perdere la capacità di fabbricarli. Per ricerche così delicate occorreva naturalmente — ad escludere ogni causa di errore — abbandonare nella preparazione degli enzimi ogni operazione che potesse già di per sè provocare modificazioni nell'attività loro.

Per questo io immergevo 50 semi di mais scelti fra i migliori nel succo durante 48 ore a $+ 25°$. Altri 50 semi (aventi lo stesso peso complessivo dei 50 precedenti) si facevano rigonfiare in acqua distillata durante lo stesso periodo di tempo. Dopo di che i semi venivano lavati, asciugati fra carta da filtro, e triturati: la poltiglia era allora posta a digerire per 36 ore in 50 cm^3 d'acqua glicerinizzata (2 vol. di acqua, 1 vol. di glicerina).

In seguito si filtrava e l'estratto così ottenuto, perfettamente limpido, era adoperato senz'altro alla determinazione delle varie attività enzimatiche.

Catalase. — Si prepara una soluzione $\frac{50}{\text{mol.}}$ di perossido di idrogeno puro Merk; 5 cm^3 di questa soluzione si addizionano di 2 cm^3 di estratto (1) e si pone il miscuglio in termostato a $+ 40°$. Dopo qualche tempo il liquido viene diluito con acqua,

(1) In questa come in tutte le altre prove che seguono si aggiungono ai liquidi come antisettico alcune goccie di cloroformio.

acidulato con acido solforico, ed in esso si dosa con una soluzione $\frac{N}{50}$ di permanganato potassico il perossido non decomposto.

Ossidase + perossidase. — A 5 cm³ di estratto si aggiungono 25 cm³ di una sol. di pirogallolo 4 % in acqua, 5 cm³ di sol. di H_2O_2 (3.6 %). Il miscuglio viene posto in termostato: dopo 24 ore si raccoglie su filtro tarato il precipitato di purpurogallina formatosi; si lava, si secca e si pesa.

Amilase. — A 2 cm³ di estratto si aggiungono 5 cm³ di salda d'amido 1 % e 10 cm³ di acqua. Dopo 15 ore di permanenza dei liquidi in termostato si titola in essi lo zucchero riduttore formatosi col noto metodo del Bertrand. Naturalmente dal valore ottenuto si deduce la quantità di glucosio preesistente nei 2 cm³ d'estratto impiegati.

Invertase. — A 2 cm³ di estratto si aggiungono 5 cm³ di sol. di saccarosio 5 %, 5 goccie di acido acetico diluito e 10 cm³ di acqua. Dopo 15 ore di permanenza dei liquidi in termostato si titola in essi gli zuccheri riduttori formatisi. Si deduce naturalmente dal valore trovato quello del glucosio preesistente nell'estratto.

Protease. — A 2 cm³ di estratto si aggiungono 5 cm³ di acqua, 1 goccia di ac. cloridrico diluito ed un fiocco di fibrina colorata al carminio. Si nota dopo quale tempo i liquidi si colorino in rosso e si abbia la scomparsa della fibrina.

Peptase. — A 2 cm³ di succo si aggiungono 5 cm³ di soluzione di Peptone Witte 5 %: si nota dopo quale tempo si riscontri nei liquidi la presenza del triptofano con la reazione dell'acqua di Bromo.

Lipase. — A 2 cm³ di estratto si aggiungono 5 cm³ di latte, $^1/_2$ cm³ di tintura di tornasole: si osserva dopo quale periodo di tempo si abbia arrossamento dei liquidi.

Riporto ora i risultati delle esperienze.

Estratti 1ª serie.

Catalase. — $KMnO_4$ $\frac{N}{50}$ consumato in cm^3:

	Inizio	Dopo 1/4 d'ora	Dopo 1/2 ora	Dopo 1 ora
Estratto s. s. (1) . .	16.8	1.7	1.1	0.4
„ s. a. (1) . .	17.8	9.8	7.5	4.0

Ossidase + perossidase. — Purpurogallina ottenuta:

Estratto s. s. . . . . gr. 0.080
„ s. a. . . . . „ 0.058

Amilase. – Glucosio formatosi:

Estratto s. s. . . . . gr. 0.009
„ s. a. . . . . „ 0.019

Invertase. — Glucosio:

Estratto s. s. . . . . gr. 0.013
„ s. a. . . . . „ 0.004

Protease. — Non si osserva colorazione del liquido nè dissoluzione del fiocco di fibrina nemmeno dopo 48 ore.

Peptase. — Non si ha per aggiunta di acqua di Br. a piccole porzioni di liquido reazione alcuna dopo 48 ore.

Lipase. — Non si osserva arrossamento del liquido dopo 24 ore.

Estratti 2ª serie.

Catalase. — $KMnO_4$ $\frac{N}{50}$ consumato in cm^3:

	Inizio	Dopo 1/4 d'ora	Dopo 1/2 ora	Dopo 1 ora
Estratto s. s. . .	15.6	3.0	1.0	0.9
„ s. a. . .	16.5	8.6	5.2	3.2

(1) Con s. s. si indicano i semi sani e con s. a. i semi avvelenati.

Ossidase + perossidase. — Purpurogallina formatasi:

Estratto s. s. . . . gr. 0.0068
„ s. a. . . . „ 0.0040

Amilase. — Glucosio formatosi:

Estratto s. s. . . . gr. 0.004
„ s. a. . . . „ 0.002

Invertase. — Glucosio formatosi:

Estratto s. s. . . . gr. 0.007
„ s. a. . . . „ 0.008

Protease. — Assenza di reazione dopo 48 ore.
Peptase. — Nessuna reazione dopo 48 ore.
Lipase. — „ „ „ 24 „

Estratti 3ª serie.

Catalase. — $KMnO_4$ $\frac{N}{50}$ consumato in cm^3:

	Inizio	Dopo $^1/_4$ d'ora	Dopo $^1/_2$ ora	Dopo 1 ora
Estratto s. s. . .	16.2	5.0	1.2	0.8
„ s. a. . .	17.6	12.0	8.6	6.0

Ossidase + perossidase. — Purpurogallina formatasi (1):

Estratto s. s. . . . gr. 0.0120
„ s. a. . . . „ 0.0090

Amilase. — Glucosio trovato:

Estratto s. s. . . . gr. 0.002
„ s. a. . . . „ 0.002

Invertase. — Glucosio trovato:

Estratto s. s. . . . gr. 0.005
„ s. a. . . . „ 0.009

Protease. — Nessuna reazione.
Peptase. — „ „
Lipase. — „ „

(1) Per questo saggio si sono adoperati rispettivamente 10 cm^3 di estratto.

I risultati ottenuti esperimentando ancora su due altri estratti (e che qui per brevità ometto) furono del tutto analoghi ai precedenti. Da essi non può trarsi alcuna deduzione su possibili modificazioni che le varie attività (proteolitica, lipasica, amilolitica, invertiva e maltasica) dei semi avvelenati subiscano in paragone di quelli sani. Mancano infatti negli estratti — nelle condizioni delle mie esperienze — protease, peptase e lipase (1) e forse anche maltase ed invertase, o se questi due ultimi enzimi sono presenti, la loro azione è pressochè nulla. Si può invece in essi dimostrare con tutta facilità la presenza dell'amilase: se agli estratti si aggiunge della salda d'amido e si saggiano i liquidi con l'acqua di Jodo, si nota già dopo poche ore la scomparsa della colorazione bleu del ioduro d'amido: non si riesce invece nemmeno dopo 48 ore di permanenza dei liquidi in termostato a far scomparire la reazione della destrina con l'acqua di Jodo.

Un fatto invece costantemente da me osservato è quello della notevole diminuzione delle attività catalitiche ed ossidasiche negli estratti provenienti dai semi avvelenati in confronto degli estratti ottenuti dai semi sani.

Riunisco nella seguente tabella i risultati ottenuti, in cui sono dati anche i risultati di 2 altre esperienze.

Catalase. — $KMnO_4$ $\frac{N}{50}$ consumato in cm^3:

		Inizio	Dopo $^1/_4$ d'ora	Dopo $^1/_2$ ora	Dopo 1 ora
Serie 1ª	s. s. . .	16.8	1.7	1.1	0.4
	s. a. . .	17.8	9.8	7.5	4.0
" 2ª	s. s. . .	15.6	3.0	1.0	0.9
	s. a. . .	16.5	8.6	5.2	3.2
" 3ª	s. s. . .	16.2	5.0	1.2	0.8
	s. a. . .	17.6	12.0	8.6	6.0
" 4ª	s. s. . .	19.7	7.2	4.0	1.6
	s. a. . .	19.0	16.4	13.2	9.3
" 5ª	s. s. . .	18.2	8.2	3.6	1.0
	s. a. . .	17.6	11.8	9.0	7.2

(1) Con l'applicazione di altri metodi — che però male rispondevano agli scopi delle presenti ricerche — non è difficile dimostrare nei semi di mais la presenza di tutti questi enzimi.

Ossidase + perossidase. — Purpurogallina ottenuta:

		Serie 1ª	Serie 2ª	Serie 3ª	Serie 4ª	Serie 5ª
s. s.	gr.	0.0080	0.0068	0.0120	0.0050	0.0050
s. a.	„	0.0058	0.0040	0.0090	0.0050	0.0032

***

Risulta così dimostrato che l'azione tossica dei succhi espressi dai semi germinanti di *Zea mais* su semi di *Zea mais* consiste — almeno in parte — nella diminuzione (diminuzione che forse nei semi i quali hanno perduta la germinabilità potrebbe spingersi fino alla soppressione) delle attività ossidasiche e catalitiche.

Potrebbe darsi che questa diminuzione di attività non riguardi solo l'ossidase e la catalase, ma che si estenda pure a tutti gli altri enzimi contenuti nei semi: è cosa questa che merita di essere ulteriormente studiata, ed io spero di poter tornare presto sull'argomento, riprendendo le ricerche con metodi più delicati di quelli ora applicati. Tuttavia bastano i fatti accertati da queste esperienze a spiegarci in parte l'azione tossica di questi succhi.

Poichè è evidente che agli enzimi ossidanti e catalitici compete nei fenomeni vitali una funzione non secondaria. Noi ignoriamo purtroppo ancora quasi completamente quale sia questa funzione, e su quali sostanze negli organismi s'eserciti questa funzione: di tutte le ipotesi poste innanzi a questo riguardo nessuna è ancora suffragata da fatti positivi. Ma sia che a questi enzimi spetti una semplice protezione contro l'azione dannosa dei perossidi o dei composti che essi ossidano (Portier), sia che essi prendano veramente parte ai fenomeni della respirazione (Palladin, Bertrand), la loro importanza può ben dedursi dal fatto che essi sono largamente sparsi in tutti gli organismi vegetali ed animali.

Indubbiamente quindi la soppressione, od anche solo la diminuzione dell'attività di questi enzimi deve produrre dei

danni non facilmente reparabili per la cellula e per l'organismo intero.

*
* *

Le conclusioni del presente lavoro possono essere le seguenti:

1° I succhi espressi da semi germinanti di *Zea mais* non costituiscono un veleno protoplasmatico per i semi di *Zea mais*;

2° L'azione tossica dei succhi sui semi non pare debba ascriversi ad azioni antagonistiche fra i sali dei succhi e quelli dei semi, dacchè non pare che un assorbimento di sali abbia luogo per parte dei semi dal succo;

3° Nei semi avvelenati coi succhi si nota una notevole diminuzione delle attività catalitiche ed ossidasiche in confronto dei semi sani.

Torino. Laboratorio di Materia medica e Jatrochimica
dell'Università.

Intorno ad un lavoro del Principe Carlo Luciano Bonaparte.

Nota del Socio T. SALVADORI.

Nel volume nono della *Rivista Contemporanea*, fascicolo quarantesimo, ed alle pagine 209-217 (febbraio 1857), si trova un lavoro di Carlo Luciano Principe Bonaparte, intitolato " Parallelismo fra le tribù dei Cantori Fissirostri e quella dei Volucri hianti e dei Notturni ovvero insidenti ". In questo lavoro vi è un elenco dei generi e delle specie delle quattro famiglie: *Hirundinidae*, *Cypselidae*, *Steatornithidae* e *Caprimulgidae*.

Questo lavoro, per la rarità del volume nel quale fu publicato, non si trova mai citato dai sistematici, colla sua paginazione originale, ma soltanto con quella dell'estratto. Questa cosa mi è stata fatta notare recentemente da C. W. Richmond dell'Istituto Smithsoniano di Washington, il quale mi ha scritto pregandomi di verificare la paginazione originale del lavoro del Bonaparte nella *Rivista Contemporanea*.

In tre delle famiglie, contenute nel lavoro del Bonaparte, si trovano compresi taluni generi nuovi, i quali, per la ragione suddetta, non vengono citati in modo esatto e taluni sono rimasti al tutto ignorati.

Questa cosa è avvenuta anche nel diligente lavoro del Waterhouse, intitolato: *Index Generum Avium*.

Nella famiglia delle *Hirundinidae* furono proposti dal Bonaparte i seguenti nuovi generi:

Hemicecrops Bp. Riv. Contemp. IX, p. 210, gen. 4 (1857).
Pristoptera Bp. l. c. gen. 6.

Questi due nomi si trovano debitamente annoverati nella Bibliografia premessa alla Monografia delle *Hirundinidae* dello Sharpe e del Wyatt (pag. LVII), il primo sotto la forma (corretta?) di *Hemicecropis*, ma sempre colla paginazione dell'estratto.

Lo Sharpe (l. c.) annovera anche il genere *Phedina* fra quelli fondati dal Bonaparte nella *Rivista Contemporanea*, ma a lui è sfuggito che il genere *Phedina* non prende data dalla *Rivista Contemporanea* nel 1857, ma dal volume XLI dei *Comptes Rendus* nel 1855.

Al genere *Hemicecrops* Bonaparte attribuisce le seguenti specie:

Hemicecrops dimidiata (Sund.) Bp. l. c. p. 210, n. 18 (= *Hirundo dimidiata*).
„ *scapularis* (Cass.) Bp. l. c. n. 19 (= *H. dimidiata*).
„ *leucosoma* (Sw.) Bp. l. c. n. 20 (= *H. leucosoma*).
„ *griseopyga* (Sund.) Bp. l. c. n. 21 (= *H. griseopyga*).
„ *atrocacyanea* (Sund.) Bp. l. c. n. 22.
„ ? *semirufa* (Sund.) Bp. l. c. n. 23 (= *H. semirufa*).

La specie n. 22 è indicata col nome specifico *atrocacyanea* Sund., nome evidentemente errato, forse invece di *Hirundo atrocaerulea* Sund., che il Bonaparte non menziona.

Nel genere *Pristoptera* il Bonaparte annoverò una unica specie, la *Hirundo pristopera* Rüpp., alla quale, per evitare l'eufemismo, dette il nome di *Pristoptera typica* Bp., Riv. Contemp., p. 210, n. 29 (1857).

Anche il genere *Phedina* è annoverato dal Bonaparte nel lavoro citato colle tre specie:

Phedina borbonica (Gm.) Bp. l. c. p. 210, n. 32 (1857).
„ *spilodera* (Sund.) Bp. l. c, n. 33 (= *Petrochelidon spilodera*).
„ *subfusca* (Gould) Bp. l. c. n. 34 (= *Hirundo tahitica* Gm.),

ma esso era già stato fondato dal Bonaparte nel 1855 (Compt. Rend. XLI, p. 977).

Oltre ai due generi suddetti (*Hemicecrops* e *Pristoptera*) il Bonaparte nel suo lavoro creò anche il nuovo genere *Tapera* Bp.

l. c. p. 211, gen. 11 (1857) col tipo *Hirundo pascuum* Neuw. (= *Hirundo Tapera* Linn.).

Nel genere *Tapera* sono annoverate dal Bonaparte le seguenti specie:

Tapera pascuum (Wied) Bp. l. c. p. 211, n. 40 (1857) (= *Hirundo tapera* Linn.).
„ *cyanoleuca* (Vieill.) Bp. l. c. p. 211, n. 41 (= *Atticora cyanoleuca*).
„ *melanoleuca* (Wied) Bp. l. c. n. 42 (= *Atticora melanoleuca*).
„ *leucoptera* (Gm.) Bp. l. c. n. 43 (= *Tachycineta albiventris* Bodd.).
„ *maculosa* (Kuhl) Bp. l. c. n. 44 (= ? *T. maculata* Bodd.).
„ *patagonica* (Orb.) Bp. l. c. n. 45 (= *Atticora cyanoleuca*).
„ *leucorrhoa* (Vieill.) Bp. l. c. n. 46 (= *Tachycineta leucorrhoa*).
„ *leucopyga* (Meyen) Bp. l. c. n. 47 (= *T. meyeni* Bp.).

Il genere *Tapera* Bp., sebbene menzionato dal Waterhouse (op. cit., p. 218), è stato ommesso dallo Sharpe, tanto nel " Catalogue of Birds „, vol. IX, nel quale sono annoverate le Rondini, quanto nella Monografia citata.

Il genere *Tapera* Bp. è equivalente in parte a *Phaeprogne* Baird, Rev. Am. B. p. 283 (1864), ed in parte a *Tachycineta* Cab. e ad *Atticora* Boie. Ad ogni modo non potrebbe essere usato perchè già proposto dal Thunberg nel 1819 (*Götheborg. Vet. o. Vitt. Nya Handl.* D. 3, pp. 1-6) (1).

Nella famiglia delle *Cypselidae* il Bonaparte, nel lavoro menzionato, proponeva i due seguenti nuovi nomi generici:

Achantylops Bp. l. c. p. 212, gen. 2 (1857).
Pallenia Bp. l. c. p. 212, gen. 3 (1857).

(1) Il genere *Tapera* Thunb. è sinonimo di *Diplopterus* Boie, Isis, 1826, p. 977, ed ha la priorità. Nella recente opera di Lord Brabourne e Charles Chubb, *The Birds of South America*, a pag. 153, il genere *Tapera* è attribuito al Billberg colla data 1828.

Il primo nome è citato dal Waterhouse (op. cit., p. 2), ma non dallo Hartert, nè nel " Catalogue of Birds ", vol. XVI, nè nella Monografia delle *Macropterigidae* (nel Thierreich).

Cosa il Bonaparte intendesse col genere *Achantylops* non è facile dire, giacchè ad esso non segue alcun nome di specie. Non è improbabile che ciò sia avvenuto per un errore di stampa e che la prima specie annoverata nel genere seguente, *Pallenia*, cioè il *Cypselus senex* Temm., dovesse invece seguire il nome *Achantylops*. È anche possibile che quel nome stia invece di *Achantylis* Boie, rectius *Acanthillis* (cf. Agassiz, *Index Univers.* p. 3, 1846. — Newton, Pr. Zool. Soc. 1880, p. 2).

Il genere *Pallenia*, che il Bonaparte adopera nel lavoro citato, sembra una semplice modificazione di *Pallene* Less. Compl. de Buff. VIII, p. 493 (1837). Ad ogni modo esso avrebbe dovuto essere citato nei lavori dello Hartert intorno alle *Cypselidae*.

Le specie comprese dal Bonaparte nel genere *Pallenia* sono le seguenti:

Pallenia senex (Temm.) Bp. l. c. p. 212, n. 5 (1857) (= *Cypseloides senex*).
" *gigantea* (Temm.) Bp. l. c. n. 6 (= *Chaetura gigantea*).
" *fusca* (Shaw) Bp. l. c. n. 7 (*Chaetura caudacuta* (Lath.)).
" *nudipes* (Hodgs.) Bp. l. c. n. 8 (= *Chaetura nudipes*).

Infine nella famiglia delle *Caprimulgidae* il Bonaparte, nel lavoro citato, introdusse per la prima volta i due seguenti nomi generici:

Ramphaoratus Bp. l. c. p. 215, gen. 9 (1857)
Capripeda Bp. l. c. p. 215, gen. 23 (1857)

laddove i generi *Nyctiphrynus* e *Nyctiprogne*, pure del Bonaparte, erano stati menzionati da lui in un altro lavoro precedente, nel *Conspectus systematis Ornithologiae* (Ann. Sc. Nat., Zool. (4) 1, p. 139, 1854), ma nella *Rivista Contemporanea* egli ne fissò i tipi.

Questi nomi sono esattamente citati dal Waterhouse (op. cit.),

ma quello di *Capripeda* viene dal medesimo attribuito al Verreaux sulla fede del Gray (*Hand-l.* I, n. 180), laddove ciò era avvenuto per opera dello stesso Bonaparte.

Il genere *Ramphaoratus* Bp. (rectius *Rhamphaoratus*) non è menzionato dallo Hartert nei due lavori citati (*Cat. of Birds*, XVI e *Thierreich*, I); esso avrebbe per tipo il *R. truncatus* Bp., che si conservava nel Museo Britannico, ma che non è stato rintracciato dallo Hartert, che non ne fa alcuna menzione. Dalla Sinonimia citata dal Bonaparte pare che il *R. truncatus* Bp. sia identico col *Caprimulgus labeculatus* Jard. Ann. and Mag. N. H. 1846, p. 118 (= *Chordeiles acutipennis* Bodd.).

Nello stesso genere *Ramphaoratus* il Bonaparte annoverava il *Caprimulgus exilis* Less. Rev. Zool. 1839, p. 44 (= *Caprimulgus pruinosus* Tsch. Wiegm. Arch. 1844, I, p. 268).

Il genere *Nyctiphrynus* (già menzionato dal Bonaparte nel 1854) ha per tipo il *Caprimulgus ocellatus* Tsch. (Bp. Riv. Contemp. IX, p. 215, n. 41 (1857)) ed il genere *Nyctiprogne* (pure menzionato dal Bonaparte nel 1854) ha per tipo il *Caprimulgus leucopygius* Spix (Bp. Riv. Contemp. IX, p. 215, n. 50).

Finalmente il genere *Capripeda*, che ha per tipo il *Caprimulgus natalensis* Smith, viene dal Bonaparte attribuito al Verreaux, il quale non pare che lo abbia pubblicato; esso non è menzionato dallo Hartert ed anche al Waterhouse è sfuggita la originale citazione del Bonaparte. La esatta citazione della specie tipica nel lavoro del Bonaparte è la seguente:

Capripeda natalensis (Smith) Bp. Riv. Contemp. IX, p. 215, n. 100 (1857).

Torino, Museo Zoologico, Gennaio 1914.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Febbraio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Stampini, Sforza, Baudi di Vesme e De Sanctis in funzione di Segretario. Scusano l'assenza i Soci Renier, Ruffini ed Einaudi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 18 gennaio 1914.

Il Presidente comunica i ringraziamenti dei professori Silva e Tamassia pel premio Gautieri ad essi conferito e del commendatore Fiorini pel premio Bressa assegnato alla nuova edizione da lui diretta dei *Rerum Italicarum Scriptores*.

Il Socio Stampini presenta con parole di encomio il volume degli scritti latini di R. Biagini edito in Lucca (1912) a cura dei professori di quel Seminario.

Costituitasi quindi la Classe in seduta privata procede a scrutinio segreto alla nomina dei tre membri componenti la Commissione pel conferimento del premio Gautieri di Letteratura (triennio 1911-13). Risultano eletti i Soci Renier, Stampini e Sforza.

Vengono inoltre confermati per un triennio i Soci Carle e Sforza come rappresentanti della Classe nel Consiglio di Amministrazione dell'Accademia.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Febbraio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe NACCARI, ed i Soci D'OVIDIO, PEANO, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI e SEGRE, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio SOMIGLIANA.

Vien letto ed approvato il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica:

1° La partecipazione della morte, avvenuta il 20 gennaio scorso, del nostro Corrispondente ROSENBUSCH, il quale apparteneva all'Accademia fin dal 1876. Furono già inviate le condoglianze alla vedova.

2° Una copia conforme di R. Decreto 21 dicembre 1913 col quale fu approvata la rielezione del Socio SEGRÈ a Segretario della Classe per il triennio dal 16 novembre 1913 a tutto il 15 novembre 1916.

3° Un invito della Società Reale di Edimburgo a prender parte ad un congresso e ad una pubblicazione, da farsi per sottoscrizione pubblica, nel luglio prossimo, in Edinburgh, per celebrare il tricentenario dell'invenzione dei logaritmi dovuta a Napier.

Il Socio PARONA presenta in omaggio due volumi su *La Tripolitania settentrionale*, pubblicati dalla Commissione per lo

studio agrologico della Tripolitania, da lui presieduta. — Similmente il Socio Fusari offre, a nome del prof. B. Morpurgo, Direttore dell'Istituto di Patologia generale nell'Università di Torino, due volumi di lavori compiuti dal 1903 al 1913 in quell'Istituto.

Il Socio Grassi offre in dono alla Biblioteca accademica un secondo esemplare della preziosa ristampa della celebre Memoria di Pacinotti, *Descrizione di una macchinetta elettro-magnetica*, che già era stata presentata alla Classe, per incarico dell'Associazione elettrotecnica italiana, nell'adunanza del 27 aprile 1913.

Il Socio Guareschi presenta, per la stampa negli *Atti*, una sua 1ª Nota di *Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con* $2H^2O$; ed il Socio Fileti una Nota di G. Charrier ed L. Casale, *Sugli ortoossiazocomposti derivanti dall'* α*-naftol*, ed una di G. Ferreri, *Su alcuni eteri di naftilen-n-ossifeniltriazoli.*

Il Socio D'Ovidio offre, pei volumi accademici, una Memoria di G. Sannia, *Caratteristiche multiple delle equazioni lineari alle derivate parziali in due variabili.* Si dà l'incarico di riferire intorno ad essa ai Soci D'Ovidio e Somigliana.

Infine il Socio Camerano presenta, pure per la stampa fra le *Memorie*, la Parte seconda delle sue *Ricerche intorno ai Camosci. Camoscio delle Alpi.* Essa viene accolta dalla Classe con votazione unanime.

Costituitasi quindi la Classe in seduta privata, si procede alla votazione per la elezione del Direttore della Classe, essendo scaduto il Socio Naccari per compiuto sessennio. Riesce eletto il Socio D'Ovidio, salvo l'approvazione Sovrana.

Inoltre si procede alla nomina del rappresentante della Classe nella Commissione per la biblioteca accademica, per compiuto triennio del Socio Mattirolo. Rimane confermato per un nuovo triennio lo stesso Socio Mattirolo.

LETTURE

Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con $2H^2O$.

Nota I del Socio I. GUARESCHI.

I.

Introduzione.

In uno dei miei lavori sui bromuri (1) ho fatto cenno dello stato dell'acqua di cristallizzazione e dei modi di determinarla.

La questione riguardante lo stato dell'acqua nei cristalli, o come suol dirsi di cristallizzazione, ha una importanza grande, anche per il fatto che si è voluto connettere lo stato dell'acqua di cristallizzazione nei sali colla costituzione molecolare dell'acqua stessa, cioè se l'acqua esiste nei cristalli allo stato di molecole multiple.

Io ho avuto occasione di determinare l'acqua di cristallizzazione in molti sali, particolarmente in molti bromuri metallici, ed ho quindi dovuto occuparmi della relativa bibliografia. Allora mi sono avveduto di molti errori in cui sono caduti non pochi chimici.

È un argomento molto spinoso, certamente; i dati sperimentali che si hanno sono, spessissimo, assai discordanti, ed in molti Trattati di Chimica, del resto anche pregevoli, e così pure in memorie originali, si trovano molti e molti errori riguardo l'acqua di cristallizzazione. Di questo argomento ho dovuto occuparmi varie volte; anche a proposito di sali rameici notai, già da molti anni, che alcuni di questi in am-

(1) I. Guareschi, *Ricerche intorno ai bromuri*. Nota V in " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1913, t. 48, p. 931.

biente secco, o nel vuoto, cambiano di colore e perdono l'acqua che poi ricuperano insieme al colore primitivo stando all'aria. Così pure da lungo tempo notai che certe sostanze, non cristallizzate, perdono la loro acqua nel vuoto, in gran parte, e poi la ricuperano stando all'aria; tale è il caso delle farine, degli amidi, ecc.

A me pare prematuro il discutere intorno allo stato dell'acqua nei cristalli, il trarre delle regole generali intorno alla sua eliminazione ed anche alle relazioni che vi possono esistere col numero delle molecole d'acqua, ecc., come hanno invero fatto alcuni chimici basandosi su dei dati incerti, discordanti o incompleti. Per la grande maggioranza dei composti chimici contenenti acqua di cristallizzazione, siano salini o no, siano inorganici od organici, le osservazioni fatte sino ad ora sono assai imperfette, tanto relativamente alla temperatura quanto alla pressione, al tempo ed altre condizioni in cui l'acqua si elimina.

Quasi sempre nei sali molto idrati, e specialmente secondo le vecchie esperienze, si è determinata l'acqua di cristallizzazione scaldando il sale direttamente alla temperatura di fusione, o anche superiore, e, come suol dirsi, *fusione acquosa*; ma in questi casi si può incorrere in errori gravi, sia perchè il sale se è ad acido volatile può per idrolisi perdere in parte l'acido, sia perchè il sale in fusione nella propria acqua non è nelle condizioni normali del composto solido e le molecole dell'acqua possono cambiare orientamento relativamente al sale anidro. È quindi meglio in ogni caso saggiare le varie temperature sino a coglier quella in cui comincia a eliminarsi l'acqua. Come confronto poi si può determinare l'acqua alla temperatura alla quale il sale fonde, o, come spesso si è fatto, a 100°.

Nella numerosa bibliografia riguardante l'acqua di cristallizzazione si trovano sparsi qua e là dei dati sperimentali interessanti, ma non sono lavori, come suol dirsi, d'insieme.

A cagion d'esempio il Mallet nel 1882 (1) determinò il numero delle ore necessarie per eliminare ognuna delle 19 molecole

(1) " Jahresb. f. Chem. ", 1882, p. 277.

che si staccano dall'allume ammoniacale quando lo si lasci a 20°-27° sull'acido solforico. Così pure il Mulder (1) relativamente alla perdita d'acqua dell'allume ordinario a varie temperature. Ma in generale questi lavori non furono tenuti in considerazione. Sono tutti fatti staccati che meritano di essere riuniti e coordinati secondo un punto di vista generale.

Non è indifferente il modo di determinare la maggiore o minore facilità di eliminarsi delle molecole d'acqua; varia molto colle condizioni diverse. Per trarre qualche conclusione sullo stato dell'acqua di cristallizzazione bisogna eseguire un lavoro metodico molto lungo su ciascun composto. Fa d'uopo cioè determinare l'acqua: 1° in termostati a temperature gradatamente crescenti da 30°....., 40°....., 50°, ecc.; 2° in istufe a vapore di liquidi bollenti a temperatura costante; 3° lasciando il sale in disseccatore a cloruro di calcio, o ad acido solforico od anche ad anidride fosforica; 4° sull'acido solforico e a pressione ridotta; 5° in termostato solo, od entro disseccatore (2); 6° in stufe a pressione ridotta e a temperatura costante; 7° scaldando il sale a temperatura gradatamente crescente e in corrente di aria o di altro gas secco.

Talora pure non è indifferente determinare prima l'acqua in un modo e poi in un altro. Magnier de la Source (3) ha notato il fatto che l'idrato $CuSO^4 . 3H^2O$ preparato lasciando il solfato ordinario nell'aria secca a 25°-30° nel vuoto restava inalterato, mentre l'idrato ordinario $CuSO^4 . 5H^2O$ nel vuoto perdeva $4H^2O$. Alcuni fatti analoghi ho osservato anch'io.

Se si vogliono fare dei confronti e se si vogliono trarre delle conclusioni sullo stato dell'acqua nei corpi cristallizzati, bisogna operare come più sopra ho indicato; è lavoro lungo e

---

(1) " Jahresb. f. Chem. „, 1864, p. 92 e Gmelin-Kraut-Friedheim, T. II, parte II, p. 660. Il lavoro originale è in lingua olandese. Rotterdam, 1864. Delle considerazioni interessanti trovansi anche in una Memoria di Pickering (" J. Chem. Soc. „, 1877, t. 49, p. 411), ma non sono in relazione col presente mio lavoro.

(2) L'uso dell'acido solforico come agente disseccatore va fatto con prudenza, perchè anche puro può emettere vapori acidi al disopra della temperatura ordinaria.

(3) " Comptes Rendus „, t. 83, p. 899.

che va eseguito con grande cura. Con quasi sicurezza potrebbe dirsi che quasi tutti i dati sperimentali relativi alla eliminazione dell'acqua di cristallizzazione, da dieci anni in dietro, dovrebbero essere riveduti.

Da taluni chimici si sono stabilite delle leggi, o meglio delle regole generali, sulla eliminazione dell'acqua di cristallizzazione, che l'esperienza, secondo il mio parere e le mie osservazioni, ha dimostrato non corrispondere al vero.

Il Mendeleeff, a cagion d'esempio, nei suoi *Principes de chimie*, vol. I, pag. 170-171, relativamente al solfato di rame afferma che questo sale perde 28,8 % di acqua a 100° e 7,2 % a 240°; mentre si vedrà dalle esperienze mie, e da quelle di altri chimici, che il solfato di rame $CuSO^4 . 5H^2O$ già a 50° perde 28,42 %, cioè $4H^2O$ e in altre condizioni ne perde solamente $2H^2O$, ecc. Inesattezze simili si trovano riguardo gli allumi. Così pure non esatta la regola generale enunciata dal Mendeleeff, che cioè:

" *Sovente la temperatura alla quale comincia lo sviluppo dell'acqua di cristallizzazione è superiore al punto di ebollizione dell'acqua* ". E l'illustre chimico cita quale esempio il solfato di rame come ho ricordato più sopra. Riguardo a questa sua regola, la quale evidentemente non è esatta, ricorda, come altro esempio, l'eliminazione dell'acqua dall'allume. " L'allume, egli scrive, che contiene 45,5 % di acqua ne abbandona 18,9 % a 100°, poi ne perde ancora 17,7 % a 120° e 7,7 % a 180° ed infine 1 % ancora a 180° e non abbandona il resto, cioè ancora 1 %, se non alla temperatura della sua decomposizione ". Ma egli dava nessuna importanza al modo di disseccare e disidratare i sali, ed invero scriveva: " Per verificare questo fatto (disidratare il solfato di rame, ecc.) basta disseccare un peso noto di cristalli in una stufa ad aria calda o non importa in quale altro apparecchio a disseccazione ".

Io ho fatto molte esperienze su un gran numero di allumi, che saranno esposte in un altro lavoro.

È noto che in seguito ad una ipotesi assai ingegnosa emessa dal Röntgen, e sviluppata da altri fisici e chimici, si attribuisce all'acqua liquida una costituzione molecolare colla quale si possono spiegare le variazioni di molte delle sue proprietà chimico-fisiche; l'acqua sarebbe costituita dalla miscela di molecole allo

stato liquido e da molecole allo stato di ghiaccio; in ogni caso molecole polimerizzate. Ora, se veramente tutti i corpi cristallizzati con $2H^2O$ e con $3H^2O$, od un multiplo, lasciassero eliminare, sfuggire, le loro molecole d'acqua contemporaneamente, cioè a gruppi di $(H^2O)^2$ e $(H^2O)^3$, sarebbe *forse* (1) un buon argomento di prova per ammettere le molecole polimerizzate. Ma da esperienze già conosciute e da altre molte che ho fatto io, è dimostrato che moltissime volte le molecole d'acqua si eliminavano successivamente, separatamente e non a gruppi, oppure si eliminavano con velocità molto diversa.

Fu in seguito a queste, e ad altre, considerazioni, e all'aver veduto quanto sono discordanti i dati forniti dai vari autori per l'acqua di cristallizzazione in uno stesso sale, che la mia attenzione si rivolse anche ad alcune regole generali che il signor Rosenstiehl crede di aver stabilito.

Rosenstiehl nella seduta 16 dicembre 1910 della *Soc. franç. de Physique* ha comunicato una statistica relativa al numero delle molecole di acqua di cristallizzazione che trovasi nei sali. Risulterebbe che il gruppo $(H^2O)^3$, o un multiplo di tre, sarebbe il più frequente. Dopo vengono i sali con $2H^2O$ e $1H^2O$ (2).

Il sig. Rosenstiehl (3) ha poi pubblicato nel 1911 alcune altre note relative allo stato dell'acqua nei cristalli ed al numero di molecole di acqua contenute nei diversi sali. Egli dà una statistica desunta dal *Chemiker Kalender* del Biedermann; opera questa eccellente per gli usi pratici dei chimici, ma non di natura tale da poter servire allo scopo che voleva raggiun-

---

(1) Dico *forse*, perchè l'acqua si elimina allo stato gasoso e quindi anche se preesistesse nei cristalli a gruppi di molecole $(H^2O)^2$, $(H^2O)^3$ questi potrebbero dissociarsi ed uscire allo stato monomolecolare. Sotto questo riguardo è interessante la esperienza di A. Kirschner (" Zeits. f. physik. Chem. „, 1911, t. 76, p. 174), secondo il quale una soluzione concentrata di $BaCl^2 . 2H^2O$ nell'alcool metilico lascia rapidamente depositare il sale $BaCl^2 . H^2O$.

(2) Vedi il riassunto fatto da G. Lippmann nella " Rev. Gén. des Sciences „, 1911, p. 217.

(3) " Bull. Soc. Chim. de France „, 1911 (4), t. IX, p. 78 e 174; *Eau polymérisée et eau de cristallisation,* " ivi „, p. 281; *La température et les conditions de la déshydratation,* " ivi „, p. 184; *Eau de cristallisation,* " ivi „, p. 291; *Réponse à M. Lecoq de Boisbaudran,* " ivi „, pp. 327 e 1087.

gere il Rosenstiehl; sotto questo riguardo è opera molto incompleta, e dalle poche centinaia di corpi che vi sono accennati, anidri e idrati, non se ne possono dedurre delle regole generali.

Il Rosenstiehl ammette, in linea generale, che i sali contengano in prevalenza $3H^2O$ o un multiplo di tre, quali sono gli allumi con $24H^2O$ od i solfati di sesquiossido con 9 e 18 aq., i clorati isomorfi, ecc. con $6H^2O$. Egli prese in considerazione 178 composti idrati su 977 composti contenuti in quelle tabelle e ne trova:

N. 16 contenenti $1H^2O$:
„ 54 con $2H^2O$ o un multiplo di 2;
„ 100 con $3H^2O$ o un multiplo di 3 sino a 24;
„ 8 non classificati.

È da notare che il Rosenstiehl comprende nel N. 100 anche quei sali che contengono $4.7.10H^2O$, essendo, egli dice, spesso formati di $1 + 3$, $1 + 6$, $1 + 9$, ecc.; e così pure i sali con $5H^2O$ e $8H^2O$, perchè li considera come aventi $1 + 4$ oppure $3 + 2$, $2 + 6H^2O$. Inoltre si osservi che nelle tavole del Biedermann sono compresi gli allumi, i solfati della serie magnesiaca ed altri corpi contenenti 6, 18 e $24H^2O$, mentre mancano numerosissimi altri sali con $^1/_2H^2O$, $1H^2O$, $^1/_2H^2O$, $2H^2O$, ecc.

Ma anche limitando la discussione ai sali minerali, a me pare che per dedurre delle conclusioni generali, questa meschina statistica sia insufficiente. Non ho voluto enumerare tutti i composti inorganici cristallizzati con acqua di cristallizzazione, ma ho raccolto i dati relativamente a molti metalli, e a molti composti organici; valendomi delle memorie originali dei singoli autori, e dei migliori Trattati di chimica inorganica quali il Gmelin-Kraut-Friedheim, *Handb. d. anorg. Chem.*, l'Abegg, *Handb. anorg. Chem.*, ecc. e per i dati più recenti: i giornali scientifici. Accenno ora solamente ai *sei* metalli: *potassio*, *sodio*, *cesio*, *rubidio*, *bario*.

Pel *potassio* ho notato che su 97 sali ben cristallizzati con acqua di cristallizzazione ve ne sono solamente 20 con $3H^2O$ od un multiplo di 3; 22 con numero frazionario ($^1/_2H^2O$, $1\,^1/_2H^2O$, ecc.); 20 con $1H^2O$; 15 con $2H^2O$, poi tutti gli altri con: 5-8-10-11-12-14-19 e $36H^2O$.

Su 210 sali di *sodio* ne trovai 17 con numeri frazionari (da $^1/_2H^2O$ a $5\,^1/_2H^2O$); 22 con $1H^2O$; 31 con $2H^2O$ e 22 con $3H^2O$, il resto con 4-5-7-8-10-11-13-14-16-19-20-22-23 e $26H^2O$. Cioè tutti i rapporti possibili!

Su 122 *sali di bario* ne trovai: 8 con numeri frazionari (da $^1/_2H^2O$ a $19\,^1/_2H^2O$); 30 con $1H^2O$; 23 con $2H^2O$, solamente 9 con $3H^2O$; 12 con un multiplo di 3; il resto con 4-5-6-7-8-10-11-14 e $25H^2O$.

Su 11 composti di *rubidio*: 4 con $1H^2O$; 2 con $2H^2O$; 2 con $3H^2O$; 1 con 4; 1 con $5H^2O$ e 1 con $6H^2O$.

Su 8 composti di *cesio*: 5 con $1H^2O$; 2 con $2H^2O$ e 1 con $5H^2O$. Nessuno con $3H^2O$.

Tra 54 composti di *litio* ve ne sono 8 con numeri frazionari (da $^1/_2H^2O$ a $2\,^1/_2H^2O$); 14 con $1H^2O$; 9 con $2H^2O$; 7 con $3H^2O$; 3 con $4H^2O$; 1 con 5, 2 con 6 e 2 con $7H^2O$; poi il resto con 8-9-10-11 e $16H^2O$.

Il sig. Rosenstiehl (1) afferma che i sali a $5H^2O$ sono *otto*, ma io solamente nei sali di sei metalli (*potassio*, *sodio*, *bario*, *cesio*, *rubidio* e *litio*) ne ho trovati 34.

Così pure, egli dice, che i sali con 1 sola molecola d'acqua sono 16, ma io fra i sali dei sei metalli surricordati, ne ho contati almeno 85.

Dei sali con $7H^2O$ Rosenstiehl ne enumera solamente 10, ma io ne ho trovati 19 solamente nei sali dei metalli *litio*, *bario* e *sodio*; i sali di potassio, cesio e rubidio non contengono mai, o quasi mai, $7H^2O$.

Dei sali a $10H^2O$ egli ne enumera 10, io solamente in quattro metalli ne ho trovati 20.

Con differenze numeriche così enormi una discussione fruttuosa non è possibile (2).

---

(1) Loc. cit., p. 287.

(2) Su un totale di circa 130 minerali che contengono acqua di cristallizzazione io ne ho trovato 24 con H^2O; 20 con $2H^2O$; 19 con $3H^2O$; 11 con $4H^2O$; 7 con $5H^2O$; 8 con $6H^2O$; 11 con $7H^2O$; 12 con $8H^2O$; 5 con $9H^2O$, ed il rimanente con 10, 12, 15, 18, 20, 22, $24H^2O$. Quale regola generale può derivare da questi dati numerici? A me pare, nessuna. Si potrà forse ricavare qualche conclusione importante quando si conosceranno con esattezza le condizioni nelle quali si elimina l'acqua in questi composti. Ma sino ad ora si conosce assai poco a questo proposito.

Ma, potrà dirsi, i composti $R.\frac{1}{2}H^2O$ e $R.1\frac{1}{2}H^2O$, ecc. si possono ridurre a intere molecole raddoppiando i pesi molecolari e così si avrebbe $2R.H^2O$ e $2R.3H^2O$, ecc. Però il fare questo cambiamento è arbitrario, sino a quando non si conosca esattamente il peso molecolare del composto nel quale ora si ammette la $\frac{1}{2}$ mol. di acqua. Di questa questione dirò in altro lavoro.

Anche per gli allumi non siamo ancora sicuri se dobbiamo rappresentarli con $RR'(SO^4)^2$, $12H^2O$ oppure con $R^2R^2(SO^4)^4$. $24H^2O$. Vedremo che non è indifferente l'una piuttosto che l'altra formola.

Se poi passiamo ad esaminare i sali metallici degli acidi organici troviamo ancora una maggiore sconcordanza, troviamo ancor meno il numero 3 e suoi multipli. Moltissimi acetati contengono $1H^2O$.

I *propionati* di Ba. Ca. Mg. rame, contengono $1H^2O$; i *butirrati* di Ca. e Cu. $1H^2O$;

Gli *ossalati* di ammonio, sodio, calcio, bario, stronzio, ecc. contengono $1H^2O$;

Su 9 *salicilati* ben definiti ve ne è 1 solo con $3H^2O$ e invece 2 con $\frac{1}{2}H^2O$, 2 con 1, 2 con 2 e 2 con $4H^2O$;

Su 15 *citrati*, *nessuno* contiene $3H^2O$, ma 6 con $1H^2O$ e i rimanenti con 2, $2\frac{1}{2}$, 4, 5-$5\frac{1}{2}$-6-7-14;

Su 10 *tartrati*, *nessuno* contiene $3H^2O$ o un multiplo, ma 2 con $\frac{1}{2}H^2O$, 1 con $1\frac{1}{2}$, 1 con 2, 4 con $4H^2O$ e 2 con 1.

E così potrei moltiplicare gli esempi.

Ma vi ha di più: in una discussione di questa natura devesi tenere in considerazione anche l'acqua di cristallizzazione di un gran numero di sostanze organiche, quali gli acidi organici, gli idrati di carbonio, i glucosidi, ecc. e allora si scorgerà che il numero $3H^2O$ o un suo multiplo è molto raro. La grande maggioranza degli *idrati di carbonio* cristallizzati con acqua di cristallizzazione, contiene $1H^2O$ oppure $2H^2O$ od anche $\frac{1}{2}H^2O$. I *glucosidi* contengono $\frac{1}{2}H^2O$, H^2O, $1\frac{1}{2}H^2O$, $2H^2O$, $2\frac{1}{2}H^2O$, 4 e $4\frac{1}{2}H^2O$ e *due* solamente con $3H^2O$ (la quercitina e l'amigdalina). Anche i sali degli eteri acidi, quali i *solfovinati*, *glicerofosfati*, *eteri* $\alpha\beta$ *dichetonici*, i sali di *acidi solfonici*, ben di rado contengono $3H^2O$, ma bensì $\frac{1}{2}H^2O$, $1H^2O$, $2H^2O$.

Tutti i *composti mercuralcoil-arilammonio* contengono $1H^2O$;

un gran numero di cloroplatinati contengono 1 e $2H^2O$, di raro $3H^2O$ o un multiplo.

I composti del gruppo dell'*antracene*, quali la *brasilina*, la *purpurina*, ecc. contengono $1H^2O$ oppure $1\,^1/_2$, uno solo, la *ematossilina* con $3H^2O$. Fra i solfoacidi aromatici pochissimi contengono $3H^2O$ od un multiplo, ma quasi tutti $^1\,_2H^2O$. 2, $4H^2O$, ecc. Anche quei pochi acidi organici aromatici che contengono acqua di cristallizzazione (acidi: protocatechico, gallico, cinurico, benzimidazolcarbonico) non contengono mai $3H^2O$, ma $1H^2O$ e di raro $2H^2O$.

Secondo me dunque, la regola tratta dal sig. Rosenstiehl potrebbe valere, e solo in minima parte, per quei pochi composti che egli ha tenuto in considerazione, ma non può dirsi una regola generale, perchè sono numerosissimi i composti con un numero di molecole d'acqua di cristallizzazione diverso da $2H^2O$ e $3H^2O$.

Quando ho incominciato queste mie ricerche io ero della opinione, e mi pareva molto logica, che nell'acqua di cristallizzazione vi fossero dei gruppi associati $(H^2O)^2$, $(H^2O)^3$, ecc. Anzi io avvaloravo la mia opinione con un altro fatto e cioè che anche gli altri liquidi detti, come l'acqua, *anomali*, quali sono gli *alcoli*, hanno tendenza a tenere le funzioni dell'acqua nei cristalli e spesso con un gran numero di molecole.

Ma ora la mia opinione è scossa dalle mie stesse esperienze che ho fatto e dall'essermi accorto che molti dei dati riportati dal Rosenstiehl sono errati: le fonti alle quali egli ha attinto l'hanno tratto in inganno.

Il Rosenstiehl (1), ad esempio, afferma:

" Il y a des cas intéressants qui montrent que la facilité avec laquelle de l'eau de cristallisation se dégage augmente avec le nombre de molécules d'eau de cristallisation ".

" C'est ainsi que l'on constate que le composé :

à 1	mol.	$TlCl^3 + aq.$	perd aq.	à 100°;
à 2	"	$CaSO^4.2Na^2SO^4 + 2\,aq.$	"	80°;
à 3	"	$Be(NO^3)^3 + 3\,aq.$	"	60°;

(1) Loc. cit., p. 78.

" Ce sont les températures les plus basses qui aient été signalées ".

Ma anche questa regola e queste asserzioni, nel caso attuale non valgono, perchè sono errate le temperature; quelle qui indicate non corrispondono al vero; vedremo in seguito che del composto $CaSO^4 . 2Na^2SO^4 2aq.$ non si conosce la temperatura di disidratazione, la temperatura di 80° è quella del miscuglio che ha servito a Fritzsche per preparare questo composto; 60° non è la temperatura di disidratazione, ma è il punto di fusione del nitrato di berillio il quale già a 60°-65° perde molto acido nitrico; così pure è errata la temperatura di disidratazione del cloruro di tallio; e poi il cloruro di tallio normale contiene $4H^2O$.

Quando intrapresi queste mie ricerche volevo vedere se le molecole d'acqua di vari sali contenenti $2H^2O$, $3H^2O$, $4H^2O$, ecc. si eliminavano insieme a gruppi, oppure successivamente, come ho osservato in alcuni bromuri di bario, di cobalto, di manganese ed ho dovuto quindi esaminare anche molti dei sali accennati dal Rosenstiehl nei suoi lavori più sopra ricordati; ebbene, i miei risultati quasi sempre sono contrari alle indicazioni date da questo chimico distinto, e conosciuto per le sue ricerche sulle rosaniline.

II.

Composti cristallizzati con $2H^2O$.

Da lungo tempo io ho fatto numerose determinazioni di acqua di cristallizzazione, ma per ora mi limito a far conoscere le esperienze relative alla temperatura di disidratazione di alcuni sali con $2H^2O$.

Sono moltissimi i composti inorganici che nelle condizioni ordinarie cristallizzano con $2H^2O$, come sono numerosi anche i sali metallici di acidi organici ed anche dei composti organici senza metallo, che pure contengono $2H^2O$. Secondo però il Rosenstiehl sarebbero solamente 25 i sali inorganici contenenti $2H^2O$, dei quali appena 5 si conoscerebbe la temperatura di disidratazione, ed inoltre egli ammette come regola generale che i com-

posti con $2H^2O$ perdono contemporaneamente, e sempre, le due molecole insieme. A pag. 175 egli scrive (1):

" En classant les sels hydratés crystallisés à ce point de vue, on constate que les sels à 2 mol. d'eau perdent ces 2 mol. en même temps. Il en est de même des sels renfermant $(H^2O)^3$.

" Il n'y a pas d'exemples de sels ne perdant qu'une mol. (H^2O) en dehors de ceux qui n'en contiennent qu'une ".

Contro quest'ultima frase, tanto recisa, assoluta, il Lecoq de Boisbaudran fece osservare che egli da sali con più molecole d'acqua aveva potuto eliminare una sola molecola d'acqua. Ma successivamente il Rosenstiehl (2) osservò che la sua proposizione era relativa solamente ai sali contenenti *due* oppure *tre* molecole d'acqua. " Et, dans ces limites, la proposition correspond aux faits actuellement connus ".

E più avanti (3) scrive ancora:

" Il n'y a pas un seul exemple d'un sel renfermant deux molécules, qui n'en perde qu'une; les 2 mol. se dégagent toujours ensemble (4). De même les sels à trois molécules d'eau. Ils perdent les trois du même coup. A moins qu'ils n'appartiennent à la série magnésienne où le même sulfate forme 5 ou 6 hydrates différentes.

" Le *deuxième groupe* comprend les sels à 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24 mol. d'eau. Les sels de ce groupe ne perdent leur eau de cristallisation que sous la forme de 3 mol. d'eau $(H^2O)^3$ à la fois ou un multiple de 3 ".

" On peut admettre que l'eau qu'ils renferment appartient à une seule espèce. Et l'on voit que dans ce cas le maximum de mol. d'eau est atteint. Il est de $8(H^2O)^3$ qui est caractéri-

---

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit., p. 328.

(3) Loc. cit., p. 292.

(4) Basterebbe il solo *cloruro di bario* per distruggere questa affermazione apparentemente tanto sicura. Ma al cloruro di bario si può ancor meglio aggiungere il *bromuro di bario* $BaBr^2 . 2H^2O$ da me studiato (Vedi *Ricerche intorno ai bromuri*, Nota V in " Atti R. Accad. delle Scienze ", 1813, t. 48, p. 937), il quale in modo nettissimo perde *separatamente* le due molecole d'acqua; la *prima* molecola si elimina stando in un disseccatore a 12°-13° oppure in termostato a 40°, e meglio a 50°, la *seconda* si elimina solamente a 125°.

stique des aluns et peut-être en relation avec leur forme octaédrique „.

Ma le proposizioni del sig. Rosenstiehl, anche limitate ai sali con 2 oppure con 3 mol. di acqua, mi sembrano per lo meno molto azzardate; non corrispondono alla realtà sperimentale.

Ma dove sta il guaio più grosso egli è che sono errati tutti, o quasi tutti, i dati della temperatura di disidratazione dei sali, indicati dal Rosenstiehl. E limitandomi ora ai sali con $2H^2O$, ecco quanto egli scrive a pag. 285 (1):

" *Composés à 2 mol. d'eau.*

" Il y en a 25, sur lesquels il y a 6 indications de températures de déshydratation.

" Le sulfate double de chaux et de soude $CaSO^4.2Na^2SO^4 + 2$ aq. est anhydre à . . . . . 80°
" Le tungstate de soude $Na^2TuO^4 + 2$ aq. à . . . 100°
" Le bichromate de soude $Na^2Cr^2O^7 + 2$ aq. à . . . 110°
" Le chlorure de barium $BaCl^2 + 2$ aq. à . . . . 113°
" Le sulfate de chaux $CaSO^4 + 2$ aq. à . . . . . 130°
" Le chlorure d'étain $SnCl^2 + 2$ aq. à . . . . . 250°

" Pour les autres composés, c'est le plus souvent au rouge que ces corps se déshydratent, à moins qu'ils ne soient détruits par la chaleur.

" *NB.* Ces corps perdent toujours les 2 mol. d'eau en même temps, autant qu'on peut juger par les indications qui manquent pour beaucoup „.

Ed ora ecco le esperienze che io ho fatto relativamente ai *sei* sali più sopra accennati.

1) Solfato di calcio e di sodio

$CaSO^4.2Na^2SO^4.2H^2O$.

Fritzsche (2) ha preparato questo sale doppio, e prima di analizzarlo l'ha scaldato a 180° e vi ha trovato 8 % di acqua

(1) Loc. cit.
(2) " J. pr. Chem. „, t. 72, p. 291.

(si calcola 8.4). Non dice di aver fatto esperienze se perde tutte due le molecole d'acqua in una volta o separatamente. Il Fritzsche non afferma che il suo composto perda l'acqua a 80°, ma dice che per prepararlo si fa digerire a 80° una poltiglia (die Flüssigkeit an breiartig ecc.) di 1 p. di solfato di calcio con 50 p. di solfato sodico e 25 p. d'acqua. Non è, dunque, 80° il punto di disidratazione, come crede il Rosenstiehl, ma deve essere molto più elevato se il Fritzsche a 180° ha ottenuto 8 % di acqua.

Io non ho fatto esperienze speciali.

2) Tunstato di sodio

$Na^2TuO^4.2H^2O$.

Secondo Rosenstiehl, la temperatura di disidratazione di questo sale sarebbe a 100°. Ma ciò non mi sembra esatto. È vero che Riche (1) affermò di aver ottenuto il tunstato sodico anidro a 100°, ma disse che poteva ottenersi anidro anche nel vuoto. Che sia anidro a 100° lo affermarono Forcher (2) e R. Funk (3). Ma con tutto ciò non è detto che 100° sia la temperatura di disidratazione. Questo sale è stabile all'aria, ma nell'aria secca sfiorisce. Anche Pawlewski (4) afferma che questo sale, stando lungo tempo in un disseccatore ad acido solforico, diventa anidro; come pure diventa anidro a 100°.

Pel tunstato di sodio normale $Na^2TuO^42H^2O$, Roscoe e Schorlemmer (*Treatise on Chemistry*, 1913, p. 1089) scrivono: " When heated to 200° it becomes opaque and loses its water, and fuses at a red heat ".

Io ho eseguite varie esperienze per decidere da qual parte fosse il vero e togliere queste discordanze, e queste mie esperienze dimostrarono che la temperatura di disidratazione è molto inferiore a 100°.

---

(1) " A. Ch. " (3), 1857, t. 50, p. 52.

(2) " Wien-Akad. Sitz. Ber. ", 1862 (II), t. 44, p. 177.

(3) " Berichte ", 33, p. 3700. Funk trovò a 100°, 11,06 % di H^2O, calcol. = 10,91 %.

(4) " Berichte ", t. 33, p. 1223.

Il tunstato sodico puro $Na^2TuO^4.2H^2O$ in disseccatore con cloruro di calcio, non perde di peso.

Gr. 1.0858 scaldati all'aria libera in stufa di vetro a vapore di cloroformio (60°-61°) perdettero solamente 0.0100, invece in stufa a 72° (vapore di etere acetico) dopo 3 ore perdettero gr. 0.0660, cioè 7 %, e per $1H^2O$ si calcola 5.45 %; dopo ancora 6 ore a 72° perdettero 0.0280, e dopo ancora 6 ore appena 0.0032, vale a dire in totale 9.57 %; a 82° (vapore di cloruro di etilene) dopo 3 ore ancora 0.0048 e dopo 16 ore a 99° ancora 0.0070, cioè in totale 0.1175, vale a dire 10.77 %.

	trovata	calcolata per $2H^2O$
H^2O %	10.77	10.91

Come si scorge, la *prima* molecola si elimina assai presto e la *seconda* molecola assai lentamente; anzi $1\,^1/_2\,H^2O$ (8.17 %) si eliminano già a 72° nelle prime ore, mentre per scacciare l'ultima mezza molecola occorrono molte ore ancora a 72°, poi a 82° e anche 99°.

Gr. 1.0823 scaldati in termostato a 30°, 40°, 50° non perdettero di peso; a 60° dopo 18 ore perdettero gr. 0.0695, cioè 6.4 %, e per $1H^2O$ si calcola 5.45 %; dopo ancora 32 ore perdettero gr. 0.0420, cioè in totale 0.110, vale a dire 10.26 %, e scaldati ancora a 99° in stufa a vapor d'acqua perdettero 0.005, cioè in totale 10.77 %, cioè $2H^2O$. Il sale anidro lasciato all'aria non riassorbe l'acqua.

Dunque in queste condizioni la *temperatura di disidratazione* sarebbe 60°. La *prima* molecola si elimina più presto e la *seconda* più lentamente.

Gr. 1.2538 di tunstato sodico scaldati a 50° in termostato e dentro disseccatore ad acido solforico, dopo 17 ore perdettero 4.8 %, dopo altre 24 ore in totale 9.3 %, dopo ancora 24 ore arrivò a 10.46 % e infine perdette dopo ancora 24 ore 0.0016 e poi più; dunque in totale perdettero gr. 0.1326, cioè 10.6 %. Vale a dire tutta l'acqua di cristallizzazione, meno forse un residuo di 0.2-0.3 %.

In queste condizioni, la *temperatura di disidratazione* sa-

rebbe dunque 50°. In ogni caso la temperatura di disidratazione è assai inferiore a 100°.

Gr. 0.8393 di tunstato sodico furono scaldati, in corrente d'aria secca, a 54°-55° (vapore di acetone); dopo 11 ore perdettero 0.0848 e dopo ancora 6 ore 0.0045 e poi non più; in totale 0.0893, cioè 10.62 %, vale a dire tutte due le molecole d'acqua insieme.

In questo caso dunque la temperatura di disidratazione sarebbe di 54°-56°.

3) Bicromato di sodio

$Na^2Cr^2O^7.2H^2O$.

Il bicromato di sodio è descritto da alcuni chimici (1) come cristallizzato in prismi triclini rosso-giallastri, igroscopici, *deliquescenti*. Questo sale invece, quando è puro, non è deliquescente; io ho lasciato all'aria dei bei cristalli di bicromato sodico, anche recentemente ricristallizzati, e sono rimasti inalterati.

Secondo Rosenstiehl, la temperatura di disidratazione del bicromato sodico sarebbe 110°. Anche questo dato è errato. Forse quella temperatura è desunta dalle ricerche di Siewert (2), secondo le quali il bicromato sodico già a 30° e poi a 110° perde tutta l'acqua.

Invece, secondo le ricerche di Stanley, il bicromato sodico a 75° perde la *prima* molecola d'acqua e sopra 100° la *seconda* (3). Io ho fatto varie esperienze le quali dimostrano che la temperatura di disidratazione del bicromato sodico è di molto inferiore a 110°. Non sono però riuscito ad eliminare separatamente le due molecole d'acqua.

Gr. 0.7854 di bicromato sodico, recentemente cristallizzato, scaldati per circa 22 ore a 50° in termostato entro un disseccatore perdettero gr. 0.0954, cioè:

	trovata	calcolata per $Na^2Cr^2O^7.2H^2O$
H^2O %	12.14	12.08

(1) " Stanley Chem. News ", 1886, N. 54, p. 194 e " Jahresb. f. Chem. ", 1886, p. 442. H. Roscoe e C. Schorlemmer, *Treatise on Chemistry*, 1913, t. II, p. 1031.

(2) Citato in Gmelin-Kraut-Friedheim, *Handb. anorg. Chem.* III, p. 666.

(3) Loc. cit.

Dunque in queste condizioni la temperatura di disidratazione è 50°.

Gr. 2.7004 di bicromato sodico scaldati all'aria in termostato a 30° e poi a 50° per circa 6 a 8 ore perdettero solamente 0.0140 gr.; invece dopo 5-6 ore a 72° perdettero in totale gr. 0.3156. cioè 11.7 %.

Ma già a 60° perde tutta l'acqua.

Gr. 1.4790 di un bicromato, cristallizzato da lungo tempo, scaldati a 60° in termostato semplicemente, perdettero in 18 ore 0.1717, cioè 11.5 %. Queste mie esperienze non concordano con quelle di Stanley, secondo le quali il bicromato a 75° perderebbe $1H^2O$ e sopra 100° la seconda molecola.

Dunque la temperatura di disidratazione in termostato solo è di 60°, ed in termostato, entro disseccatore, è solamente di 50°. Perde tutte due le molecole d'acqua insieme.

4) Cloruro di bario

$BaCl^2.2H^2O$.

Tutti, o quasi tutti, i chimici che hanno determinato l'acqua di cristallizzazione del cloruro di bario hanno osservato che delle $2H^2O$ una può eliminarsi separatamente dall'altra e che si hanno quindi due idrati: $BaCl^2.2H^2O$ e $BaCl^2.H^2O$.

I cristalli di cloruro di bario non si alterano all'aria (Marignac, 1855).

Secondo Pope (1), il cloruro di bario sfiorisce a 58°, e secondo Mulder (2) a 56° perde $1H^2O$ e a 121° è anidro. Le ricerche invece di Guthrie (3) avrebbero dimostrato che i cristalli di cloruro di bario in corrente di aria secca e a 25° perdono $1H^2O$ e la *seconda* verso 60°.

Secondo Lescœur (4) esistono tre idrati $BaCl^2.H^2O$, $BaCl^2.2H^2O$

(1) " Pogg. Ann. ", 1865, t. 125, p. 513.

(2) Loc. cit. in Gmelin-Kraut-Friedheim, *Hand. anorg. Ch.*, p. 61.

(3) " Phil. Mag. ", 1878 (5), VI, p. 105 e " Jahresb. f. Chem. ", 1878, p. 57.

(4) *Sur les hydrates du chlorure de barium*, " C. R. ", 1887, t. 104, p. 1511.

e $BaCl^2.6H^2O$; lo stesso Lescœur (1) ha determinato la tensione di dissociazione dell'idrato con $2H^2O$ ed ha dimostrato l'esistenza dei due idrati con H^2O e con $2H^2O$. Già Thomsen (2) trovò che per l'aggiunta al cloruro anidro di $1H^2O$ e poi di una seconda molecola si sviluppano quantità ineguali di calore. Müller-Erzbach aveva già notato (3) che l'eliminazione delle 2 mol. di acqua ha luogo con velocità disuguali.

Le ricerche poi di Beckmann dimostrerebbero che il cloruro di bario $BaCl^2.2H^2O$ perde la prima molecola nell'aria secca a 15° e la seconda a 75°; anzi, stando sull'acido solforico perderebbe presto $1H^2O$ e la seconda lentissimamente (4). Si vegga pure a questo proposito Richards in *Zeits. f. anorg. Chem.*, 1898, XVII, p. 165.

Già coll'alcool metilico si può togliere una molecola d'acqua; secondo A. Kirschner (5) una soluzione concentrata di $BaCl^2.2H^2O$ nell'alcool metilico dà rapidamente un deposito cristallino di $BaCl^2.H^2O$.

Dopo tutte queste ricerche troviamo anche nei migliori trattati dei dati erronei; alcuni affermano che il cloruro di bario perde la sua acqua a 113° (6), altri che il cloruro di bario stando sull'acido solforico, o a 60°-70°, perde $1H^2O$ e che a 120° perde tutte due le molecole. Nell'*Encycl.* del Fremy, t. III, p. 11, è detto chiaramente che il cloruro di bario scaldato, decrepita e perde la sua acqua a 200° (Krauss, *Pogg. Chem.*, t. 43, p. 140).

Il Rosenstiehl ammette quale temperatura di disidratazione 113°, ed afferma che a questa temperatura il sale perde tutte due le molecole d'acqua insieme.

Io ho fatto diverse esperienze che, com'era da prevedersi, contraddicono completamente queste ultime asserzioni.

Gr. 0.7842 di cloruro di bario furono scaldati a 42° (va-

---

(1) *Recherches sur la dissociation des hydrates salins.* Lille, 1888, p. 72.

(2) " J. pr. Chem. „ (2), t. XVIII, p. 43.

(3) " Jahresb. f. Chem. „, 1885, p. 215 e 1886, p. 143; " Zeits. f. physik. Chem. „, 1895, XVIII, p. 446.

(4) " Berichte „, XVI, p. 781.

(5) " Zeits. f. physik. Ch. „, 1911, t. 76, p. 174.

(6) Roscoe e Schorlemmer, *A Treatise on Chemistry,* 1913, II, p. 607.

pore di metilale) in corrente di aria secca; dopo 7 ore perdettero gr. 0.0308, cioè 5 %, e dopo ancora gr. 0.0147, cioè in totale 7.38 % e poi più, mentre per la eliminazione di $1H^2O$ si calcola 7.36 %. A 52° (vapore d'acetone) perdettero appena 0.0012, ma a 60° (vapore di cloroformio), benchè lentamente, perdono di peso, e dopo 30-32 ore in corrente d'aria perdettero ancora 0.0585, cioè in totale gr. 0.1125, cioè 14.30 %, mentre per la eliminazione di $2H^2O$ si calcola 14.72 %. Dunque in corrente d'aria a 42° perde $1H^2O$ e poi a 60°-61° la seconda molecola.

In questo caso la temperatura di completa disidratazione è 60° e le due molecole possono eliminarsi separatamente.

Il cloruro di bario in termostato a 30°, entro disseccatore, perde, dopo tre giorni, $1H^2O$ cioè 7.3 %, poi a 50° dopo sei giorni perde la *seconda* molecola cioè 14.66 % in totale. Il cloruro così disidratato lasciato all'aria ricupera completamente l'acqua di cristallizzazione; la *prima* molecola molto rapidamente e la *seconda* lentissimamente.

5) Cloruro stannoso

$SnCl^2.2H^2O$

Secondo Berzelius (1) il cloruro stannoso idrato contiene 9.55 % di acqua, cioè $SnCl^2.H^2O$, mentre secondo Turner (2) conterrebbe $3H^2O$. Henry (3) però dimostrò che conteneva $2H^2O$ e che perdeva tutta l'acqua stando in disseccatore ad acido solforico o nel vuoto; ottenne 16.41 % di acqua (sull'acido solforico perde anche HCl). Penny (4), pure poco dopo Henry, trovò $SnCl^2.2H^2O$, dimostrò che fonde a 37°.7 e che per raffreddamento cristallizza. W. Clarke (5) pure vi trovò $2H^2O$ e Marignac (6) riconobbe che all'aria non è deliquescente, ma non vi dosò l'acqua.

(1) *Traité de Chimie*, 1838, II, p. 135.

(2) Citato da Henry.

(3) " Phil. Trans. ", 1845, p. 367 e " Jahresb. ", 1851, p. 350.

(4) " Journ. Chem. Soc. ", 1851, t. IV, p. 239; " Jahresb. ", 1851, p. 356.

(5) " Sill. Am. J. " (3), t. XIV, p. 281 e " Jahresb. ", 1877, p. 45.

(6) " Ann. d. Mines " (5), t. 9, p. 1 e " Jahresb. ", 1856, p. 394; Œuvres de Marignac, vol. I, p. 436.

Il Moissan, nel suo *Traité de chim. minér.*, vol. II, p. 588, non riporta che le vecchie osservazioni di Vogel, secondo le quali il cloruro stannoso scaldato perde acqua, sviluppa acido cloridrico, dà del cloruro stannico e una massa a struttura cristallina contenente SnO e Cl. cioè un ossicloruro. Tutto ciò è in gran parte esatto.

Altri trattatisti si limitano a dire che il cloruro stannoso scaldato si decompone parzialmente con sviluppo di HCl, ma che nel vuoto o sull' acido solforico perde l'acqua (1). Alcuni affermano che scaldato a 100° perde l'acqua e si trasforma in una mota bianca che fonde a 250° e a 606°, disciolta senza quasi scomporsi (2). Scaldato in corrente di gas cloridrico, perde tutta l'acqua e rimane $SnCl^2$ inalterato (3); anidro fonde a 250° e bolle a 603°: l'idrato nelle condizioni ordinarie perde H^2O e HCl e lascia, pare, un residuo di ossicloruro.

Il Rosenstiehl invece afferma che la temperatura di disidratazione di questo sale è 250°. Ma per quanto esistano delle discordanze nei dati forniti dai vari autori, facilmente si scorge che il Rosenstiehl deve aver confuso il punto di disidratazione col punto di fusione 250° del sale anidro.

Viste queste più o meno grandi discordanze, io ho determinato l'acqua in due bellissimi campioni di cloruro stannoso cristallizzato, stabile all'aria.

Gr. 1.0145 di cloruro stannoso in termostato a 30° dopo 23 ore perdettero 0.1023, cioè 10.03 %, e dopo ancora 23 ore perdettero 0.0534, cioè 15.34 %, ed infine, dopo ancora 48 ore, 0.0048, cioè in totale gr. 0.1605, ossia 15.8 %, cioè:

	trovata	calc. per $2H^2O$ del $SnCl^2.2H^2O$
H^2O %	15.8	15.92

Come si vede, in questo caso non vi ha un punto d'arresto e le due molecole d' acqua si eliminano insieme e solamente

(1) H. Roscoe e Schorlemmer, loc. cit., II, p. 859.

(2) Schmidt, *Lehrb. d. Pharm. Chem.*, I, p. 514.

(3) Biltz e V. Meyer, " Z. f. phys. Chem. ", 1888, vol. 2, p. 184 e in Abegg, *Handb. anorg. Chem.*, III, p. 565.

a 30°; però nelle prime 23 ore si eliminano quasi 1 $^1/_2$ H^2O e l'ultima mezza molecola molto più lentamente.

Dunque in termostato a 30° perde tutta l'acqua; questa temperatura sarebbe dunque la vera temperatura di disidratazione del cloruro stannoso.

Il cloruro stannoso stando sull'acido solforico perde insieme all'acqua anche dell'acido cloridrico. Ed invero:

Gr. 1.2050 di $SnCl^2.2H^2O$ scaldato a 30° in termostato entro un disseccatore ad acido solforico, perdettero dopo 18 ore gr. 0.1895, cioè 15.7 $^0/_0$ e per la eliminazione di $2H^2O$ si calcola 15.92 $^0/_0$; ma continuando a scaldare ancora per 2 o 3 giorni perdette in totale 0.2435, cioè 20.2 $^0/_0$. Questo sale così secco, scaldato alcune ore in stufa a 99°, perdette ancora gr. 0.0134, dando però vapori acidi e un sublimato bianco in piccola quantità. Dunque, in queste condizioni, il sale si decompone, almeno in piccola parte, dando acido cloridrico.

Gr. 1.1837 di sale cristallizzato lasciato in macchina pneumatica a 20 mm. (temp. 12°-14°) e su potassa caustica, perdettero gr. 0.1890, cioè 15.96 $^0/_0$; vale dire tutte due le $2H^2O$, per le quali si calcola 15.92 $^0/_0$. Dunque anche nel vuoto perde tutta l'acqua.

Il cloruro stannoso scaldato a 40°-41° in corrente di aria, prima fonde, poi perde acqua e acido cloridrico e lascia un residuo solido cristallino, che non ho esaminato.

Dunque questo sale si disidrata completamente a 30° oppure nel vuoto. La temperatura 250° data da Rosenstiehl è invece la temperatura di fusione del sale anidro. Le due molecole d'acqua si eliminano insieme, però l'ultima mezza molecola molto più lentamente.

6) Solfato di calcio

$CaSO^4.2H^2O$.

Numerosissime sono le ricerche fatte sul solfato di calcio cristallizzato per stabilire la temperatura alla quale questo sale diventa anidro. In determinate condizioni fu ottenuto l'idrato intermedio $CaSO^4.^1/_2H^2O$ che alcuni rappresentano con $(CaSO^4)^2.H^2O$. Io ho fatto molte esperienze per stabilire le condizioni precise

in cui si forma questo idrato e per fissare la temperatura di disidratazione.

Ora dirò solamente: che la *temperatura di disidratazione* non è 130°, come afferma il Rosenstiehl; che il solfato di calcio idrato, benchè in molti casi si disidrati completamente senza passare per il composto intermedio $CaSO^4 . {}^1/_2 H^2O$, cioè non dimostri un punto di arresto, in altre condizioni perde $1 {}^1/_2 H^2O$ solamente, e che non è indifferente esperimentare col solfato di calcio artificiale preparato per precipitazione e ricristallizzazione ed il solfato di calcio idrato e cristallizzato naturale. Dimostrerò, spero, che così è per altri minerali.

Di queste esperienze dirò in un'altra nota insieme a quelle fatte su altri sali con $2H^2O$.

***

Da queste osservazioni ed esperienze risulta che non si può stabilire una temperatura di disidratazione in senso generale, se non si specificano le condizioni nelle quali la disidratazione avviene completa.

Secondo il mio parere, la temperatura di disidratazione dovrebbe essere quella temperatura alla quale il sale perde tutta la sua acqua di cristallizzazione, esperimentando in termostato, ed occorrendo in ambiente secco (per acido solforico, oppure cloruro di calcio o anidride fosforica), oppure anche in corrente di gas secco.

La temperatura di disidratazione dei cinque sali esaminati sarebbe dunque, secondo le varie condizioni nelle quali furono fatte le determinazioni:

$CaSO^4.2Na^2SO^4.2H^2O$ . . .	verso 180°?
$Na^2TuO^4.2H^2O$	50°, 54°-55° e 60°
$Na^2Cr^2O^7.2H^2O$	50° e 60°
$BaCl^2.2H^3O$	50° e 60°
$SnCl^2.2H^2O$	30°

Dai risultati delle analisi dei cinque composti salini precedenti con $2H^2O$ risulta che uno di essi può perdere separata-

mente le due molecole d'acqua (cloruro di bario), tre le perdono contemporaneamente, ma però con velocità alquanto diversa, e di uno (solfato di calcio e sodio) non si conosce la temperatura di disidratazione.

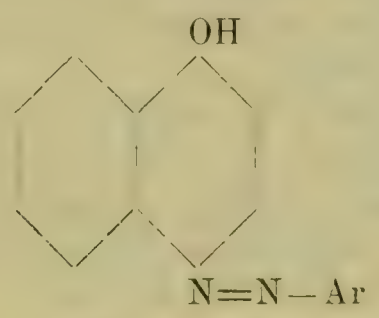
È quindi completamente erroneo porre in ordine crescente le supposte temperature di disidratazione dei cinque sali considerati più sopra, come ha fatto il Rosenstiehl, perchè quelle temperature in nessun caso corrispondono al vero, come non è esatta quella del solfato di calcio. Così è di molti altri dati riferiti dal Rosenstiehl. Vi sono molti altri sali contenenti $2H^2O$, anche di acidi organici e non pochi di essi perdono insieme le loro due molecole di acqua di cristallizzazione; altri la perdono separatamente. Così è di molti sali con $3H^2O$, come esporrò in un altro lavoro.

Torino, R. Università, 8 febbraio 1914.

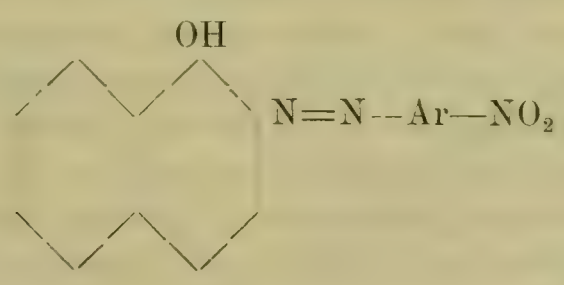
Sugli ortoossiazocomposti derivanti dall'α-naftol.

Nota dei D^ri G. CHARRIER e L. CASALE

È noto che per azione dei sali di diazonio sul fenol e omologhi si formano orto- e para-ossiazocomposti, e che dal β-naftol si ottengono invece soltanto orto-ossiazocomposti; si ammette pure che dall'α-naftol si abbiano soltanto paraderivati



salvo nel caso in cui su di esso si faccia agire un sale di nitroarildiazonio (1), perchè allora si formano anche orto-derivati

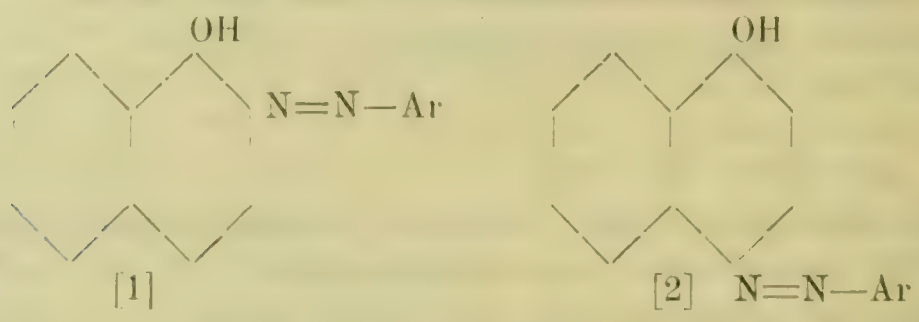


che sono identici, come ha dimostrato Bamberger (2), coi prodotti ottenuti per azione delle nitro-arilidrazine sul β-naftochinone, cioè coi nafto-o-chinon-nitroarilidrazoni.

(1) Bamberger, B. *28*, 848 (1895); Hantzsch, B. *28*, 1124 (1895); Bamberger e Meimberg, B. *28*, 1887 (1895).

(2) B. *30*, 513 (1897).

Ora noi abbiamo trovato, che gli ortoderivati [1] si formano sempre, assieme ai para [2], ma in molto minor quantità, nell'azione dei sali di diazonio sull'α-naftol, qualunque sia il diazonio che si faccia agire



e che essi si dimostrano identici colle sostanze state ottenute per azione delle idrazine corrispondenti sul β-naftochinone, cioè coi β-naftochinonarilidrazoni.

Gli o-ossiazocomposti, che descriviamo in questa nota, sono sostanze ben cristallizzate, di color rosso vivo a rosso cupo, alcune dotate di riflesso metallico, generalmente poco solubili nei solventi organici, insolubili a freddo, pochissimo solubili a caldo nelle soluzioni degli idrati alcalini.

Soltanto per il 2-p-anisilazo-1-naftol venne notata la solubilità nelle soluzioni alcaline diluite bollenti e anzi la formazione di un sale di sodio cristallizzato; ma ciò si conosce già anche per altri o-ossiazocomposti, per esempio, per il fenilazo-p-cresol e per gli ortonitro-arilazo-αnaftoli di Bamberger.

Abbiamo notato che gli orto-arilazo-αnaftoli, analogamente agli o-ossiazocomposti derivanti dal β-naftol, si sciolgono generalmente nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa, che va in alcuni pochi casi sino al rosso violetto, mentre che i paraarilazo-αnaftoli impartiscono generalmente all'acido solforico concentrato una colorazione azzurra ben netta, che va dal bleu violetto all'indaco.

Questa caratteristica colorazione delle soluzioni in acido solforico concentrato degli ortoossiazocomposti della serie naftalinica, che li distingue nettamente dai paraderivati, può servire molto bene come mezzo analitico per decidere immediatamente se si ha fra mano un orto- o un para-composto.

Col solfato di metile gli o-arilazo-αnaftoli in presenza di

soluzioni alcaline concentrate reagiscono facilmente dando gli eteri metilici corrispondenti, che sono O-eteri, perchè coi riducenti si scindono in etere metilico del 2-amido-1naftol e nell'amina aromatica corrispondente.

Azione del cloruro di fenildiazonio sull'α-naftol sciolto in alcool.

Abbiamo operato esattamente come viene generalmente indicato a proposito della preparazione del 4-fenilazo-1naftol (1). Una soluzione di gr. 93 di anilina in una miscela di 250 cc. di acqua e 200 cc. di acido cloridrico fumante si diazota a 0° con una soluzione satura di una grammomolecola di nitrito sodico, e la soluzione del sale di diazonio, così ottenuta, si versa, mantenendo la temperatura a 0°, in una soluzione di gr. 155 di α-naftol in 2 litri di alcool. Il cloridrato del 4-fenilazo-αnaftol, contenente il 2-fenilazo-α-naftol, che si separa a poco a poco, viene raccolto, dopo circa 24 ore di riposo in luogo freddo, lavato bene con alcool diluito (circa al 40 %) e quindi ulteriormente trattato per la separazione dei due isomeri.

Isomeri orto- e para-fenilazoαnaftoli.

Se si tratta il precipitato ottenuto nella preparazione precedentemente descritta, anzichè con idrato potassico concentrato come viene suggerito nella preparazione del 4-fenilazo-1-naftol, con circa due litri di soluzione di idrato sodico al 4 % agitando bene e si filtra, si riesce agevolmente a separare dalla soluzione intensamente colorata in rosso sangue del sale sodico del 4-fenilazo-1naftol, una sostanza insolubile, che lavata ancora con idrato sodico al 4 % sino a che questo passa incoloro e cristallizzata ripetutamente dall'alcool, forma aghetti di color rosso-cupo, con riflesso metallico dorato, fondenti a 138° con leggera contrazione anteriore di qualche grado.

---

(1) Vedi, per esempio, Meyer-Jacobson, *Lehrbuch der organischen Chemie*, 2° vol., 2ª parte, pag. 414 (1903), oppure Beilstein, *Handbuch der organischen Chemie*, IV, 1427 (1899).

I. Gr. 0,3153 di sostanza fornirono gr. 0,8926 di anidride carbonica e gr. 0,1410 di acqua.

II. Gr. 0,1574 di sostanza diedero cc. 15,1 di azoto ($H_0 = 737,164$ $t = 14°$), ossia gr. 0,017315.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O$
	I	II	
Carbonio	77,20	—	77,41
Idrogeno	4,96	—	4,83
Azoto	—	11,00	11,29

La sostanza, il cui ricavo oscilla, secondo le operazioni, da 4 a 5 gr. per grammomolecola di anilina impiegata, è dunque costituita da 2-fenilazo-1naftol $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OH \\ (2)N{=}N - C_6H_5 \end{cases}$, poichè ne possiede le costanti fisiche e la composizione, e si dimostra inoltre identica col 2-fenilazo-1naftol, finora esclusivamente ottenuto per azione del cloridrato di fenilidrazina sul β-naftochinone sciolto in acido acetico, il cui punto di fusione è posto nella letteratura appunto a 138° (1).

Viene quindi così dimostrato, che agendo il cloridrato di fenildiazonio sull'α-naftol in soluzione alcoolica dà origine assieme al derivato para anche al derivato orto e inoltre viene direttamente stabilita l'identità tra il prodotto ottenuto per azione della fenilidrazina sul β-naftochinone e l'o-ossiazocomposto ottenuto dal sale di fenildiazonio e l'α-naftol.

Facciamo notare che le soluzioni del 2-fenilazo-1naftol, preparato sia per azione del cloruro di fenildiazonio sull'α-naftol, che per azione della fenilidrazina sul β-naftochinone, in acido solforico concentrato sono nettamente rosse, di un bel rosso rubino e non rosso-violette come viene affermato nella letteratura.

Per azione del solfato di metile in presenza di idrato sodico al 30 % si ottiene facilmente, col metodo generale di eterificazione degli o-ossiazocomposti trovato da uno di noi (2), dal

(1) Zincke, B. *16*, 1563 (1883); Zincke e Bindewald, B. *17*, 3030 (1884).

(2) G. Charrier e G. Ferreri, *Eterificazione di o-ossiazocomposti*. Nota I^a, II^a, III^a e IV^a; G. *42*, II, 117 (1912); *43*, I, 543, II, 211, 227 (1913).

2-fenilazo-1naftol, l'etere metilico, che cristallizza dall'alcool in splendide lamelle lucenti, di color arancio, fusibili a 102°, secondo i dati di Noelting, Grandmougin e Freimann (1).

Gr. 0,2052 di sostanza diedero cc. 18,5 di azoto ($H_0 = 743,279$ $t = 13°$), ossia gr. 0,021492.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O$
Azoto	10,47	10,68

L'etere metilico del 2-fenilazo-1naftol è discretamente solubile a caldo, molto meno a freddo, nella maggior parte dei comuni solventi organici: cristallizza molto bene dall'alcool, nel qual solvente si scioglie molto a caldo, pochissimo a freddo. In acido solforico concentrato è solubile con magnifica colorazione rosso-rubino, è insolubile invece negli acidi diluiti anche bollenti.

Azione del cloruro di p-tolildiazonio sull'α-naftol sciolto in alcool.

2-p-tolilazo-1naftol $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OH \\ (2)N=N(1)C_6H_4(4)CH_3 \end{cases}$. — Se. osservando precisamente le condizioni esposte a proposito della preparazione del 2-fenilazo-1naftol dal cloruro di fenildiazonio e α-naftol, si sostituisce ad una grammomolecola di anilina una di p-toluidina, si ottengono circa gr. 4 di prodotto insolubile negli alcali; questa sostanza, che cristallizza dall'alcool in aghi lucenti di color rosso che fondono esattamente a 145°, costituisce il 2-p-tolilazo-1naftol, già ottenuto per azione del cloridrato di p-tolilidrazina sul β-naftochinone e il cui punto di fusione giace appunto a tale temperatura (2).

Gr. 0,1360 di sostanza diedero cc. 12,5 di azoto ($H_0 = 740,045$ $t = 15°$), ossia gr. 0,014333.

---

(1) B. *42*, 1383 (1909).

(2) Zincke, Rathgen, B. *19*, 2491 (1886); Noelting, Grandmougin, Freimann, B. *42*, 1385 (1909).

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O$
Azoto	10,53	10,68

Il 2-p-tolilazo-1naftol è discretamente solubile a caldo, poco a freddo, nell'alcool, mentre si scioglie più abbondantemente negli altri solventi.

Nell'acido solforico concentrato è solubile con colorazione rossa.

Azione del cloruro di o-anisildiazonio sull'α-naftol in soluzione alcoolica.

La soluzione del cloruro di o-anisildiazonio, ottenuta da gr. 30 di o-anisidina, sciolta in 65 cc. di acqua coll'aggiunta di 50 cc. di acido cloridrico fumante, colla quantità teorica di nitrito sodico, si versò in una soluzione fredda di 39 gr. di α-naftol in 500 cc. di alcool. Il liquido, colorato intensamente in rosso-sangue, diede a poco a poco un precipitato cristallino rosso con riflessi verde cantaride, che non aumentò dopo circa trenta ore. Raccolto e lavato con alcool molto diluito e quindi con acqua sino a che questa passò incolora, venne riscaldato a bagnomaria con circa un litro di soluzione di idrato sodico al 4 %: in questa soluzione si sciolse buona parte della sostanza, e precisamente il p-ossiazocomposto, che nel prodotto della reazione si trovava in gran parte sotto forma di cloridrato, mentre rimase insolubile l'o-ossiazocomposto, il quale pesò allo stato greggio circa 5 grammi. Possiamo conchiudere, considerando parecchie preparazioni, che il ricavo in questo composto oscilla da 4 a 5 gr. per gr. 30 di o-anisidina impiegata.

Isomeri orto- e para- o-anisilazo-αnaftoli.

2-o-Anisilazo-1naftol $C_{10}H_6 \begin{matrix}(1)OH \\ (2)N=N(1)C_6H_4(2)OCH_3\end{matrix}$.

Il prodotto ottenuto nella preparazione precedente insolubile nelle soluzioni alcaline diluite e che costituisce il 2-o-anisilazo-1naftol allo stato greggio, venne purificato cristallizzandolo dal-

l'acido acetico, dal cloroformio e infine dall'alcool, e si ottenne da questo solvente in fogliette rosse a riflesso dorato, fusibili con decomposizione a 180-181°, con leggiero rammollimento a cominciare da 178°.

I. Gr. 0,4804 di sostanza fornirono gr. 1,2870 di anidride carbonica e gr. 0,2192 di acqua.

II. Gr. 0,2947 di sostanza fornirono gr. 0,7908 di anidride carbonica e gr. 0,1348 di acqua.

III. Gr. 0,1809 di sostanza diedero cc. 15,4 di azoto ($H_0 = 733.577$ $t = 12°$), ossia gr. 0,017718.

IV. Gr. 0,1921 di sostanza diedero cc. 17,4 di azoto ($H_0 = 731,984$ $t = 17°$), ossia gr. 0,019574.

Cioè su cento parti:

	trovato				calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
	I	II	III	IV	
Carbonio	73,06	73,18	—	—	73,38
Idrogeno	5,06	5,08	—	—	5,03
Azoto	—	—	9,79	10,18	10,07

È discretamente solubile a caldo, poco a freddo nell'acido acetico glaciale, e lo si ha da questo solvente in splendide lamelle rosse, dotate di lucentezza verde cantaride. Dall'alcool o da una miscela di alcool e di etere acetico si separa anche in forma di lunghi aghi piatti di color rosso a riflesso dorato. Pochissimo solubile nell'alcool, nell'etere e nella ligroina a caldo, quasi insolubile a freddo, si scioglie di più nel cloroformio, benzolo, solfuro di carbonio e etere acetico. Colora appena a caldo le soluzioni acquose degli idrati alcalini, sia concentrate che diluite, cosicchè si può ritenere insolubile negli alcali.

Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-violetta: è insolubile negli acidi diluiti.

Etere metilico $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OCH_3\\(2)N{=}N{-}(1)C_6H_4(2)OCH_3\end{cases}$. — Ottenuto per azione del solfato di metile sull'o-ossiazocomposto collo stesso metodo di eterificazione descritto da uno di noi per la preparazione degli eteri metilici degli arilazo-βnaftoli (1),

(1) Vedi loco citato.

cioè in presenza di un eccesso di soluzione di idrato sodico al 30 %, si presenta cristallizzato dall'alcool in forma di prismetti di color rosso-vivo, fusibili a 90-91°.

I. Gr. 0,1281 di sostanza diedero gr. 0,3466 di anidride carbonica e gr. 0,0663 di acqua.

II. Gr. 0,1396 di sostanza diedero cc. 12 di azoto ($H_0 = 728,823$ $t = 16°$), ossia gr. 0,013498.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	73,79	—	73,97
Idrogeno	5,75	—	5,47
Azoto	—	9,66	9,58

Piuttosto solubile a caldo nell'alcool e negli altri solventi organici, meno a freddo, si scioglie leggermente negli acidi diluiti a caldo con colorazione rossa. Nell'acido solforico concentrato è solubile con colorazione rossa.

L'etere metilico bollito con acido cloridrico e alcool si saponifica facilmente dando alcool metilico e 2-o-anisilazo-1naftol, che cristallizzato dall'alcool fuse a 180-181°. Ridotto con polvere di zinco in soluzione acetica, si scinde in o-anisidina e in etere metilico del 2 amido-1naftol $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OCH_3\\(2)NH_2\end{cases}$, che è costituito conformemente ai dati di Noelting, Grandmougin e Freimann (1) da fogliette bianche lucenti, facilmente volatili col vapor d'acqua, fusibili tra 48° e 49°.

Acetilderivato $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OC_2H_3O\\(2)N=N(1)C_6H_4(2)OCH_3\end{cases}$. — Ottenuto per azione dell'anidride acetica sulla soluzione acetica dell'ossiazocomposto in presenza di acetato sodico e per ebollizione prolungata di circa 8 ore, forma cristallizzato dall'alcool aghetti prismatici rossi, fusibili a 106°.

Gr. 0,1204 di sostanza diedero cc. 9 di azoto ($H_0 = 722,051$ $t = 15°$), ossia gr. 0,010066.

(1) B. *42*, 1384 (1909).

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_3$
Azoto	8,36	8,75

Molto solubile nell'alcool e negli altri solventi organici comunemente impiegati, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione violetta.

4-o-Anisilazo-1naftol $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OH\\(4)N{=}N(1)C_6H_4(2)OCH_3\end{cases}$. — La soluzione del sale sodico del 4-o-anisilazo-1naftol, separata per filtrazione dal 2-o-anisilazo-1naftol, venne trattata con acido acetico, e il composto separatosi venne purificato preparandone il sale di ammonio, sciogliendo il prodotto in ammoniaca concentrata: il filtrato ammoniacale, che contiene il sale di ammonio, venne concentrato a bagnomaria e quindi saturato con anidride carbonica: si precipitò così il p-ossiazocomposto, che cristallizzato dall'alcool diluito, si ottenne in fogliette di color rosso-granato, con riflesso dorato o verde cantaride, fusibili con decomposizione a 173°.

I. Gr. 0,3196 di sostanza fornirono gr. 0,8568 di anidride carbonica e gr. 0,1448 di acqua.

II. Gr. 0,1246 di sostanza diedero cc. 11 di azoto ($H_0 = 725,900$ $t = 17°$), ossia gr. 0,012270.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_3$
	I	II	
Carbonio	73,11	—	73,38
Idrogeno	5,03	—	5,03
Azoto	—	9,84	10,07

Solubilissimo in alcool e cloroformio, abbastanza solubile in benzolo e solfuro di carbonio, è poco solubile in etere, pressochè insolubile in etere di petrolio e ligroina. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione bleu-indaco, nell'acido cloridrico concentrato con colorazione bleu-violetta, ed è pure leggermente solubile negli acidi diluiti a caldo con co-

lorazione rosso-violetta. Solubilissimo negli alcali caustici anche molto diluiti con magnifico color rosso, si scioglie poco invece nell'ammoniaca.

Etere metilico $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OCH_3\\(4)N=N(1)C_6H_4(2)OCH_3\end{cases}$. — Ottenuto per azione del solfato di metile sulla soluzione dell'ossiazocomposto in idrato sodico al 10 %, cristallizza dall'alcool in fogliette di color giallo-ranciato, fusibili a 121-122°.

Gr. 0,1416 di sostanza diedero cc. 12 di azoto ($H_0=742,300$ $t=16°$), ossia gr. 0,013751.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Azoto	9,71	9,58

Molto solubile in alcool, etere, cloroformio e benzolo, si scioglie pure discretamente in ligroina: in acido solforico concentrato dà una soluzione bleu tendente al verde; è pure solubile a caldo negli acidi diluiti con colorazione bleu-violetta.

Etere etilico $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OC_2H_5\\(4)N=N(1)C_6H_4(2)OCH_3\end{cases}$. — Ottenuto col solfato di etile operando nelle stesse condizioni della preparazione dell'etere metilico, forma, cristallizzato dall'alcool, aghetti di color ranciato, fusibili a 84°.

Gr. 0,1161 di sostanza diedero cc. 9,4 di azoto ($H_0=744,500$ $t=15°$), ossia gr. 0,010842.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O_2$
Azoto	9,34	9,15

Molto solubile nella maggior parte dei solventi organici, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione bleu-verdastra e negli acidi minerali diluiti con colorazione rosso-violetta.

Acetilderivato $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OC_2H_3O\\(4)N=N(1)C_6H_4(2)OCH_3\end{cases}$. — Forma, cristallizzato dall'alcool, aghetti rossi, lucenti, fusibili a 92°.

Gr. 0,1225 di sostanza diedero cc. 9 di azoto ($H_0 = 741.567$ $t = 12°$), ossia gr. 0,010468.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{16}N_2O_3$
Azoto	8.54	8,75

È solubile discretamente in tutti i comuni solventi organici: insolubile negli idrati alcalini, si scioglie in acido solforico concentrato con colorazione bleu-indaco. Bollito con alcali acquosi, si saponifica facilmente.

Benzoilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OC_7H_5O \\ (4)N{=}N(1)C_6H_4(2)OCH_3 \end{cases}$. — Ottenuto col metodo Schotten-Baumann, cristallizza dall'acido acetico in fini aghi giallo-bruni, fusibili a 140°.

Gr. 0,1478 di sostanza diedero cc. 10 di azoto ($H_0 = 733.154$ $t = 24°$), ossia gr. 0,010928.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{24}H_{18}N_2O_3$
Azoto	7,39	7,32

È poco solubile nei comuni solventi organici, un po' di più nell'acido acetico.

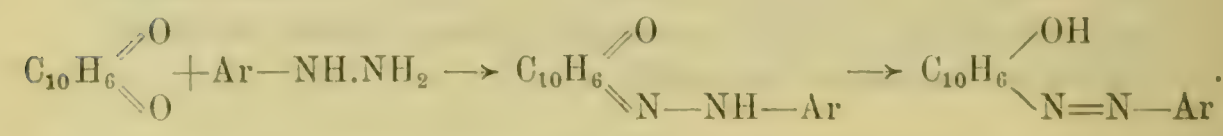
Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-violetta, che passa tosto al bleu-indaco, poichè avviene saponificazione (infatti il 4-o-anisilazo-1naftol si scioglie nell'acido solforico concentrato con magnifica colorazione bleu-indaco) (1).

Viene saponificato facilmente anche dalle soluzioni bollenti diluite degli idrati alcalini.

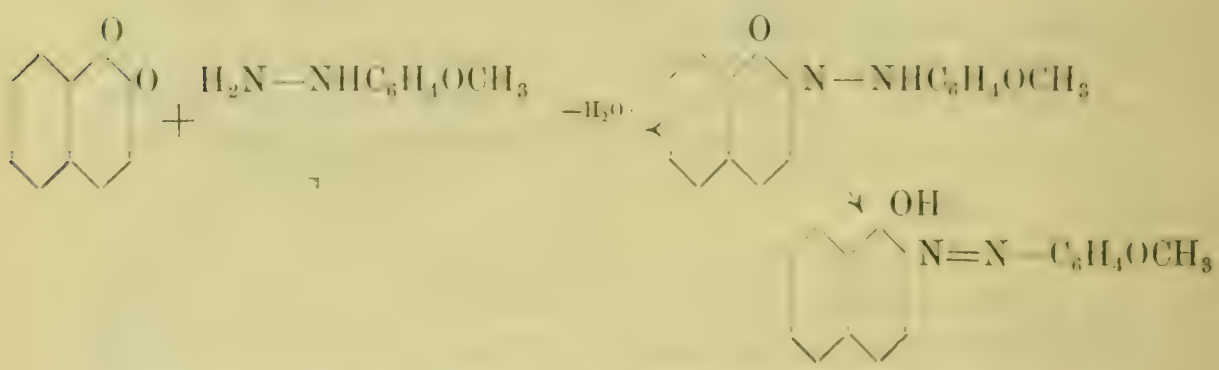
(1) Infatti sciogliendo il benzoilderivato nell'acido solforico concentrato e dopo pochi minuti, cioè appena il colore dal rosso-violaceo è passato al bleu-indaco, versando la soluzione solforica sul ghiaccio pesto, si ottiene un precipitato cristallino di colore verde cantaride o violetto metallico costituito dal solfato del 4-o-anisilazo-1naftol: diluendo fortemente con acqua o trattando con idrato sodico e acidificando quindi con acido cloridrico diluito si ha il 4-o-anisilazo-1naftol, che cristallizzato dall'alcool, fonde a 173°.

2-o-Anisilazo-1naftol dal β-naftochinone e o-anisilidrazina.

È noto che agendo in quantità equimolecolari le arilidrazine sull'1-2-naftochinone danno luogo ai monoidrazoni, che istantaneamente si traspongono negli o-ossiazocomposti corrispondenti.



Era quindi da prevedersi la formazione del 2-o-anisilazo-1naftol per azione della o-anisilidrazina sul β-naftochinone secondo lo schema:



Infatti aggiungendo a una soluzione di β-naftochinone in acido acetico una soluzione equimolecolare di o-anisilidrazina (1)

(1) L'o-anisilidrazina $C_6H_4\begin{cases}(1)NH—NH_2\\(2)OCH_3\end{cases}$ venne ottenuta con ottimo rendimento col metodo di V. Meyer al cloruro stannoso anzichè col metodo al solfito di Fischer, che secondo Reisenegger (A. *221*, 318 [1883]) dà risultato poco soddisfacente. Infatti da 25 gr. di o-anisidina abbiamo potuto ottenere facilmente 22 gr. di o-anisilidrazina pura. Ecco come abbiamo operato: 25 gr. di o-anisidina, sciolti in 30 gr. di acido cloridrico concentrato e 250 gr. di acqua, e addizionati di gr. 300 di acido cloridrico concentrato, vennero diazotati in miscuglio frigorifero con gr. 15 di nitrito sodico sciolti in 50 cc. di acqua; alla soluzione del cloruro di o-anisildiazonio così ottenuta si aggiunsero a poco a poco e con buon raffreddamento gr. 125 di cloruro stannoso in 250 gr. di acido cloridrico concentrato. Lasciando a sè per qualche tempo si separa il cloridrato dell'idrazina, che viene raccolto,

in acido acetico e raffreddando accuratamente con ghiaccio all'esterno si ha subito, accompagnata da un leggero sviluppo di gas, la formazione dell'o-ossiazocomposto, poichè la colorazione della soluzione istantaneamente dal giallo-bruno passa al rosso-vivo. Lasciando a sè si separano cristalli dell'ossiazocomposto, che può venir completamente separato dalla soluzione acetica per aggiunta di acqua. Cristallizzato ripetutamente dall'alcool, si ottiene in fogliette rosse a riflesso dorato, fusibili a 180-181° e perfettamente identiche col 2-o-anisilazo-1naftol ottenuto per azione del cloruro di o-anisildiazonio sull'α-naftol.

Gr. 0,1004 di sostanza diedero cc. 8,8 di azoto ($H_0 = 742,918$ $t = 15°$), ossia gr. 0,010130.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
Azoto	10,09	10,07

Per maggior conferma venne con solfato di metile trasformato nell'etere metilico, che fuse a 90-91°, precisamente come quello che si ottiene dal 2-o-anisilazo-1naftol, preparato dall'α-naftol per azione del cloruro di o-anisildiazonio.

Azione del cloruro di p-anisildiazonio sull'α-naftol sciolto in alcool.

La diazotazione della p-anisidina e la copulazione del cloruro di p-anisildiazonio ottenuto coll'α-naftol, furono eseguite esattamente come venne descritto per l'o-anisidina. Si riscontrarono i due isomeri, di cui l'orto in quantità di circa il 10 % di p-anisidina impiegata. La separazione venne qui pure eseguita colla soluzione di idrato sodico al 4 %. La parte insolubile è costituita da 2-p-anisilazo-1naftol, la parte solubile da 4-p-anisilazo-1naftol.

---

lavato e quindi decomposto con eccesso di idrato sodico; la base, messa così in libertà, viene estratta con etere, e si ha facilmente solida e quasi bianca per distillazione dell'etere. Cristallizzata dall'etere di petrolio, si ha in lunghi aghi bianchi, che fondono, secondo i dati di Reisenegger (vedi loco citato), a 43-44°.

Isomeri orto- e para-p-anisilazo-α-naftoil.

2-p-Anisilazo-1-naftol $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OH\\(2)N=N(1)C_6H_4(4)OCH_3\end{cases}$. — Si separa dall'alcool in cristalli, costituiti da fogliette di color rosso-granato, che cominciano a rammollirsi verso 113° per fondere completamente soltanto a 127-128°.

I. Gr. 0,2374 di sostanza fornirono gr. 0,6364 di anidride carbonica e gr. 0,1106 di acqua.

II. Gr. 0,1306 di sostanza diedero cc. 11,4 di azoto ($H_0 = 740,925$ $t = 16°$), ossia gr. 0,013038.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	73,11	—	73,38
Idrogeno	5,17	—	5,03
Azoto	—	9,98	10,07

Nell'alcool è molto più solubile specialmente a caldo dell'isomero 2-o-anisilazo-1naftol: anche negli altri solventi dimostra una solubilità maggiore. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa. Poco solubile negli alcali acquosi a freddo, si scioglie discretamente a caldo. Per raffreddamento cristallizza il sale dell'o-ossiazocomposto. È pochissimo solubile in ammoniaca. Il 2-p-anisilazo-1naftol ridotto diede origine a p-anisidina e a 2-amido-1naftol, che, posto in libertà dal cloridrato con ammoniaca, formò le caratteristiche pellicole violette di imido-βnaftochinone $C_{10}H_6\begin{cases}O\\NH\end{cases}$.

Sale di sodio $C_{17}H_{13}N_2O_2Na$. — Cristallizza dalle soluzioni bollenti dell'ossiazocomposto in idrato sodico al 10 % in fini fogliette rosse con riflesso dorato, ed è facilmente decomposto dall'acqua. L'ossiazocomposto, ottenuto per decomposizione del sale con acido cloridrico diluito, cristallizzato dall'acido acetico, fuse completamente a 127-128°.

Acetilderivato $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OC_2H_3O\\(2)N{=}N(1)C_6H_4(4)OCH_3\end{cases}$. — Ottenuto per ebollizione prolungata della soluzione acetica dell'o-ossiazocomposto con eccesso di anidride acetica in presenza di acetato sodico, forma, cristallizzato dall'alcool, aghetti di color giallo-arancio, fusibili a 178°.

Gr. 0,1537 di sostanza diedero cc. 11,4 di azoto (H_0=727,175 t = 11°), ossia gr. 0,013062.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{16}N_2O_3$
Azoto	8,49	8,75

Solubile discretamente a caldo, molto meno a freddo in alcool, cloroformio, benzolo ed etere, è molto solubile in acido acetico, quasi insolubile in ligroina. Si scioglie in acido solforico concentrato con colorazione rossa. Scaldato all'ebollizione con soluzioni alcaline, viene facilmente saponificato.

4-p-Anisilazo-1naftol $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OH\\(4)N{=}N(1)C_6H_4(4)OCH_3\end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool in fini aghetti di color verde cantaride o in fogliette di color giallo oro, che si decompongono fondendosi a 168°, con anteriore contrazione di volume verso 165°.

Gr. 0,0982 di sostanza diedero cc. 8,6 di azoto (H_0=736,925 t = 16°), ossia gr. 0,009782.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
Azoto	9,96	10,07

Discretamente solubile a caldo, poco a freddo nell'alcool e nella maggior parte dei solventi organici, che comunemente si impiegano.

L'acido solforico concentrato lo scioglie con colorazione bleu. Negli alcali diluiti a freddo è poco solubile, poichè si copre di uno strato di sale poco solubile in acqua, che lo protegge dall'ulteriore attacco della soluzione alcalina, a caldo invece si scioglie molto e per raffreddamento cristallizza il sale. È poco solubile in ammoniaca anche concentrata.

Sale di sodio $C_{17}H_{13}N_2O_2Na$. — Si separa in fogliette di color giallo oro dalle soluzioni concentrate dell'ossiazocomposto in idrato sodico al 10 % bollente. È solubile in acqua con colorazione rossa.

Etere metilico $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OCH_3 \\ (4)N{=}N(1)C_6H_4(4)OCH_3 \end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool in finissimi aghetti di color giallo-rossastro, fusibili a 134°.

Gr. 0,1078 di sostanza diedero cc. 8,8 di azoto ($H_0 = 741,447$ $t = 15°$), ossia gr. 0,010110.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Azoto	9,37	9,58

Poco solubile a caldo, ancor meno a freddo nell'alcool, si scioglie di più nell'etere, cloroformio e benzolo ed è pressochè insolubile in ligroina.

Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione bleu, negli acidi diluiti è leggermente solubile soltanto all'ebollizione.

Etere etilico $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OC_2H_5 \\ (4)N{=}N{-}(1)C_6H_4(4)OCH_3 \end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool in fini aghi di color giallo-ranciato, fusibili a 128°.

Gr. 0,1721 di sostanza diedero cc. 14 di azoto ($H_0 = 722,051$ $t = 15°$), ossia gr. 0,015659.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O_2$
Azoto	9,09	9,15

Nell'alcool è molto solubile a caldo, poco a freddo: in acido solforico concentrato si scioglie con colorazione azzurra.

Acetilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OC_2H_3O \\ (4)N{=}N(1)C_6H_4(4)OCH_3 \end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool in aghetti gialli, fusibili a 119°.

Gr. 0,1452 di sostanza diedero cc. 11 di azoto ($H_0 = 722,051$ $t = 15°$), ossia gr. 0,012303.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{16}N_2O_3$
Azoto	8,47	8,75

È molto solubile in alcool e negli altri ordinari solventi. L'acido solforico concentrato lo scioglie con colorazione azzurra.

Azione del cloruro di o-fenetildiazonio sull'α-naftol sciolto in alcool.

La copulazione eseguita nello stesso modo che col cloruro di o-anisildiazonio (quantità calcolate corrispondenti a quelle impiegate in questo caso) diede origine ai due isomeri, di cui l'orto in quantità di circa il 15 % di base impiegata. La separazione venne eseguita trattando il prodotto separatosi in soluzione acida con idrato sodico al 4 %: la porzione insolubile è costituita da 2-o-fenetilazo-1naftol, la porzione solubile da 4-o-fenetilazo-1naftol.

Isomeri orto- e para-o-fenetilazo-αnaftoli.

2-o-Fenetilazo-1naftol $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OH \\ (2)N = N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5 \end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool in lunghi aghi di color rosso con riflesso verde cantaride, fusibili a 162° con leggero rammollimento verso 159°.

I. Gr. 0,3045 di sostanza fornirono gr. 0,8234 di anidride carbonica e gr. 0,1508 di acqua.

II. Gr. 0,1500 di sostanza diedero cc. 13 di azoto ($H_0 = 730,940$ $t = 16°$), ossia gr. 0,014665.

III. Gr. 0,1194 di sostanza diedero cc. 10 di azoto ($H_0 = 730,940$ $t = 17°$), ossia gr. 0,011242.

Cioè su cento parti:

	trovato			calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
	I	II	III	
Carbonio	73,74	—	—	73,97
Idrogeno	5,50	—	—	5,47
Azoto	—	9,77	9,41	9,58

È poco solubile a caldo, pochissimo a freddo nell'alcool e nella ligroina, più solubile nell'acido acetico, nel benzolo, nel cloroformio e nel solfuro di carbonio. L'acido solforico concentrato lo scioglie molto con colorazione rossa tendente al violetto. Colle soluzioni degli idrati alcalini si comporta come il 2-o-anisilazo-1naftol, cioè le colora appena all'ebollizione. Negli acidi diluiti è insolubile.

Acetilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OC_2H_3O \\ (2)N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5 \end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool diluito in fini aghi rossi, lucenti, fusibili a 77-78°.

Gr. 0,1336 di sostanza diedero cc. 9,7 di azoto (H_0=722,051 t = 15°), ossia gr. 0,010849.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{18}N_2O_3$
Azoto	8,12	8,38

È molto solubile nell'alcool e nei comuni solventi organici.

Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione violetta.

4-o-Fenetilazo-1naftol $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OH \\ (4)N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5 \end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool in aghi piatti, di color rosso-granato cupo, splendenti, fusibili a 160-161°.

Gr. 0,1672 di sostanza diedero cc. 14,2 di azoto (H_0=730,940 t = 16°), ossia gr. 0,016019.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Azoto	9,58	9,58

Molto solubile in alcool, cloroformio, acido acetico e altri solventi a caldo, lo è relativamente poco a freddo. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione bleu indaco. Si scioglie facilmente nelle soluzioni diluite degli idrati alcalini, poco invece nell'ammoniaca anche concentrata.

Etere metilico $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OCH_3\\(4)N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5\end{cases}$. — Dall'alcool si ha in bei cristalli prismatici, di color rosso vivo, fusibili a 91°.

Gr. 0,1779 di sostanza diedero cc. 14 di azoto ($H_0 = 734,933$ $t = 16°$), ossia gr. 0,015881.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O_2$
Azoto	8,92	9,15

Molto solubile a caldo, poco a freddo nell'alcool, si scioglie molto nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio. In acido solforico concentrato si scioglie con colorazione bleu che tende al verde: è leggermente solubile a caldo negli acidi diluiti.

Etere etilico $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OC_2H_5\\(4)N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5\end{cases}$. — Si ha dall'alcool in aghi prismatici, rossi, fusibili a 98°.

Gr. 0,1341 di sostanza diedero cc. 10 di azoto ($H_0 = 734,933$ $t = 16°$), ossia gr. 0,011343.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O_2$
Azoto	8,45	8,75

Si scioglie poco a freddo, mentre è molto solubile a caldo nell'alcool e negli altri solventi. Nell'acido solforico si scioglie con colorazione bleu-verdastra.

Acetilderivato $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OC_2H_3O\\(4)N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5\end{cases}$. — Cristallizza dall'alcool in aghetti rossi, fusibili a 101°.

Gr. 0,1995 di sostanza diedero cc. 14 di azoto ($H_0 = 741,447$ $t = 15°$), ossia gr. 0,016084.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{18}N_2O_3$
Azoto	8,06	8,38

Discretamente solubile nell'alcool e negli altri solventi organici, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione bleu-indaco. Insolubile negli alcali acquosi, viene da questi saponificato facilmente all'ebollizione.

Benzoilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)OC_7H_5O \\ (1)N=N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5 \end{cases}$. — Ottenuto col metodo Schotten-Baumann, cristallizza dall'alcool in aghi di color rosso-mattone, che si fondono a 111°.

Gr. 0,1648 di sostanza diedero cc. 10,5 di azoto (H_0=736,925 t = 16°), ossia gr. 0,011943.

Cioè su cento parti:

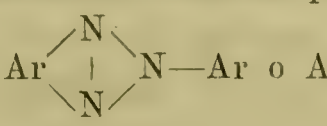
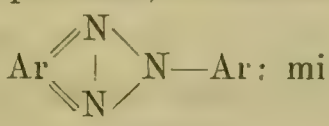
	trovato	calcolato per $C_{25}H_{20}N_2O_3$
Azoto	7,24	7,07

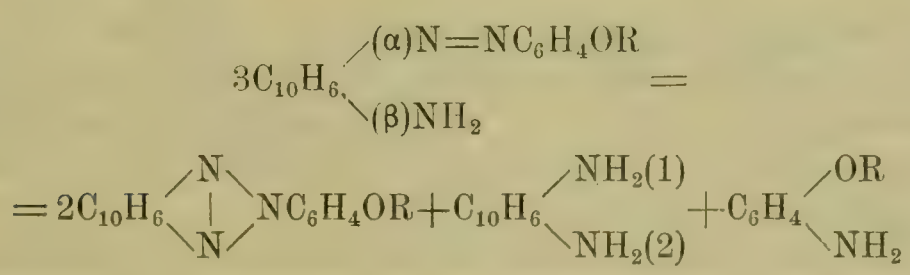
Molto solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool, lo è discretamente nel benzolo, etere e cloroformio. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa, che passa dopo pochi istanti al bleu indaco, poichè avviene saponificazione con messa in libertà di 4-o-fenetilazo-1naftol.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Febbraio 1914.

Su alcuni eteri di naftilen-n-ossifeniltriazoli.

Nota del Dott. G. FERRERI

È noto (1) che gli o-amidoazocomposti si decompongono per azione del calore in amina primaria, o-diamina e triazoli della struttura  o  : mi sembrò interessante esaminare se si comportassero analogamente gli o-amidoazocomposti ottenuti per copulazione dei cloruri di o- e p-anisil e di o- e p-fenetildiazonio colla β-naftilamina (2), poichè in tal caso si sarebbe giunti facilmente agli eteri dei naftilen-n-ossifeniltriazoli, finora sconosciuti, e da questi ai naftilen-n-ossifeniltriazoli stessi, ottenuti per la prima volta da Zincke (3) per azione dell'acido cromico o del biossido di piombo sugli o-amidoazocomposti, con una reazione che conduce a prodotti in generale di difficile purificazione. Trovai che effettivamente, scaldando quei composti verso 300°, avviene anche in questo caso la reazione seguente:



ed essa costituisce un ottimo metodo di preparazione degli eteri metilici ed etilici dell'o- e p-naftilen-n-ossifeniltriazolo. Si formano inoltre in piccola quantità, per saponificazione degli eteri,

(1) G. *40*, II, 132 (1910).
(2) G. *43*, II, 230 (1913).
(3) B. *18*, 3136 (1885).

e specialmente nel caso degli o-composti, gli ossiderivati corrispondenti.

Gli eteri che descrivo in questa nota sono sostanze incolore, ben cristallizzate, assai solubili negli ordinari solventi, meno nell'alcool, specialmente a freddo. Sono solubili nell'acido solforico concentrato e riprecipitano inalterati per diluizione con acqua. Coi riducenti non si alterano; il cloruro di alluminio anidro li saponifica facilmente. Coll'acido nitrico, i paracomposti possono dare mononitroderivati nel nucleo benzenico, aventi il nitrogruppo in posizione orto coll'ossidride eterificato, mentre gli ortocomposti, nelle medesime condizioni, non reagiscono.

Naftilen-n-o-anisiltriazolo $C_{10}H_6\begin{matrix}N\\|\\N\end{matrix}N(1)C_6H_4(2)OCH_3$

Si ottiene per azione del calore sulla o-anisilazoβnaftilamina, che scaldata verso 300° si decompone secondo la reazione principale seguente:

$$3C_{10}H_6\begin{matrix}(\alpha)N{=}N{-}(1)C_6H_4(2)OCH_3\\(\beta)NH_2\end{matrix} =$$

$$= 2C_{10}H_6\begin{matrix}N\\|\\N\end{matrix}N(1)C_6H_4(2)OCH_3 + C_{10}H_6\begin{matrix}NH_2(1)\\NH_2(2)\end{matrix} + C_6H_4\begin{matrix}OCH_3(2)\\NH_2\ (1)\end{matrix}$$

Distillando il prodotto della reazione si ha verso 220° una porzione costituita dall'o-anisidina, che ridistillata passa quasi completamente a 218° e che venne caratterizzata diazotandola e copulandola con β-naftilamina, riottenendosi così la o-anisilazoβnaftilamina, fusibile a 133-134°.

Versando il residuo della distillazione, ancora fuso, nell'alcool, si separa una massa cristallina bruna costituita da naftilen-n-o-anisiltriazolo e da piccole quantità di naftilen-n-o-ossifeniltriazolo, mentre la 1,2 naftilendiamina rimane in soluzione; essa venne isolata precipitandola sotto forma di solfato, che cristallizzato dall'acqua in presenza di carbone animale, si separò in fogliette leggermente giallognole.

Gr. 0,1498 di sostanza fornirono gr. 0,0841 di solfato di bario, corrispondenti a gr. 0,03533041 di acido solforico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $(C_{10}H_6N_2H_4)_2H_2SO_4$
H_2SO_4	23,61	23,67

Per separare il naftilen-n-o-anisiltriazolo dall'ossiderivato, la massa cristallina rimasta indisciolta dall'alcool venne scaldata a b.m. con una soluzione di idrato sodico al 25 %: in tal modo tutto l'ossiderivato passa in soluzione, mentre l'etere può essere raccolto e purificato cristallizzandolo una prima volta dall'acido acetico in presenza di carbone animale, ed infine due volte dall'alcool. Si ottiene allora sotto forma di tavole prismatiche ben sviluppate, incolore e trasparenti, che fondono a 113°.

I. Gr. 0,1928 di sostanza fornirono cc. 25,8 di azoto ($H_0 = 738,045$ $t = 14°$) ossia gr. 0,0292163899.

II. Gr. 0,1168 di sostanza fornirono cc. 15,4 di azoto ($H_0 = 743,279$ $t = 13°$) ossia gr. 0,017891329.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{13}N_3O$
	I	II	
Azoto	15,15	15,31	15,27

Molto solubile in benzolo e cloroformio, relativamente poco solubile a freddo in alcool ed acido acetico. Solubile in etere. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione verdognola e riprecipita inalterato per aggiunta di acqua.

Acidificando il liquido alcalino che servì alla purificazione si possono isolare piccole quantità di *naftilen-n-o-ossifeniltriazolo* $C_{10}H_6 \begin{matrix} N \\ | \\ N \end{matrix} N(1)C_6H_4(2)OH$, che purificato per cristallizzazione dall'acido acetico e dall'alcool si separa in fini aghi bianchi che fondono a 140°, secondo i dati di Zincke (1).

Grammi 0,1353 di sostanza fornirono cc. 18,4 di azoto ($H_0 = 741,799$ $t = 10°$) ossia gr. 0,021597371.

(1) B. *18*, 3136 (1885).

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{11}N_3O$
Azoto	15,96	16,09

Molto solubile in acido acetico, benzolo, cloroformio, alcool, poco a freddo in quest'ultimo. Solubile negli alcali, non nei carbonati alcalini. Si lascia facilmente eterificare per azione del solfato di metile: la reazione si eseguisce sciogliendo l'ossiderivato in idrato potassico al 50 % e quindi trattando con un eccesso di solfato di metile, a caldo; lasciando raffreddare si separa il naftilen-n-o-anisiltriazolo che ricristallizzato dall'alcool fonde a 113°.

Il naftilen-n-o-anisiltriazolo sciolto in benzolo anidro si saponifica facilmente per azione del cloruro di alluminio: la reazione avviene già a freddo e si completa scaldando a b.m.: si ottiene così una massa bruna, da cui per trattamento con acido cloridrico concentrato o con acqua si separa l'ossiderivato, che cristallizzato dall'alcool fornisce aghetti bianchi fondenti a 140°.

Grammi 0,1332 di sostanza fornirono cc. 18,8 di azoto ($H_0 = 729,058$ $t = 15°$) ossia gr. 0,021234331.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{11}N_3O$
Azoto	15,94	16,09

Il naftilen-n-o-anisiltriazolo non reagisce con l'acido nitrico diluito $\left(\frac{2}{1}\,n\right)$, per dare il mononitro derivato come fanno i paracomposti: ho però preparato un mononitro derivato partendo dalla p-nitro-o-anisilazoβnaftilamina ed ossidandola con una soluzione acquosa di acido cromico, secondo il metodo seguito da Meldola e Ughes (1) a proposito della preparazione delle nitrobenzolaziminoβnaftaline.

(1) Soc. 59, 379. (1891).

p-nitro-o-anisilazoβnaftilamina $C_{10}H_6\begin{cases}(\alpha)N{=}N(1)C_6H_3\begin{cases}OCH_3(2)\\NO_2\ (4)\end{cases}\\(\beta)NH_2\end{cases}$

Si prepara facendo agire il cloruro di p-nitro-o-anisildiazonio su una soluzione alcoolica di β-naftilamina, ottenendosi così una massa rossa che cristallizza dall'alcool sotto forma di aghetti rossi a riflesso dorato, fondenti a 206°.

Grammi 0,1801 di sostanza fornirono cc. 27,2 di azoto ($H_0 = 733,340$ $t = 13°$) ossia gr. 0,031173779.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_4O_5$
Azoto	17,30	17,39

Poco solubile a freddo in alcool, benzolo, acido acetico, discretamente a caldo. Più solubile in cloroformio.

naftilen-n-o-anisil-p-nitrotriazolo $C_{10}H_6\begin{cases}N\\|\\N\end{cases}N(1)C_6H_3\begin{cases}OCH_3(2)\\NO_2\ (4)\end{cases}$

Si ottiene facendo agire su una soluzione di p-nitro-o-anisilazoβnaftilamina in soluzione acetica, una soluzione acquosa di acido cromico.

Il colore della soluzione passa dal rosso rubino al giallo bruno, e per diluizione con acqua si separa il composto sotto forma di una sostanza giallognola, che cristallizzata una prima volta dall'acido acetico, quindi dall'alcool, forma finissimi aghetti bianchi che fondono a 203°.

Grammi 0,1440 di sostanza fornirono cc. 22,2 di azoto ($H_0 = 734,577$ $t = 17°$) ossia gr. 0,025064536.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{12}N_4O_3$
Azoto	17,36	17,50

Solubile a caldo in acido acetico, benzolo e cloroformio, poco a freddo. Nell'alcool si scioglie poco a caldo, pochissimo a freddo.

naftilen-n-o-fenetiltriazolo $C_{10}H_6 \begin{matrix} N \\ \\ N \end{matrix} N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5$

Venne ottenuto analogamente all'etere metilico, per azione del calore sulla o-fenetilazoβnaftilamina $C_{10}H_6 \begin{matrix} (\alpha)N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5 \\ (\beta)NH_2 \end{matrix}$.

Il naftilen-n-o-fenetiltriazolo, dopo trattamento con idrato sodico, cristallizzato prima dall' acido acetico, quindi due volte dall'alcool, si separa sotto forma di tavole prismatiche ben sviluppate che fondono a 85°.

Grammi 0,3234 di sostanza fornirono cc. 41,4 di azoto ($H_0 = 729,058$ $t = 15°$) ossia gr. 0,046760709.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O$
Azoto	14,45	14,53

Molto solubile in benzolo, cloroformio, etere. Nell'alcool e nell'acido acetico si scioglie pure molto a caldo, ma è relativamente poco solubile a freddo. Si comporta analogamente al corrispondente etere metilico.

Acidificando il liquido alcalino, adoperato per la purificazione, si ottengono piccole quantità di *naftilen-n-o-ossifeniltriazolo*, che venne identificato dal punto di fusione 140°, e trasformandolo nuovamente in etere per azione del solfato di etile, nello stesso modo già indicato per la preparazione dell' etere metilico: i cristalli che così si ottengono fondono a 85°.

Grammi 0,1450 di sostanza fornirono cc. 18,5 di azoto ($H_0 = 738,045$ $t = 14°$) ossia gr. 0,020949736.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O$
Azoto	14,44	14,53

Naftilen-n-p-anisiltriazolo $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N \diagdown \\ | \\ \diagdown N \diagup\end{matrix}N(1)C_6H_4(4)OCH_3$

Si ottiene per azione del calore sulla p-anisilazoβnaftilamina, la quale, scaldata verso i 300°, si decompone secondo la seguente equazione:

$$3C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup (\alpha)N{=}N(1)C_6H_4(4)OCH_3 \\ \\ \diagdown (\beta)NH_2\end{matrix} =$$

$$= 2C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N \diagdown \\ | \\ \diagdown N \diagup\end{matrix}N(1)C_6H_4(4)OCH_3 + C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup NH_2(1) \\ \\ \diagdown NH_2(2)\end{matrix} + C_6H_4\begin{matrix}\diagup OCH_3(4) \\ \\ \diagdown NH_2\ (1)\end{matrix}.$$

Distillando il prodotto della reazione, si ha verso 250° una porzione costituita dalla p-anisidina, che ridistillata passa a 245° e che venne caratterizzata diazotandola e copulandola con β-naftol, ottenendosi così il p-anisilazoβnaftol fusibile a 137°.

Versando il residuo della distillazione, ancora fuso, nell'alcool, il triazolo, che vi è poco solubile, si separa in una massa cristallina bruna, mentre la 1,2-naftilendiamina rimane in soluzione e si può isolare facilmente precipitandola sotto forma di cloridrato, per mezzo di una soluzione eterea di acido cloridrico, e quindi mettendo in libertà la base con ammoniaca: cristallizzata dall'acqua fornì lamelle bianche, lucenti, fondenti a 95°.

Il naftilen-n-p-anisiltriazolo venne purificato trattandolo con una soluzione calda di idrato sodico, per separarlo dalle traccie di ossicomposto che pure si formano nella reazione, quindi cristallizzandolo dall'acido acetico glaciale in presenza di carbone animale ed infine due volte dall'alcool: lo si ottiene allora sotto forma di lunghi aghi bianchi che fondono a 129°.

Grammi 0.1004 di sostanza fornirono cc. 13.8 di azoto ($H_0 = 737,372$ $t = 22°$) ossia gr. 0,01529694.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{13}N_3O$
Azoto	15,23	15,27

Il naftilen-n-p-anisiltriazolo è assai solubile in acido acetico glaciale, benzolo, cloroformio, etere, meno nell'alcool e nella ligroina pesante. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione verdastra, riprecipitando inalterato per aggiunta di acqua.

Trattando il naftilen-n-p-anisiltriazolo, sciolto in benzolo anidro, con cloruro di alluminio a freddo, quindi scaldando per pochi minuti a b. m., e trattando poscia la massa bruna con acido cloridrico concentrato o con acqua, si separa il *naftilen-n-p-ossifeniltriazolo* $C_{10}H_6 \begin{matrix} N \\ | \\ N \end{matrix} N(1)C_6H_4(4)OH$, che, purificato sciogliendolo in idrato sodico diluito e riprecipitandolo con un acido, ed infine cristallizzandolo dall'acido acetico, forma fini aghetti bianchi fusibili a 198-199° secondo i dati di Zincke (1).

Grammi 0,1164 di sostanza fornirono cc. 16,3 di azoto ($H_0 = 742,798$ $t = 70°$) ossia gr. 0,018611721.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{11}N_3O$
Azoto	15,98	16,09

Facilmente solubile in acido acetico e nell'alcool, poco nel benzolo e nel toluene.

Sciogliendo l'ossiderivato così ottenuto in idrato potassico al 50 % e trattando con un eccesso di solfato di metile, si riottiene facilmente l'etere, con rendimento quantitativo: la reazione si eseguisce a caldo; per raffreddamento si separa poi il prodotto che cristallizzato dall'alcool forma fini aghi bianchi di naftilen-n-p-anisiltriazolo fondenti a 129°.

Grammi 0,1321 di sostanza fornirono cc. 17,5 di azoto ($H_0 = 729,058$ $t = 15°$) ossia gr. 0,02025803.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{13}N_3O$
Azoto	13,33	15,27

(1) B. *18*, 3136 (1885).

Il naftilen-n-p-anisiltriazolo reagisce facilmente con l'acido nitrico diluito $\left(\frac{2}{1}\ n\right)$ dando luogo al mononitroderivato: con acido nitrico d = 1,40 avviene la stessa reazione, ma si formano pure piccole quantità di altri nitroderivati di cui non mi sono per ora occupato. La reazione con acido nitrico diluito venne eseguita sciogliendo il naftilen-n-p-anisiltriazolo in poco acido acetico glaciale e facendolo bollire per pochi minuti con acido nitrico doppio normale in eccesso: lasciando poi raffreddare, si separò una massa gialla che cristallizzata dall'acido acetico, quindi dal cloroformio ed infine dal benzolo, fornì aghi giallo-chiari fondenti a 220-221°.

I. Gr. 0,2680 di sostanza fornirono gr. 0,6276 di anidride carbonica e gr. 0,0916 di acqua.

II. Gr. 0,1360 di sostanza fornirono cc. 21,6 di azoto ($H_0 = 728,055$ $t = 24°$) ossia gr. 0,023437749.

III. Gr. 0,2369 di sostanza fornirono cc. 37,6 di azoto ($H_0 = 730,154$ $t = 23°$) ossia gr. 0,041103534.

Cioè su cento parti:

	trovato			calc. per $C_{17}H_{12}N_4O_3$
	I	II	III	
Carbonio	63,83	—	—	63,75
Idrogeno	3,79	—	—	3,75
Azoto	—	17,23	17,39	17,50

Pochissimo solubile in alcool, più solubile in acido acetico e nel cloroformio, si scioglie facilmente nel benzolo.

Per stabilire la posizione del nitrogruppo venne preparato il naftilen-n-p-anisil-o-nitrotriazolo partendo dalla o-nitro-p-anisilazoβnaftilamina in soluzione acetica, per azione di una soluzione acquosa di acido cromico.

o-nitro-p anisilazoβnaftilamina $C_{10}H_6\begin{cases}(\alpha)N{=}N(1)C_6H_3\begin{cases}OCH_3(4)\\NO_2\ (2)\end{cases}\\(\beta)\end{cases}$

La o-nitro-p-anisilazoβnaftilamina si ottiene facendo agire il cloruro di o-nitro-p-anisildiazonio su una soluzione alcoolica di β-naftilamina: si separa una massa rossa che cristallizza dal-

l'alcool o dal cloroformio in aghetti rossi con riflesso dorato fondenti a 186°.

Grammi 0,1370 di sostanza fornirono cc. 28,3 di azoto ($H_0 = 738,686$ $t = 16°$) ossia gr. 0,032268647.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_4O_3$
Azoto	17,25	17,39

Poco solubile a freddo, discretamente a caldo in alcool, acido acetico, cloroformio, benzolo. Poco solubile in etere.

Naftilen-n-p-anisil-o-nitrotriazolo $C_{10}H_6 \begin{matrix} \diagup N \diagdown \\ \| \\ \diagdown N \diagup \end{matrix} N(1)C_6H_3 \begin{matrix} \diagup OCH_3(4) \\ \diagdown NO_2\ (2) \end{matrix}$

4 gr. di o-nitro-p-anisilazoβnaftilamina vennero sciolti in circa 500 cc. di acido acetico glaciale e quindi trattati, goccia a goccia, con una soluzione acquosa di acido cromico: il colore della soluzione passa dal rosso al giallo bruno e per diluizione con acqua si separa una sostanza bruna che si purifica cristallizzandola dall'acido acetico glaciale, quindi dal cloroformio ed infine dal benzolo. Da quest'ultimo solvente il composto si separa sotto forma di fini aghetti giallo chiari fondenti a 220-221°.

Grammi 0,1006 di sostanza fornirono cc. 15,2 di azoto ($H_0 = 742,678$ $t = 16°$) ossia gr. 0,0174263017.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{12}N_4O_3$
Azoto	17,32	17,50

Anche pel comportamento coi solventi il naftilen-n-p-anisil-o-nitrotriazolo così ottenuto si dimostra identico al mononitroderivato ottenuto per azione dell'acido nitrico sul naftilen-n-p-anisiltriazolo, per cui si può affermare che il nitrogruppo va a fissarsi in posizione orto col metossile nel nucleo benzolico.

Naftilen-n-p-fenetiltriazolo $C_{10}H_6 \begin{matrix} N \\ | \\ N \end{matrix} N(1)C_6H_4(4)OC_2H_5$

Venne ottenuto analogamente al naftilen-n-p-anisiltriazolo per azione del calore sulla p-fenetilazoßnaftilamina $C_{10}H_6 \begin{matrix} (\alpha)N = N(1)C_6H_4(4)OC_2H_5 \\ (\beta)NH_2 \end{matrix}$. Il naftilen-n-p-fenetiltriazolo, purificato nel modo avanti indicato, si ottiene cristallizzato dall'alcool sotto forma di fini aghi bianchi fondenti a 141°.

Grammi 0,2027 di sostanza fornirono cc. 25,8 di azoto ($H_0 = 737,164$ $t = 16°$) ossia gr. 0,029351962.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{15}N_3O$
Azoto	14,48	14,53

Facilmente solubile nell'acido acetico bollente, cloroformio, benzolo. Nell'alcool si scioglie pochissimo a freddo, discretamente a caldo.

Le proprietà di questo composto sono in tutto analoghe a quelle dell'etere metilico precedentemente descritto.

Per azione dell'acido nitrico, operando nel modo già detto, si ottiene il *naftilen-n-p-fenetil-o-nitrotriazolo* $C_{10}H_6 \begin{matrix} N \\ | \\ N \end{matrix} N(1)C_6H_3 \begin{matrix} OC_2H_5(4) \\ NO_2 \quad (2) \end{matrix}$ che cristallizza dal benzolo in fini aghi giallo chiari che fondono a 177°.

Grammi 0,1354 di sostanza fornirono cc. 19,7 di azoto ($H_0 = 740,045$ $t = 15°$) ossia gr. 0,02258997.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{14}N_4O_3$
Azoto	16,68	16,76

facilmente solubile nel benzolo, meno in acido acetico e nel cloroformio. Difficilmente solubile in alcool.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Febbraio 1914.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Febbraio 1914.

PRESIDENZA DEL SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Pizzi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis in funzione di Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli e del Segretario Renier.

Il senatore Chironi porge un saluto ai colleghi che per la prima volta presiede come Direttore della Classe; e dà poi la parola al ff. di Segretario per la lettura dell'atto verbale dell'adunanza antecedente 1° febbraio 1914, che viene approvato.

Il Socio Ruffini presenta per la inserzione negli *Atti* una Nota di Gian Carlo Buraggi intitolata: *I giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento. II. Giacomino da San Giorgio.*

Pure per gli *Atti* il Socio De Sanctis offre a nome del collega Renier, assente, un saggio di *Etimologie piemontesi* del prof. Attilio Levi, e a nome proprio uno studio di

Augusto Rostagni su *Le vicende della Scuola pitagorica secondo Timeo.*

Invitato dal Presidente, il Socio Einaudi, anche a nome del Socio Ruffini, dà lettura della relazione intorno alla memoria del prof. Giuseppe Prato intitolata: *Un capitolo della vita di Giovanni Law (da documenti inediti).* La Classe, approvata con voto palese la relazione e presa cognizione della monografia del Prato, ne delibera con pienezza di voti segreti la inserzione nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

I Giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento.

II. — Giacomino da San Giorgio.

Nota di GIAN CARLO BURAGGI.

§ 1. — Giacomino da San Giorgio (1) nacque nel primo trentennio del secolo XV. Non sappiamo precisamente in che

(1) Di Giacomino da San Giorgio (*Jacobinus Michelonus* (o *de Michelonibus*) *de Sancto Georgio*) tacciono il Diplovataccio (*De praestantia doctorum*) e il Ficardo (*Vitarum recentiorum iureconsultorum periochae*). Il Forstero (*De historia iuris civilis romani*, lib. III) ne ricorda soltanto il nome, mentre Marco Mantua (*Epitome virorum illustrium qui vel scripserunt vel iurisprudentiam docuerunt in scholis*, n. 154) ne dà un breve cenno biografico, dal quale però si ricava soltanto che il San Giorgio fu discepolo di Giasone, insegnò a Torino ed ebbe per successore Claudio di Seyssel. Il Pancirolo (*De claris legum interpretibus*) lo ricorda appena come maestro di Gio. Francesco Balbo (lib. II, cap. CLVI) e per essere stato sostituito temporaneamente nel 1487 da Claudio di Seyssel (cap. CXXXVII). Il catalogo di libri giuridici del Nevizano (*Index omnium librorum in iure tam pontificio quam civili passim editorum*, con aggiunte del Gomesio e del Ficardo, nell'opera *Iurisconsultorum vitae*, Basilea, 1539) ne enumera le opere. Il Ghilini fra i suoi inediti *Elogi* di uomini illustri ce ne lasciò anche uno del San Giorgio, in cui però non fa che ripetere con lusso di parole il poco che era stato precedentemente scritto (Il ms. del Ghilini si conserva nella Biblioteca Marciana; se ne trovano copie nella Biblioteca dell'Accademia delle Scienze di Torino, E. IV. 28, e in quella di S. M., st. p. 427). Pochissimo ne dice il Fabricio (*Bibliotheca latina mediae et infimae aetatis*, vol. IV, Firenze, 1858, p. 293). Il Della Chiesa (*Catalogo de' scrittori piemontesi, savoiardi e nizzardi*, Carmagnola, 1660, p. 85) ne elenca gli scritti e lo stesso fa sulle sue orme il Rossotti (*Syllabus scriptorum Pedemontii*, Mondovì, 1667, p. 305). Ciò che scrissero questi due ultimi autori è riportato, con lievi aggiunte, nel " Catalogus doctorum qui in alma taurinensi Academia pro tempore iura interpretati sunt " contenuto nella raccolta dei *Privilegia almae taurinensis Universitatis*, Torino, 1679, p. 104. Ricordano

anno, ma poichè è certo che nel 1452 già insegnava nello Studio di Torino, la data della sua nascita non può collocarsi dopo il terzo decennio del '400. Uscì dalla famiglia canavesana Micheloni (1), e trasse il predicato " de Sancto Georgio „ dal luogo natale, San Giorgio Canavese (2). Il predicato poi fu da lui, e più ancora dai posteri, preferito al cognome. È generale l'errore di attribuirgli per patria Torino; ebbe però certamente la cittadinanza torinese. A fargliela conseguire, in mancanza di altri requisiti, sarebbe bastato il suo insegnamento nello Studio di quella città, giacchè nel medio evo era pacificamente ammesso che i dottori acquistassero la cittadinanza del luogo in cui insegnavano (3). Nessuna parentela col nostro hanno altri giureconsulti dello stesso predicato " de Sancto Georgio „. Giovanni " de Sancto Georgio „, canonista vissuto nel sec. XIV, era di famiglia bolognese (4). Giovanni Antonio " de Sancto Georgio „, giurista famoso e cardinale, fu bensì contemporaneo del nostro essendo morto soltanto 15 anni dopo di lui, ma appartenne a famiglia piacentina (5). Lasciò quest'ultimo tra le molte sue opere anche un commentario " super usibus feudorum „, che,

le opere di Giacomino da San Giorgio i repertori bibliografici generali del Gesnero (*Bibliotheca universalis*, Zurigo, 1545, e, con aggiunte del Simlero, 1555 e 1583) e del Draudio (*Bibliotheca classica, sive catalogus officinalis*, Francoforte, 1625), e quelli speciali giuridici del Fontana (*Amphitheatrum legale, seu Bibliotheca legalis amplissima*, Parma, 1688–1694) e del Lipenio (*Bibliotheca realis iuridica* con aggiunte di Struvio e Jenichen, Lipsia, 1746).

(1) Non già " Michelotti „ come scrivono il Della Chiesa, op. cit., p. 85, il Rossotti, op. cit., p. 305, e sulle loro orme molti altri.

(2) " Jacobinus de Michelonis *de loco Sancti Georgii* „ (Archivio di Stato in Torino, *Protocolli dei Segretari Ducali, Serie Archivi di Corte*, vol. 96, c. 127); Jacobinus Michelonus *de Sancto Georgio Canepicii* „ (*ibidem, Marchesato di Saluzzo*, cat. 4ª, mz. 7, n. 25) — Autografi di Giacomino da San Giorgio si possono vedere nell'Arch. di St. di Tor., *March. Sal.*, cat. 4ª, mz. 7, n. 25; *Prot. Segr. Duc., Serie Camerale*, vol. 26, cc. 152 e 174.

(3) Cfr. Lenauderii, *De privilegiis doctorum*, par. II, § 29, n. 39, nei *Tractatus universi iuris*, Venezia, 1584, t. XVIII, f. 8 *v*; Bolognini, *Repetitio in auth. habita. C. ne filius pro patre*, n. 89, nelle *Repetitiones in varias iuris civilis leges*, Venezia, 1608, t. VII, f. 399 *v*.

(4) Cfr. Schulte, *Die Geschichte der Quellen und Literatur des canonischen Rechts*, Stuttgart, 1875-80, vol. II, p. 253.

(5) Schulte, op. cit, vol. II, pp. 338-341.

data la somiglianza dell'argomento e l'omonimia degli autori, potrebbe essere scambiato col trattato " de feudis „ di Giacomino.

§ 2. — Ben poco sappiamo dei suoi studi. Qualche indizio ci fa ritenere che frequentasse l'università patria, la quale dopo le traslazioni a Chieri e a Savigliano era tornata a Torino, dove aveva preso stabile sede. Ma egli fu anche a Pavia (1), al cui Studio accorrevano allora in gran numero gli studenti piemontesi.

Dei suoi maestri ne conosciamo, per sua stessa testimonianza, due, Giason Del Maino (2) e Giovanni da Mombaruzzo (3). Quest'ultimo, giureconsulto pressochè ignoto, insegnò a Torino, e quivi probabilmente lo udì Giacomino, il quale più tardi gli divenne collega (4). Quanto a Giasone, se la notizia che egli ne

(1) Jacobini de Sancto Georgio, *Lectura aurea nusquam antea impressa super prima et secunda partibus Codicis*, Lione, 1521, c. 96 *r*, col. 1ª, n. 1 (commento alla c. 3 *unde liberi* 6, 14): " Et ego audivi ab aliquibus doctoribus papiensibus... „.

(2) Jacobini de Sancto Georgio, op. cit., c. 124 *v*, col. 2ª, n. 5 (commento al tit. *de edicto di. Adr. toll.* 6, 33): " ...cuius [*scilicet Bartoli*] opi. sequitur etiam ful. hic. sed Pau. de ca. cuius opi. secutus est clarissimus *preceptor meus d. Iason* sunt in contraria opi. s. quod utraque... „.

(3) Jacobini de Sancto Georgio, op. cit., c. 96 *r*, col. 1ª, n. 1 (commento alla c. 3 *unde liberi* 6, 14): " Et refert hic subtilissimus doctor *preceptor meus dominus Io. de monte barutio*: quod in primo anno studiorum suorum hec lex fuit data in punctis domino Raphaeli de adurnis civi Genue: qui postea fuit creatus dux in illa civitate „; Idem, *Lectura aurea nusquam antea impressa super secunda parte Digesti veteris*, Lione, 1521, c. 13 *r*, col. 1ª, n. 18 (commento alla l. 38 *de cond. ind.* 12, 6): " *Preceptor meus d. Io. de monte barutio* doctor subtilissimus in isto puncto dicit... „.

(4) Giovanni da Mombaruzzo insegnò diritto civile all'Università di Torino fino al 1459. Fu emulo e rivale del collega Luchino da Genova col quale ebbe contrasti. Cfr. Gabotto, *L'università in Piemonte prima di Emanuele Filiberto*, Torino, 1898, p. 42. Lo troviamo fra i dottori giuristi del collegio di Torino. Cfr. *Statuta venerandi, sacrique Collegii Iurisconsultorum Augustae Taurinorum*, Torino, 1575, p. 26. Ci lasciò, manoscritte, delle lezioni da lui tenute nello studio torinese. Cfr. Pasini, Rivautella e Berta, *Codices manuscripti bibliothecae regii taurinensis athenaei*. Torino, 1749, vol. II, p. 85, codd. CCCXII, CCCXIII, CCCXIV, e *Inventario dei codici superstiti greci e latini antichi della Biblioteca Nazionale di Torino*, nella " Rivista di Filologia e d'Istruzione classica „, vol. XXXII, p. 528, nn. 723-725.

fu discepolo non ci pervenisse da lui stesso, noi stenteremmo a crederla, tanto poco i dati biografici dei due giureconsulti si prestano a darle fede. E invero Giasone, essendo nato nel 1435 (1), aveva soltanto diciassette anni all'epoca in cui il San Giorgio di già insegnava nello Studio di Torino (1452). D'altra parte, siccome Giasone occupò la sua prima cattedra soltanto nel 1467, il giureconsulto piemontese non potè essere suo discepolo prima di allora, tornando così studente dopo di aver professato per tre lustri almeno. Qualora perciò non voglia intendersi l'appellativo di " preceptor meus ", dato da Giacomino a Giasone, nel senso scientifico anzichè in quello didattico, converrà ritenere che egli ne frequentasse le lezioni, allo scopo di perfezionarsi, quando già era avanti negli anni. Il suo soggiorno a Pavia, poichè soltanto colà potè udire Giasone, andrebbe in tal modo collocato dopo il 1467. Verrebbe invece assegnata alla prima giovinezza la frequenza allo Studio torinese, dove con ogni probabilità conseguì il dottorato (2).

§ 3. — Consacratosi all'insegnamento, la sua opera di lettore si svolse tutta quanta nell'università di Torino, dove incominciò ad insegnare assai per tempo continuandovi fino alla morte. Ve lo troviamo già nell'anno scolastico 1452-53, e vi era ancora nel 1494 quando mancò ai vivi; è quindi più di un quarantennio dedicato allo Studio piemontese.

Nel corso della sua carriera occupò varie cattedre prima di raggiungere quella, che fu la definitiva, di ordinario di diritto civile. Cominciò col leggere la Rolandina, insegnamento che gli era affidato nel 1452-53 (3). Poco dopo passò alle Isti-

(1) Cfr. Gabotto, *Giason del Maino e gli scandali universitari nel Quattrocento*, Torino, 1888.

(2) Non si può supporre che l'andata allo studio pavese avesse per scopo il conseguimento del dottorato, perchè già in un documento del 1461 figura come " iuris utriusque doctor " (Archivio di Stato in Torino, *Protocolli dei Segretari Ducali, Serie Archivi di Corte*, vol. 110, c. 6).

(3) Archivio di Stato in Torino, *Protocolli dei Segretari Ducali, Serie Camerale*, vol. 50, c. 160: " ad lecturam Rolandine dominus Jacobinus de Michillinis " con lo stipendio di 10 fiorini " parvi ponderis ".

tuzioni, cattedra che tenne fino al 1459 (1). Nell'anno successivo fu trasferito alla lettura " extraordinaria ordinariorum " di diritto civile (2); ma presto la lasciò (1461), assumendo invece la cattedra ordinaria di diritto canonico (3). Abbandonata più tardi anche quest'ultima, ottenne finalmente quella ordinaria di diritto civile, che coperse per tutto il resto della sua vita.

Abbiamo notizia delle materie svolte dal San Giorgio in qualche anno del suo insegnamento. Così sappiamo che nel 1482 le sue lezioni ebbero per oggetto i seguenti titoli del digesto: *De iurisdictione omnium iudicum* (2, 1); *Quod quisque iuris*, etc. (2, 2); *De legatis* (30, 31, 32); *De transactionibus* (2, 15) (4); e nel 1483-84 i seguenti dieci altri: *De iustitia et iure* (1, 1); *De officio praetorum* (1. 14); *De officio eius cui mandata est iurisdictio* (1, 21); *De iurisdictione omnium iudicum* (2. 1); *Quod quisque iuris*, etc. (2, 2); *Si quis ius dicenti non obtemperaverit* (2, 3); *De edendo* (2, 13); *De pactis* (2, 14); *De transactionibus* (2, 15); *De iudiciis* (5, 1) (5). Nel 1487 svolse in lezioni il suo

(1) A. 1456-57 " ad lecturam institucionum dominus Jacobinus de Michelonis de loco Sancti Georgii "; a. 1458-59 " ad lecturam institucionum dominus Jacobinus de Sancto Georgio unicus et solus " con 40 fiorini di stipendio (*ibidem*, *Serie Arch. Corte*, vol. 96, c. 127; vol. 98, c. 14).

(2) " Ad extraordinariam ordinariorum dominus Jacobinus de Sancto Georgio " (*ibidem*, *Serie Cam.*, vol. 52, cc. 85, 86bis *r*, 89).

(3) Lettere patenti del duca Ludovico della fine del 1461 (è incerta la data del mese e del giorno): " ...Cum nuper... deputaverimus dilectum fidelem consiliarium nostrum dominum Jacobinum de Michelonibus de Sancto Georgio iuris utriusque doctorem ad lecturam ordinariam iuris canonici de [.....] in studio alme universitatis nostre thaurinensis semoto ipso domino Jacobino a lectura extraordinaria ordinariorum iuris civilis quam in eodem studio pro tunc obtinebat... " (*ibidem*, *Serie Arch. Corte*, vol. 110, c. 6). A Giacomino da San Giorgio succedette nella cattedra " extraordinaria ordinariorum iuris civilis " Emiliano da Confienza " legum studens ", fratello del famoso medico Pantaleone.

(4) Lettera dedicatoria di Ugo Le Vasseur a Bartolomeo de Chasseneuz che accompagna l'edizione delle letture di Giacomino fatta a Lione nel 1521: " Illud tandem advertas velim: Jacobinum nostrum: imo potius tuum: titulos quatuor (de iurisdic. scilicet omnium iudicum. Quod quisque iuris. De legatis et de transactionibus. ff.) Anno ab incarnati verbi mysterio. 1482. Taurini (dum ibi magno (ut scis) auditorum concursu publice profiteretur) interpretatum fuisse ".

(5) Ms. G. III. 13 della Biblioteca Nazionale di Torino.

trattato " de feudis „ (1); ma nel 1490 e nel 1491 tornò al *Corpus iuris*, interpretando il digesto e il codice (2).

§ 4. — Gli studi e l'insegnamento non assorbirono però intera la vita di Giacomino da San Giorgio. I duchi di Savoia, che sempre lo tennero in gran conto, lo chiamarono a far parte del loro Consiglio (3), e gli affidarono varî incarichi, qualcuno dei quali di notevole importanza politica. Tale quello relativo alla questione di Saluzzo.

Come è noto, la guerra scoppiata fra il marchese di Saluzzo, spalleggiato dalla Francia, e il duca di Savoia Carlo I subì una tregua ed entrò in una fase di trattative diplomatiche con la convenzione di Chateaubriant del 20 agosto 1487 che fissò per il 25 settembre dello stesso anno una conferenza a Pont Beauvoisin di delegati del re di Francia e del duca di Savoia per esaminare i titoli relativi alla controversia e riferirne poi ad un apposito collegio di arbitri (4). Uno dei rappresentanti del duca fu appunto Giacomino da San Giorgio, il quale parte-

(1) Biblioteca Nazionale di Torino, Ms. H. II. 14, c. 1 *r*: " Incipit lectura famosissimi iuris utriusque monarche domini Jacobini de Sancto Georgio, iuris cesarei ordinariam legentis in felici gymnasio thaurinensi, in libellum feudorum, incohata anno currente 1487, 17 ianuarii in festo sancti Antonii „.

(2) Lettera dedicatoria di Ugo Le Vasseur: " ...Dein anno. 1490. secundam per modum additionum ad Imolensem maxime Alexandrum edidisse lecturam... „ — A c. 2 *r* dell'edizione lionese del 1521 della lettura di Giacomino sul Codice sta scritto: " Clarissimi iuris utriusque monarche et luminis: ac interpretis profundissimi domini Jacobini de Sancto Georgio lectura super codice: quam legit Taurini anno Domini. 1491 „.

(3) Figura già come consigliere ducale in un documento del 1461. V. Archivio di Stato in Torino, *Prot. Segr. Duc.*, *Serie Arch. Cor.*, vol. 110, c. 6. Menzione di tale sua carica si ha in numerosi altri documenti posteriori. Cfr. ad es. *ibidem*, *Marchesato di Saluzzo*, 4ª cat., mz. 7, nn. 18, 21, 24; *Prot. Segr. Duc.*, *Serie Arch. Cor.*, vol. 123, c. 164 *v*. In qualità di consigliere intervenne ad atti importanti dei suoi sovrani, come il giuramento di fedeltà della duchessa Bianca all'imperatore (3 marzo 1493), *ibidem*, vol. 123, c. 149.

(4) Vedasi per questa fase della quistione di Saluzzo Usseglio, *Bianca di Monferrato duchessa di Savoia*, Torino-Roma, 1892, parte I, capi IV e V; Gabotto, *Lo Stato Sabaudo da Amedeo VIII ad Emanuele Filiberto*, vol. II, Torino-Roma, 1893, capo XIV.

cipò a tutti i lavori della conferenza, che, apertasi con ritardo, si perdette in vuote discussioni e si chiuse senza nulla decidere il 31 marzo 1488 (1). Stabilito poco dopo con l'accordo di Chinon (24 maggio 1488) un secondo convegno di francesi e di savoiardi, il San Giorgio fu nuovamente inviato con altri a rappresentarvi il sovrano sabaudo (2). Fallito infine anche questo secondo tentativo, e deferita senz'altro la decisione della questione a un arbitrato, Giacomino si recò a Ginevra ad assistere l'arbitro eletto dal duca di Savoia (3).

Ma anche in altre circostanze partecipò alla vita pubblica dello Stato e della capitale del Piemonte. Così dal 17 al 29 gennaio 1473 lo troviamo insieme con tre suoi colleghi dell'università di Torino, Cristoforo Nicelli, Pietro Trete e Pietro Cara, a Vercelli, dove in quel momento risiedeva la duchessa Iolanda, vedova da poco tempo di Amedeo IX (4). Probabilmente i quattro giureconsulti si erano colà recati per trattare circa le udienze generali che la duchessa inaugurò alcuni mesi più tardi a Torino. Pare infatti che al magistrato della suprema generale udienza appartenesse Giacomino, figurando spesso il suo nome tra i sottoscrittori di sentenze emanate da essa (5). Il comune di Torino poi si valse più volte dell'opera sua eleggendolo a proprio deputato per le adunanze dell'assemblea dei tre Stati (6). Ebbe, in considerazione del lungo insegnamento, il titolo di conte palatino (7), e, poco prima di morire, ottenne anche una

(1) Archivio di Stato in Torino, *Marchesato di Saluzzo*, 4ª cat., mz. 7, nn. 18, 21 e 24. Nota dei pagamenti fatti dall'erario al San Giorgio e ai suoi compagni per rimborso di spese di viaggio e di soggiorno a Pont Beauvoisin si ha nei *Conti dei tesorieri generali di Savoia*, vol. 142, c. 291 *v*, 292 *r*, 292 *v* (Arch. St. Tor., Sez. Camerale).

(2) Arch. di St. in Torino, *March. di Saluzzo*, 4ª cat., mz. 8, n. 3.

(3) Usseglio, op. cit., p. 120.

(4) Gabotto, *Lo Stato Sabaudo*, vol. II, p. 101, n. (4).

(5) Vedasi ad es. nell'Archivio di Stato di Torino il volume 138 dei *Protocolli dei Segretari Ducali* (*Serie Camerale*), che contiene sentenze della suprema generale udienza del 1463 e 1464, a cc. 59 *v*, 65 *v*, 111 *r*.

(6) Ebbe tale incarico dal consiglio comunale di Torino nelle adunanze del 28 luglio, 24 agosto e 29 novembre del 1470. Cfr. Bollati, *Atti e documenti delle antiche assemblee rappresentative della Monarchia di Savoia*, vol. I, Torino, 1879 (*Monumenta Historiae Patriae*, t. XIV, *Comitiorum* I), coll. 338, 339, 351 e 352.

(7) Ritengo che questo titolo fosse della natura sopra indicata, non

concessione feudale. Infatti con lettere patenti del 20 marzo 1494 la duchessa Bianca, confermando l'acquisto che egli ne aveva precedentemente fatto, lo investì di una casa e di un orto, nonchè della sesta parte della giurisdizione di Altessano Superiore (Venaria Reale) con i relativi diritti feudali (1).

---

constandomi di alcuna speciale concessione in suo favore. Come è noto, secondo la dottrina medievale i dottori avevano diritto al titolo di conte palatino dopo 20 anni di insegnamento. Cfr. Caccialupi, *De debitore suspecto et fugitivo*, par. V, n. 11, nei *Tractatus universi iuris*, Venezia, 1584, t. III, par. II, f. 150 *v*; Rogerii, *De summo bono*, n. 14, *ibidem*, f. 3 *r*; Boni de Curtili, *De nobilitate*, par. III, n. 110, *ibidem*, t. XVI, f. 8 *r*; Boerii, *Repetitio super l. consentaneum, C. quomodo et quando iudex*, n. 152, nelle *Repetitiones in varias iuris civilis leges*, Venezia, 1608, t. VIII, f. 433 *v*. — Giacomino da San Giorgio così si sottoscrive in un consiglio: " Jacobinus Michelonus de Sancto Georgio Canepicii iuris utriusque doctor et *comes* ordinarie legens in felici studio Taurini in iure civili „ (Arch. St. Tor., *March. Sal.*, cat. 4ª, mz. 7, n. 25). È ricordato come conte in un documento del 1501: " Jacobus Michellonis filius quondam spectabilis et preclarissimi iurium interpretis doctoris et *comittis* domini Jacobini de Sancto Georgio „ (Arch. St. Tor., *Provincia di Torino*, mz. 6, *Altessano Superiore*, n. 7). E come conte palatino lo danno gli *Statuta venerandi, sacrique collegii iurisconsultorum Augustae Taurinorum*, Torino, 1575, p. 26 e i *Privilegia al. taur. univ.*, p. 104.

(1) Ecco il testo di tali lettere patenti: " Blanca, etc. — Universis sit manifestum quod nos, viso instrumento vendicionis presentibus annexo et consideratis contentis in eo, supplicacioni itaque spectabilis benedilecti fidelis consiliarii nostri domini Jacobini de Sancto Georgio emptoris inibi nominati super his nobis facte benivole annuentes, vendicionem ipsam ac omnia et singula in ipso instrumento contenta ex nostra certa sciencia, et consiliariorum nostrorum super his matura deliberacione prehabita, laudamus, ratifficamus et approbamus, ipsumque dominum Jacobinum presentem, ac pro se suisque heredibus et successoribus universis stipulantem et recipientem, de domo et orto, nec non sexta parte tocius iurisdicionis loci Altessani, ac partibus furni, molendini, resie, pedagii, homagiorum illarumque redditibus et obvencionibus, ac aliis rebus, bonis et iuribus quibuscunque per eum ut in dicto instrumento acquisitis, per nos prelibatumque illustrissimum filium nostrum ducem suosque heredes et successores universos harum serie investimus et retinemus, sub serviciis, tributis, oneribus et aliis quibus ipsa acquisita effecta sunt; eidemque domino Jacobino, suorum consideracione serviciorum in hunc illustrissimum Sabaudie Statum, de quo benemeritus est semper, et in ipsorum serviciorum aliqualem recompensacionem, remittimus et quictamus laudes et venduas prefato illustrissimo filio nostro duci propterea debitas, omnemque commissionem et excheytam, si que eidem filio nostro in premissis competerent ratione presentis investiture forte infra tempus debitum non petite vel

§ 5. — Giacomino da San Giorgio terminò la sua lunga vita a Torino il 17 ottobre 1494 (1).

Pochissime notizie ci sono rimaste intorno alla sua famiglia. Ebbe più figli, uno dei quali, Bartolomeo, accompagnò il padre alla conferenza di Pont Beauvoisin, ove lo troviamo nel marzo del 1488 (2). Un altro, Giacomo, viveva nel 1501 ed era promesso sposo di Pietrina Arcatori, dei signori di Altessano Superiore (3). Giovanni Becuti, signore di Lucento, con testamento del 24 novembre di quell'anno, lo nominò suo erede universale a parti uguali con Ribaldino e Ludovico Becuti (4).

obtente, alio tamen iure ducali quocunque cum alterius racione in his semper salvis. Mandantes itaque Consiliis nobiscum et Thaurini residentibus, universisque et singulis officiariis, commissariis et subditis nostris mediatis et immediatis ad quos presentes, etc., sub pena centum librarum forcium pro quolibet ipsis Consiliis inferiore, quatenus has nostras laudimii et investiture litteras memorato consiliario nostro et suis predictis teneant, attendant et inviolabiliter observent, ac per eos quorum, etc., in nulloque, etc., quibuscunque opposicionibus, exceptionibus et aliis, etc., has in testimonio concedentes. Datum Vercellis die vigesima mensis marcii millesimo quatercentesimo nonagesimo quarto. — Per dominam presentibus dominis Tharantasiensi, Cancellario, Lausannensi, Glaudio de Sabaudia, Romagnano, Dyvona, Vaxino de Solario, Henreghuino de Valpergia, Azelio, Agacia, Cara, Vignate, Deffendente et Sebastiano thesaurario „ (Archivio di St. in Torino, *Prot. Segr. Duc., Serie Arch. Corte*, vol. 123, c. 164 *v*). Cfr. pure Guasco, *Dizionario feudale degli antichi Stati Sardi e della Lombardia*, Pinerolo, 1911, vol. I, p. 58. — Qualche altra notizia si ha ancora relativa a Giacomino da San Giorgio. Così lo troviamo iscritto fra i dottori giuristi del collegio di Torino. Cfr. *Statuta venerandi, sacrique collegii iurisconsultorum Augustae Taurinorum*, Torino, 1575, p. 26. Il suo nome figura nelle lettere patenti di conferma degli statuti e capitoli di Balangero, Mathi e Villanova del 1461. Cfr. Frola, *Corpus statutorum Canavisii* (in corso di pubblicazione), vol. I, p. 300.

(1) Biblioteca Nazionale di Torino, Ms. H. II. 14, c. 227 *r*: " Explicit hic tractatus homagiorum, confederationum et feudorum per vas legum et pratice facetum quoque lectorem dominum Jacobinum Michelonis de Sancto Georgio; qui in studio taurinensi obiit xvii octobris 1494 fatigatus tedio quartane duplicis qui per plures dies animam agebat, sed exitum eius invenire non poterat „.

(2) Figura come teste nel verbale del 31 marzo 1488 con cui si chiuse la conferenza. Cfr. Atti della conferenza di Pont Beauvoisin in Archivio di Stato di Torino, *Marchesato di Saluzzo*, 4ª cat., mz. 7, n. 24.

(3) Arch. St. Tor., *Provincia di Torino*, mz. 6, *Altessano Superiore*, n. 7.

(4) Arch. St. Tor., *Provincia di Torino*, mz. 18, *Lucento*, n. 30.

§ 6. — Fra i suoi discepoli ne vanno sopratutto ricordati due che salirono in gran fama, Giovanni Francesco Balbo (1) e Claudio di Seyssel (2). Quest'ultimo, che è troppo noto come giureconsulto, come prelato e come uomo politico, ebbe a sostituire più di una volta il suo maestro, ora perchè ammalato (3), ora perchè assente per incarichi affidatigli dal duca di Savoia (4). Morto poi Giacomino, Claudio di Seyssel gli succedette e occupò la sua cattedra.

§ 7. — Le opere lasciate da Giacomino da San Giorgio sono le seguenti:

a) Tractatus de feudis; Tractatus de homagiis.

La fama del nostro giureconsulto è sopratutto raccomandata a questi due trattati, che, specialmente nel sec. XVI, ebbero molta fortuna e numerosissime ristampe. Il trattato " de feudis „ è un'esposizione di tutto quanto il diritto feudale fatta secondo il metodo in voga presso gli scolastici del commento ad un testo. L'autore prende in esame un tipo di investitura concessa dal duca Carlo I di Savoia, e in tanti distinti capitoli ne analizza le parti, studiandone le formule e raggruppando attorno a ciascuna di esse la materia che vi ha relazione (5).

(1) Pancirolo, op. cit., lib. II, cap. CLVI.

(2) Pancirolo, op. cit., lib. II, cap. CXXXVII.

(3) Ciò accadde, secondo il Pancirolo, nel 1487.

(4) Così scrive Claudio di Seyssel nella lettera dedicatoria a Filippo di Savoia della sua *Repetitio in l. vim ff. de iustitia et iure*, stampata a Torino il 17 ottobre 1493: " Oblata est mihi alia exercitandi ingenij lucubrationumque subeundarum occasio. agente enim in legatione pro eodem principe (*Carolo*) ultramontes prestantissimo et toto orbe terrarum nominatissimo iuris utriusque interprete. legumque comite dignissimo. domino Jacobino de michelonibus de sancto georgio preceptore meo colendissimo: quum alius qui lecturam ordinariam iuris civilis cui preerat exerceret: non appareret. pro ea qua semper eum sum prosequutus observatione venerationeque id onus licet meis humeris longe impar non recusavi sed tres menses continuos in hac felici achademia thaurinensi utroque munere non sine magnis laboribus functus nonnullas leges in prima digesti veteris parte vice eiusdem preceptoris mei quam accurate potui comentavi „. Cfr. Manzoni, *Annali tipografici torinesi del sec. XV* in " Miscellanea di Storia Italiana „, tomo IV, Torino, 1863, p. 316, n. (1).

(5) Il trattato è diviso nei seguenti trenta capitoli, ciascuno dei quali ha per titolo una formula dell'investitura: [I] Carolus dux Sabaudie —

Anche un sommario esame rivela la singolare semplicità e la perspicua chiarezza di quest'opera, doti che giustificano pienamente il successo che le arrise. Il trattato è preceduto da una breve prefazione in cui l'autore dichiara ai suoi discepoli che fu mosso a scriverlo dal desiderio di dare, dopo più di un venticinquennio di insegnamento, una prova di gratitudine e di devozione al duca di Savoia (1).

[II] Marchio in Italia — [III] Princeps Pedemontium — [IIII] Comes de Villaris — [V] Vicariusque perpetuus — [VI] Investivit talem — [VII] Nobiles Agasi et Anto. de Sola. fratres — [VIII] Presentes et recipientes pro se et eorum filiis — [VIIII] Et femininis, etc. — [X] Et quibuscunque heredibus — [XI] In feudum — [XII] De castro Rubei Montis — [XIII] Cum mero, mixto imperio, et omnimoda iurisdictione — [XIIII] Et cum molendinis — [XV] Et cum venationibus — [XVI] Et cum piscationibus aquaticis et fluminibus — [XVII] Cum argentifodinis et salinis — [XVIII] Ita quod ipsi investiti habeant — [XVIIII] Ita etiam quod ipsi vasalli et eorum heredes et successores et quibus concedere et alienare voluerint habeant et possideant — [XX] Et cum pacto quod dicti vasalli prestent singulis annis ipsi domino unum eulem argenteum vel x libras piperis, etc. — [XXI] Et cum pacto de non alienando — [XXII] Et cum pacto quod de ipso feudo possint ipsi vasalli investiti testari et per ultimam voluntatem disponere — [XXIII] Qui quidem investiti prestiterunt iuramentum fidelitatis prelibato eorum domino — [XXIIII] Et promiserunt eidem domino suo prestare debita servitia. — [XXV] Dictique vasalli promiserunt non committere felloniam contra dominum suum — [XXVI] Et unus ex dictis vasallis refutavit feudum — [XXVII] Dictique vasalli promiserunt recognoscere dictum feudum specifice particulariter et distincte quotienscunque fuerint requisiti — [XXVIII] Et dicti vasalli pro dictis rebus feudalibus conventi coram quodam iudice ordinario petierunt se remitti coram eorum domino feudi, etc. — [XXVIIII] De adherentibus et confederatis — [XXX] Et unus ex dictis vasallis habens filios ex prima uxore nobili ea mortua recepit aliam ignobilem in uxorem cum pacto quod filii nascituri ex ea non succederent in bonis feudalibus.

(1) Ecco la prefazione quale si legge nelle edizioni. Indico in nota le varianti del Ms. II. II. 14 della Biblioteca Nazionale di Torino. " Ad scolares prefaciuncula — Quum iam longo tempore fluxo et annis .xxv. (1) et ultra, auditores (2) dilectissimi, in exercitio legendi in hoc felici gymnasio thaurinensi insudaverim, tandem consideravi pro debito sincere et optime gratitudinis et donationis (*sic*) (3) intime illustrissimo (4) ac excellentissimo principi domino domino nostro Sabaudie duci me teneri ad aliquod munu-

(1) *Ms.* 28 — (2) *Nel ms. manca* auditores dilectissimi — (3) *Ms.* devotionis — (4) *Ms.* ad ill.^{mum} et excellentissimum principem d. d. nostrum Sabaudie ducem.

A complemento del trattato " de feudis „ Giacomino da San Giorgio ne scrisse un altro speciale sugli omaggi, in cui espose la dottrina relativa all'argomento. Si divide in due parti; la prima tratta degli omaggi propriamente detti (" de homagiis „), la seconda delle prestazioni feudali di opere o roide (" de roydis „).

b) Quaestiones feudales.

Sono in numero di cinquanta e riguardano diversi punti del diritto feudale.

c) Lectura super prima et secunda partibus Codicis; Lectura super prima et secunda partibus Digesti Veteris.

Queste letture differiscono ben poco dalle altre simili degli scrittori contemporanei. Assai apprezzate, vennero date alle stampe dopo la morte del giureconsulto per cura di Ugo Le Vasseur.

d) Consilia.

Fra i consigli di Giacomino da San Giorgio ha una particolare importanza quello scritto in difesa dei diritti del duca di Savoia durante la controversia sorta fra questi e il re di Francia, signore del Delfinato, per l'omaggio del marchese di Saluzzo.

e) Designationes et distinctiones domini Rolandini lecte per dominum Jacobinum de Sancto Georgio.

L'opera svolta in questa lettura è forse quella di Rolandino de Romanciis indicata dal Savigny (1) col titolo " Determinationes et quaestiones „ e da lui data come perduta.

sculum quod sue (5) iustissime dominationi esset gratum. Hoc (6) ideo in hac materia feudorum, in qua de principum nec (7) non nobilitatis materia tractatur, scribere decrevi. Sed quia sine sancte Trinitatis presidio nihil possumus, et nisi omnipotens Deus sit operis (8) fundamentum non superest aliquod bonum edificium (9), I. q. I. c. quum Paulus, ipse enim est omnium scientiarum auctor, c. legimus. xxxvij. di. et, ut ait propheta (10), propitius (11) est Dominus invocantibus eum, ideo ex corde et animo huic meo operi divinum (12) invoco presidium ut mihi in hac nobilissima (13) materia feudali aperiat veritatem „.

(1) *Storia del diritto romano nel medio evo*, trad. Bollati, vol. II, Torino, 1857, p. 520.

(5) *Ms.* sue dominationi verisimiliter esset — (6) *Nel ms. manca* hoc — (7) *Ms.* et — (8) *Nel ms. manca* operis — (9) *Ms.* principium — (10) *Ms.* clarissimus propheta — (11) *Ms.* prope — (12) *Ms.* invoco suppremum Deum omnipotentem — (13) *Nel ms. manca* nobilissima.

Oltre alle opere sopra ricordate ne vengono erroneamente attribuite al nostro giureconsulto anche altre che non furono da lui mai scritte. Così parecchi autori fanno parola di un trattato sull'investitura distinto da quello " de feudis „ (1). L'errore è certamente dipeso dal fatto che quest'ultima opera è pubblicata " per modum investiturae „. Così pure quasi tutti gli stessi autori (2) menzionano un altro trattato " De legatis, officialibus, castris, castellanis et confederatis „, nel quale deve vedersi una corruzione del titolo del penultimo capitolo del trattato " de feudis „ che è appunto " De adherentibus et confederatis „. Il Lipenio (3) infine cita un'edizione fatta a Colonia nel 1574 di " Parerga „. Ritengo che si tratti di un equivoco.

§ 8. — Bibliografia.

a) Manoscritti.

1. [Tractatus de feudis et de homagiis].

Di questi due trattati possediamo un ms. che si conserva nella Biblioteca Nazionale di Torino (segnato H . II . 14) (4). È cartaceo, in-f°, del sec. XV, di cc. 227 n. Nell'incendio della Biblioteca del 1904 fu assai danneggiato dall'acqua. Ha per titolo " Tractatus de feudis domini Jacobini de Sancto Georgio optimus „, e appartenne nel '400 ad Antonio Rugis dottore d'ambe leggi. Il " tractatus feudorum „ occupa le cc. 1-176, quello " homagiorum „ le cc. 177-227. Quest'ultimo è scritto con diverso carattere, ed è un'evidente aggiunta. Il testo di entrambi corrisponde a quello delle numerose edizioni a stampa.

2. [Lectura super Digesto veteri].

Il codice latino G. III. 13 della Biblioteca Nazionale di Torino (cartaceo, in-f°, del sec. XV, di cc. 5 n. n. e 292 n.) (5) contiene una

(1) Gesnero, op. cit., ediz. 1545, c. 351 *r*, ediz. 1583, p. 368; Della Chiesa, op. cit., p. 85; Rossotti, op. cit., p. 305; Ghilini, op. cit.; *Privilegia al. taur. univ.*, p. 104; Vallauri, *Storia delle università degli studi del Piemonte*, Torino, 1845, vol. I, p. 85, n. (1); Manno, *Bibliografia storica degli Stati della Monarchia di Savoia*, Torino, 1884 e sgg., vol. I, n. 6136.

(2) Gesnero, Della Chiesa, Rossotti, Ghilini, *Privilegia*, etc., Vallauri.

(3) Op. cit., p. 428.

(4) Cfr. Pasini, op. cit., vol. II, p. 83, cod. CCC; *Inventario dei codd. superst.* cit., p. 526, n. 711.

(5) Cfr. Pasini, op. cit., vol. II, p. 84, cod. CCCIII; *Inventario* cit., p. 526, n. 714.

lettura sul digesto vecchio svolta all'Università di Torino nell'anno scolastico 1483-84. Il ms. è formato dalla riunione di parecchi fascicoli in cui sono trascritte le lezioni (*recollectae*). Non contiene però soltanto, come erroneamente indica il Pasini, la lettura del San Giorgio. Questa termina a c. 161: a c. 162 comincia la lettura su alcuni titoli del digesto nuovo di un altro lettore dell'università di Torino, Antonio Ponziglione.

3. [Responsum ad causam Marchiae Salutiarum].

Possediamo il manoscritto originale del consiglio steso da Giacomino da S. Giorgio per la questione di Saluzzo. È un fascicolo cartaceo in-f° di cc. 42, che si conserva nell'Archivio di Stato di Torino, *Marchesato di Saluzzo,* cat. 4ª, mz. 7, n. 25.

4. [Lectura super designationibus et distinctionibus domini Rolandini].

Questa lettura ci è stata tramandata da un ms. di appunti scolastici di uno studente che frequentava, a quanto pare, l'università di Pavia (1). È un codice cartaceo del sec. XV, in-8°, di cc. 129. A c. 16 si legge: " Hic incipiunt designationes et distinctiones domini Rolandini lecte per dominum Jacobinum de Sancto Georgio legentem in dicto studio. Et primo, etc. „. Siccome non mi consta che Giacomino da San Giorgio abbia mai insegnato altrove che a Torino, ritengo che l'indicazione " in dicto studio „ debba riferirsi a quello torinese, non ostante la presunzione che il codice sia stato scritto a Pavia. Probabilmente lo studente copiò nel suo libro queste lezioni da un altro manoscritto, lasciandone inalterato il titolo.

b) Edizioni.

1. Va ricordata anzitutto la raccolta completa delle opere di Giacomino da San Giorgio che fu stampata a Bologna nel 1575. Consta di 3 volumi in-f° e di un indice.

1° volume:

Jacobini de S. Georgio praestantiss.mi legum interpretis in quattuor matutinos iuris civilis tractatus, uberrima commentaria. Quibus in fine adiectos invenies facundissimos eiusdem,

(1) Questo ms. fa parte delle pregevoli collezioni del prof. F. Patetta, al quale mi è caro esprimere qui i miei ringraziamenti per la cortese comunicazione fattamene, e più ancora la mia riconoscenza di discepolo a Maestro per i consigli di cui sempre mi è stato largo.

Feudorum nempe, Homagiorum, pariter et Roydarum tractatus, cum nonnullis aliis additionibus, eorumdemque copiosissimo Repertorio, nunc primum in lucem editis.

= Bononiae, Apud Societatem Typographiae Bononiensis. MDLXXV. Curiae Episc. et S. Inquisit. concessu — in-f°; 4 csn., 655 pp.

Contiene i commentari o letture sulla prima e sulla seconda parte del Digesto vecchio.

2° volume:

Jacobini de S. Georgio clariss.mi iur. utr. monarchae, et luminis, ac interpretis profundissimi. Uberrima, ac subtilissima in priorem, et posteriorem partem Codicis Commentaria.

= Bononiae, Apud Societatem Typographiae Bononiensis. MDLXXV. Curiae Episc. et S. Inquisit. concessu — in-f°; 2 csn., 384 pp.

Contiene, come indica il titolo, i commentari alle due parti del Codice.

3° volume:

P. 1. — Jacobini de Sancto Georgio clarissimi iuris utriusque monarchae, ac luminis, et interpretis profundissimi Tractatus utilissimi Feudorum, nempe Homagiorum, et Roydarum, quibus nonnullae quaestiones etiam Feudales additae fuerunt — in-f°; 146 pp.

Il " Tractatus feudorum „ va da p. 1 a p. 120; il " Tractatus homagiorum „ da p. 121 a p. 131; il titolo " de roydis „ da p. 131 a p. 142. Nelle pp. 143-146 si leggono le " Quaestiones quinquaginta feudales „.

Indice:

C. 1 *a*. — Index copiosissimus, quo alphabeti serie ea omnia indicantur, Quae universis hisce commentariis fuere diligentissime pertractata a clarissimo, atque subtilissimo iuris interprete D. Jacobino de S. Georgio, Cui seiunctim eo ipso ordine adiecta quoque invenies quaecunque adnotari potuerunt ex tractatu Feud. Homagiorum, Rhoydarum, et nonnullarum etiam quaestionum Feud. — in-f°; 88 csn.

Di quest'edizione ho esaminato l'esemplare posseduto dalla Biblioteca Vaticana (fondo Barberiniano). Un altro esemplare si conserva nella

Biblioteca Nazionale di Brera a Milano. Il primo volume si trova anche nella Biblioteca Angelica di Roma.

Dei trattati " de feudis „ e " de homagiis „ si annoverano molte edizioni. Ecco quelle che ho potuto esaminare:

2. C. 1 *a*. — Aureus et in pratica perutilis totus | et singularis tractatus feudorum per | clarissimum monarcham dominum | Jacobinum de sancto georgio | Jurisutriusque doctorem ac | interpretem consumatis | simum in thaurinensi | gymnasio editus | per modum in | vestiture. | Cum privillegio.

C. 43 *b*. — Explicit tractatus feudorum magnifici iuris utriusque monarche et comitis. d. Jacobini de sancto georgio civis Thaurinensis noviter impressus Papie per Gasparem de nebiis de burgo francho anno. 1502. die primo mensis Martij — in-f°; 43 cn.

Un esemplare si conserva nella Biblioteca Nazionale di Torino.

3. C. 1 *a*. — Incipit aureus et in pratica perutilis totus et singularis tractatus de homagiis per clarissimum monarcham dominum Jacobinum de sancto georgio iurisutriusque doctorem ac interpretem consumatissimum in thaurinensi gymnasio editus.

C. ult. — Explicit tractatus homagiorum excellentissimi Iurisutriusque doc. d. Jacobini de sancto georgio civis thaurinensis. Impressus Papie per magistrum Gasparem de nebijs de burgo francho. M. ccccij . die . xiiij . mensis Martij — in-f°; 7 csn.

Un esemplare è posseduto dalla Biblioteca Nazionale di Torino.

4. C. 1 *a*. — De feudis et homagiis. | Opulentissimus iurium | egregiique luminis do. Jacobini de scto | Georgio Tractatus feudalis civilibus | practicis commodissimus: Cui iunctus est | Tractatus de Homagiis et Roydis | fecundissimus, avidissimusque Summarijs | ubique numeratim sparsis. Indiceque fa| cili preposito nunc castigatissimus habetur. | Vincentius. | de Portonariis. de | Tridino. de | Monte. Ferrato | 1533.

C. 124 *a*. — Explicit Tractatus homagiorum excellentissimi Iuris utriusque docto. do. Jacobini d sancto Georgio civis Thau-

rinensis. Apprime cum summariis copiosis reimpressum: curaque vigilantiori purgatum Lugd. Opera et industria Benedicti Bonyn. Anno nativitatis domini nostri Jesu Christi . M . ccccxxxiij . die . xxviij . Mensis Junij. — in-8°; 12 csn., 124 cn.

Esemplare della Biblioteca Angelica di Roma.

5. C. 1 *a*. — De feudis et Homagijs. | Opulentissimus Ju- | rium egregijque luminis do. Jacobini de | sancto Georgio Tractatus feudalis civi | libus practicis commodissimus: Cui iun- | ctus est Tractatus de Homagiis et Roy- | dis fecundissimus, avidissimusque: | Summarijs ubique numera- | tim sparsis. Indiceque fa | cili preposito nunc | castigatissimus | habe- | tur.| 1543 | Venennt Ludd. apud Jacobum Giuncti | in vico Mercuriali.

C. 124 *a*. — Explicit Tractatus homagiorum excellentissimi Iuris utriusque docto. do. Jacobini de sancto Georgio civis Thaurinensis. Apprime cum summariis copiosis reimpressum: curaque vigilantiori purgatum Lugd. Opera et industria Benedicti Bonnyn. Anno nativitatis domini nostri Jesu Christi . M . ccccxlij . die . xxix. Mensis Novembris — in-8°; 12 csn., 124 cn.

Esemplare della Biblioteca Nazionale di Torino.

6. Edizione uguale alla precedente, con la data del 1544. È uguale anche l' " explicit " in data 29 novembre 1542. Se ne ha una copia nella Biblioteca Universitaria di Pavia.

7. Jacobini de S. Georgio iureconsulti clarissimi feudalis tractatus, omnibus civilibus practicis commodissimus, summo labore et industria ab innumeris mendis vindicatus. Cum indice materiarum copiosiss.

= Coloniae, apud Joannem Birckmannum, et Theodorum Boumium. Anno 1566. Cum gratia et privilegio Caes. Maiest. — in-8°; 8 csn., 359 cn., 32 csn.

Esemplare della Biblioteca Casanatense di Roma.

8. Tractatus de feudis, omnibus civilibus practicis commodissimus, authore Jacobino de S. Georgio, iureconsulto clarissimo. Nunc denuo impressus, et ab innumeris mendis, quibus scatebat, repurgatus. Adiectus est materiarum index locupletissimus.

= Coloniae Agrippinae, Apud Theodorum Baumium, sub signo arboris. Anno M. D. LXXIIII — in-8°; 319 cn., indice sn.

Esemplare della Biblioteca Vaticana (fondo Barberiniano).

9. Edizione identica alla precedente, con la data del 1575. Se ne trova un esemplare nella Biblioteca Nazionale Marciana di Venezia.

10. Tractatus feudalis Jacobini de S. Georgio iureconsulti clarissimi omnibus civilibus practicis commodissimus.
= in *Tractatus universi iuris*, Venezia, 1584, t. X, par. I, cc. 179-225.

11. Tract. aureus et practica perutilis totus et singularis de homagiis per Clarissimum monarcham, Dominum Jacobum de S. Geor. iuris utriusque Doctorem ac interpretem consumatissimum in Thaurinensi Gymnasio editus.
= in *Tractatus universi iuris*, Venezia, 1584, t. X, par. II, cc. 172 *v*-179 *v*.

Dei trattati " de feudis " e " de homagiis " oltre alle precedenti trovo citate anche queste altre edizioni che non ho potuto consultare:

12. Jacobi de S. Georgio De feudis et aliorum tractatus canonici.
= Bononiae per Ugonem de Rugeriis 1499 — in-f°.

Panzer, *Annales typographici*, Norimberga, 1793-1803, vol. I, p. 237, n. 258; Hain, *Repertorium bibliographicum*, n. 7581.

13. Aureus et in practica perutilis totus et singularis tractatus feudorum et Homagiorum. Per Clarissimum Monarcham dnum Jacobinum de Sancto Georgio Iuris utriusque doctorem — Cum privilegio.

(*In fine*) Explicit tractatus feudorum magnifici — D. Jacobini de sancto georgio civis Thaurinensis noviter impressus. Mediolani per Johannem Angelum scincenzeler. Anno M.CCCCC.III. die XXIX. mensis Augusti — in-f°.

Panzer, op. cit., vol. IX, p. 533, n. 19 *b*.

14. Aureus et in practica perutilis, totus et singularis Tractatus Feudorum; editus per modum investiturae.

(*In fine*) Papie per Jacob. de Burgo Franco, anno Domini MCCCCCX, die XVI mensis decembris — in-f°.

Manno, *Bibliografia storica degli Stati della Monarchia di Savoia*, Torino, 1884 e segg., vol. I, n. 6134.

15. Aureus et in practica perutilis, toties et singularis Tractatus de Homagiis.

(*In fine*) Impressus Papie per magistrum Jacob. de Burgo Franco, MCCCCCX, die XIII mensis decembris — in-f°.

Manno, op. cit., vol. I, n. 6135.

16. De feudis et homagiis.

= Lione, 1520.

Lipenio, *Bibliotheca realis iuridica* (con aggiunte di Struvio e Jenichen), Lipsia, 1746, p. 203.

17. De feudis et homagiis.

= Colonia, 1554.

Lipenio, op. cit., p. 203.

18. Jacobini de S. Georgio iureconsulti clarissimi feudalis tractatus, etc.

= Coloniae apud Joannem Birckmannum et Theodorum Boumium an. 1567.

Fontana, *Amphitheatrum legale, seu Bibliotheca legalis amplissima*, Parma, 1688-94, par. II, col. 234; Lipenio, op. cit., p. 203; Sclopis, *Storia della antica legislazione del Piemonte*, Torino, 1833, p. 398.

19. Tractatus de feudis.

= Torino, 1574.

Della Chiesa, *Catalogo de' scrittori piemontesi, savoiardi, e nizzardi*, Carmagnola, 1660, p. 85; Rossotti, *Syllabus scriptorum Pedemontii*, Mondovì, 1667, p. 305; Vallauri, *Storia delle Università degli studi del Piemonte*, Torino, 1845, vol. I, p. 85, n. (1).

20. Tractatus de feudis.

= Francof. apud Porsium 1605.

Draudio, *Bibliotheca classica, sive catalogus officinalis*, Francoforte, 1625, vol. I, p. 726; Fontana, op. cit., par. II, col. 234.

21. Tractatus de homagiis, cum notis Matthaei Boys. = Francoforte, 1606 — in-8°.

Draudio, op. cit., vol. I, p. 769; Fontana, op. cit., par. II, col. 234; Lipenio, op. cit., pp. 203, 244, 410, 548.

22. D. Jac. de S. Georgio, et D. Georgii Obrechti, Cynosura iuris feudalis.

Draudio, op. cit., vol. I, p. 769; Fontana, op. cit., par. II, col. 234.

23. Le letture sul Codice e sul Digesto vecchio vennero stampate a Lione nel 1521. Constano di 3 volumi in-f° e di un repertorio.

1° volume:

C. 1 *a*. — Clarissimi iuris utriusque monar | che: ac doctorum facile principis domini Jacobini de | sancto Georgio Lectura aurea nusquam antea impressa | super prima et ii. partibus Codicis: diversorum docto. | apostillis aucta et illustrata: Cumque summariis ante | leges et paragraphos numeris respondentibus positis | Necnon cum subtili indice seu repertorio per numeros | qui secundum materie varietatem immutantur remittente.

C. 142. — Imprimebat Lugduni Joannes de Jonvelles dictus Piston a nativitate domini anno. 1521. Mense Januario — in-f°: 142 cn.

2° volume:

C. 1 *a*. — Clarissimi iuris utriusque monar | che: ac doctorum facile principis domini Jacobini de | Sancto Georgio Lectura aurea nusquam antea impressa | super prima parte Digesti veteris: diversorum doctorum | apostillis aucta et illustrata: cumque summariis ante | leges et paragraphos numeris respondentibus positis | necnon cum subtili indice seu repertorio per numeros | qui secundum materie varietatem immutantur remittente.

C. 184 *a*. — Imprimebat Lugduni Joannes de Jonvelle dictus Piston a nativitate domini Anno. 1521. mense martio — in-f°; 184 cn.

3° volume:

C. 1 *a*. — Clarissimi iuris utriusque monar | che: ac doctorum facile principis domini Jacobini de | Sancto Georgio

Lectura aurea nusquam antea impressa | super secunda parte Digesti veteris: diversorum docto. | apostillis aucta et illustrata: cumque summariis ante | leges et paragraphos numeris respondentibus positis | necnon cum subtili indice seu repertorio per numeros | qui secundum materie varietatem immutantur remittente.

C. 52 *a*. — Imprimebat Lugduni Joannes de Jonvelle dictus Piston a nativitate domini anno. 1521. Mense Aprili — in-f°; 52 cn.

Repertorio:

C. 1 *a*. — Repertorium sive maius index | admodum solemne rerum omnium nota ac memo | ratu dignarum super lecturis iuris utriusque luminis | ac Monarche domini Jacobini de Sancto Georgio: | necnon additionum super eisdem lecturis conten- | tarum alphabeti serie affabre complexum (1).

(1) Sul *verso* della 1ª c. è stampata una lettera con cui Ugo Le Vasseur dedica quest'edizione, da lui curata, a Bartolomeo de Chasseneuz. Eccone i punti più importanti: " Ad amplissimum ac magnificum virum divini ac humani iuris consultum tersissimum: equissimum non minus: quam excellentissimum d. Barptolemeum Chassencium: aut de Chasseneuz: districtuum seu ballituum Hedun. ac Montissinerii fiscalem: seu regium advocatum meritissimum Hugo le vasseur eorundem iurium doctor ac regius Cabilon. Iudex -- Lugdunum proximis his diebus negotia aliqua expediturus dum accessissem: e nostra felici Burgundia: archetyporum emporio (postquam a te emissus est Albericus Rosaceus: a nobis vero Joannes a turre cremata: et plura alia) lecturas condiscipuli tui. d. Jacobini a sancto Georgio: ducalis consiliarii: quondam dum in humanis ageret: tibi familiaris: ac notissimi colende sororie nobiscum attulimus. Qui ut maximus veritatis indagator in hoc luculento contextu apte: distincte: et dilucide recensens: non tam crebras sententias: redundantes: ardentes: concitatas: et nervorum plurimum habentes: quam verba facunda: ornata: tersa: non barbara (veluti communis nostrorum mos est iure consultorum) in hoc interpretandi genere aggregavit. Quas adamussim emendatas: summariis et apostillis auctas tibi veluti benemerito dicatas mitto -- .....Illud tandem advertas velim: Jacobinum nostrum: imo potius tuum: titulos quatuor (de iurisdic. scilicet omnium iudicum. Quod quisque iuris. De legatis. et de transactionibus. ff.) Anno ab incarnati verbi mysterio. 1482. Taurini (dum ibi magno (ut scis) auditorum concursu publice profiteretur) interpretatum fuisse. Dein anno. 1490. secundam per modum additionum ad Imolensem maxime Alexandrum edidisse lecturam. Nos vero ne talem autorem tanto frustraremur

C. ult. — Lugduni in edibus Joannis de Jonvelle dicti Piston. mense. Aprili. Anno domini Millesimo quingentesimo vigesimo-primo — in-f°; 56 cn.

Di questa edizione possiede un esemplare la Biblioteca Casanatense di Roma.

24. Responsum ad causam Marchiae Salutiarum.

= in *Responsa diversorum iurisconsultorum ad causam Marchiae Salutiarum pro Serenissimo Carolo Emanuele Dei gratia Duce Sabaudiae,* etc., Augustae Taurinorum, apud haeredem Nicolai Bevilaquae, 1589, cc. 15 *v*-32 *r*.

---

labore: loco suo ambas mistim inseruimus lecturas: easque simul cum ceteris Simoni Vincentio fido bibliopole imprimendas tradidimus: cusso insuper copiosissimo repertorio -- ...E nostra Cabilon. urbe: a parthenopeo partu post unam cum dimidia annorum chiliade Anno primo ac vigesimo. Mense aprili „. Bartolomeo de Chasseneuz (n. 1480, m. 1541), come è risaputo, fu un eminente giureconsulto francese.

Etimologie piemontesi.

Nota di ATTILIO LEVI.

AVVERTENZE

Abbreviazioni: A = Arch. glottol. ital. — D = Diez, Etym. Wörterb., 5ª ed. — DG = Dict. génér. de la l. fr. — IG = Meyer-Lübke, Ital. Gramm. — K = Körting, Lat.-rom. Wörterb., 3ª ed. — M = Meyer-Lübke, Rom. etym. Wörterb. — N = Nyrop, Gramm. de la l. fr. — R = Romania — RG = Meyer-Lübke, Gramm. d. rom. Sprachen — Z = Zeitschr. f. rom. Phil. E son citati K. e M. per numero, gli altri tutti per pagina.

Trascrizione: È conservata quella delle fonti; ma pel piemontese s'usano i segni seguenti: *e*, *o*, *u* aperti; *ọ* turbato o misto; *ẹ*, *ụ* chiusi; *ẹ* vocale indistinta; *ċ*, *ġ* palatali: *s* spirante sorda, *z* spir. sonora; *n* intenso dentale, finale velare; *n* finale dentale; *ñ* faucale; *ñ* palatalizzato. I vocaboli senza accento sono parossitoni.

I.

Accanto a *bulún* " urtone ", *pusún* " spintone ", *strinkún* " scossa, strappo " il piem. ha *bulunè* " urtare sgarbatamente ", *pusunè* " sospingere ", *strinkunè* " scuotere, squassare ". E potrebbe a primo aspetto parere che i verbi derivino da' nomi a quel modo che per es. it. *bastonare* deriva da *bastone*. Ma è precisamente l'opposto. Infatti *bulún*, *pusún*, *strinkún* designano atti: ora nella Romanità il suff. *-one* aggiunto a temi verbali forma nomi di persone e di cose, non nomi d'azione, cfr. RG. II. 195 sgg. | A torto perciò il DG. s. *plongeon* " uccello acquatico " attribuisce a questo vocabolo pure il significato di " tuffo ", desumendolo dalla frase usitatissima *faire le plongeon*, la quale è analoga a

fr. *faire la bête*, it. *far l'asino*, piem. *fe l'ulúk* " far l'allocco ", e significa quindi " comportarsi come detto uccello "].

Dunque *bulún*, *pusún*, *strinkún* devon essere posverbali, cioè derivare da *buluné*, *pusuné*, *strinkuné*, i quali sono una specie di frequentativi formati col suff. *-uné*, che corrisponde al fr. *-onner*, es. *chantonner*, *mâchonner* (cfr. RG. II. 611, N. III. 201).

Quanto poi alla lor base, *buluné* e *pusuné* sono chiarissimi: il primo è un derivato di *bulé* in quanto significa " contundere, ammaccare " e risale a lat. *bullare* (M. 1386); il secondo è un derivato di *pusé*, il quale, come fr. *pousser*, risale a lat. *pulsare* (K. 7536).

Men chiaro *strinkuné*. Io direi che nella Romanità lat. *stringere* si sia in epoca assai remota incrociato con basi germaniche affini di senso e di suono, cioè quella, da cui discende ted. *Strang* " corda ", e quell'altra, da cui deriva ted. *Strik* " id. " (cfr. Kluge, Et. Wtb. d. deutsch. Spr., s. v.). E di questi due incroci rimangono traccie più o meno copiose in punti varî del territorio romanzo. Dal primo risultò uno **stringare*, da cui discendono it. *stringare* " restringere ", mil. *stringá* " strozzare ", genov. *stringâ* " costringere ", nprov. *estringá* " vestire stretto ", e il posverbale it. piem. mil. gen. *stringa* " cordoncino ", nprov. *estringo* " cintura de' calzoni ".

Dal secondo sorse uno **strincare*, che si riscontra intatto in ptg. *estrincar* " torcere " e nprov. *estrincá* " vestire stretto ", e da cui derivano sp. *estrinque* " corda " e gen. *strinca* " cordoncino ", posverbali entrambi, e lo *strinkuné* nostrano.

A' parlanti poi **strincare* dovette parere un composto col prefisso *s*: e, come accanto a *sbattere*, *smuovere*, *stendere* si hanno *battere*, *muovere*, *tendere*, così venne foggiato uno pseudo verbo semplice **trincare*, che si ha in gen. *trincâ* " legar fortemente con più giri di corda un albero di nave — tendere una corda — tirar da parte un oggetto pesante ": e da questo sorse il posverbale pur gen. *trinca* " legatura, che unisce il bompresso al tagliamare ". Sono dunque *trincâ* e *trinca* voci marinaresche, e, se noi pure abbiamo *trinké* e *trinka*, li dovremo ritener ligurismi. Tanto più che usiamo il sostantivo soltanto nella locuzione *nov-d-trinka* " nuovo di zecca ", che corrisponde al modo egualmente gen. *neuvo de trinca* " id. id. ", il quale dalla nave, che ha nuova l'anzidetta legatura, fu esteso alle cose nuove in

genere. Il verbo poi ha da noi subìto un singolar deviamento di senso: significa " coagularsi, quagliare „ e si dice particolarmente del latte: ora, poichè il latte coagulato non presenta più una superficie unita, ma nel raggrumarsi si è, per così dire, " diviso „, crederei che nell'accezione del nostro *trinké* si debba scorgere l'influsso semasiologico de'pur nostri *tranča* " fr. *tranche* „, *trinčánt* " trinciante „.

Che se *trinca* " gomena di nave „ si trova anche in Ispagna e Portogallo, nulla vieta di supporre che pur colà sia stata tolta a mutuo da' navigatori genovesi [Diversamente K. 9111. 9743].

II.

supaté " scuotere — battere „ e sopratutto " spolverare „ a me sembra semplicemente la metatesi di un **pusaté*, frequentativo di *pusé* (lat. *pulsare*) formato con quell'-*até*, che è variante subdialettale di -*ęté*, risposta piem. del suff. verbale -*ittare*, donde it. *scoppiettare*, fr. *feuilleter*, piem. *brukęté* " inchiodare „: cfr. RG. II. 613 [Diversamente R. XXVII. 200].

Quindi, potendosi postulare una base **pulsittare*, il nostro *supaté* viene ad essere identico al fr. *épousseter* (astraendo dal prefisso, che ne fa un parasinteto: cfr. DG. s. v.).

III.

bęle " proprio — pure „ è locuzione avverbiale, che ha valore intensivo o concessivo a seconda de' casi. Trae l'origine dall'uso, che il nostro dialetto ha comune coll'it., di esprimere il perfetto compimento d'un'azione col premettere *bell'e* ad un partic. passato, es. piem. *bel e fait* = it. *bell'e fatto*: epperò, quando la si adopera parlando di morte o rovina (es. it. *bell'e ito*), si avrà una specie di antifrasi ironica. Ma fra piem. ed it. corre questo divario, che i parlanti nostri non sentirono più in *bel e* due voci distinte, quindi le congiunsero in una, che premettono non solo a participi, ma anche ad altre forme verbali, a nomi, pronomi, aggettivi ed avverbi: es. *bele mi* " io stesso „, *bele freid* " benchè freddo „, *bele li* " proprio lì — anche lì „.

È insomma un modesto caso di concrezione, che (a giudicar da' lessici nostri) sembra aver preso le mosse dalla parlata urbana: infatti *bele* è registrato da' torinesi Capello (1814) e Sant'Albino (1858), dal quale è passato al Gavuzzi (188...), mentre lo disconoscono del tutto o quasi il chierese Zalli (1815, 2ª ed. 1830), il Ponza, ch'era di Cavour (1830), e il Gelindo novarese (1839: cfr. l'ed. Renier, p. 161) [Per usi analoghi in altri idiomi romanzi vedi M. 1027].

IV.

badola " bietolone „ e *dęsbęla* " rompicollo „ han questo di comune, che sono seconde persone singolari di imperativi sostantivate, cioè formazioni del tipo di it. (*il*) *procaccia*, (*mastro*) *impicca*, ecc. E derivano:

il 1° da *badulé* " andar a zonzo „, in cui la base è quell'onomatopeico **batare*, dal quale discendono it. *badare*, *badaluccare* e fr. *badaud* (cfr. M. 988), e la terminazione è *-ulare* rimasto intatto come in it. *sventolare*, *brancolare*, ecc. (cfr. RG. II. 611);

il 2° da *dęsblé* " disfare „, che (come già fu visto: Z. XXVIII. 643) è un **disbellare*, derivato di lat. *bellus*.

De' quali due verbi ben indigeno è *dęsblé*, mentre *badulé* col suo *-d-* conservato si palesa non originario: e vi scorgerei un prov. *baducá* (nel Var *badoucá*) " badauder „ con suffisso mutato. Ora, poichè un prov. *badolo* " badaud „ si trova nel Forez ed appar voce straniera in quanto che un vocabolo nprov. con terminazione siffatta dovrebbe essere un femminile, sembra se ne possa inferire che i Provenzali han dato a noi il verbo e noi ad essi il nome [Ma s'avverta, e lo dico una volta per tutte, che uso il termine " provenzale „ nel senso larghissimo, in cui l'ha inteso il Mistral].

V.

feramiú, var. *faramiú* " ferravecchio „. Delle due forme la prima, più vicina all'etimo, s'è conservata, perchè i parlanti sentono la base " ferro „: la secondá è più conforme al fone-

tismo nostro, perchè in piemontese *e* atono, che preceda *r*, tende a mutarsi in *a* (es. *marenda* " merenda „, *marsé* " merciaio „). E codesto nome si dà o meglio si dava ad un individuo, che andava in giro per la città con un sacco e un peso indosso e gridava appunto *faramiụ́*, cercando di comprare e vendere roba usata.

Io credo che la voce significhi " ho del ferrame „, proposizione, che in piem. suona *j-ọ-d-ferám*: ma quegli individui andavano ripetendo il lor grido e lo emettevano con una cadenza sempre uguale. Ora, io suppongo che dalla sequela *j-ọ-d-ferám-j-ọ-d-ferám*... si sia a lungo andare staccato un **feram-j-ọ́*, perchè la frase così foggiata si prestava meglio alle esigenze di quella particolare modulazione: e **feramjọ́* si sarà poi a sua volta cambiato in *faramiụ́*, perchè in piem. un *-ọ́* (turbato o misto), che si trovi all'uscita assoluta, tende a mutarsi in *ụ́* (chiuso), es. *adiụ́*, (fr. *adieu*), *munsụ́* (fr. *monsieur*).

Del resto di frase divenuta sostantivo non mancano esempi analoghi: tali il nostro *nendavénd* (propriamente " niente da vendere? „), che significa " rigattiere „ (mancante a' lessici), e il fr. *décroche-moi ça*, che s'adopera nel senso di " marchand fripier „ (N. III. 278). E il processo, per cui il grido diventa nome, si coglie in atto nelle Baruffe chiozzotte del Goldoni: ivi (atto I, scena II) Toffolo per chiamare a sè il venditore di zucca arrostita, il quale va gridando " Zucca barucca „, gli dice appunto: " Ohé, zucche barucche „ [Sebbene appartengano ad altro ordine d'idee, si potrebbero ancora addurre piem. *fafiuké* (alla lettera " fa nevicare „) e il *facnabi* del Gavuzzi (che era da scriversi *fa-k-it-n-abie*, cioè " fa di averne „ e s'intende " quattrini „): locuzioni, che son passate a significar " citrullo „].

VI.

Da *segutiu* (K. 8580: base non chiara nè certa, ma in cui s'accordano la risposta it. e la nostra) il piem. trae regolarmente *sụz* " segugio „, in cui si ha *g* intervocalico dileguato ed *e* atona assorbita dalla tonica (cfr. piem. *frẹl* " fratello „) e sonora finale desunta dal pl. (sì e come la palatale della corrispondente it.: cfr. piem. *barbíz* = it. *barbigi* e v. IG. 142).

Da *suz* col suff. *-inare* (cfr. RG. II. 611) deriva il nostro *suzné*, che propriamente designa l'atteggiamento supplichevole de' cani, quando stanno guardando persona, che mangi (cfr. A. XV. 393), ma, essendo stato esteso agli uomini, passò a significare " appetire, agognare „.

Di *suzné* poi è posverbale *suzn* " segugio „, che presenta un singolare passaggio dall'astratto al concreto, ma non sembra suscettibile di altra spiegazione. Del resto a *suzné* : *suzn* si raffrontino i pur nostri *luzné* " lampeggiare „ : *lozna* " lampo „ : cfr. M. 5142.

VII.

valamber (sost. masch.) chiamano i nostri muratori un filo di ferro, che appoggiato a pali confitti nel suolo circoscrive e determina mediante fili a piombo, che da esso discendono, l'area, su cui deve sorgere un edifizio : ed è parola, che non trovo fuor di Piemonte. A me pare che si abbia in essa un derivato del basso lat. *aequalare*, cioè un **aequalamen*, che, naturalmente, subì alterazioni molteplici.

Quale mera possibilità, indicherei questa via.

Poichè un **aequalamen* da noi sarebbe divenuto e rimasto **valám* (es. *eva* " acqua „), converrà pensare ad un **aequalamina*, neutro pl. divenuto, giusta il ben noto processo, femm. sing. Ma un' **aequalamina* sarebbe a sua volta divenuto **valamna*, e tale sarebbe rimasto, perchè in piem. *-mn-* romanzo resta immutato, es. *fumna* " femmina „, *omni* " uomini „, *damne* " dammene „, *antamné* " intaccare „, *semné* " seminare „, ecc. Suppongo perciò che **aequalamina* sia stato mutato in **aequalamula* per sostituzione dell'usitato suff. *-ŭla* alla men frequente terminazione *-ĭna* : e codesto **aequalamula* normalmente si ridusse a **valamla*, poi per dissimilazione a **valamra*, quindi per la consueta epentesi a **valambra* : quest'ultimo al pl. dovette sonar *valambre* (come da molti il vocabolo si pronunzia pur oggi) : ma, poichè in parte del nostro territorio (v. p. es. Gav. s. *brustia*) l'articolo determinato al femm. pl. suona *al* anzichè *le*, ne conseguì che *al valambre*, come voce non chiara a' parlanti stessi, potè parere non già un pl. femm., ma un sing. masch. : e tale diventò, e,

venuta meno la coscienza del numero, *valambre* si mutò in *valamber* come e perchè *Novembre-, Decembre-* da noi suonano *nuvember, dzember*.

A conforto di questa ipotesi (che certamente è un po' complicata: ma talora sono tortuose anche le vie della natura) si possono addurre i nostri *fumra* " femmina ", *ambra* " animella (de' bottoni) ". Infatti, poichè (come s'è mostrato più sopra) da noi *-mn-* rimane, per *fumra* mi par che si debba risalire ad un *femina* mutato in **femula*, che sta a *femella*, come *fabula* a *fabella*, *rotula* a *rotella*, ecc.; e per *ambra* direi che si debba ricorrere ad *animula* passato per la trafila di **ánimla* (con accento retratto per influsso di *anima*), **anmla*, **amla* [Vedasi poi se da un **amla* siffatto non potrebbe per metatesi essere sorto it. *alma*]. Che se abbiamo *r* in luogo di *l* nelle voci nostrane, si è perchè *fumra* è monferrina, e similmente *ambra* sarà monferrina d'origine [Diversamente A. XVI. 543].

VIII.

fidéi " sorta di pasta da minestra ". Comune a tutta l'Italia superiore, la voce appare anche in prov. cat. *fideus*, sp. ptg. *fideos*.

La dichiarazione da *filello* (A. II. 345 sg.), sebbene largamente accolta, mi lascia perplesso. Certamente, esiste un tosc. *filello*, che significa " filetto della lingua ", ma è voce singolare e peregrina, sicchè non è credibile ch'essa sia giunta a conoscenza de' pastai del nostro Settentrione. Nè più probabile è che un **filello* sia sorto di per sè nell'Italia superiore, perchè a formar diminutivi anzichè *-ello* adoperiamo abitualmente i suff. *-ino*, *-etto*, *-otto*. Ma, quando pure si volesse ammettere un **filello* subalpino, per dissimilazione esso sarebbe divenuto **firello*, e tale sarebbe rimasto [Cfr. it. *caramella* da *calamellus* " cannuccia " (M. 1484) con genere mutato per influsso del basso lat. *cannamella*, it. *cannamele*, ne' quali la base suddetta s'è incrociata con *canna* e *miele*].

Perciò tento altra via. Muovo da una forma, quale il mantov. *filadín* (riflesso di " filatino "), che è uno de' nomi di codesta pasta. Suppongo che *filadín* si sia cambiato per metatesi

in **fidalín* (cfr. IG. 167) sotto l'influsso de' numerosi diminutivi in *-lino* (quale ad es. il nostro *faudalín* " grembialino „ e simili). Avvenuta l'inversion del vocabolo, si sarà in esso sentito il verbo *fidare*, che è vivo in tutto il territorio (piem. *fidese*, lomb. *fidass*, em. *fidars*, ecc.): e *fidare* avrà richiamato al pensiero de' parlanti *fidelis* " fedele „, voce dotta, ma nota pure agl'indotti, perchè frequente nel linguaggio della Chiesa. Di qui **fidalín* per l'immistion di *fidelis* si sarà mutato in *fidelín*, poscia con scambio di suffisso in *fidelítt* e *fidelótt* (pav. *fidlon* citato in A. II. 346, nota 2 non mi risulta esistente): e da cotesti pseudo-derivati si sarà poi estratta una pseudo-base *fidell* (o *fidel*, pl. *fidei*). La quale si trova nel ferrar. col senso di " filetto della lingua „, e sarà il " filo di pasta „ passato ad altra accezione.

E che i parlanti abbiano sentito " fedele „ in questo vocabolo, mi par certo, perchè 1° esso suona *fedelen* a Bologna, ed ivi, come *fidlín* da noi, lo si usa per ischerzo nel senso di " innamorato fedele „; 2° in prov. e cat. la cosa, che verosimilmente è d'importazione nostrana, è detta *fideu*, voce semidotta, che per sè stessa significa " fedele „ [Sarà poi quasi superfluo notare che sp. *fideos* così nell'iniziale come nella terminazione *-eos* si palesa mutuato al prov.-cat.].

IX.

turún, it. *torrone*, sp. *turron*, nprov. *tourroun*. Il ben noto dolciume. Da lat. *torrere* (come dubbiosamente s'accenna già in Tomm.-Bell. s. v.): ed è un derivato, che sta al continuatore romanzo del verbo lat., come fr. *coupon* sta a *couper* (N. III. 139). Ora (a tacere del retico *torrer*, che D. 493 menziona, ma di cui non trovo traccia nel Pallioppi nè altrove) lat. *torrere* non sembra rimasto che nello sp. *torrar* (var. *turrar*) " arrostire „, nel prov. *tourrá* " id. „ (e nel logod. *turrare*, cfr. RG. II. 144: ma si sa che il sardo è lessicalmente una propaggine di Spagna): dunque appare evidente che *torrone* ci deve venir dall'Occidente, giacchè il derivato non può essere sorto che là dov'era la base. E, poichè la risposta schiettamente prov. di lat. *-one* è *-ó* (es. *razo* " ragione „), così anche il

prov. *tourroun* dovrà ritenersi mutuato allo spagnuolo. Quindi riesce indubbia l'origine iberica della parola e della cosa.

S'aggiungano poi alcuni altri dati:

1° In Italia il torrone, che da' lessici non risulta attestato prima del sec. XVII, fu anche detto *miele di Spagna* (cfr. Tomm.-Bell., l. c.);

2° Nell'Italia meridionale ha speciale rinomanza il torrone di Napoli, nella settentrionale quello di Lombardia: dunque vi si può scorgere un'importazione diretta dalla Spagna;

3° Sp. *turron* in gergo ha pure il senso di " sasso ", e sp. *turronada* è voce gergale, che significa " sassata ": così da noi a *turún* si dà pure l'accezione scherzosa di " pugno, urtone, ecc. ". Questa concordanza semasiologica sarà del tutto casuale?

[Diversamente K. 9837].

X.

Fr. *meringue*, piem. gen. *meringa*, parm. *marenga*, bol. *mareingh*, it. *marenga*, cat. *merenga*, sp. *merengue* " sorta di dolciume ".

Si ritiene generalmente che la voce muova di Francia: il che è al tutto probabile, trattandosi di termine gastronomico. Il divario nella tonica (*-i-* od *-é-*) attesta secondo ogni verosimiglianza che fu introdotta più anticamente in Piemonte (e Liguria) che non altrove. Per lo sp. v'è poi un altro indizio: nel 1734 l'Accademia spagnuola non registrava ancora il vocabolo. D'altra parte, nell'*-a-* ed *-é-* delle forme italiane può aversi un rifacimento nostrano della parola.

Quanto all'etimo suo, già il Littré s. v. ricordava il basso lat. *meringa*, che si riscontra in carta medievale renana e che significa " merenda ".

Nella quale verosimilmente si ha appunto lat. *merenda*, che scambiò la sua terminazione col suff. germanico *-ing*: scambio, che trova forse la sua ragione in ciò che fra i riflessi romanzi di l. *merenda* ve n' hanno che presentano *-i-* nella tonica (M. 5521).

Ma alla connessione di b. lat. *meringa* con fr. *meringue* sembra opporsi il divario de' sensi " piccolo pasto — dolciume ". Però è difficoltà sormontabile. Usano i nostri confettieri chiamar *merendine* certe loro chicche, intendendo evidentemente ch' esse possano di per sè costituire una merenda: e l'usanza è ben antica, perchè in carta torinese del sec. XIV si menzionano *fogatiae seu merendinae* (Ducange s. v.). Ora, un ugual trapasso semasiologico può essere avvenuto in *meringa*, cioè una molto semplice e naturale restrizion di senso.

[Analogamente potrebbe spiegarsi sp. *melindre* " sorta di dolciume ": io vi scorgerei una base **merendula*, che diede prima **meliendra* (cfr. sp. *almendra* " mandola ": M. 436), poi **melindra* (cfr. sp. *mirla* " merlo ", *siglo* " secolo ": Pidal, Gram. hist. esp. 38), quindi, allorchè venne foggiato il denominativo *melindrear*, parve un posverbale e fu mutata in *melindre* ad analogia delle numerose coppie, quali *sacar* " estrarre ": *saca*, *saque* " estrazione " (Pidal. o. c. 150 sg.). Diversamente M. 5469].

Sarebbe dunque *meringa* una voce latina germanizzata e ritornata nella nuova veste in territorio romanzo.

Ma, colmata la lacuna semasiologica, rimane la geografica e cronologica. Infatti, *meringa* si riscontra a Colonia nel Medio Evo e poi non più in Germania (De' lessicografi tedeschi solo i Grimm registrano *meringel*, var. *meringe*, recandone due esempî tardi, che mi paiono poco probanti).

D'altra parte, in Francia *meringue* non appare attestata che nel 1739 (DG. s. v.). Che è dunque successo della voce nel non breve intervallo di tempo e di spazio? Bisogna supporre che essa abbia serpeggiato silenziosa per secoli nel paese di confine tra Germania e Francia, finchè, mutata di senso, riuscì a penetrar stabilmente nel linguaggio della seconda.

Il che non è punto impossibile: ma non è men vero che per questa via l' ipotesi si sottrae in parte alla dimostrazione.

[Nessuno crederà che, come altri propose (cfr. Littré s. v.), nome e cosa traggan l'origine da *Mehringen*, che è un villaggio d'un migliaio d'anime nel Ducato d'Anhalt: cfr. Vivien de Saint-Martin, Nouv. dict. de géogr. univ. s. v.].

XI.

bíu (Pipino, Ponza, Gavuzzi), var. *bió* (Capello, Zalli, Sant'Albino, Dal Pozzo) " arnese di vimini o di vetrice ".

Mi è noto soltanto nella prima forma e nel senso di " cesto, che regge i bimbi ne' lor primi passi ".

La voce è siffatta che sembra non poter essere indigena. Ravviserei quindi in *bíu* il nprov. *biho* " bastone " e nella var. *bió* il savoiardo *bio* " vetrice, ramo di vetrice ". Così la voce prov. come la sav. risalgono ad una base celtica significante " tronco d'albero " (cfr. DG. s. *bille*, M. 1104) colla differenza che nella prima si ha la base schietta, come nel sullodato fr. *bille* " bastone ", mentre nella seconda si ha un derivato corrispondente a fr. *billot*, che ora significa sopratutto " ceppo ", ma in addietro significò pur " ramo " (cfr. Littré, s. v.).

Ciò premesso, mi par che si debba scorgere qui un processo semasiologico, di cui queste sono forse le fasi: 1° " tronco d'albero "; 2° " ramo — bastone " (trapasso dal tutto alla parte: fr. *bille*, prov. *biho*, fr. *billot* nel senso più antico); 3° " ramo d'un albero particolare " (trapasso dal genere alla specie: sav. *bio*). Passando poi di bel nuovo dalla parte al tutto fr. *billot* ritornò al senso di " tronco ", e sav. *bio* giunse a designar per intiero l'albero particolare, di cui prima designava soltanto un ramo.

Ma più oltre è proceduto il nostro dialetto: ha mutuato il sav. *bio* in quanto significava " vetrice " e tal nome diede all'arnese di vetrice a quel modo che si dice " ferro " la spada e gli operai chiamano " ferri " gli strumenti dell'arti loro: poi, quando s'imbattè nel prov. *biho*, l'ha mutuato del pari e, tratto dall'esterna somiglianza de' due vocaboli (chè, naturalmente, l'intima affinità loro non gli poteva esser nota), diede pure alla voce prov. il significato, che già aveva attribuito alla savoiarda.

XII.

Monf. *sabaké* " scuotere " (Ferraro, Gloss. mf.) è mutuato, parmi, al provenzale, ove da *bassac* " sacco grande " (frutto

dell'incrocio di *bisaccium* con *saccus*: M. 1121) fu foggiato un denominativo *bassacá* " scuotere „ (cfr. fr. *saccader*), il quale per metatesi si è cambiato nel limos. *sabachá*.

Queste le forme attestate. Ma il guasc. *soubacado* " scossa „ (cfr. fr. *saccade*) ci permette di presumere che esiste od esistette pure un **sabacá*, da cui è desunto il nostro *sabaké*, e che per scambio della sillaba iniziale *sa-* nell'usitato prefisso *sub* (*subtus*) si è mutato in un **soubacá*, da cui discendono e il vocabolo guascone e il genov. *subaccá*, che significa " tuffare „ con divario di senso dovuto al mutamento della sillaba iniziale ed al conseguente prevalere del concetto di " (porre, andare) sotto „.

E che monf. *sabaké* sia mutuato mi par che si debba ammettere, se si considera che al nostro dialetto mancano *bassac* e *bassacá*, che ne sono le basi.

[Diversamente R. XXVII. 200].

XIII.

falabrák " uomo grande e grosso, ma sgarbato e goffo „.

Credo che in esso si celi *Fier-à-bras*, gigante saraceno, le cui gesta son celebrate nell'epopea carolingia, e il cui nome di proprio diventò comune in francese e in provenzale (DG., Mistral s. v.). Però, naturalmente, *fier-à-bras* non potè per sè stesso mutarsi in *falabrák*, ma fu necessario l'intervento di uno o più elementi estranei.

Ora, uno ed anzi il più importante de' fattori della trasformazione del vocabolo lo scorgerei nel piem. *falurku* " uomo sgarbato e goffo „, provenzalismo anch'esso, poichè mi pare che altro non sia se non alterazione di prov. *falourdo* " bestialità, goffaggine — fandonia, frottola „ (che, come piem. *fiaka* " indolenza „, è femm. sostantivato di *falourd* " imbécile — drôle „, in cui si sono incrociati i prov. *falot* " plaisant „ e *balourd*: cfr. Z. XXVIII. 145). Come spesso avvenne (ed è questo l'indizio del mutuo), da noi non si sentì in *falourdo* un femminile e grazie all'uscita in *-o* la si cambiò in mascolino: poi, a quel modo che ad es. " peste „ si dice di persona, dell'astratto si fece un concreto.

Sarà poi dovuto ad ulteriori analogie (quali p. es. *fẹrlukél* " vanesio „ = fr. *freluquet*, diminutivo di *fẹrluk* " denari „ = fr. *freluques* " moneta di scarso valore „, e *tẹrlụk* " citrullo „, che è alterazione di " astrologo „ fatto parossitono alla francese: cfr. A. xv. 425), se nel passaggio dal prov. al piem. la tonica si chiuse e il *-d-* si mutò in *-k-*. Comunque, un rapporto tra *falabrák* e *falụrku* mi pare innegabile: anzi direi che sotto il rispetto semasiologico le due voci si siano influenzate reciprocamente.

XIV.

loira " ghiro — poltroneria „, *luirún* " poltrone „. I riflessi romanzi di lat. *glis* " ghiro „ son tali che sembrano legittimar l'ipotesi che accanto al classico *glīre* esistessero tre altre basi popolari: **glĭre*, **līre*, **lĭre* (M. 3787). Ora codesto **lĭre*, a cui risale ad es. fr. *loir* (DG. s. v.), da noi avrà dato **leir*, e da questo si sarà foggiato un **leirún*, diminutivo di tipo gallico (cfr. fr. *liron*, prov. *liroun*) tanto più verosimile in quanto si tratta d'un animaletto. Ma nel nostro dialetto, che per designarlo possiede altre voci (e cioè *agíl*, *aghí*), il semplice **leir* andò smarrito; si conservò per contro il derivato **leirún*, ma (come avviene delle voci, di cui non si sente più l'etimo) rimase più esposto all'azione delle leggi fonetiche: quindi ebbe luogo l'assimilazione dell'atona alla tonica, e **leirún* si mutò in *luirún* ora esistente. Dipoi da *luirún* venne estratto *loira*, che presenta *o* aperto nella sillaba radicale, perchè i parlanti hanno messo la pseudo-base e il derivato in quel rapporto apofonico, che intercede fra *korda*: *kurdín*, *skola*: *skulé*, *porta*: *purtún*, ecc.

Quanto al senso, è verosimile che in origine sì *loira* che *luirún* significarono semplicemente " ghiro „.

Ma l'animale, che dorme per più mesi all'anno, doveva naturalmente suggerire il concetto della " pigrizia „ ed anzi apparirne il simbolo.

Quindi *loira*, che come femminile si prestava meglio alla espressione d'un concetto astratto, acquistò il senso di " poltronería „ pur conservando il senso primitivo: invece *luirún*, che come maschile meglio si prestava all'espression del con-

creto, acquistava (non senza influsso di *plandrún*, *pultrún*, ecc.) il senso di " indolente, pigro „ e perdeva il senso primitivo.

Il procedimento qui descritto non si è compiuto recentemente, e la voce, se pure è del tutto nostrana, si è diffusa, poichè nell'a. mil. si ha *loirón* " neghittoso „: cfr. Salvioni, Fon. mil. 283 nota.

Si usa poi *loira* " pigrizia „ nelle locuzioni *avej la loira adós* e *bate la loira*: la prima è, parmi, foggiata sul modello di " aver il diavolo in corpo „ e quindi si connette colla credenza dell'ossessione e dell'invasamento: la seconda invece è desunta, direi, dall'orologio, che " batte le ore „, in quanto che la *loira* fu considerata come un morbo, che ricorre periodicamente (cfr. Gavuzzi s. v.).

XV.

bartavela, var. *bẹrtavela* " lingua „ (cfr. la locuzione *mné la bartavela* " menar la lingua „) — poi (come si suol dire " cuore „ per " bontà „ e " testa „ per " intelligenza „) " loquacità „ — " sorta d'uccello „. Corrispond. al prov. *bartavello* " lucchetto, saliscendi — ciarlone — sorta di uccello „. Il quale discende da lat. *vertibella*, var. di *vertibula* (cfr. Corp. gloss. lat. v. 253, 8), a cui sta come *tabella* a *tabula* e simiglianti. Quindi nel *bar-* dovrà scorgersi la sillaba iniziale *ver-* sostituita colla risposta romanza del pref. *bis* (Altrimenti R. XXVII. 221): e il secondo *a* sarà desunto da qualche parlata vicina, come ad es. il savoiardo, ove il denominativo prov. *bartavelá* " ciarlare „ (direi, per una serie di assimilazioni regressive) si è ridotto a *bartavalá* " id. „, ed in cui il nome (per reazione del derivato sulla base) suona *bartavala* " buratto della farina — ciarlone „: forma e sensi così remoti dall'etimo che si può ritener che il sav. abbia mutuato al prov. la voce, su cui esercitò di poi il suo influsso.

Sotto il rispetto semasiologico, il senso primo è " cosa girevole, mobile „ ristrettosi poi a " lucchetto, saliscendi „; di qui il vocabolo batte doppia via: da una parte la mobilità dell'oggetto suggerisce l'idea di cosa non meno mobile, cioè " la lingua „, donde " loquacità „ e " loquace „: d'altra parte il

rumore dell'oggetto medesimo dà il nome ad un uccello, il cui verso ha qualche affinità con esso rumore (cfr. Mistral s. v.).

Resta a vedersi se e quale rapporto interceda fra il nostro *bartavela* e il prov. *bartavello*. Io propenderei a scorgere nella voce nostra un mutuo per due ragioni: 1° il prov. ha il vocabolo nel senso proprio e nel figurato, noi soltanto al figurato; 2° difficilmente una parlata, che tende alla sincope, come la nostra avrebbe lasciata intatta la protonica mediana.

Ne è prova piem. *varvela* " spranghetta di ferro, in cui si infila l'arpione ", che corrisponde bensì a fr. *vervelle* " anneau fixé aux courroies, qui retiennent les faucons par le pattes " (K. 10096, DG. s. v.), ma non ne deriva: onde i due costituiscono soltanto una concordanza franco-piemontese, in quanto risalgono entrambi a lat. *vertibella*, var. di *vertibula*. *cardines* (Corp. gl. lat., l. c. 9). E forse questo *vertibella* non è identico al precedente, poichè esso è un neutro pl. divenuto femm., mentre quell'altro sembra già un femm. per sè stesso.

XVI.

buru " sorta di giuoco di carte — sbaglio, sproposito ": ed è lo stesso gioco, che ora si chiama *la bestia* e in franc. *la bête* (Gavuzzi). Ora, nprov. *bourro* " asina " (vocabolo estratto da lat. *burricus*: M. 1413) è pure nome d'un gioco di carte. Non mi par dunque che sia da dubitarsi che la voce nostra sia mutuata al prov., tanto più che da noi *buru* è maschile, mentre in prov. è femminile: e codesto scambio del genere, che deriva dalla ingannevole uscita in *-o* del femminile provenzale, è indizio del mutuo.

E dal gioco stesso deriva il senso di " sbaglio, sproposito ", perchè in esso si chiama *buru* la mossa fallita, che obbliga il giocatore a versare una somma, la quale viene poi devoluta al vincitore della partita (cfr. DG. s. *bête*).

XVII.

katçrla " la cispa degli occhi ". Usato per lo più al plur., corrisponde a quelle, che in Toscana anticamente si

chiamavan *cáccole*. Credo che stia per **kakęrla* (= **kakerula*: da *cacare*, cfr. M. 1443) e sia voce del linguaggio infantile accolta dagli adulti per amor di decenza. Tale la direi, perchè i bambini sogliono scambiare *t* con *k*: ma di siffatto scambio abbiamo anche altri esempî, come v. g. *tampé* = *kampé* " gettare „ (da *campus*: M. 1563): nè a tutti i casi si potrà con sicurezza attribuire codesta origine.

XVIII.

buleta " rovina „. S'usa nelle locuzioni *ese*, *andé n buleta* " essere, andare in rovina „. È un francesismo schietto, poichè riproduce fr. *boulette* " pallottola di carne tritata „ (da l. *bulla*: M. 1385): e che tale sia lo palesa la terminazione non indigena *-eta*, mentre *-itta* in piem. dà *-ętta*, es. *bulętta* " bolletta, polizza „ (cfr. RG. II. 548 sg.).

È un'immagine gastronomica desunta da ciò che la condizione dell'uomo, che va od è in rovina, fu paragonata a quella della carne, che vien tritata e ridotta in pallottole.

Analogamente diciamo *ese a tok*, letteralmente " essere a pezzi „, per significare " essere rovinato „: locuzione, in cui l'immagine degli abiti laceri, che sono indizio e simbolo della miseria, si associa a quella della carne fatta a pezzi.

XIX.

mlika (canav. *mlękka*) è parola, che manca a' lessici, ma s'usa nella locuzione *i fi dla ml.* " i fichi del giulebbe „. Le corrisponde nprov. *melico* (*mielico* Rouergue, *mialico* Limoges, *melico*, *merico*, *merigo* Marsiglia) " hydromel, eau miellée — lavure de la cire fraîchement séparée du miel — gomme des cerisiers et des pruniers — boisson douçâtre, vin trop doux „. Si deve dunque postulare una base **melicca* (chè quanto alla variante canavesana si può pensare che sia stata rifatta sulle forme rizotoniche del vb. " leccare „, es. *a lękka* " egli, essa lecca „). Ma nella terminazione *-icca* non conviene (a tacere della inverosimiglianza intrinseca) scorgere il ben noto suff. ibe-

rico formatore di diminutivi, sia perchè nulla d'analogo offrono sp. e prtg., sia perchè il vocabolo non ha senso diminutivo. Ond'è che esso viene ad accrescere l'oscura categoria delle voci uscenti in *-acco*, *-occo*, ecc. (quali it. *vigliacco*, *balocco*): cfr. RG. II. 542.

XX.

kuera, *kualera*, *rela* sono sinonimi, significando egualmente " codazzo — strascico — orlo delle vesti infangato „. Il primo è chiarissimo, poichè non può essere altro che un **codaria*. Il secondo mi sembra metatesi di un **kuarela*, che deriva da un **coderella* mutatosi in **codarella* per una tendenza, che il nostro dialetto ha comune con più altre parlate d'Italia (cioè *e* atono, che davanti a *r* passa ad *a*). E da **kuarela* per aferesi della sillaba iniziale direi che sia sorto *rela*.

[*rela* da **orella*: A. XVI. 535, nota 4. Non crederei, perchè lat. *ora* sembra ignoto al territorio gallo-italico: cfr. M. 6080. 1].

XXI.

munada " smorfia, moina „: si trova pure a Milano, Parma, Venezia. È lo sp. *monada* " gesto affettato e fastidioso „: il quale è un derivato di sp. *mona*, che, come it. *monna*, significa " scimmia „, e discende da quella voce turca, che abbiamo noi pure nella locuzione *gat maimún* (M. 5242. Z. Bhf. I. 92). Dunque *monada* per sè stesso significa " atto scimmiesco „.

A noi la voce verosimilmente proviene di Lombardia, chè la palesa non indigena l'uscita *-ada* (mentre *-ata* in piem. si risolve in *-á*, es. *kutlá* " coltellata „): ma indigena non è neppure nelle altre regioni dell'Italia superiore, alle quali la base aferetica *mona* (nel senso di " scimmia „) è ignota. Sarà dunque una delle scarse reliquie del dominio spagnuolo.

XXII.

In A. XIV. 115 si citano piveron. *anave* (che meglio si scriverebbe *nave*) ed *ande* (che è poi il piem. comune *andi*);

e del primo non si propone alcuna etimologia, mentre si trae il secondo da *andito*.

Ora, i due vocaboli sono sinonimi, significando entrambi " mossa, aire, slancio, abbrivo „: perciò, dato un tal significato, non mi par da ammettersi l'etimo proposto pel secondo, poichè non riesco a concepire il processo logico, per cui il nome di luogo sarebbe divenuto nome d'azione.

Per contro *nomina actionis* per eccellenza sono i posverbali (RG. II. 447, N. III. 256). Quindi in *andi* (var. *ande*) direi che si debba scorgere il posverbale del vb. piem. *andié* (composto *anandié*) " avviare, addestrare, dirigere, spingere „, che deriverà da un **andicare* (RG. II. 607): naturalmente, da *andare*.

Così, poichè in Canavese v'è un vb. *navié* " avviare, dirigere „, che altro non è che un **in-avviare* (di formazione analoga al succitato *anandié* = **inandicare*), il *nave* (od *anave*, di cui sopra) ne sarà il posverbale.

XXIII.

bẹrtún " cavallo cogli orecchi mozzi „ si connette co' riflessi romanzi di lat. **bis-tondere*, quali ad es. a. fr. *bestondre*, *bertondre* (D. 49. 711. Altrimenti Z. Bhf. I. 93).

Ma anzitutto è da escludersi la derivazione francese, perchè la voce non si trova che in Italia, ove si hanno tosc. *bertone* e piem. *bẹrtún*. E in Toscana non dev'essere nè molto antica nè molto diffusa, poichè il Tommaseo la registra con un solo es. di Buonarroti il giovine (sec. XVII) e la Crusca[5] non la registra affatto. Per contro in Piemonte *bẹrtún* ha una certa diffusione, poichè lo si dice non solo del cavallo sullodato, ma anche di una qualità di riso più basso e di una di grano, che in altre parti del territorio è detto *mut* " mozzo „ (M. 5793).

Quindi crederei nostrano il vocabolo, e in esso scorgerei una forma di piem. *bẹrtundé* " tosare „ (che è **bistondere* passato alla I coniug.), cioè **bẹrtund* " tosato „, che sarebbe uno di quei " participî accorciati „, di cui fa largo uso il nostro dialetto.

[Eccone alcuni esempî: *bruz* " bruciato „ — *skuz* " scusato „ — *stup* " turato „: da *stupé* (lat. *stuppa*) — *stuv* " stipato „ (con

u dovuto alla labiale seguente) — *skis* " schiacciato „: da *skisé* (d' incerta origine: A. IX. 257 nota 1, XII. 430. K. 8456) — *sċas* " stretto, compatto „: da *sċasé* (= it. *schiacciare*? K. 5280) — *ambós* " rovesciato, riverso „: da *ambusé*. M. 1425: che questo vb. prima di quello di " rovesciare „ abbia avuto senso analogo ad it. *imbottare* mi par che si desuma dalle locuzioni volgari *ambós-la*, *stúp-la*, che significano " taci! „ e in cui la bocca è paragonata ad una bottiglia. — *poz*, che si dice del pane raffermo: da *puzé* (lat. *pausare*) — *dęstís* " spento „: da *dęstisé* (che connetterei con lat. *titio* " tizzone „) — *sċos* " nato „: da *sċode* (lat. *claudere*) — *skuz* " nascosto „: da *skunde* (lat. *abscondere*) — *tuk* (" toccato „ poi), " mentecatto „: da distinguersi da *tuk* " tatto „ posverbale — *ensi* " cominciato „: da *ensé* (lat. *initiare*: M. 4440) — *muk* (propriam. " mozzato „), metaforicam. " mortificato „: da *muké*, M. 5706: ma, dato lo stretto rapporto logico fra il *mut* sopraccennato (M. 5793) e codesto *muk*, sorge il dubbio se le due voci non siano identiche e non sia fra esse semplicemente intervenuto lo scambio dell'esplosiva finale].

Ora, **bęrtund*, formazione simile a queste, può prima aver perduto il *-d* per analogia di *bęrtun* " berrettone „, poi dal senso di " tosato „ esser passato a quello di " corto, basso „, che presenta come epiteto di vegetali.

E di *bęrtún* poi *bęrtuné* " tosare „ sarà il denominativo (Il *bertonare* menzionato in M. 1052 e altrove manca a' lessici italiani).

XXIV.

bauti " altalena „ è affine a ticin. *báltigh* " id. „ (cfr. Boll. stor. Svizz. it. XVII. 83). Dunque conviene muovere da lat. *ballare* (M. 909): ampliato col suff. *-ittare* (RG. II. 613), ne risultò un frequentativo, che suona variamente a seconda che la parlata pratica o no la sincope: di qui tosc. *ballettare* e parm. *baltár* (che è passato a significar " vagliare „).

Da quest'ultimo, considerato come esempio e tipo della risoluzione gallo-italica, si è col suff. *-icare* (RG. II. 607) formato un altro verbo, che da noi suona *bautié* " dondolare „: cfr. sotto il rispetto fonetico il nostro *mastié* " masticare „ e

sotto il rispetto tematologico il ticin. *baltigá* " oscillare „. E di *bautié* son posverbali *bauti* e il sinonimo *bautia*, che, come it. *dondolo*, avran significato dapprima l'azione espressa dall'idea verbale, quindi passarono a significar la cosa, che la produce. Da *bautia* poi s'è foggiata la var. *biauta* per la propagginazione regressiva dell'*i* di iato postonico (Per altri esempî del procedimento cfr. A. XVI, 237).

Nè queste son l'uniche derivazioni della base *baltare*: per " altalena „ si hanno ancora piem. *baudís*, comasc. *baltígh*, *baltrí*, *balzingota*.

[E sarà da vedersi se qui non si potrebbero recapitare it. *ribaltare* e *balzare* co' suoi derivati e composti: altrimenti M. 919].

XXV.

ankęrna " intacco „ si collega con lat. *crena* " id. „ (Dal Pozzo). Ma non ne deriva direttamente: lo esclude già la preposizione, con cui è composto, ma sopratutto il colore della tonica. Infatti *crena* avrebbe dato piem. **kreňa* come *creta* diede *kreja*. Per contro in piem. un *kre-* (e in genere un gruppo " cons. + r + voc. „) in atonía dà *kęr-* (ed esiti simiglianti), evidentemente perchè nella sillaba protonica cade la vocale, l'*r*, che viene a trovarsi fra consonanti, diventa sonante, e da esso si sviluppa l'*e* irrazionale: così si spiegano *tęrzént* " trecento „, *kęrsú* " cresciuto „, *kęrdú* " creduto „ [Ne' verbi poi questa risoluzione propria delle forme arizotoniche si estende alle rizotoniche: e di qui *kęrse* " crescere „, *kęrde* " credere „. Similmente per " imprestare „ (K. 7393) abbiamo due forme *pręsté* e *pęsté*, che (come indica l'*e* irrazionale) risalgono ad una sola, cioè ad un **pęrsté*, in cui da una parte *r* è caduto per alleggerimento di policonsonanza, donde *pęsté*, e dall'altra è avvenuta la metatesi di *-ęr-* in *-rę-*, donde *pręsté*].

Dunque per *ankęrna* bisognerà partire da **incrinare*, che avrà dato **ankęrné* " intaccare „ (e forse il participio di questo verbo entra un qualche poco nella locuzione *unga ankarná* " unghia incarnita „): e di esso verbo *ankęrna* è il posverbale, a quel modo che *tęrsa* " treccia „ è il posverbale di *antęrsé* " intrecciare „ (di incerta origine: K. 9728).

XXVI.

dañé " stillare „: si dice de' recipienti, che da una qualche fessura lasciano sfuggire il liquido contenuto. Risale a *damnum* (A. XVI. 537, M. 2467). Ma donde la palatalizzazione della nasale? Abbiamo bensì ne' contadi *dañ* per " danno „: ed è un " plur. pro sing. „, in cui l'*i* finale ha intaccato la nasal precedente: ma non s'ha da pensare che *dañé* ne derivi, perchè il verbo esiste anche nella parlata urbana, a cui *dañ* è ignoto. Perciò in *dañé* vedo *dan̤* ampliato col suff. *-idiare* (RG. II. 610), che da noi si risolve in *-ié* (cfr. piem. *batié* " battezzare „): dunque **danié*, donde *dañé*, il quale per questa via viene ad identificarsi con it. *danneggiare*.

XXVII.

burlét " cuscino pieno di borra — cercine pei bimbi „. Corrisponde al fr. *bourrelet*, ma non ne è necessaria derivazione. Anzi il fr. non possiede la base vera e propria del vocabolo, poichè il *bourreau* " sacco pieno di paglia „, da cui lo si trae (cfr. DG. s. v.), è uno de' frequenti plur., che si son sostituiti al sing. (N. II, 251). Per contro il nostro dialetto ha *burél* " collare imbottito, che si mette alle bestie da soma „. Ora, da *burel* possiamo aver formato *burlét* a quel modo che da *baríl* formammo *barlét* " bariletto „. Ma la base è la stessa per la voce nostra come per la fr., cioè lat. *burra*, it. *borra*, piem. *bura* (M. 1411).

Anche qui si può forse recapitare *burela* (M. 1214. 1224. 1385). È nome men recente delle boccie. Ora, il gioco delle boccie è una forma del gioco antichissimo della palla. La quale, prima d'essere (com'ora) di gomma, fu di stoffa e riempita di sughero od altra materia leggera. Perciò, come *burél* significò " collare imbottito „, così *burela* potè in origine aver significato " palla imbottita „ ed essere poi passata a designar la sfera di legno, a quel modo che in questa accezione fu usata *boccia*, che pure in origine significò verosimilmente " globo di vetro „.

XXVIII.

kerpúñ " stopposo, asciutto, arido „. Risale, parmi, a *kerpé* " crepare „: del quale conosco un derivato *kerpún*, che manca a' lessici e s'usa nella locuzione *kerpún d ríe* " scoppio di risa „. Ora, codesto *kerpún*, come " nomen actionis „, non può essere che il posverbale di un **kerpuné* formato come il *buluné*, di cui sopra. Come poi accanto a *buluné* si ha *buluñé*, che è lo stesso verbo ampliato con *-ié* (= *-idiare* od *-icare*), così può postularsi un **kerpuñé* analogo pel senso e (in parte) per la forma ad it. *screpolare*. E di questo verbo scorgerei il " participio accorciato „ in *kerpúñ*, che prima avrà avuto il senso di " screpolato „, poi quello di " asciutto, secco „: e si dice de' frutti, che seccando si screpolano e perdono il lor sugo, ma si estende pure alle persone dal volto rugoso.

XXIX.

takesla a j uríe, letteralmente " attaccarsela a gli orecchi „, significa " proporsi di ricordare alcunchè, ma specialmente un torto sofferto per trarne vendetta a tempo opportuno „. È locuzione, che verosimilmente risale a quell'antica credenza, secondo cui " est in ima aure memoriae locus „ (Plinio, Nat. hist. XI. 103).

XXX.

ćamé bute, letteralm. " chiamar: Bottiglie! „, significa " riconoscersi vinto „. Viene dalle taverne, ove si giuoca mettendo come posta una o più bottiglie: ora, chi perde si riconosce vinto, quando *chiama*, cioè ordina le bottiglie messe in gioco.

Gennaio 1914.

Le vicende della scuola pitagorica secondo Timeo.

Nota di AUGUSTO ROSTAGNI.

I.

Nuovi e gravi sconvolgimenti occupano nel secolo V e poi sul principio del IV la storia de' Pitagorici, facendo eco alla memorabile catastrofe che li aveva colpiti ancor vivo, se bene assente da Crotone, il Maestro.

Nessun dubbio che le due diverse sedizioni le quali servono da capisaldi in tutta questa storia, eppure e in Giustino e in Apollonio, come vuole la tendenza quasi universale delle nostre fonti indirette, si trovano contaminate, abbiano avuto da Timeo il lor giusto allogamento: però che, se la prima, di cui fu discorso, è posta in attinenza con la distruzione di Sibari del 510 (1), della seconda ora un anello sopravvive storica-

(1) V. lo studio precedente *La vita e l'opera di Pitag.* etc. Abbiamo dimostrato che il nesso della distruzione di Sibari con la sommossa ciloniana non è da ascrivere alla fantasia d'Apollonio tianèo, come si suole, bensì da vedere rispecchiato in Timeo: ed anche ne abbiamo supposte probabili le traccie in Eraclide Pontico. Aggiungasi ora che tale nesso appartiene di fatto alla tradizione pur anteriormente a Timeo. Così è dato conchiudere da una notizia dispersa e universalmente trascurata: ap. Euseb. *Praep. Evang.* X 3 pp. 464-5 (vol. I p. 535 Dindorf). Eusebio riferisce a traverso a Porfirio un frammento del *Τρίπους* di Androne d'Efeso (fr. 6 Muell. II pp. 347-8), storiografo il quale grazie a questo stesso luogo resulta anteriore a Teopompo. Orbene dice Eusebio: Androne esponeva vari fatti miracolosi proprii di Pitagora, quali la previsione di un terremoto in Metaponto, la previsione di un naufragio in Megara di Sicilia, la previsione, ad un ospite suo, della caduta di Sibari; e questi fatti erano da Teopompo ricopiati e attribuiti a Ferecide con semplice sostituzione di nomi: *καὶ τὴν Συβάρεως ἅλωσιν ἐπὶ τὴν Μεσσήνης μετέθηκεν· ἵνα δέ τι δοκῇ λέγειν περιττόν, καὶ τοῦ ξένου προστέθεικε τοὔνομα, Περίλαον αὐτὸν*

mente apprezzabile, l'intervento degli Achei. Intervento che cade oltre la metà del secolo V: in corrispondenza coi dati approssimativi della tradizione di Aristosseno, nella quale l'essersi il futuro maestro di Epaminonda, Liside, salvato giovanissimo (insieme con Archippo) dall'incendio della casa di Milone, dà a pensare per sì fatta sommossa al 450 circa (1).

E si può ancor sempre, in Timeo, determinare con maggiore certezza tanto la cronologia quanto il carattere degli avvenimenti, traendo partito di un buon numero d'indicazioni storiografiche, sue, che agli studiosi sono passate inavvertite o male intese.

Ben presto i Pitagorici, dopo il tumulto ciloniano, eran tornati in Crotone a riassumere le redini del governo; poichè la democrazia, così violentemente insorta, non aveva però saputo gettar salde basi. E qui forse lo scrittore inquadra la efimera tirannide di Clinia — presso Dionys. Halic. XX 7 (2) — onde si motivava il cedere delle velleità popolari e il prorompere, di nuovo, della reazione oligarchica. Tutto questo è confacente alla valutazione storica da lui in principio instaurata e all'indirizzo

---

καλεῖσθαι λέγων. Con che appena è necessario confrontare Theopomp. fr. 66 Muell. I p. 287 = Laert. Diog. I 11, 2. Par chiaro dunque che secondo antica tradizione Pitagora non sarebbe stato estraneo alla caduta di Sibari e da Crotone si sarebbe allontanato prevedendo i prossimi torbidi. Il che tanto più è notevole se si era altrimenti indotti a credere quel nesso determinato soltanto dalla concezione storica del Siciliano.

(1) Cfr. sulla tradizione d'Aristosseno Busolt *Griech. Gesch.* II² p. 771, 3; J. Burnet *Die Anfänge d. griech. Philos.* aus d. engl. übers. v. E. Schenkl II Ausg. (Berlin 1913) p. 79: libro d'informazione larga e chiara. — Da respingere è l'ipotesi di Unger " Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu München " Philos.-philol. Cl. 1883 pp. 168 sgg. che tende a fissare un *terminus ante quem* della seconda rivoluzione nell'anno 461; ciò, muovendo dal testo di Aristosseno in Iambl. § 251, lacunoso e più innanzi interpretato. Corssen " Philologus " LXXI (1912) pp. 347-8 vede nel racconto di Apollonio una inverisimiglianza interna, sì da respingerlo totalmente, nè comprende la confusione dei due avvenimenti. Anche A. Delatte " Rev. de Philol. " 1910 pp. 180 sgg., pur riconoscendo non senza perspicacia le orme di Timeo, sembra accogliere tal quale la bizzarra contaminazione retorica e novellistica di Apollonio ed elementi suppositizii come ad es. la figura del rètore Ninone.

(2) Su Clinia v. Unger l. c. p. 165; Busolt *Griech. Gesch.* II² p. 771.

altresì che i fatti prendono allorchè, in un conflitto pel governo delle città, *περὶ τὰς πολιτείας*, soggiacciono i Pitagorici dominanti: *τῶν πρώτων ἀνδρῶν ἐξ ἑκάστης πόλεως ... διαφθαρέντων*. Timeo non ignora l'incendio della casa di Milone, per quanto ricaviamo da Giustino: |*Pythagorei*| *civitatem in se converterunt, quae eos cum in unam domum convenissent cremare voluit*; chè anzi narra i sessanta scampati. Ma, al di sopra della ben scarna, semplicista e unilaterale tradizione d'Aristosseno che tutto riduce al piccolo tumulto locale, egli scorge nella *στάσις πρὸς τοὺς Πυθαγορείους* una vicenda d'indole più vasta, ripercossasi contagiosamente attraverso le varie città della Magna Grecia, per i varii *συνέδρια*, rappresentante un complessivo travolgimento politico, proceduta quindi entro una larga cerchia di cause e di manifestazioni. Leggasi per disteso, com'è indispensabile, il compendio, parecchie volte citato, di Polibio, II 39: *καθ'οὓς γὰρ καιροὺς ἐν τοῖς κατὰ τὴν Ἰταλίαν τόποις κατὰ τὴν Μεγάλην Ἑλλάδα τότε προσαγορευομένην ἐνεπρήσθη τὰ συνέδρια τῶν Πυθαγορείων. μετὰ ταῦτα γενομένου κινήματος ὁλοσχεροῦς περὶ τὰς πολιτείας, ὅπερ εἰκός, ὡς ἂν τῶν πρώτων ἀνδρῶν ἐξ ἑκάστης πόλεως οὕτω παραλόγως διαφθαρέντων, συνέβη τὰς κατ'ἐκείνους τοὺς τόπους Ἑλληνικὰς πόλεις ἀναπλησθῆναι φόνου καὶ στάσεως καὶ παντοδαπῆς ταραχῆς· ἐν οἷς καιροῖς ἀπὸ τῶν πλείστων μερῶν τῆς Ἑλλάδος πρεσβευόντων ἐπὶ τὰς διαλύσεις, Ἀχαιοῖς καὶ τῇ τούτων πίστει συνεχρήσαντο πρὸς τὴν τῶν παρόντων κακῶν ἐξαγωγήν*. E il compendio polibiano continua ricordando che, oltre a ciò, anche qualche tempo appresso — *μετά τινας χρόνους* — quei di Crotone di Sibari di Caulonia, unitisi in confederazione, adottarono gli statuti e le costumanze degli Achei, e, così organizzati, ebbero a combattere poi, da un lato, Dionisio il Vecchio di Siracusa, i barbari (Lucani) dall'altro.

La lega, cui qui allude Timeo, era sorta dopo la fondazione (445) e dopo il rapido incremento di Turii, nel proposito di combattere, con le forze dei colonizzatori Achei, questo centro sviluppantesi: ad essa partecipava la nuova Sibari, già fondata, a sua volta, in contrasto con Turii (Diod. XII 10 sgg. 22) (1). — Così vien fatto di sorprendere le direttive e quasi

(1) Cfr. Beloch II[1] p. 164.

il punto di veduta dello scrittore: poichè le fasi di che precedentemente è parola sono ben collegate, e l'ingerenza degli Achei dopo il secondo tumulto antipitagorico, tante volte da noi menzionata senza ancora poter intendere in che consistesse e a quale àmbito di fatti appartenesse, ha carattere ormai definito, da identificare non altrimenti che in quest'ordine di vicende. Nè reca meraviglia se la caduta dei Pitagorici intesa come *κίνημα ὁλοσχερὲς περὶ τὰς πολιτείας* tocca da vicino e la fondazione di Turii e le lotte scatenatesi vivissime, per contrarii avviamenti politici, nella Magna Grecia. L'anno 453 i profughi sibariti avean cominciato a ricostrurre la loro città, ma in capo a non molto tempo, nel 448/7, furon abbattuti e dispersi dai loro naturali nemici i Crotoniati (Diod. XI 90, 3 XII 10) (1). Gli è poco di poi, intorno al 445, che gli Achei con altri coloni, particolarmente ateniesi, s'interpongono, assecondano i Sibariti, dànno origine alla nuova città, Turii (Diod. X 10) (2). Crotone non repugna.

Questo interporsi degli Achei, del quale ignoriamo per altro i compiuti motivi e l'indole storica, ha nell'opera del Siracusano un significato, una determinazione notevole che integra d'assai le nostre conoscenze al riguardo: sussegue al disastro pitagorico, esprime il pacificarsi degli animi, segna il mutamento di governo. E vuol dire adunque: che nel 453-448/7 il governo di Crotone, oligarchico, e cioè pitagorico, seguendo il suo primo instituto, s'oppose al rinascere di Sibari; sedizione scoppiava perciò nella città e abbatteva i Pitagorici (3);

---

(1) Cfr. Busolt *Griech. Gesch.* III 1, p. 522.

(2) La cronologia è minutamente discussa da Busolt *Griech. Gesch.* III 1, pp. 523 sgg.; De Sanctis *Storia dei Rom.* II p. 183, 4. Avere posto in predominante rilievo la parte avuta dagli Achei nella nuova colonia, accanto agli Ateniesi e ad altre genti, è forse carattere di Timeo, carattere che persiste in qualche fonte, in Diodoro. Sulla parte dei varii popoli: Busolt *Griech. Gesch.* III 1 p. 547, 4. — È da ritenere probabile, ora, con Beloch *Griech. Gesch* II 1² (Strassburg 1914) p. 200, 4 che la città così fondata, intorno al 445, dai profughi sibariti, avesse dapprima il nome di Sibari, e Turii si chiamasse soltanto in seguito alla secessione di essi profughi, recatisi a costruire altra Sibari, la Sibari sul Trionto (v. pp. segg.).

(3) Che, all'epoca della fondazione di Turii, Crotone fosse impegnata dalla sommossa interna, è ipotesi di Busolt *Griech. Gesch.* III 1, p. 523, cui ora Timeo ricostituito reca conferma.

nel 445, non senza il concorso degli Achei, Turii sorge, liberamente. Nè soltanto liberamente — aggiungiamo —, ma col favore di Crotone fattasi democratica. Poichè molto in buon punto presso Diod. XII 11, 3 ricorre la notizia: Turii, di fresco nata, essere retta a democrazia ed avere alleanza con Crotone: ciò che non poteva accadere se non pel mutato governo di Crotone stessa (1). L'epoca e l'indole degli eventi sono manifeste; e tutto, ora, balza fuori, fedelmente rispecchiato e riconoscibile, dalla narrazione apolloniana di Giamblico § 262. A comporre le difficoltà sorte dalla catastrofe pitagorèa, quei di Crotone chiedono l'arbitrato de' Tarantini de' Metapontini de' Caulonìati: gli arbitri decretano di mandare in esilio i Pitagorici, *ὡς ἐν τοῖς τῶν Κροτωνιατῶν ὑπομνήμασιν ἀναγέγραπται*. Perciò nuove leggi, popolari, si instaurano; ed ha luogo una spartizione delle terre, in conformità col desiderio onde già il primo tumulto, dopo Sibari distrutta, era mosso: *καὶ τά τε χρέα ἀπέκοψαν καὶ τὴν γῆν ἀνάδαστον ἐποίησαν*.

Come ognun vede, Timeo, o sia che pur soltanto si appoggi sulla corrispondenza cronologica, o sia che a ciò s'induca con preciso apprezzamento dei fatti, o piuttosto anche obbedisca ad una naturale e diffusa inclinazione della storiografia antica, certo finisce per assomigliare la prima alla seconda sommossa, quali entrambe determinate dall'azione dei Pitagorici contro Sibari e quali entrambe consistenti nella caduta dell'oligarchia: crea, per conseguenza, un parallelismo che non piccolo impulso fu poi alla effettiva confusione dei compilatori, immedesimanti le due lontane vicende in una sola. Ma di questo suo schema le particolarità sono parecchie, le quali si prestano a dimostrazione non che a piena illustrazione.

E sia la prova più tangibile. Apollonio in Iambl. § 263, descrivendo l'intervenire degli Achei e il ritornare dei Pitagorici espulsi, non senza parole che sottolineino le espressioni stesse di Polibio, — *μεταπεμπόμενοι δὲ πρεσβευτὰς ἐξ Ἀχαΐας δι' ἐκείνων πρὸς τοὺς ἐκπεπτωκότας διελύθησαν καὶ τοὺς*

(1) *πρὸς τοὺς Κροτωνιάτας φιλίαν συνθέμενοι καλῶς ἐπολιτεύοντο· συστησάμενοι δὲ πολίτευμα δημοκρατικὸν διεῖλον τοὺς πολίτας εἰς δέκα φυλάς...*

ὅρκους εἰς Δελφοὺς ἀνέθηκαν — coglie un elemento sostanziale della fonte. Dopo cacciati i Pitagorici da Crotone, dopo fondata Turii, le fazioni erano ripullulate, pur in Turii, causa la varia provenienza dei popoli colonizzatori: gli originarii dell'antica Sibari, dissidenti, si staccavano, costruendo una seconda Sibari; le parti rimaste dividevansi e contendevansi il dominio della città. E, quali fossero i principii in lotta, lo dice il fatto che da prima imperava la democrazia (Diod. XII 11, 3), di poi sovrastarono gli ottimati (Aristot. *Polit.* V, 7 pp. 1307 *a*. 1307 *b*) (1). Per ricondurre la pace fu consultato l'oracolo di Delfi che alla questione della preminenza, circa il *συνοικισμός*, rispose: non spettare l'onore all'una più tosto che all'altra parte, sibbene ad Apollo: Diod. XII 35 (2). Ciò avveniva, in conformità con quanto narra Diodoro (nè par improbabile ch'egli anche attinga dalle Storie del Nostro), nell'anno 434/3, arconte, ad Atene, Cratete (3). Dunque, ecco la data da assegnare al ritorno dei Pitagorici espulsi, di perfetto accordo col contesto d'Apollonio secondo cui (tenendo conto delle due rivolte sovrapposte) un certo tempo intercedette fra la sedizione e il ritorno: quella nel 448-5, questo nel 434 circa. Fu — riferisce Apollonio — la sazietà dei persistenti conflitti a persuadere la conciliazione coi fuggiaschi. Per cui sembra ormai palese: che nel lavorio dei partiti, contendentisi il dominio di Turii, Timeo additava un altro riflesso della contrastata oligarchia pitagorica, il propagarsi della medesima rivoluzione di Crotone agli altri centri: così come mostra intendere, da lui desumendo, Polibio nel proprio quadro compendioso (4). La pacificazione di Turii, in-

(1) Sulla costituzione di Turii vedasi Busolt *Griech. Gesch.* III 1, p. 533.

(2) ... *τῶν Θουρίων πεμψάντων εἰς Δελφοὺς τοὺς ἐπερωτήσοντας τίνα χρὴ τῆς πόλεως οἰκιστὴν ἀγορεύειν, ὁ θεὸς ἔχρησεν αὐτὸν δεῖν κτίστην νομίζεσθαι... καὶ τὸ πλῆθος τῆς στάσεως ἀπολυθὲν εἰς τὴν προϋπάρχουσαν ὁμόνοιαν ἀποκατέστη.*

(3) Su tali contingenze cfr. Busolt *Griech. Gesch.* III 1, p. 537; Beloch *Griech. Gesch.* II 1² p. 202. Naturalmente va osservato che qui Diodoro non vede altra questione che quella isolata dello *οἰκιστής*; però nota la concordia civile a questo fatto successa.

(4) Un segno, ancora, affatto disperso trovo di ciò in Tertull. *Apolog.* XLVI 13: *Pythagoras apud Thurios, Zenon apud Prienenses tyrannidem*

culcata dall'oracolo di Delfi, si esplica, oltrechè per avventura sotto altri aspetti, nel richiamo dei Pitagorici esiliati.

Tanto è vero, che Timeo persiste ad illuminare delle vicende successive quel lato ancora. L'indizio raccolse, per l'ennesima volta, Apollonio presso Iambl. § 264: i Pitagorici tornati a Crotone in breve aver saputo guadagnare il favore del popolo, comportandosi da prodi nella guerra con Turii: *ἐμβαλόντων τῶν Θουρίων κατὰ χώραν ἐκβοηθήσαντας καὶ μετ'ἀλλήλων κινδυνεύσαντας ἀποθανεῖν*. Parole di cui la critica non par essersi chiesto ragione: inesplicate: e inesplicabili fuori delle contingenze che tendiamo a ricostruire. Tornati a Crotone, nel 434 o giù di lì, i Pitagorici partecipano alla vita pubblica, e combattono contro Turii, che, col cambiarsi del partito dirigente, è di bel nuovo la naturale nemica, essendosi a tal fine costituite in lega e Crotone e Caulonia e Sibari: la lega di cui fu sopra discorso e con cui conchiude anche il compendio polibiano.

Tornati, dan prova del loro buon talento verso la folla: la quale per riconoscenza stabilisce che i pubblici sacrifici sieno fatti nel santuario stesso dei Pitagorici, nel Museo. Si illustrano in varie guise. Sin che vengono meno.

A compiere la sua trattazione Timeo aggiunse, e in parte riepilogò, alcune notizie generali circa lo sviluppo dell'intera Scuola pitagorica, le date più importanti, la lista degli scolarchi. È Apollonio che ce n'informa, concisamente, alla fine, presso Iambl. § 265 sgg. Qui egli ricorda essere Pitagora vissuto poco meno che centenario ed aver governato la Scuola trentanove anni (1). E qui pure prende ad enunciare una serie di *γενεαί*. L'enumerazione, se per certi rispetti offre carattere soltanto estrinseco, mera tradizione da delineare e da porre a fianco alle altre, senza valore assoluto, tuttavia poggia su tali

adfectant: dove i commentatori Rauschen e Waltzing vedono un errore, Turii per Crotone, riferendosi a Laert. Diog. VIII 1, 39 (il concetto della *dominatio* anche in Auson. I 40). Pur non è se non da supporre attribuito a Pitagora in persona, come di consueto, ciò ch'era proprio dei Pitagorici. Quanto a Zenone questa è testimonianza isolata.

(1) V. sopra.

rapporti storiografici i quali sono da avere in massima considerazione e dai quali trae novello vigore la nostra tesi (1).

Al Maestro succede Aristeo, sebbene sia di poco posteriore, anzi quasi coetaneo: trovasi di sette generazioni antecedente a Platone, cioè all'epoca in cui sono per fiorire gli ultimi Pitagorici: *Ἀρισταῖος Δαμοφῶντος ὁ Κροτωνιάτης, κατ' αὐτὸν Πυθαγόραν τοῖς χρόνοις γενόμενος ἑπτὰ γενεαῖς ἔγγιστα πρὸ Πλάτωνος.* — Con ciò lo scrittore tien fronte al computo di Aristosseno il quale giunse sino a nove o dieci generazioni (ap. Laert. Diog. VIII, 1. 45) (2) e introduce un personaggio che altri racconti, facendo tosto seguire a Pitagora il figlio, ignoravano (3).

E sta bene. Ma un dubbio si offre alla nostra mente: come mai sette generazioni abbiano potuto trascorrere fra il successore di Pitagora, che governò durante il secolo V già inoltrato, e, sia pure, la morte di Platone del 347: spazio di neanche un secolo e mezzo, nel quale gli antichi, soliti a computi fissi e certi di generazioni, non avrebbero trovato posto che per un novero di quattro o cinque al più (4). Dalla difficoltà non ci si scioglie a bastanza con inchiudere la generazione stessa di Pitagora, contemporaneo, o quasi, al suo successore; e tanto meno è da supporre un errore paleografico di cifra: poichè tutto ciò non sembra poi o giusto od opportuno quando altra tradizione, che arriva sino a nove o dieci *γενεαί*, fa rinascere ad ogni modo il medesimo ostacolo (5) mostrando chiaro che uno speciale sistema, non quello additato, tenevano, qui, gli storici del Pitagoreismo. Infatti, giova pensare: le sette genera-

---

(1) Zeller o. c. p. 342 (oltre che a p. 327, 1) respinge senza alcun riguardo l'esposizione di Apollonio, denotando sconnessa e mal fida questa lista di Pitagorici contenuta " in dem verworrenen, kritiklos zusammegelesenen Verzeichniss Jamblichs ".

(2) Inaccettabile la combinazione fatta da Unger l. c. p. 183 delle genealogie di Apollonio con quelle d'Aristosseno. — Ricordo delle *γενεαί* di Timeo conviene osservare nei *saecula* di Cicerone *Tuscul.* I 16, 38 *multa saecula... viguit Pythagoreorum nomen* e parim. *Tim.* 1.

(3) Cfr. Unger l. c. pp. 174 sgg.

(4) Così ebbe ad osservare anche Cobet *Coll. crit.* p. 446.

(5) Errato apparve perciò il computo al Bentley presso Unger l. c. p. 183, 2.

zioni esser determinate dal novero degli scolarcati, alla guisa che si usava talvolta nei computi delle dinastie regie (1) con l'effetto di una somma alquanto più considerevole e quale, certo, noi ci si attende, se i capiscuola salirono in carica già molto anziani, se Aristeo sopravvisse ben poco al Maestro, se altri — com'è il caso di Gartida — morì tosto.

Senonchè, annoveriamo i diadochi della lista, Aristeo Mnesarco Bulagora Gartida Aresa, e non veniamo a sette, neanche includendo, da ultimo, Diodoro d'Aspendo, il quale non fu scolarca, ma pur rappresentava una nuova generazione di discepoli. Perciò è forza ammettere la caduta di qualche nome, — per lo meno uno od anche due —: quale facilmente si spiega nel testo già sotto altri riguardi corrotto (2), e quale poi giova alla sostanza stessa della storia, in un punto dove sì fatta lacuna aprasi opportuna e manifesta. Che è per apparire fra breve.

Proseguiamo nell'esame del racconto. Aristeo, cui ormai vecchio *πρεσβυτάτῳ ὄντι*, è affidata la direzione, ha per successore il figlio di Pitagora, Mnesarco (3); Mnesarco lascia erede Bulagora sotto il quale, una contingenza dolorosa si svolge: *μεθ' ὃν [Ἀρισταῖον] ἡγήσασθαι Μνήσαρχον τὸν Πυθαγόρου, τοῦτον δὲ Βουλαγόρᾳ παραδοῦναι, ἐφ' οὗ διαρπασθῆναι συνέβη τὴν Κροτωνιατῶν πόλιν.* Questo avvenimento, brevemente e sintomaticamente richiamato, tale che, ove bene lo si identifichi, assume grande importanza, altro non è, per noi, se non la presa di Crotone ch'ebbe luogo dopo la battaglia dell'Eleporo, intorno al 389-7, da parte di Dionisio il Vecchio.

Il computo delle generazioni precedenti, Aristeo Mnesarco Bulagora, può bensì convenirvi senza stento, adattandosi allo spazio di un secolo dalla morte di Pitagora, ma se consideriamo che a punto Aristeo fu quasi coetaneo del Maestro, che appena Mnesarco come figlio ch'era rappresentava una nuova generazione rispetto a Pitagora, che Bulagora interruppe per la guerra

(1) Vedi l'esempio di Herod. I 7 addotto da Unger l. c. p. 183, 2.

(2) È studiato, come tale, particolarmente da Comet *Coll. crit.* pp. 445-9. V. ad es. § 266 ll. 4-5.

(3) Sul contrasto con altre tradizioni, che denominano Telauge il figlio successore di Pitagora, cfr. Comet *Coll. crit.* p. 446; Unger l. c. pp. 175 sgg.

il suo scolarcato, crediamo giunta l'occasione per la lacuna di uno o due scolarchi, da interporre o fra Mnesarco e Bulagora o fra Bulagora stesso e Gartida (prima di *ἐφ'οὗ διαρπασθῆναι*... sì che non Bulagora stesso ma quest'altro scolarca abbia assistito alla presa della città). E certo, ottimamente si acconcia il computo delle *γενεαί* successive. Perocchè Gartida, cui tocca occupare il posto lasciato libero dallo scolarca *ἐφ'οὗ διαρπασθῆναι συνέβη τὴν... πόλιν*, muore quasi immediatamente, causa l'impressione tristissima subìta per la sventura della patria (1); e soltanto qualche tempo di poi, *χρόνῳ μέντοι γε ὕστερον* si procede alla nomina di Aresa, sotto il cui scolarcato viene in Italia Diodoro d'Aspendo, intorno al 350.

Tanto è vera l'identificazione coi fatti di Dionisio il Vecchio da noi proposta che, anzitutto, essa elimina ogni difficoltà altrimenti inevitabile: gli studiosi di Pitagora hanno in mente — nè si comprende il perchè — la seconda sommossa, la quale pur non poteva denotarsi con parole accennanti alla presa e al sacco della città; sono costretti quindi a spostare di quasi un secolo — enorme inverisimiglianza! — la data di Diodoro d'Aspendo; suppongono — ben comodo sistema — grossolane trovate della fantasia d'Apollonio (2). Ma, quel ch'è più, otteniamo poi per la via segnalata un nuovo ordine di vicende da connettere con le fasi precedenti, e da darne luce non troppo discontinua alla storia, nebulosissima, degli ultimi Pitagorici.

La lega di Crotone, Sibari, Caulonia che vedemmo formarsi dopo il concordato del 434 e per la quale i Pitagorici comparvero nell'atto di combattere contro Turii, ha volto ben presto le sue energie, insieme con Regio e con altre città minacciate, a fronteggiare da una parte la penetrazione dei Lucani, dall'altra la invadente tirannide di Dionisio. Così fece notare, da ultimo, Polibio stesso. Nel 387 dopo lunga guerra Regio cadeva, e cadevano Caulonia, Ipponio, le cui terre pas-

---

(1) Il nome di *Γαρτύδας* è probabilmente corrotto: cfr. Nauck a q. l.

(2) Vedansi tra gli altri Unger l. c. p. 185; Zeller o. c. p. 339; Cobet *Coll. crit.* p. 445 — Conosciuto dal sillografo Timone e dal musico Stratonico, Diodoro d'Aspendo appartiene sicuramente alla metà del IV secolo. Nè si può scendere all'epoca di Tolemeo di Lago, come pretese col Bentley *Resp. ad. C. Boyl.* p. 48 il Cobet *Coll. crit.* p. 411: cfr. Rohde l. c. p. 59.

sarono ai Locresi fautori di Dionisio (1). Fu occupata anche Crotone (2). Non stupisce che i Pitagorici abbiano avuto giuoco in così fatto travolgimento: da Crotone, il caposcuola e i compagni son forzati ad allontanarsi, ed è esilio notevole: il successore Gartida torna, perchè si trovava già ad essere discosto prima della guerra: *ἐπανελθόντα ἐκ τῆς ἀποδημίας ἣν ἐποιήσατο πρὸ τοῦ πολέμου*. Infatti narra la nostra fonte, Dionigi d'Alicarnasso, che la città rimase 12 anni in mano al nemico (3).

A meglio sbozzare la situazione politica che Timeo ci addita, nulla conviene quanto il parallelo di alcune frasi di Aristosseno, le quali, a lor volta, non essendo state peranco interpretate, dànno e ricevono conferma. Aristosseno presso Iambl. § 251, dopo narrato il prolungarsi delle lotte antipitagoriche e la seconda sedizione, aggiunge brevemente: *οἱ δὲ λοιποὶ τῶν Πυθαγορείων ἀπέστησαν τῆς Ἰταλίας πλὴν Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου· ἀθροισθέντες δὲ εἰς τὸ Ῥήγιον ἐκεῖ διέτριβον μετ' ἀλλήλων· προϊόντος δὲ τοῦ χρόνου καὶ τῶν πολιτευμάτων ἐπὶ τὸ χεῖρον προβαινόντων... †† Ἦσαν δὲ οἱ σπουδαιότατοι Φάντων τε καὶ Ἐχεκράτης καὶ Πολύμνασιος καὶ Διοκλῆς Φλιάσιοι. Ξενόφιλος δὲ Χαλκιδεὺς τῶν ἀπὸ Θρᾴκης [Χαλκιδέων]*.

Gl'inciampi che di consueto s'incontrano nel brano, le correzioni di *Ἀρχύτου* in *Ἀρχίππου*, gli spostamenti di periodo (4) non hanno più ragion d'essere, prescindendo dall'inevitabile lacuna, quando vi si riconosca un accenno complessivo agli ultimi Pitagorici: i quali finiron per spiccarsi dall'Italia, tranne Archita di Taranto, nel modo e per le ragioni seguenti: raccolti in Regio, se ne stavano insieme, continuando il loro in-

---

(1) Diod. XIV 106, 108-12. Cfr. Paus. VI 3, 11; De Sanctis *Storia dei Rom.* II p. 190; Beloch *Griech. Gesch.* II[1] pp. 167 sgg.

(2) Liv. XXIV 3; Dionys. Halic. XX 7.

(3) Cfr. l. c. Il Beloch *Griech. Gesch.* II[1] p. 173 crede falsa la notizia: d'altra parte sposta la data della presa di Crotone: ciò che non è giustificato. Ora infatti Timeo, presso Giamblico, viene ad aggiungersi alla dispersa notizia conservata da Dionigi d'Alicarnasso.

(4) Cfr. Rohde l. c. p. 565, 1 il quale propose l'inversione comunemente seguìta, anche dagli editori, per togliere, egli dice, il controsenso: che i Pitagorici, partiti d'Italia, trovinsi a Regio. Nè accettabile l'interpretazione di Unger l. c. p. 168. Ancor meno Corssen l. c. pp. 337-8. Burnett o. c. p. 252 si limita a parafrasare il passo.

stituto; peggiorate le condizioni politiche — e che altro è questo se non il ricordo della rovinata città? — non poteron rimanere, si dispersero (1). — Manca il compimento del periodo; ma son fatti i nomi; le persone che Aristosseno stesso narrava di aver visto verso la metà del sec. IV: cfr. ap. Laert. Diog. VIII 1, 46: *τελευταῖοι γὰρ ἐγένοντο τῶν Πυθαγορείων, οὓς καὶ Ἀριστόξενος εἶδε, Ξενόφιλός θ' ὁ Χαλκιδεὺς ἀπὸ Θρᾴκης καὶ Φάντων ὁ Φλιάσιος καὶ Ἐχεκράτης καὶ Διοκλῆς καὶ Πολύμναστος, Φλιάσιοι καὶ αὐτοί.* Non sarà vano osservare che Cicerone commemora dimorante in Locri il medesimo Echecrate (2): in Locri cui era passata l'eredità di Regio distrutta.

Sullo sfondo cospicuo determinato dagli avvenimenti del 390-87, se Aristosseno persegue uno speciale nucleo di Pitagorici da lui ancora conosciuti, non trascura Timeo di compiere le linee della propria rassegna. Aresa, l'ultimo scolarca, eletto dopo la guerra, è d'origine lucana (che di questo popolo esistessero Pitagorici dicono espressamente le fonti (3)), e, mentre i più hanno avuto a perire durante l'incursione nemica, egli è rimasto salvo grazie ad alcuni suoi ospiti in patria: poichè difatti non solo si guerreggiava con Dionisio il Vecchio, ma anche coi Lucani: *...Ἀρέσαν ἐκ τῶν Λευκανῶν σωθέντα διά τινων ξένων ἀφηγήσασθαι τῆς σχολῆς* (4).

---

(1) Con questa interpretazione si manifesta chiaramente il grave errore ch'è correggere *Archita* in *Archippo*. Archita appariva come uno degli ultimi Pitagorici: ebbe parte notevolissima nelle vicende dell'invasione di Dionisio siracusano; e mentre questa invasione portava al disperdersi dei Pitagorici, egli Archita rimaneva, governando Taranto ed inaugurando una politica remissiva e conciliatrice dinanzi all'impero di Dionisio. Su Archita come uomo politico: Beloch *Griech. Gesch.* II[1] p. 174; Wellmann " Pauly-Wissowa „ II coll. 599 sgg.

(2) *De finib.* V 29 *Cur... Tarentum ad Archytam [Plato peragravit]? cur ad reliquos Pythagoreos, Echecratem, Timaeum, Arionem Locros?*

(3) Iambl. § 241; Porph. 22; Laert. Diog. VIII 1, 14. L'interpretazione del passo qui sopra citato è stata variamente discussa: cfr. Unger l. c. p. 182, 1. Mi par chiaro che " *ἐκ τῶν Λευκανῶν* „ dipenda *ἀπὸ κοινοῦ* e da *σωθέντα* e da *Ἀρέσαν*.

(4) Contaminazione della seconda rivolta con questi ben diversi avvenimenti è da vedere in Plut. *De gen. Socr.* 13; dove compare Filolao *εἰς Λευκανοὺς φυγών*, e ricorda cioè il nostro Aresa; e compare poi come personalità fra i Pitagorici spiccata un *Ἄρκεσος* che ricorda parimenti Aresa.

Ad Aresa viene Diodoro Aspendio, il filosofo cinico del quale consta che nell'età immediatamente prealessandrina assorbì le teorie pitagoriche e le diffuse in Grecia: *πρὸς ὃν [Ἀρέσαν] ἀφικέσθαι Διόδωρον τὸν Ἀσπένδιον, ὃν παραδεχθῆναι διὰ τὴν σπάνιν τῶν ἐν τῷ συστήματι ἀνδρῶν· οὗτος δὲ εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθὼν διέδωκε τὰς Πυθαγορείους φωνάς.*

Era, tale incontro, uno tra i più tardi documenti della vitalità dei Pitagorici: l'ultimo che la nostra fonte adduca, conclusivo, e rispondente all'affermazione preliminare circa le sette generazioni e circa i tempi di Platone: rispondente al giudizio comune, raccolto da Diodoro XV 76, che intorno al 366, essendo sul fiore e Platone e Isocrate e altri eccellenti, fiorissero pure *τῶν Πυθαγορικῶν φιλοσόφων οἱ τελευταῖοι.*

E qui, come a suggellare l'opera d'Apollonio o a por certo formaglio alla collana man mano rinsaldata, un frammento si annette, assicurandoci della provenienza dallo storico siciliano: fr. 80 Muell. = Athen. IV 163 *e*: *Τίμαιος δ'ὁ Ταυρομενίτης ἐν τῇ ἑνάτῃ τῶν Ἱστοριῶν περὶ αὐτοῦ [Διοδώρου τοῦ Ἀσπενδίου] γράφει οὕτως· Διοδώρου τοῦ τὸ γένος Ἀσπενδίου τὴν ἐξηλλαγμένην εἰσαγαγόντος κατασκευὴν καὶ τοῖς Πυθαγορείοις πεπλησιακέναι προσποιηθέντος...*

II.

Con ordine e con compiutezza si lasciano cogliere, ora, le fila della narrazione di Timeo.

Ad avviare il primo stame servono i fatti più significativi svoltisi nella Magna Grecia verso la metà del sec. VI, ciò sono lo sterminio di Siri e la battaglia del Sagra, onde spontaneamente s'imponeva la disamina delle condizioni morali, intellettuali, civili. Le troppo floride città, proclivi al lusso e alla raffinatezza, toccherebbero tosto inevitabile decadenza, se non

---

L'identificazione di *Ἀρέσας* con *Ἄρκεσος* (e l'eventuale correzione da alcuno proposta) diviene arbitraria, quando non s'intenda come effetto di contaminazione, bensì volgasi, secondo i critici fanno, a determinare la data dell'Aresa di Giamblico: così, tra gli altri, Unger l. c. p. 185.

sopravvenisse a sollevarle, a rinsanguarle la propaganda dei Pitagorici, recante impulso alla vita politica ed etica.

Filosofia questa maturata in Oriente. Pitagora nasce a Samo, intorno al 589, da un ricco negoziante, Demarato, e profonda cultura attinge dall' insegnamento de' maggiori sapienti dell'età sua. Giovanissimo ancora, ai sintomi di quella che sarà la tirannide di Policrate, prevedendo ciò ch'è per avvenire e presentendovi un ostacolo ai proprii studii abbandona la patria: si reca da Ferecide, da Anassimandro, da Talete, poi imprende grandi viaggi, visita l'Egitto, dove fa assai lunga e profittevole dimora, e la Babilonia, dove arricchisce il suo pensiero di conoscenze astronomiche. Quando torna a Samo, Pitagora conta già 56 anni. Susseguono altre peregrinazioni a Creta, a Sparta col proposito di acquistar nozione delle leggi di Minosse e di Licurgo, a Delo, ove il filosofo suscita le meraviglie degli isolani per essersi inchinato soltanto all'altare di Apollo Genitore, come all'unico incruento.

E, dopo breve esperienza, reso certo che le condizioni politiche di Samo non si confanno ai suoi intenti, Pitagora parte definitivamente alla volta della Magna Grecia cui lo attrae la fama e il lustro della civiltà; e mette piede in Crotone, durante l'Olimpiade LXII, anno quarto, cioè nel 529. L'attività molteplice manifestasi soprattutto in salvare le popolazioni italiote dai pericoli che le minacciano: adduce la frugalità, la temperanza, il buon ordine. Con nuove leggi e norme sapienti. E l'insegnamento non disdegna la pratica della vita, nè è rivolto agli uomini soltanto, ma, parte a parte, e ai fanciulli e alle donne, stimolando i primi all'obbedienza e allo studio, le seconde alla pudicizia, alla pietà, alla riverenza verso i mariti. Pitagora in persona si recava alla palestra, ove convenivano i giovani: li traeva a sè, li educava al bene, i genitori vivamente pregandolo di così fare. Alle donne insegnava essere propria del loro sesso la pietà religiosa, l'*εὐσέβεια*: e portava a prova le denominazioni che per ciascuna delle loro età aveva ad esse serbato chi, o dio o démone od uomo divino, creò per primo il linguaggio: denominazioni sinonime con quelle dei Numi: Cora la fanciulla, Ninfa la sposa, Metere la madre, Maia in Dorico l'avola. Di che i frutti erano palesi: basti ricordare la rinuncia che le donne crotoniati fecero dei loro ornamenti e delle vesti preziose al

tempio di Era; gli esempii di virtù che rifulsero nella famiglia stessa di Pitagora, la figliuola prescelta, fanciulla, a guidar il coro delle fanciulle, donna, delle donne; onde i Metapontini eressero poi a tempio di Demetra la casa del filosofo e Museo chiamarono il vicolo attiguo.

Viene costituendosi, frattanto, la Scuola vera e propria dei Pitagorici. Alla quale non è ammesso se non chi abbia dato sicura prova delle proprie inclinazioni dei costumi delle consuetudini; poichè il Maestro su ognuno che si presenti esercita un severo esame, e sono pratiche ardue ed obblighi singolari, dai quali emerga il carattere individuale. Approvato in questo primo esame, il novizio ha da far saggio di costanza e di risolutezza d'intenti, sottostando con pace all'abbandono cui gli altri lo lascino per un periodo di tre anni. Poi sono cinque anni, durante i quali conserva il silenzio, non partecipa alle discussioni, ode la voce del Maestro pur rimanendo escluso ancora dalla vista: ed ottempera al dovere più notevole, ch'è di far comunanza dei suoi beni, con affidarli ad alcuni compagni denominati per tale officio " gli amministratori „ : *πολιτικοί* oppure *οἰκονομικοί* o infine anche *νομοθετικοί*. Questa la norma essenziale. Onde allora per la prima volta ebbe a diffondersi nella Magna Grecia il motto famoso *κοινὰ τὰ φίλων*. — Trascorsi i cinque anni, chi sia respinto si vede restituire duplicati i suoi beni: però nella Scuola gli erigono come una tomba, monumento il quale segni la morte spirituale dell'adepto; i rimasti divengono discepoli veri e proprii col nome di *ἐσωτερικοί*, entrano alla presenza del Maestro, prendono parte attiva agli interessi del sodalizio. Pitagorici soltanto questi che dirigono e ai quali incombe l'obbligo della comunanza di beni; Pitagoristi gli altri che assecondano, ma non governano, esenti da sì fatta legge.

Ma questa tendenza di estrema selezione nonchè di pratiche singolari, diede alla Scuola un carattere ed un potere aristocratico, tale che irritava la folla dei popolari. Erano non più che trecento, gli oligarchi della città, e tenevano nelle loro mani il governo: provenuti dalle migliori famiglie, ed ora stretti come da un sacro patto religioso, avvezzi a primeggiare nella vita privata e nella vita pubblica, sovrastavano ai rimanenti cittadini. Nè senza che il loro dominio apparisse più odioso per i vincoli e i costumi dell'iniziazione mistica, per le tendenze auliche

della setta. Perciò grande malcontento serpeggiava fra i democratici; e proruppe in rivoluzione successivamente alla caduta di Sibari.

Telys, fattosi tiranno in Sibari, ha espulso gli oligarchi sibariti, i quali cercano rifugio in Crotone, e, a malgrado del popolo, su consiglio di Pitagora e dei Pitagorici, rappresentanti l'identico indirizzo politico, vi sono accolti, in guisa da suscitare la guerra.

Sibari cade, con un esercito di 300.000 combattenti sconfitto presso il fiume Traeis. I Pitagorici trionfano ; ma, di contro alla cresciuta loro autorità, più vivo urge l'attrito dei democratici, togliendo pretesto dalla negata spartizione delle nuove terre al popolo. Accusano la Scuola, denotandola — essa che costituiva e avvalorava in forme d'indole mistica, nel fascio delle energie santamente coalizzate, le tradizioni dell'aristocrazia — quasi una congiura fatta a danno dei più. Pitagora fra tali contrasti si allontana, nel 509, dopo che da vent'anni dimorava in Crotone ; e passa a Metaponto, l'ultimo soggiorno, centro alla sua attività per altri diciannove anni. A Metaponto, infatti, egli ebbe a dare altre prove di virtù e di beneficenza; nè pochi sono i ricordi che ivi lo commemorano: della casa in cui era abitato i cittadini crearono un tempio a Demetra, e Museo denominarono il vicolo contiguo. Moriva intorno al 490. Non molto tempo appresso fanno menzione di lui e Senofane ed Eraclito. Del quale ultimo, anzi, vanno refutate le violente ed ingiuriose parole ; poichè, s'egli condanna Pitagora quale introduttore delle ' arti retoriche ', Pitagora non fu nulla di tale, e le ' arti ' vere e proprie ebbero altra origine, più tarda, per opera di Gorgia da Leontini; e se pur, semplicemente, mira a porne in dubbio la serietà della dottrina, è da sapere che il ciarlatano e l'acciarpone è lui, Eraclito, non Pitagora. Infatti nella Scuola del filosofo samio la scienza non usciva dall'àmbito degli iniziati, nè potevasi propalarla, nè scriverne: onde Empedocle non fu più ammesso alle discussioni, il giorno ch'ebbe a trasgredire questo dovere, con frodare i segreti dettami.

Partito il Maestro, la rivoluzione era frattanto scoppiata a Crotone, parte mettendo a morte, parte cacciando i Pitagorici. E pur ess'era prematura. Come di consueto, un tiranno, Clinia, profittava del disordine e della inettitudine popolare, trovando

opportunità di facilmente imporsi (1). E Clinia ebbe nelle mani la città. Se non che la tirannide, così d'improvviso instaurata, diede luogo alla reazione e, per conseguenza, al sopravvento dei Pitagorici oligarchi. I quali ricuperano il comando dello stato; e rimangono, finchè col tempo la parte democratica non prenda nuovo sviluppo.

Ed è allora una sedizione più grave; da Crotone divampa ai sinedrii degli oligarchi nelle varie città della Magna Grecia. Come gioverà esporre, di seguito.

Nel 448 i capi Crotoniati violentemente hanno impedito ai profughi dell'antica Sibari di ricostrurre la città, per essi medesimi distrutta; ciò provoca, alla stessa guisa che l'altra volta, conflitti interni quali da lungo covavano, e l'incendio della casa di Milone, la casa in cui stanno radunati i Pitagorici: e ben sessanta periscono; i rimanenti son perseguitati, non trovano scampo. A ricondurre l'ordine giunge l'arbitrato dei Tarantini dei Metapontini dei Cauloniati, che decretano l'esilio dei Pitagorici e una nuova costituzione con base popolare e una nuova distribuzione di terre. Il governo dunque appartiene al popolo. Perciò nel 445 col concorso degli Achei e di altre genti, sorge la contrastata città, Turii; la quale, retta anch'essa a democrazia, gode da prima, e naturalmente, del favore di Crotone. Ma la reazione degli oligarchi, da per tutto fortissima, s'appunta pur in Turii. Ed è merito degli Achei colonizzatori di ricondurre la concordia, facendo richiamare e in Crotone e nelle varie città della Magna Grecia i Pitagorici. Con arbitrato dell'oracolo di Delfi, nel 434/3 (arconte, ad Atene, Cratete) i Pitagorici ritornano.

E qui una nuova situazione si disegna. Ritornati, godono ormai il favore della folla stanca di discordie intestine; così, proseguendo nella loro via, conducono notevoli imprese; si volgono contro Turii, che dopo il passeggiero disordine dei partiti viene ad essere di nuovo la naturale nemica di Crotone; anzi, con l'impulso ancor sempre degli Achei, costituiscono un'apposita confederazione, Crotone, Sibari, Caulonia. E la confedera-

(1) Naturalmente la data 509 è, per Timeo, data della partenza di Pitagora, soltanto. La rivoluzione è posteriore, non di molto se allo storico importi spiegarne i falliti resultati.

zione, col procedere degli anni, si trova occupata in più gravi difficoltà, stretta per un lato dai Lucani invasori, per l'altro dalla tirannide di Dionisio il Vecchio. I Pitagorici, i quali, come ottimati, sono a capo del governo, rappresentano ora, sotto un certo aspetto, la resistenza delle città italiote d'innanzi alla doppia penetrazione nemica: ed in questo orizzonte essi compaiono decisamente, sentendone profondo influsso le sorti della Scuola. Poichè, quando, dopo la battaglia dell'Eleporo, intorno al 388, Ipponio Caulonia Regio ed altri centri vengono in potere dell'invasore, i Pitagorici sono costretti, di nuovo, a disperdersi.

A Crotone, infatti, caduta dopo viva resistenza la città, non poteron restare e il caposcuola stesso scampava a stento. Per parecchi anni, i sopravvissuti non si radunarono; nè, dopo quella sventura, fu più raggiunta la grandezza di prima. Le vicende della Scuola si chiudono.

E di essa qui giova esporre brevemente la successione. — Pitagora era vissuto novantanove anni e, di questi, trentanove aveva diretto la Scuola. Gli tenne dietro Aristeo, già vecchio e poco meno che suo coetaneo: era infatti di sette generazioni anteriore agli ultimi Pitagorici, conosciuti da Platone. Morendo, Aristeo lasciava successore il figlio del Maestro, Mnesarco: a Mnesarco successe ...Bulagora... sotto il quale avvenne la presa di Crotone per parte di Dionisio il Vecchio; poi Gartida, che, essendo lontano già prima della guerra e tornando poi, muore per la dolorosa impressione del disastro toccato alla patria; poi, dopo un certo tempo, Aresa, che riesce a tornare perchè ha trovato tra i Lucani, suoi connazionali, degli ospiti i quali lo salvarono.

E così termina la serie; gli è ad Aresa che viene Diodoro d'Aspendo, il filosofo destinato a propagare in Grecia, con immistione di elementi cinici, i ricordi degli ultimi Pitagorici.

***

Questo vasto congegno di esposizione storica, nel quale il primo spunto, ch'era l'influenza di Pitagora sul terreno della Magna Grecia, condusse ad esaminare compiutamente e la vita

di Pitagora e le vicende successive della Scuola — questo congegno offre un'idea non disforme, dei procedimenti narrativi da Timeo seguiti. Ed occupa nelle Storie del nostro scrittore un posto ben determinato (1).

Poichè, alcuni frammenti che siam venuti qua e là ordinando, e che sembrano bene rientrare nella sostanza del racconto, dai compilatori sono citati come spettanti al libro nono: e la *δοκιμασία* cui il Maestro sottoponeva i giovani desiderosi di essere aggregati alla sua disciplina, e la comunanza de' beni (Phot. *Lex.* c. 129 = fr. 77 Mueller e Schol. *Plat. Phaedr.* 279 c (2)); e l'espulsione di Empedocle dalla Scuola, espulsione ivi rammentata a fine di comprovare, in contrasto con Eraclito, le tendenze austere dell'insegnamento pitagorico (Laert. Diog. VIII 2. 54 = fr. 81 Muell.); e la venuta di Diodoro Aspendio, filosofo cinico, presso gli ultimi Pitagorici e sotto l'ultimo scolarca, Aresa (Athen. IV 163 = fr. 80 Muell.). Con che, del racconto si contrassegnano, in pari tempo, alcuni punti, alcune membra disparate e, quasi a dire, le estremità: non una sezione soltanto, sì che le sezioni rimanenti possano appartenere, col procedere di tutta l'opera storica cronologicamente suddivisa, ai libri successivi; ma nel libro nono davvero s'incardina anche l'ultimo documento delle vicende pitagoriche, la venuta di Diodoro d'Aspendo (3).

Nè rimane per altro a dubitare. Una citazione divergente che in Laert. Diog. VIII 1, 11 assegna al libro decimo il discorso del filosofo sopra i nomi di Core, Ninfe, Metere, se non è tale da far difficoltà in quanto e nel libro immediatamente successivo e poi ancora potè tornare parola di Pitagora, tuttavia

(1) Per la struttura dell'opera di Timeo è da vedere particolarmente Beloch *Die Oekonomie der Gesch. d. Tim.* " Jahrbb. f. cl. Phil. „ 1881 pagine 697 sgg. Inoltre: Kothe *Zur Oekon. d. Hist. d. Tim.* ibid. 1883 pp. 809-13: Schwartz *Timaeos Geschichtswerk* " Hermes „ XXXIV (1899) pp. 481 sgg.

(2) Il testo dello scoliaste platonico legge *ἐν Ε'*; ma il riscontro col luogo di Fozio rende certa la correzione proposta da Kothe *De Tim. vita* p. 35: *ἐν Θ'*.

(3) Che nel libro IX fosse narrata tutta la storia di Pitagora mi sembra la conclusione migliore, se pure contraddice a quanto Beloch art. cit. p. 699 espone circa l'ordine cronologico delle *Ἱστορίαι*.

va preso più tosto come un errore, una svista della fonte: infatti quell'asserto stava nella lunga e congrua esposizione degli ammaestramenti impartiti alle donne.

Del libro nono questo era, perciò, il contenuto sostanziale inteso ad illuminare largamente nel fenomeno del Pitagoreismo le condizioni civili degli Italioti. Così gli statuti e le leggi delle varie città; così, ad esempio, una disamina dell'antica costituzione di Locri, con principii di polemica contro Aristotele e con negata l'esistenza di Zaleuco, il mitico legislatore che di consueto facevasi dipendere da Pitagora (Athen. VI p. 264 *c*; Polyb. XII 5, 8, 11, 12, 24; Cicer. *De leg.* II 6 = frr. 67-72 Muell.) (1).

E la storia di Pitagora, proseguìta per tutta la sua estensione, a mo' di *excursus*, oltre i normali limiti cronologici del libro nono, si allacciava da un lato agli avvenimenti di Sicilia e di Magna Grecia esposti nei libri settimo ed ottavo, dall'altro, con ricordare la invasione di Dionisio il Vecchio, riapriva lo studio della tirannide siracusana (fr. 85 Muell.).

***

Per la ricchezza e compattezza del suo racconto, Timeo ebbe un'efficacia profonda sulla posteriore tradizione di storia pitagorica. E ciò si rivelò a sufficienza. L'opera di Giamblico che per le sue parti sostanziali dalla critica moderna era lasciata quasi assolutamente da banda, viene ora fuori informata in massima, attraverso la fonte intermedia del reietto Apollonio tianèo, a molti e molti elementi dello storico siracusano.

Ma quel che più importa, la conoscenza di Pitagora e dei Pitagorici offerta da Timeo, si fa essa stessa oggetto prezioso di studio, a denotare le tendenze dello scrittore, ad avviare non indifferentemente una visione storica migliore e più compiuta.

I caratteri suoi appaiono chiari. Se le altre fonti in genere

(1) Per la dipendenza da Pitagora: Diod. XII 19-20; Laert. Diog. VIII 1, 16; Porph. 21; Iambl. § 104 e *passim*.

si tengono dall'addurre rapporti e nessi di fatti, se mancano di induzioni storiografiche, Timeo, non senza assecondare il naturale razionalismo del suo pensiero, getta la narrazione sullo sfondo delle vicende politiche, illuminando con essa e percorrendo la storia della Magna Grecia durante tutto questo ampio periodo: e sono, nella narrazione così proiettata e trascorsa, per lungo ordine di tempi, in supremo rilievo, tre momenti essenziali collegati il primo con lo sterminio di Sibari, il secondo con la fondazione di Turii, l'ultimo con le guerre di Dionisio il Vecchio.

L'Accademico Segretario
R. Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Febbraio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci SALVADORI, PEANO, GUARESCHI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI, BALBIANO e SEGRE, Segretario. — Scusano l'assenza il Vice-Presidente CAMERANO ed il Socio GUIDI.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Socio GUARESCHI offre in omaggio tre opuscoli contenenti le traduzioni fatte nella " Zeitschrift für analytische Chemie „ di tre sue Note sul bromo comparse nei volumi 47 e 48 degli *Atti*; ed il Socio GRASSI offre similmente una sua Nota stampata: *Impressioni e desideri di un vecchio insegnante di elettrotecnica.*

Il Socio PEANO presenta, per l'inserzione negli *Atti*, uno scritto di M. BOTTASSO, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Guldino*; ed il Socio MATTIROLO, per i volumi delle *Memorie*: *La " Flora Sardoa „ di Michele Antonio Plazza di Villafranca, redatta con i suoi manoscritti* dal Dott. ACHILLE TERRACCIANO. Vengono incaricati di riferire su questa Memoria i Soci PARONA e MATTIROLO.

LETTURE

Sopra alcune estensioni dei teoremi di Guldino.

Nota di MATTEO BOTTASSO

Il Bardelli (*) ha determinato in modo elementare l'area coperta da un qualsivoglia arco di linea piana che si muove rigidamente, nel proprio piano, con una determinata legge. Il problema analogo nello spazio è stato trattato dal Koenigs (**), che ha espresso il volume generato da un diaframma qualsiasi condotto per un contorno chiuso invariabile, al quale sia stato impresso un arbitrario moto di corpo rigido.

In questo Lavoro, per mezzo del calcolo vettoriale, è stabilita dapprima (n° 1) sotto forma assoluta l'espressione dell'area generata da un arco di linea piana, area eguale (come già dimostrò il Bardelli) a quella descritta dalla corda che sottende l'arco; ed inoltre l'area descritta nel piano da un segmento comunque variabile. Si trova poi (n° 4) una espressione analoga — che ritengo pure nuova — per il volume generato

(*) G. Bardelli, *Sull'area descritta da una linea invariabile che si muove in un piano con una determinata legge*, " Rend. R. Istit. Lombardo „, (2ª), 12, 1879, pp. 290-98. Cfr. G. Vivanti, *Commemorazione del M. E. Prof. Commendatore* Giuseppe Bardelli, " Rend. R. Ist. Lomb. „, (2), 46. Questioni affini erano state trattate da V. Liguine, *Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable*, " Bulletin des Sciences Math. et Astron. „, 1878, 1° partie, pp. 306-333 e da G. Darboux, *Sur le mouvement d'une figure invariable: propriétés relatives aux aires, aux arcs des courbes décrites et aux volumes des surfaces trajectoires*, " Ibidem „, pp. 333-356. Il primo ha considerato nel piano l'area racchiusa da una *roulette*, cioè dalla curva generata dal moto di un punto invariabilmente collegato ad una curva chiusa convessa che rotola sopra un'altra curva chiusa convessa fissata. Il secondo tratta in modo più ampio tale questione e le analoghe nello spazio.

(**) G. Koenigs, *Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque*, " Journal de Mathématiques pures et appliquées „, (4ª), 5, 1889, pp. 321-343.

da una parte qualsiasi di piano limitata da una linea chiusa, che si muove nello spazio deformandosi comunque (con continuità), pur restando sempre piana; e ciò dopo un opportuno lemma (n° 3) sulla derivazione di integrali superficiali.

Nel n° 5 si è ottenuta, con procedimento analogo, un'estensione del teorema di GULDINO per le aree generate da un arco di curva piana, nell'ipotesi che l'arco si deformi muovendosi col proprio piano.

Nel n° 6 si ottiene una notevole e semplice espressione del volume generato da un diaframma limitato da un contorno (piano o gobbo) qualsiasi, nell'ipotesi che tanto il contorno quanto il diaframma muovendosi si deformino, in modo che la velocità d'un punto qualunque sia esprimibile come il *rotazionale* (*le rotationnel* o *le tourbillon*) d'un vettore (*). Tale condizione è soddisfatta, in particolare, se il contorno col suo diaframma si muove rigidamente; ma esistono moti più generali, come si è mostrato nel n° 7, che soddisfano alla medesima condizione.

Per i moti rigidi si è ottenuta, nel n° 8, sotto forma assoluta ed espressiva la formula fondamentale del KOENIGS, mostrando come da essa si deducano più semplicemente tutte le proprietà stabilite dal KOENIGS stesso. In particolare, la nostra formula (19) ha permesso di dedurre facilmente il teorema di GULDINO sui volumi di rotazione e le sue estensioni ai volumi generati da una qualsiasi superficie limitata, piana o gobba, in rotazioni intorno ad un asse arbitrario, e di enunciare in forma semplice i risultati ottenuti.

Con un esempio relativo alla finestra di VIVIANI si è mostrato infine, nel n° 12, come si possano ottenere senza difficoltà il *vettore areolare* ed il vettore che ho chiamato di *pseudoinerzia* rispetto ad un punto, relativi ad un dato contorno, con i quali è possibile esprimere subito il volume generato da un qualsiasi diaframma, passante per il contorno stesso, in un moto rigido arbitrario.

(*) V., per es., C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, t. I, *Transformations linéaires* (Pavie, Mattei & C., 1912), p. 70. Nel seguito indicheremo, per brevità, quest'opera con *Transf. lin.*

Area generata da un arco di linea, che si muove in un piano.

1. — Sia $P(u, t)$ un punto, funzione continua insieme alle sue due prime derivate delle variabili u, t, posto in un dato piano Π in guisa che, per t fisso, al variare di u da u_0 ad u_1 il punto P descriva in Π un arco d'estremi $P(u_0, t) = P_0$, $P(u_1, t) = P_1$. La forma di questo arco risulterà invariabile, cambiando t, quando si abbia (*):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \omega i (P - C). \tag{1}$$

essendo ω — *velocità istantanea di rotazione* — un numero funzione di t soltanto, i l'operatore che applicato ai vettori paralleli a Π li fa ruotare (in un senso determinato) d'un angolo retto, e C un punto — *centro istantaneo di rotazione* — di Π, funzione soltanto di t.

L'area descritta dall'arco $\widehat{P_0 P_1}$ in un dato intervallo $t_0 \overline{\ } t_1$ del tempo t è (**):

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial P}{\partial u} \times i \frac{\partial P}{\partial t} \, du \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \omega \, dt \int_{u_0}^{u_1} (P - C) \times \frac{\partial P}{\partial u} \, du .$$

Ora, essendo C funzione della sola t, si ha:

$$\int_{u_0}^{u_1} (P - C) \times \frac{\partial P}{\partial u} \, du = \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial (P - C)^2}{\partial u} \, du = \frac{1}{2} [(P_1 - C)^2 - (P_0 - C)^2],$$

e quindi:

$$S = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \omega (P_1 - P_0) \times (P_1 - C + P_0 - C) \, dt ,$$

(*) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de Calcul Vectoriel avec de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique Mathématique*. Éd. franç. traduite de l'ital. et augmentée d'un supplément par S. Lattès (Paris, Hermann, 1910), p. 128.

(**) V., per es., C. Burali-Forti, *Corso di Geometria analitico-proiettiva per gli allievi della R. Accademia militare* (Torino, G. B. Petrini, 1912), p. 259.

e, per la (1):

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(P_1 - P_0) \times i\left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial P_0}{\partial t}\right) dt, \tag{2}$$

che è pure l'area descritta dal segmento di estremi P_0, P_1 (*). Si è così dimostrato in modo rigoroso (Cfr. Bardelli, loc. cit., p. 292) che *l'area generata da un arco di curva di forma invariabile, che si muove in un piano di moto arbitrario, è sempre eguale all'area descritta dalla corda che sottende l'arco.*

È da notarsi che questa proprietà, geometricamente intuitiva (**), vale senza alcuna restrizione tanto per l'arco di curva considerato, che può per es. essere intrecciato, quanto per il moto, nel quale le traiettorie dei varî punti dell'arco possono (in parte) sovrapporsi. Basterà convenire, com'è indicato dall'espressione di S, di assumere come positivo o negativo ogni elemento d'area descritta da un elemento ds dell'arco a seconda che per portare a coincidere il vettore unitario parallelo alla tangente all'arco, nel senso delle u crescenti, con il vettore unitario parallelo alla traiettoria nel senso delle t crescenti, occorre una rotazione — minore d'un angolo piatto — positiva o negativa.

2. — Se due punti P, Q funzioni di t variano in un piano, l'elemento di area descritta dal segmento PQ, è eguale al modulo del bivettore:

$$(Q - P)\,\frac{dP + dQ}{2} = (Q - P)\,dG,$$

essendo G il punto medio del detto segmento PQ (***); per cui

---

(*) C. Burali-Forti, *Corso ecc.* cit., p. 259.

(**) Tale proprietà è anzi evidente geometricamente, quando si tratti di archi non intrecciati e non avvengano sovrapposizioni nel moto; infatti, tutto si riduce allora ad aggiungere o togliere l'area compresa fra l'arco e la corda.

(***) V., p. es., G. Peano, *Lezioni di analisi infinitesimale* (Torino, Candeletti, 1893), t. II, § 394, p. 225.

l'area descritta dal segmento PQ comunque variabile nel piano nell'intervallo $t_0 \neg t_1$, è:

$$\text{mod} \int_{t_0}^{t_1} (Q - P)\, dG, \qquad \text{od anche:} \qquad \int_{t_0}^{t_1} (Q - P) \times i dG.$$

Cioè: *Se un segmento si muove e varia comunque in un piano, l'elemento di area da esso descritto è eguale al prodotto della lunghezza del segmento per la proiezione, sulla normale a quest'ultimo, dello spostamento subito dal suo baricentro.*

Ora, una proprietà affatto analoga sussiste per il volume descritto da una parte finita di piano comunque variabile e mobile nello spazio, com'è dimostrato nel n° 4. Occorre però premettere un teorema, che possiamo mettere sotto la forma generale enunciata nel n° seguente; tale teorema si può riguardare come estensione, agli integrali superficiali di formazioni geometriche, del noto teorema relativo alla derivazione d'un integrale.

Volume generato da una superficie piana che si muove deformandosi. ma conservandosi piana.

3. — Si abbia una superficie limitata mobile, d'area σ, funzione della variabile t e sia $P(u, v, t)$ un punto generico di tale superficie, funzione delle tre variabili u, v, t, in guisa che assegnato un valore a t per $u_0 \leq u \leq u_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$ si ottengano tutti i punti della superficie corrispondenti a quel valore. Sia poi $p(P)$ una F_r, per $r = 1, 2, 3, 4$ (cioè una *formazione geometrica di* Grassmann-Peano di specie r (*)), funzione del punto P variabile sulla superficie e $q(t)$ una F_r ($r = 1, 2, 3, 4$) funzione soltanto della variabile t. Si ha il

(*) V., p. es., C. Burali-Forti, *Corso di Geometria ecc.* cit., Cap. I, § 1 e Cap. IV, § 1.

TEOREMA. — *Per ogni valore di* t *per cui è* $\frac{d\sigma}{dt} \neq 0$ *è determinata una ed una sola* F_r, *che diremo* p_0, *funzione di* t *soltanto, tale che:*

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma p\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial p}{\partial t}\,d\sigma + \frac{d\sigma}{dt}\,p_0\,. \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma pq\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial\,(pq)}{dt}\,d\sigma + \frac{d\sigma}{dt}\,p_0\,q\,. \tag{4}$$

La (3) risulta evidente se si osserva che la derivata di $\int_\sigma p d\sigma$ è necessariamente la somma di due termini, l'uno ottenuto derivando la funzione p sotto il segno d'integrazione, l'altro dipendente dalla derivata del campo d'integrazione (cioè l'area σ), ed osservando inoltre che

$$\int_\sigma p\,d\sigma\,, \quad \frac{d}{dt}\int_\sigma p\,d\sigma\,, \quad \int_\sigma \frac{\partial p}{\partial t}\,d\sigma\,,$$

sono F_r della medesima specie funzioni della sola t.

Se eseguiamo il prodotto alterno di ciascuno dei due membri della (3) per q (a destra) ed osserviamo che:

$$\frac{du}{dt}\,q = \frac{d\,(uq)}{dt} - u\,\frac{dq}{dt}\,,$$

ed inoltre, che q può portarsi sotto il segno d'integrazione, perchè è funzione della sola t, si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma pq\,d\sigma - \int_\sigma p\,\frac{dq}{dt}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial p}{\partial t}\,q\,d\sigma + \frac{d\sigma}{dt}\,p_0\,q\,,$$

cioè:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma pq\,d\sigma = \int_\sigma \left\{p\,\frac{dq}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t}\,p\right\} d\sigma + \frac{d\sigma}{dt}\,p_0\,q\,,$$

che è appunto la (4).

OSSERVAZIONE 1ª. — Si riconosce subito che nell'enunciato e nella dimostrazione del teorema precedente si può sostituire

alla superficie d'area σ, un *arco qualsiasi* di lunghezza s, od uno *spazio limitato* di volume S, cioè le proprietà sulle derivate d'integrali espresse dalle (3), (4) valgono per *qualsiasi campo finito* d'integrazione, del cui punto generico si supponga funzione la formazione p.

Osservazione 2ª. — Moltiplicando ambo i membri della (3) per il trivettore unitario Ω, si riconosce subito che se p è un *punto*, o *vettore*, o *bivettore*, anche p_0 sarà rispettivamente un *punto*, o *vettore*, o *bivettore*.

Come corollari del teorema enunciato si ha:

I. *Se* p, p' *sono* F_r *anche non della stessa specie, e* $\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_0'$ *sono rispettivamente le* F_r *ad esse corrispondenti definite dalla* (3), *si ha:*

$$(4') \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma (p p_0' - p_0 p')\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial (p p_0' - p_0 p')}{\partial t}\, d\sigma .$$

II. *Se* p *è una* F_1, *od una* F_3, *ovvero un bivettore, è:*

$$(4'') \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma p p_0\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial (p p_0)}{\partial t}\, d\sigma ;$$

e la stessa formula sussiste quando p_0 *è una* F_2 *ad invariante nullo (cioè un bipunto od un bivettore).*

Ciò risulta immediatamente dalla (4), ricordando pure che è nullo il prodotto alternato di due forme eguali di specie dispari, o di due bivettori, o quello di due forme eguali di 2ª specie ad invariante nullo.

Possiamo ora dimostrare il

4. — Teorema. *Se una superficie piana limitata* Σ *si muove in modo da conservarsi piana, l'elemento di volume da essa descritto è il prodotto dell'area* σ, *di* Σ, *per la proiezione sulla normale a* Σ *dello spostamento del centro di gravità* G *di* Σ *stessa.*

Infatti, se nel teorema del numero precedente si fa $p = 0$ e si pone $p_0 = P_0$, si ha:

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma P\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial P}{\partial t}\, d\sigma + \frac{d\sigma}{dt} P_0 .$$

Inoltre, supposto ora P variabile in Σ ed indicato con α una forma di terza specie del piano di Σ (funzione, al pari di Σ, della sola variabile t), dalla:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma P\alpha\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(P\alpha)}{\partial t}\, d\sigma + \frac{d\sigma}{dt}\, P_0\alpha\,,$$

e per essere $P\alpha = 0$, qualunque sia t, ne segue $P_0\alpha = 0$, cioè *il punto* P_0 *individuato dalla* (5), *giace sempre, come* P, *nel piano di* Σ.

Se quindi nella:

$$\int_\sigma P\, d\sigma = \sigma G\,, \tag{6}$$

che definisce il centro di gravità G della superficie Σ, deriviamo ambo i membri rispetto a t, s'ottiene:

$$\int_\sigma \frac{\partial P}{\partial t}\, d\sigma = \sigma\frac{dG}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}(G - P_0)\,, \tag{7}$$

ove il vettore $G - P_0$ risulta parallelo al piano dell'area Σ. Perciò, se $\boldsymbol{n}$ è un vettore unitario normale a questo piano, si ha:

$$\int_\sigma \boldsymbol{n} \times \left(\frac{\partial P}{\partial t}\, dt\right) . \, d\sigma = \sigma \, . \, \boldsymbol{n} \times dG\,;$$

e poichè il primo membro dell'eguaglianza ultima esprime l'elemento di volume $\frac{dV}{dt}\, dt$ generato da Σ nel tempo dt, essendo ovviamente $d\sigma \, . \, \boldsymbol{n} \times \frac{\partial P}{\partial t}\, dt$ il volume elementare generato in tale tempo infinitesimo dall'elemento $d\sigma$ di Σ, risulta dimostrato il teorema, cioè è:

$$dV = \sigma \, . \, \boldsymbol{n} \times dG. \tag{8}$$

Osservazione 1ª. — La proprietà ora dimostrata si può ottenere in modo più rapido e semplice, senza il lemma del n° 3, quando *la superficie* Σ *mantiene invariata col tempo la sua area* σ (cioè il numero che esprime la misura di Σ).

Infatti, nell'ipotesi di σ indipendente da t, differenziando la (6) rispetto a t, si ha:

$$\int_\sigma dP \,.\, d\sigma = \sigma\, dG\,;$$

dalla quale, per essere $\boldsymbol{n}$ indipendente da Σ, segue:

$$\int_\sigma \boldsymbol{n} \times dP \,.\, d\sigma = \sigma \,.\, \boldsymbol{n} \times dG.$$

Perciò, sostituendo nell'espressione dell'elemento di volume dV generato da Σ:

$$dV = \int_\sigma \boldsymbol{n} \times dP \,.\, d\sigma\,,$$

s'ottiene senz'altro la (8).

Osservazione 2ª. — Il teorema nostro, cioè la (8), permette di dedurre immediatamente:

a) il teorema di Guldino sui volumi (Cfr. nº 9);

b) la nota formula $\int_{x_0}^{x_1} \sigma\, dx$ per calcolare il volume di uno spazio chiuso, la cui sezione generica con un piano normale ed una direzione fissata è σ, mentre è dx l'altezza d'uno strato infinitesimo compreso fra due di tali sezioni successive; ecc.

Area generata da un arco di linea in un moto arbitrario.

5. — Dal lemma del nº 3 relativo ad un arco qualsiasi di lunghezza s (nº 3, Oss. 1ª), di baricentro G, e posto in un piano la cui normale è parallela al vettore unitario $\boldsymbol{n}$, si deduce subito la relazione, analoga alla (7):

$$(7') \qquad \int_s \frac{\partial P}{\partial t}\, ds = s\, \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{ds}{dt}\,(G - P_0)\,,$$

ove il vettore $G - P_0$ è parallelo al piano dell'arco. Supposto allora il vettore $\frac{\partial P}{\partial t}$ complanare con i due vettori unitari e fra

loro ortogonali $\frac{\partial P}{\partial s}$, ed $\boldsymbol{n}$, l'area elementare (C. BURALI-FORTI, *Corso ecc.*, cit., p. 258) $dt \int_s \mathrm{mod}\left(\frac{\partial P}{\partial s} \frac{\partial P}{\partial t}\right) ds$, generata dal nostro arco piano mobile nell'intervallo dt, può esprimersi per la (7') così:

$$dt \int_s \boldsymbol{n} \times \frac{\partial P}{\partial t} ds = s \,.\, \boldsymbol{n} \times dG \,; \tag{9}$$

cioè:

Se un arco di curva piana, pur restando sempre tale, si muove deformandosi in guisa che il piano dello spostamento infinitesimo d'un suo punto generico e della tangente all'arco in quel punto risulti sempre normale al piano dell'arco, l'elemento di area generata dal detto arco è eguale al prodotto della sua lunghezza per la proiezione dello spostamento del suo baricentro sulla normale al piano a cui esso appartiene.

Se una superficie è generata da una linea piana, la quale muovendosi e deformandosi soddisfa sempre ed in ogni suo punto alla condizione enunciata, il piano tangente in qualsivoglia punto della superficie risulta normale al piano della linea generatrice, cioè questa sarà una *linea di curvatura* della superficie.

Inversamente, il teorema enunciato offre un modo generale per calcolare l'*area d'una superficie, la quale abbia come un sistema di linee di curvatura delle linee piane*; ad es., una qualsiasi porzione finita di una superficie cilindrica, o di una superficie di rotazione.

Si deduce subito, in particolare, il teorema di GULDINO sull'area generata da un arco piano in una rotazione intorno ad un asse del suo piano.

Volume generato da un diaframma limitato da un contorno chiuso qualsiasi in un moto arbitrario.

6. — Sia Σ un diaframma, limitato da un contorno chiuso arbitrario s, e si voglia considerare il volume V generato da Σ, che si muove deformandosi insieme ad s, in un intervallo $t_0 \neg t_1$ del tempo t.

Il punto generico $P(u, v, t)$ di Σ risulta funzione di tre variabili u, v, t in guisa che, in un istante assegnato t, variando u, v, si hanno tutti i punti del diaframma nella posizione da questo assunta in quell'istante; ed il volume V è espresso dall'integrale triplo (*):

$$V = \int_{t_0}^{t_1} dt \iint \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \times \frac{\partial P}{\partial t}\, du\, dv.$$

Indicando nel punto generico P di Σ con $d\sigma$ l'elemento di superficie, e con $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario parallelo alla normale a Σ, si ha:

$$\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}\, du\, dv = \boldsymbol{n}\, d\sigma\,,$$

e quindi:

$$V = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\sigma} \boldsymbol{n} \times \frac{\partial P}{\partial t}\, d\sigma. \tag{10}$$

Se ora ammettiamo che *la legge, secondo cui* Σ *ed il suo contorno* s *si muovono deformandosi nello spazio, sia tale che:*

$$\mathrm{div}_P \frac{\partial P}{\partial t} = 0\,, \tag{11}$$

ossia (*Transf. lin.*, p. 133 [1], [1']), che *esista un vettore* $\boldsymbol{u}$ *funzione di* P *e di* t, *tale che:*

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{rot}_P\, \boldsymbol{u}\,, \tag{12}$$

sostituendo nella (10) e ricordando il teorema di Stokes (**), si ha subito, *per il volume* V *generato da* Σ, *la semplice espressione seguente:*

$$V = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{s} \boldsymbol{u} \times dP. \tag{13}$$

(*) V., per es., C. Burali-Forti, *Corso ecc.*, cit., p. 261.

(**) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments ecc.*, cit., p. 111, oppure: *Transf. lin.*, p. 117 [1].

Osserviamo che la (11) è verificata, e quindi *sussiste la* (13) *nel caso d'un qualsiasi moto rigido.*

Infatti, indicando allora con O un punto invariabilmente legato a Σ, si ha (*):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + \Omega \wedge (P - O), \tag{14}$$

essendo Ω un vettore determinato il quale, al pari di O, è funzione della sola t, per cui è (*Transf. lin.*, p. 70 [2], [1], p. 81 [3]):

$$\mathrm{div}_P \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{d}{dt} \cdot \mathrm{I}_1 \frac{dO}{dP} + (P - O) \times \mathrm{rot}_P \Omega - \Omega \times \mathrm{rot}_P (P - O),$$

dalla quale per essere $\mathrm{rot}_P (P - O) = 0$, ed inoltre $\frac{dO}{dP} = 0$, $\mathrm{rot}_P \Omega = 0$, poichè tanto O quanto Ω sono indipendenti da P, segue subito la (11).

Ed allora risulta in particolare (Cfr. Koenigs, loc. cit., § 1) che: *nel moto rigido il volume* V *generato dal diaframma* Σ *è indipendente dal diaframma* (**), *poichè dipende esclusivamente dal contorno* s *di* Σ.

7. — Sarebbe interessante studiare la classe dei movimenti a cui si può assoggettare un dato diaframma Σ, limitato da s, per i quali sussista la (13) insieme alla (12), ma ci basterà qui di mettere bene in evidenza con un esempio che *tale classe è più ampia di quella dei moti rigidi.*

Supponiamo che ogni punto del diaframma Σ, e del suo contorno s, si muova di moto uniforme e rettilineo in una direzione costante, parallela ad un vettore unitario $\boldsymbol{k}$, in guisa però che la velocità v varî (solamente) col variare del punto generico, P_0 d'incontro della retta $P\boldsymbol{k}$ con una certa posizione

(*) *Éléments ecc.*, cit., p. 123, n° 3 (9).

(**) Anche questa proprietà, come l'analoga del piano (n° 1), è geometricamente evidente nei casi più semplici, poichè cambiando il diaframma, se questo non è intrecciato e nel moto non avvengono sovrapposizioni, non si fa che aggiungere e togliere lo strato compreso fra i due diaframmi.

iniziale (arbitraria del resto) Σ_0 del diaframma. In tali ipotesi si ha:

$$(15) \qquad P = P_0 + v(P) \,.\, t\boldsymbol{k}\,, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = v(P) \,.\, \boldsymbol{k}\,,$$

ove $v(P) = v(P + x\boldsymbol{k}) = v(P_0)$, per x numero reale arbitrario; e quindi (*Transf. lin.*, p. 79 [2]):

$$\operatorname{div}_P \frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div}_P \boldsymbol{k} + \operatorname{grad}_P v \times \boldsymbol{k}\,,$$

e siccome $\operatorname{div} \boldsymbol{k} = 0$ perchè $\boldsymbol{k}$ è costante, e $\operatorname{grad} v$ è normale a $\boldsymbol{k}$, perchè v non varia quando P si sposta parallelamente a $\boldsymbol{k}$ (*), risulta verificata la (11).

Se con $m(P)$ s'indica un numero funzione di P variabile soltanto, come v, al cambiare del punto d'incontro P_0 della retta $P\boldsymbol{k}$ con Σ_0 (e rimane quindi costante quando P si sposta parallelamente a $\boldsymbol{k}$), ed O è un punto fisso qualunque, si ha (*Transf. lin.*, p. 79 [2], p. 81 [3], p. 136 [2] ed *Éléments ecc.* cit., p. 34 [2]):

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}_P [m\boldsymbol{k} \wedge (P - O)] = \\ = m \operatorname{rot}_P [\boldsymbol{k} \wedge (P - O)] + \operatorname{grad}_P m \wedge [\boldsymbol{k} \wedge (P - O)] = \\ = 2m\boldsymbol{k} + (P - O) \times \operatorname{grad}_P m \,.\, \boldsymbol{k} - \operatorname{grad}_P m \times \boldsymbol{k} \,.\, (P - O)\,; \end{gathered}$$

ossia, per essere $\operatorname{grad}_P m$ (come $\operatorname{grad}_P v$) normale a $\boldsymbol{k}$:

$$\operatorname{rot}_P [m\boldsymbol{k} \wedge (P - O)] = [2m + (P - O) \times \operatorname{grad}_P m]\, \boldsymbol{k}.$$

Ne segue che, assumendo per $m(P)$ una soluzione della equazione differenziale:

$$(16) \qquad 2m(P) + (P - O) \times \operatorname{grad}_P m(P) = v(P)\,,$$

(*) Infatti nella (*Transf. lin.*, p. 77 [2]): $dv = \operatorname{grad} v \times dP$, si ha $dv = 0$ per $dP = dx \,.\, \boldsymbol{k}$.

per le (15) risulta:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{rot}_P\,[m\boldsymbol{k} \wedge (P - O)],$$

e quindi la (10) diventa:

$$(17) \quad V = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_s m\boldsymbol{k} \wedge (P - O) \times dP = \boldsymbol{k} \times \int_{t_0}^{t_1} dt \int_s m.(P - O) \wedge dP.$$

È chiaro che assumendo convenientemente $v\,(P)$, nelle (15), si potrà ottenere che V esprima il volume limitato da un'arbitraria superficie cilindrica e da due suoi diaframmi qualsivogliano: ad es. i cosidetti *volumi cilindrici* considerati dal Buhl (*), in cui uno dei diaframmi è formato da una sezione piana normale alle generatrici del cilindro.

Moto rigido di un contorno chiuso. Casi particolari.

8. — Nell'ipotesi del *moto rigido*, possiamo pure trovare per il volume V l'espressione data dal Koenigs nella sua formula fondamentale (**), e ciò molto più rapidamente di quello che non abbia potuto fare il Koenigs stesso mediante la teoria dei segmenti di Möbius.

Considerando intanto l'elemento dV di volume generato nel tempo infinitesimo dt, per le (10) e (14), si ha:

$$dV = dt \int_\sigma \boldsymbol{n} \times \left[\frac{dO}{dt} + \Omega \wedge (P - O)\right] d\sigma =$$
$$= dt \left\{ \int_\sigma \boldsymbol{n} \times \frac{dO}{dt}\, d\sigma - \Omega \times \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge (P - O)\, d\sigma \right\}.$$

(*) A. Buhl, *Sur les applications géométriques de la formule de* Stokes, " Annales de la Faculté des Sciences de l'Univ. de Toulouse ", (3e), 2, 1910, pp. 83-84, chap. I.

(**) Koenigs, loc. cit., § V, p. 330 (5) e § VIII, p. 336 (F).

Ora, osservato che le equazioni (in x ed y):

$$\operatorname{rot} x = \frac{dO}{dt}, \qquad \operatorname{grad} y = P - O,$$

sono soddisfatte ponendo [*Transf. lin.*, p. 136 [2], p. 138 (*a*)]:

$$x = \frac{1}{2}\frac{dO}{dt} \wedge (P - O), \qquad y = \int (P - O) \times dP = \frac{1}{2}(P - O)^2,$$

per il teorema di Stokes (*Transf. lin.*, p. 117 [1] e [4]), s'avrà:

$$\int_\sigma n \times \frac{dO}{dt}\, d\sigma = \int_\sigma n \times \operatorname{rot}\left[\frac{1}{2}\frac{dO}{dt} \wedge (P - O)\right] d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{dO}{dt} \times \int_s (P - O) \wedge dP,$$

$$\int_\sigma n \wedge (P - O)\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_\sigma n \wedge \operatorname{grad}(P - O)^2\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_s (P - O)^2\, dP;$$

e sostituendo nell'espressione di dV, si ha:

$$(18) \quad dV = \frac{1}{2}\, dt \left[\frac{dO}{dt} \times \int_s (P - O) \wedge dP - \Omega \times \int_s (P - O)^2\, dP\right].$$

È questa, in sostanza, la formula fondamentale (5) del Koenigs, posta però sotto forma assoluta più espressiva, in quanto non compaiono che gli elementi P ed s, relativi al contorno, e quelli relativi al moto (la velocità istantanea di traslazione, $\frac{dO}{dt}$, e quella istantanea di rotazione, Ω), essendo O un punto invariabilmente legato al contorno; essa è quindi pure di facile interpretazione.

Il vettore $\frac{1}{2}\int_s (P - O) \wedge dP = u(t)$ è il *vettore areolare* (impropriamente detto asse, o segmento) *del contorno* s, il cui senso dipende ovviamente dal senso fissato come positivo per percorrere s; tale vettore è affatto indipendente dal punto O, risultando l'indice (di Grassmann) " | " del bivettore $\int_s P\,dP$, cioè, per essere $\int_s O\,dP = 0$, si ha:

$$2u(t) = \int_s (P - O) \wedge dP = \left|\int_s P\,dP\right.$$

La componente del vettore areolare $\boldsymbol{u}$, secondo una direzione arbitraria, esprime l'area piana racchiusa dalla proiezione del contorno s di Σ sopra un piano normale a quella direzione. Quindi, quando il contorno s è piano, mod $\boldsymbol{u}$ è eguale all'area piana limitata da s, mentre in ogni altro caso mod $\boldsymbol{u}$ è *minore anche dell'area minima* limitata da s.

Il vettore

$$\frac{1}{2}\int_s (P-O)^2 dP = \boldsymbol{w}(t, O)$$

dipende dal punto O (centro di riduzione del moto) e può chiamarsi *vettore di pseudo-inerzia del contorno rispetto al punto* O. Se consideriamo per O una retta qualsiasi $O\boldsymbol{i}$, parallela al vettore unitario $\boldsymbol{i}$, poichè per il contorno chiuso s si ha:

$$\int_s [\boldsymbol{i} \times (P-O)]^2 \, \boldsymbol{i} \times dP = 0 \,,$$

la proiezione sulla retta $O\boldsymbol{i}$ del vettore $\boldsymbol{w}$ è:

$$\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{i} = \frac{1}{2}\int_s \{(P-O)^2 - [\boldsymbol{i} \times (P-O)]^2\} \, . \, \boldsymbol{i} \times dP,$$

cioè è espressa dall'integrale, esteso a tutto il contorno s, del semiquadrato della distanza d'un punto di s dalla retta $O\boldsymbol{i}$, per la proiezione sopra questa del corrispondente elemento di arco.

Il Koenigs chiama *coordinate del sistema di segmenti legati al contorno* s le proiezioni sopra una terna ortogonale di assi cartesiani uscenti da O, dei vettori $\boldsymbol{u}$ e $-\boldsymbol{w}$, cioè le *coordinate* (*) *della formazione di 2ª specie* $|\boldsymbol{n} - O\boldsymbol{w}$, mentre le *coordinate della* vite (dopo il Ball) *del moto* considerato non sono altro che le coordinate della formazione di 2ª specie

$$\frac{1}{\operatorname{mod}\Omega}\left(O\frac{dO}{dt} + |\Omega\right).$$

(*) V., per es., G. Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (Torino, Bocca, 1888), p. 118.

Con ciò la (15) esprime che *l'elemento di volume* dV *s'ottiene moltiplicando l'ampiezza*, mod Ω dt, *del moto elicoidale infinitesimo per il prodotto alternato delle due formazioni*:

$$|\boldsymbol{u} - O\boldsymbol{w}, \qquad \frac{1}{\operatorname{mod}\Omega}\left(O\frac{dO}{dt} + |\Omega\right),$$

cioè (col Möbius) il momento dei due sistemi di segmenti legati l'uno al contorno e l'altro al moto (Cfr. Koenigs, loc. cit., § VII).

Se consideriamo un moto arbitrario durante un intervallo finito $t_0 \overline{\ } t_1$ del tempo, il volume generato dal diaframma Σ limitato da s risulta espresso da (Cfr. Koenigs, loc. cit., § VIII e IX):

$$(19) \quad V = \int_{t_0}^{t_1} dO \times \int_s \frac{1}{2}(P - O) \wedge dP - \int_{t_0}^{t_1} \Omega\, dt \times \int_s \frac{1}{2}(P - O)^2 dP =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{u} \times dO - \Omega \times \boldsymbol{w}\, dt),$$

od anche, indicando rispettivamente con $a\boldsymbol{i}_1$ e $b\boldsymbol{i}_2$ il vettore areolare ed il vettore di pseudo-inerzia rispetto ad O, essendo $\boldsymbol{i}_1$ ed $\boldsymbol{i}_2$ due vettori unitari, ed a, b numeri indipendenti da t, si ha:

$$(19') \qquad V = a \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{i}_1 \times dO - b \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{i}_2 \times \Omega\, dt.$$

9. — Nel caso di un *contorno piano* s, che si muove rigidamente, possiamo assumere per O il centro di gravità G della superficie Σ limitata da s, e poichè per la (6) si ha:

$$\int_\sigma (P - G)\, d\sigma = 0\,, \qquad \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge (P - G)\, d\sigma = 0\,,$$

per essere $P - G = \frac{1}{2}\operatorname{grad}(P - G)^2$, e per la formula di Stokes (*Transf. lin.*, p. 117 [4]), ne segue:

$$\int_s (P - G)^2\, dP = 0.$$

Perciò, siccome nel caso considerato il vettore areolare è (*):

$$\frac{1}{2}\int_s (P-O)\wedge dP=\frac{1}{2}\int_\sigma \mathrm{rot}_P\,[i\,(P-O)]\,d\sigma=\sigma\boldsymbol{n},$$

la (19) diventa:

$$V=\sigma\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{n}\times dG, \tag{19''}$$

espressione che nel n° 4 si è riconosciuta esser valida anche nel caso di un'area piana, limitata da un contorno s, comunque variabile col tempo.

In particolare, per una rotazione intorno ad un asse $O\boldsymbol{i}$ appartenente al piano di Σ, si ha (teorema di Guldino) che *il volume generato è dato dal prodotto dell'area* σ *per l'arco descritto dal suo baricentro.*

Quando invece $O\boldsymbol{i}$ non giace nel piano di Σ, è costante l'angolo α che questo piano forma col piano OiG, e se dc è l'elemento d'arco di circonferenza percorsa da G, si ha:

$$V=\sigma\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{n}\times dG=\sigma\cos\alpha\,.\int_{t_0}^{t_1}dc,$$

ossia: *il volume generato dalla superficie piana* Σ, *in una rotazione intorno ad un asse arbitrario, è eguale al prodotto dell'arco descritto dal baricentro* G *di* Σ *per l'area della proiezione di questa superficie sul piano individuato dal baricentro* G *e dall'asse di rotazione.*

Osservazione. — È da notarsi che questo enunciato al quale ci ha direttamente condotti il metodo vettoriale usato per ricavare la (19''), è *affatto simile al teorema di* Guldino *ed è più semplice dell'enunciato dato dal* Koenigs (che l'ha ricavato mediante le sue considerazioni sui momenti: loc. cit., § XI), che s'ottiene dal nostro sostituendo al baricentro G, di Σ,

---

(*) V., per es., M. Bottasso, *Omografie vettoriali del piano*, " Rendic. del Circ. Matem. di Palermo ", t. XXXV, 1913, pp. 1-46, n° 25, (91') e *Transf. lin.*, p. 70 [1], p. 68 [1'], osservando inoltre che l'omografia i del piano di s ha come vettore $\boldsymbol{n}$.

il punto B d'incontro della retta Gn (normale al piano di Σ) colla perpendicolare comune a questa retta ed all'asse Oi di rotazione.

Per riconoscere come dalla nostra proposizione si possa dedurre quella del KOENIGS, e viceversa, indichiamo con r_0, r_1 le distanze dall'asse dei due punti G, B; con $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{n}_1$ due vettori unitarî rispettiv. normali ai piani OiG, OiB (e quindi rispettiv. paralleli ai vettori dG, dB) ed entrambi normali ad $\boldsymbol{i}$; con φ l'angolo di $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{n}_1$; e con ψ l'angolo dei due vettori $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_1$, complanari con $\boldsymbol{i}$. Si ha:

$$\boldsymbol{n} = \cos\psi\, \boldsymbol{n}_1 + \operatorname{sen}\psi\, \boldsymbol{i},$$

e quindi:

$$\cos(\boldsymbol{n}, dG) = \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_0)\cos\psi\,.\,\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_0 = \cos\psi\cos\varphi\,.$$
$$\cos(\boldsymbol{n}, dB) = \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_1) = \cos\psi\,,$$

per cui, essendo $r_1 = r_0\cos\varphi$, se θ è l'ampiezza della rotazione, si ha:

$$r_0\theta\,.\,\sigma\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_0) = r_1\theta\,.\,\sigma\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_1),$$

la quale esprime appunto che il prodotto della lunghezza dell'arco percorso da G, per l'area della proiezione di Σ sul piano OiG, è eguale all'analogo prodotto relativo al punto B.

10. — La nostra (19) permette pure di dare un enunciato semplice all'estensione, che ne risulta per il teorema di GULDINO, considerando la rotazione d'un *contorno chiuso qualsiasi* (*). Se prendiamo in tal caso il punto O sull'asse attorno a cui si compie la rotazione, s'avrà $\frac{dO}{dt} = 0$ e la proiezione del vettore $\boldsymbol{w}$ di pseudo-inerzia sull'asse risulta ovviamente indipendente da t;

(*) Per questo caso il KOENIGS non ha dato alcun enunciato esplicito, giacchè quest'ultimo non si sarebbe presentato sotto forma semplice deducendolo dalla sua formula fondamentale (F).

perciò, indicando con θ l'ampiezza della rotazione e con $\boldsymbol{i}$ un vettore unitario parallelo all'asse, si ha:

$$V = -\frac{1}{2}\theta \int_s (P-O)^2 \, \boldsymbol{i} \times dP = -\theta \, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{w},$$

cioè:

Il volume generato da un diaframma qualunque, limitato da un contorno chiuso s, *in una rotazione intorno ad un asse, è eguale al prodotto dell'ampiezza* θ *della rotazione per la proiezione sull'asse del vettore di pseudo-inerzia rispetto ad un punto dell'asse stesso;* od anche: *detto volume è eguale al prodotto di* θ *per l'integrale, esteso al contorno, del prodotto del semiquadrato della distanza d'un punto generico di tale contorno dall'asse di rotazione, per la proiezione su questo dell'elemento del contorno medesimo.*

11. — Supponiamo che il nostro contorno si muova, restando rigidamente collegato al triedro principale di una *curva direttrice del moto*, generata da un punto $O(t)$; se indichiamo con $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ i vettori unitari rispettiv. paralleli alla tangente, alla normale principale ed alla binormale di questa curva, e con dl, ρ, τ rispettiv. l'elemento d'arco, il raggio di curvatura e quello di torsione della curva stessa, si ha (*):

$$\frac{dO}{dt}\, dt = dl \,.\, \boldsymbol{t}, \qquad \Omega \, dt = \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{b} - \frac{1}{\tau}\boldsymbol{t}\right) dl.$$

Perciò, osservando che nel moto non cambiano le proiezioni sopra $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ tanto del vettore areolare $\boldsymbol{u}$, quanto del vettore di pseudo-inerzia $\boldsymbol{w}$, l'espressione (19) del volume generato da un diaframma per s, mentre O percorre un arco $l_1 - l_0$ della curva direttrice, è:

$$\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u}\,(l_1 - l_0) + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{w} \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{\tau} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{w} \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{\rho}\,.$$

Si riconoscerà così subito, per es. (Cfr. Koenigs, loc. cit., § XII) che, affinchè tale volume risulti proporzionale a

(*) V., per es., *Éléments ecc.*, cit., p. 127.

$l_1 - l_0$, la curva percorsa dal punto O dev'essere una *curva di* BERTRAND.

12. — Per mostrare ora, con un esempio, come si ottengano facilmente il vettore areolare e quello di pseudo-inerzia, che compaiono nella (19), relativi ad un dato contorno, considereremo una *finestra di* VIVIANI.

Sulla semisfera di centro O, raggio r e coll'asse parallelo al vettore unitario $\boldsymbol{k}$, si consideri la curva di VIVIANI tagliata dal cilindro circolare retto passante per la retta $O\boldsymbol{k}$, di raggio $\frac{r}{2}$ e col centro d'una sua sezione retta nel punto $O + \frac{1}{2} r\boldsymbol{i}$, essendo $\boldsymbol{i}$ un vettore unitario normale a $\boldsymbol{k}$. Indicando con i l'operatore che fa ruotare d'un angolo retto ogni vettore normale a $\boldsymbol{k}$, in guisa che per tali vettori sia $i = \boldsymbol{k}\wedge$, come espressione del punto generico della finestra di VIVIANI si ha subito:

$$P = O + r \cos\varphi \, e^{i\varphi} \boldsymbol{i} + r \bmod (\operatorname{sen}\varphi) \, . \, \boldsymbol{k} \tag{20}$$

e si ottiene tutta la curva facendo variare φ da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Noteremo intanto che per la curva considerata, come del resto per qualsivoglia contorno chiuso della sfera, il vettore di pseudo-inerzia rispetto al centro della sfera è nullo, cioè si ha evidentemente:

$$\boldsymbol{w} = \int_s (P - O)^2 . \, dP = r^2 \int_s dP = 0 ,$$

cosa che non risulta certamente con altrettanta facilità dalle espressioni cartesiane delle proiezioni di tale vettore date dal KOENIGS (loc. cit., § V).

Dalla (20) si ha poi:

$$\frac{dP}{d\varphi} = - r \operatorname{sen}\varphi \, e^{i\varphi} \boldsymbol{i} + r \cos\varphi \, e^{i\varphi} i\boldsymbol{i} + r \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\bmod \operatorname{sen}\varphi} \cos\varphi \, \boldsymbol{k} =$$

$$= r e^{2i\varphi} i\boldsymbol{i} + r \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\bmod \operatorname{sen}\varphi} \cos\varphi \, \boldsymbol{k} \, .$$

ed osservando che $\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\bmod \operatorname{sen}\varphi} = \frac{\bmod \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, segue essere:

$$(P-O)\wedge dP = r^2\cos^2\varphi \boldsymbol{k} d\varphi - r^2 \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{mod}\operatorname{sen}\varphi}(e^{i\varphi}\boldsymbol{ii} + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{i})\, d\varphi;$$

e siccome si ha:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \int e^{i\varphi}\, \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}\, d\varphi = e^{i\varphi}\boldsymbol{i},$$

$$\int \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{i} d\varphi = -\frac{1}{4}\int (e^{3i\varphi}\boldsymbol{ii} - e^{-i\varphi}\boldsymbol{ii})\, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{12}e^{3i\varphi}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}e^{-i\varphi}\boldsymbol{i},$$

il vettore areolare della finestra di Viviani è:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\int_s (P-O)\wedge dP = \frac{\pi r^2}{4}\boldsymbol{k} + \frac{r^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^{i\varphi}\boldsymbol{ii} + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{i})\, d\varphi -$$

$$-\frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{i\varphi}\boldsymbol{ii} + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{i})\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi r^2}{4}\boldsymbol{k} + \frac{r^2}{2}\Big[\boldsymbol{i} - \frac{1}{12}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{ii} + \frac{1}{12}\boldsymbol{ii} + \frac{1}{4}\boldsymbol{ii} -$$

$$-\Big(\boldsymbol{ii} + \frac{1}{12}\boldsymbol{ii} + \frac{1}{4}\boldsymbol{ii} - \boldsymbol{i} + \frac{1}{12}\boldsymbol{i} + \frac{1}{4}\boldsymbol{i}\Big)\Big],$$

ossia:

$$\boldsymbol{u} = \frac{2}{3}r^2\boldsymbol{i} + \frac{\pi}{4}r^2\boldsymbol{k}. \tag{21}$$

Possiamo limitarci a considerare il contorno formato dalla *metà della finestra di* Viviani, luogo dei punti P corrispondenti ai valori di φ dell'intervallo $0 \div \frac{\pi}{2}$ nella:

$$P = O + r\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{i} + r\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k}, \tag{20'}$$

e dal quadrante di circolo massimo luogo dei punti:

$$Q = O + r\cos\psi\boldsymbol{i} + r\operatorname{sen}\psi\boldsymbol{k}.$$

che corrispondono ai valori di ψ da $\frac{\pi}{2}$ a 0. Allora, anche dalle formule or ora svolte, quale parte di vettore areolare spettante alla mezza finestra si ha subito:

$$r^2\left(\frac{1}{3}\,\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \frac{\pi}{8}\,\boldsymbol{k}\right);$$

e poichè è:

$$(Q - O) \wedge dQ = r^2 \,.\, \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}\, d\varphi,$$

l'altra parte del detto vettore spettante al quadrante di circolo massimo è $-\frac{\pi}{4}\, r^2 \,.\, \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}$; quale vettore areolare di tutto il contorno consi- derato si ha dunque:

$$r^2\left[\frac{1}{3}\,\boldsymbol{i} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\right)\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \frac{\pi}{8}\,\boldsymbol{k}\right].$$

che non è (come si potrebbe pensare) la metà del vettore areolare (21), prima ottenuto, per l'intera finestra di Viviani.

Torino, Febbraio 1914.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Marzo 1914.

PRESIDENZA DEL BARONE SENATORE MANNO

SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Carle, Pizzi, De Sanctis, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e Renier Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 15 febbraio 1914.

Il Presidente presenta con parole di caldo elogio il volume del Socio Sforza: *La caduta della Repubblica di Venezia studiata nei dispacci inediti della diplomazia piemontese*, Venezia, dalla Deputazione di storia patria, 1913.

Il Socio De Sanctis presenta sotto la propria responsabilità per gli *Atti* uno scritto di Plinio Fraccaro dal titolo: *La procedura del voto nei comizi tributi romani.*

LETTURE

La procedura del voto nei comizi tributi romani.

Nota di PLINIO FRACCARO.

La procedura di voto nei comizi tributi romani è stata ricostruita dal Mommsen fondandosi specialmente sulle disposizioni sancite dalla *lex Malacitana* per le votazioni nei comizi curiati di *Malaca* indubbiamente regolati sull'esempio dei comizi curiati romani, sui quali alla loro volta vennero modellandosi i comizi tributi (vd. Mommsen *Gesammelte Schriften* I 1 p. 317 sg. e *Staatsrecht* III p. 396 sg.). Lo statuto di Malaga prescrive per i comizi, da tenersi sotto la presidenza di uno dei *II viri*, che prima si estragga a sorte *in qua curia incolae* (cioè i *cives Romani* e *Latini* domiciliati) *suffragia ferant* (c. 53) e poi che così si voti (c. 55 *de suffragio ferendo*): *Qui comitia ex h(ac) l(ege) habebit, is municipes curiatim ad suffragium ferendum vocato ita, ut uno vocatu omnes curias in suffragium vocet, eaeque singulae in singulis consaeptis suffragium per tabellam ferant.* Seguono disposizioni sui *custodes* alle *cistae, qui suffragia custodiant diribeant*, e sui rappresentanti dei candidati da assegnarsi ad ogni curia; poi (c. 56): *Is qui ea comitia habebit, uti quisque curiae cuiius plura quam alii suffragia habuerit, ita priorem ceteris eum pro ea curia factum creatumque esse renuntiat*[*o*], *donec is numerus, ad quem creari oportebit, expletus sit.* Seguono disposizioni per il caso che due o più candidati abbiano riportato in una curia lo stesso numero di suffragi: riesce eletto chi è in determinate condizioni rispetto agli altri, e in caso di assoluta parità decide la sorte. Quindi (c. 57): *Qui comitia h(ac) l(ege) habebit, is relatis omnium curiarum tabulis nomina curiarum in sortem coicito singularumque curiarum nomina sorte ducito et ut cuiusque curiae nomen sorte exierit, quos ea curia fecerit, pronuntiari iubeto; et uti quisque prior maiorem partem numeri curiarum confecerit, eum,*

cum h(ac) l(ege) iuraverit (cfr. c. 59) *caveritque de pecunia communi* (cfr. c. 60), *factum creatumque renuntiato, donec tot magistratus sint quod h(ac) l(ege) creari oportebit. Si totidem curias duo pluresve habebunt, uti supra conprehensum est de is qui suffragiorum numero pares essent, ita de is qui totidem curias habebunt facito. eademque ratione priorem quemque creatum esse renuntiato.*

Dunque la votazione s'apre con l'estrazione a sorte di una curia nella quale voteranno i domiciliati isopoliti: quindi la votazione procede *curiatim* e *uno vocatu* e in modo che le curie *singulae in singulis consaeptis suffragium ferant.* Il Mommsen intende l'espressione *uno vocatu* nel senso che " werden sämmtliche Curien von dem vorsitzenden Beamten gleichzeitig angewiesen sich jede in ihren Verschlag zu verfügen „ e che tutte le curie votavano contemporaneamente. E in caso diverso lo statuto avrebbe dovuto parlare dell'ordine secondo il quale chiamare al voto le curie, e la prescrizione del c. 52 (*II vir*) *comitia... h. l. habeto, utique ea distributione curiarum, de qua supra conprehensum est, suffragia ferri debebunt*, non si può certo riferire ad un ordine per la votazione successiva delle curie.

Segue, secondo l'interpretazione della legge data dal Mommsen, la *renuntiatio pro curia*, cioè la proclamazione dei risultati d'ogni singola curia. Lo spoglio è fatto dai *diribitores*, che ne riferiscono poi al magistrato, il quale proclama eletti per ogni singola curia i candidati che hanno riportato la maggioranza relativa, tanti quanti sono i posti da coprire e dando la precedenza mano mano a chi ha riportato un maggior numero di voti, e a parità di voti a chi si trova in determinate condizioni, e a parità di condizioni all'indicato dalla sorte. Fatto lo spoglio delle singole curie, il presidente fa porre nell'urna i nomi di tutte le curie, li estrae quindi a sorte ad uno ad uno, e fa proclamare (*pronuntiari iubeto*) volta per volta i candidati riusciti in ogni curia, finchè uno abbia raggiunto la metà più uno delle curie. Così secondo il Mommsen; recentemente però questa interpretazione è stata impugnata dal Rosenberg *Untersuchungen zur römischen Zenturienverfassung* (Berlin 1911) p. 68 sg. e ora dal De Sanctis *La riforma dell'ordinamento centuriato* (in " Studi Romani „ II p. 16 — l'Autore ha cortesemente messo a mia disposizione le bozze della sua memoria

sulle quali ho ritoccato qua e là questa nota), i quali riferiscono ad un'unica *renuntiatio*, quella del c. 57, anche le prescrizioni del c. 56; allora si dovrebbe intendere che, *relatis tabulis*, riferiti cioè al presidente i risultati delle singole curie, questi non li fa proclamare se non quando il nome di una curia esce dall'urna: quindi il voto di ogni sezione non sarebbe stato annunciato che una sola volta. Effettivamente due passi di Varrone (*r. r.* III 17, 1) e di Cicerone (*pro Plancio* 49), che riferiremo tosto, non parlano fra la *relatio tabularum* e la *renuntiatio* coll'estrazione a sorte di *renuntiatio pro tribu*; ma il testo della legge di Malaga pare proprio considerare due proclamazioni (prima *pro ea curia factum creatumque esse renuntiato*; poi, durante l'estrazione a sorte, *quos ea curia fecerit pronuntiari iubeto* [non *renuntiato*]; e infine *factum creatumque renuntiato* chi ha ottenuto la maggioranza), e la sua autorità è grande di fronte a due testi non giuridici e che accennano assai compendiosamente alla procedura comiziale; e le ragioni addotte dal Rosenberg e dal De Sanctis per dimostrare l'inopportunità e l'inverosimiglianza della doppia proclamazione, per quanto assai ingegnose, non mi sembrano assolutamente probanti. Questa questione non ha tuttavia qui per il nostro scopo grande importanza.

Il Mommsen è invece inesatto quando scrive (*Ges. Schr.* p. 319): " Als gewählt gilt indess nur, wer die absolute Majorität der Curien vereinigt; zuerst renuntiirt wird, bei wem dies zuerst eintritt „. Solo chi ottiene la maggioranza delle curie può essere eletto; ma sono effettivamente eletti coloro che per primi riescono a raggiungere questa maggioranza. Tosto che un candidato *prior maiorem partem numeri curiarum confecerit*, si sospende la *renuntiatio* e si fa giurare il candidato secondo le prescrizioni del c. 59 (cfr. la *lex municipii Tarentini* l. 15 sg. in Mommsen *Ges. Schr.* I 1 p. 146 sg.); quindi il presidente lo *renuntiat factum creatumque* senza alcun riguardo ai voti delle curie successive. Questo curioso procedimento spiega l'importanza data all'ordine della *pronuntiatio* dei risultati delle singole curie. Infatti dall'ordine della *pronuntiatio* poteva dipendere l'elezione o no di un candidato. La cosa è stata più volte osservata (vd. Pernice in Mommsen *Staatsr.* III p. 414 n. 4; Klebs in *Zeitschrift der Savigny Stiftung*, Röm. Abteil. XII (1891)

p. 230) e messa ora chiaramente in rilievo dal De Sanctis, dal quale prendo l'esempio assai perspicuo che egli dà (p. 17): " .....i magistrati da eleggere siano due... e la loro scelta sia affidata ai comizi tributi. Se 10 tribù (A) votano per Claudio e Valerio, 12 (B) per Cornelio e Valerio, 13 (C) per Claudio e Cornelio, sono eletti, noi diremmo, Cornelio con 25 voti e Claudio con 23. Giusta l'uso romano invece, determinandosi per sorteggio l'ordine secondo cui si proclamano i risultati del suffragio e sospendendosi la proclamazione man mano che i candidati raggiungono la maggioranza assoluta, se le tribù A per caso precedono, seguendo le B e poi le C saranno eletti Valerio e Cornelio, seguendo 8 delle C e poi le B saranno eletti Claudio e Valerio ". Notevole è pure che con questo sistema un candidato può riuscire eletto prima di un altro che abbia tuttavia riportato un numero di voti superiore al suo: basta che nella *renuntiatio* le tribù a lui favorevoli siano uscite prima dall'urna. Il Mommsen, specialmente avendo riguardo all'onore che portava seco la priorità della proclamazione, ha perfino dubitato (*Staatsr.* III p. 414 n. 4) che la legge di Malaga fosse qui inesatta: ma a torto; anche in Roma l'eletto era chi aveva riportato la maggioranza più uno, senza badare agli altri voti in più: vd. Cicerone *de leg. agr.* II 16: *iubet enim tribunum plebis, qui eam legem tulerit, creare decemviros per tribus septemdecim, ut quem novem tribus fecerint, is decemvir sit*; cfr. 21: *quos novem tribus decemviros fecerint... dominos habebimus. Atque hi, ut grati ac memores beneficii esse videantur, aliquid se novem tribuum notis hominibus debere confitebuntur, reliquis vero sex et XX tribubus nihil erit quod non putent posse suo iure se denegare.* Il sistema può sembrare strano a noi moderni; ma era così.

Tali i comizi di Malaga. Sul loro modello e col sussidio di altri testi, il Mommsen nello *Staatsrecht* ha così ricostruito la procedura dei comizi tributi romani. Il primo atto della votazione è l'estrazione a sorte della tribù nella quale voteranno per quella volta i Latini. Quindi dalla *conventio*, nella quale i cittadini stanno senza ordine alcuno, si passa ai *comitia*; ed i cittadini si dispongono per tribù entrando nei *saepta*. Sull'ordine del presidente poi, tutte le tribù votano contemporaneamente: non c'è nei comizi tributi una tribù che voti per prima, come la *praerogativa* nei centuriati. Avvenuta la vota-

zione, comincia contemporaneamente per tutte la *diribitio* dei voti delle singole tribù: prevale in esse il voto della maggioranza relativa dei votanti, qualunque sia il loro numero. I *rogatores* riferiscono quindi al presidente il risultato della votazione della loro tribù, e il presidente, mano mano che questi risultati gli pervengono, li fa *renuntiare* dall'araldo all'assemblea per tutte le tribù. La *recitatio* dei risultati avviene quindi secondo un ordine indicato dalla sorte; la tribù il cui risultato è proclamato per primo, è il *principium* e si proclama pure chi diede per primo il voto in questa tribù (*primus scivit*). La *recitatio* continua fino a che la maggioranza assoluta dei voti delle tribù sia raggiunta: allora il presidente proclama il risultato finale, e i voti delle altre tribù non vengono recitati.

Questa è nelle linee generali la ricostruzione del Mommsen, che oggi fa testo. Non tutti i trattatisti però l'accettano tale e quale; parecchi s'allontanano dal Mommsen sull'uno o sull'altro punto. Il Rosenberg e il De Sanctis, ad es., non ammettono la *renuntiatio pro tribu*: il presidente fa noti i risultati delle varie sezioni solo nella *renuntiatio* a sorte. Altri ritengono che il *principium* dei comizi tributi fosse una tribù prerogativa, votante effettivamente per prima: ma di ciò più avanti; ora invece ci proponiamo la questione, se i passi delle fonti antiche a noi giunte s'accordino con la ricostruzione del Mommsen specialmente riguardo alla contemporaneità della votazione, e se sia possibile trovare per quelli che non s'accordano una spiegazione plausibile della discrepanza.

S'accordano con la ricostruzione del Mommsen gli accenni ad un comizio tributo contenuti nel III libro sull'agricoltura di Varrone. Questi, com'è noto, immagina che il dialogo del terzo libro avvenga nella *villa publica* del campo Marzio durante le elezioni degli edili (c. 2, 1): *comitiis aediliciis cum sole caldo ego et Q. Axius senator tribulis suffragium tulissemus et candidato, cui studebamus, vellemus esse praesto, cum domum rediret, Axius mihi: Dum diribentur, inquit, suffragia, vis potius villae publicae utamur umbra, quam privati candidati tabella dimidiata* (parole corrotte) *aedificemus nobis?* Se la votazione nei comizi fosse stata successiva, tribù dopo tribù, bisognerebbe ammettere che Varrone e il suo *tribulis* avessero votato nell'ultima tribù chiamata al voto: e ciò è difficile a pensarsi. Infatti nè qui nè più

avanti si accenna al voto di altre tribù, ma solo alla *diribitio*: cfr. c. 5, 18: *cum haec loqueremur, clamor fit in campo..... venit ad nos Pantuleius Parra, narrat ad tabulam, cum diriberent, quendam deprensum tesserulas coicientem in loculum.* Più avanti poi (c. 17, 1) si allude alla *recitatio* finale dopo lo scrutinio: *Interea redit ad nos Pavo et: Si vultis, inquit, ancoras tollere, latis tabulis sortitio fit tribuum, ac coepti sunt a praecone recini, quem quaeque tribus fecerit aedilem.* Poco dopo arriva il candidato trionfante.

Così s'accorda bene con il sistema del Mommsen l'accenno che Cicerone fa ai comizi in cui Gn. Plancio fu designato edile (*pro Plancio* 49): *Quasi non comitiis iam superioribus sit Plancius designatus aedilis..... Vocatae tribus, latum suffragium, diribitae ⟨tabellae⟩, renuntiatae. Longe plurimum valuit Plancius.*

Invece se si leggono altri passi antichi che descrivono pure dei comizi tributi, si prova subito l'impressione di una grande difficoltà a spiegare molti tratti essenziali di queste descrizioni stesse secondo la ricostruzione tentata dal Mommsen. Questi ha notato le difficoltà, ma se n'è sbrigato presto attribuendole ad errore e malinteso di scrittori poco competenti o poco precisi (cfr. p. 397 n. 4; 399 n. 1; 409 n. 1; 413 n. 4). Questa soluzione potrà essere persuasiva se adottata per incidenza nelle note e a varie riprese per singoli gruppi di notizie: ma se noi riuniamo insieme tutti i più importanti di questi passi e li discutiamo ampiamente, l'impressione che essi possono dare è forse diversa e le spiegazioni del Mommsen possono sembrare meno persuasive.

Esaminiamo quindi una serie di descrizioni antiche di votazioni in comizi tributi. Non ho badato a seguire un ordine cronologico, perchè non avrebbe importanza alcuna; anzi parecchie descrizioni riferentisi a tempi più antichi sono state indubbiamente costruite in età più recente di altre riferentisi a tempi più vicini, e rappresentano soltanto l'idea che dei comizi tributi avevano gli annalisti usati dalle nostre fonti.

1) *Votazione per il trionfo di L. Emilio Paolo* (a. 167). — La descrivono Livio XLV 36 e Plutarco *Aem.* 31 evidentemente dalla stessa fonte (Polibio: cfr. Peter *Quellen Plutarchs* p. 88; Schwarze *Quibus fontibus Plutarchus in vita L. Aemilii Pauli usus sit*, diss. Lips. 1891 p. 55 sg.): in Plutarco sembra

che l'originale sia stato più fedelmente conservato. Il primo giorno che la rogazione concedente l'*imperium* a Paolo e ai suoi due ammiragli fu portata da un tribuno dinanzi alle tribù, non si arrivò alla votazione per un discorso ostruzionista di Sulpicio Galba, avversario personale di Paolo, che incitò i soldati dell'esercito di Macedonia a votar contro. Il giorno dopo gran folla sul Campidoglio ove si teneva l'assemblea: i soldati di Macedonia occupano tutto lo spazio così che gli altri difficilmente possono partecipare alla votazione. *Intro vocatae primae tribus cum antiquarent, concursus in Capitolium principum civitatis factus est*, i quali protestano contro l'indegno trattamento fatto a Paolo: il consolare M. Servilio chiede ai tribuni *ut de integro eam rem agerent* e concedessero a lui la parola. I tribuni si ritirano per deliberare e *victi auctoritatibus principum de integro agere coeperunt, revocaturosque se easdem tribus renuntiarunt, si M. Servilius aliique privati, qui dicere vellent, dixissent.* Anche in Plutarco: *Ἅμα δ' ἡμέρᾳ τῆς ψήφου δοθείσης ἥ τε πρώτη φυλὴ τὸν θρίαμβον ἀπεψηφίζετο.* I senatori allora *τοῖς δημάρχοις ἔλεγον ἐπισχεῖν τὴν ψηφοφορίαν.* Servilio termina poi il suo discorso con queste parole: *ἀλλ' ἄγε λαβὼν αὐτοὺς ἐπὶ τὴν ψῆφον· ἐγὼ δὲ καταβὰς παρακολουθήσω πᾶσι, καὶ γνώσομαι τοὺς κακοὺς καὶ ἀχαρίστους καὶ δημαγωγεῖσθαι μᾶλλον ἐν τοῖς πολέμοις ἢ στρατηγεῖσθαι βουλομένους.* È evidente che qui Livio pensa ad una votazione successiva delle tribù; specialmente perchè i tribuni dichiarano che avrebbero fatto votare da capo anche le tribù già *intro vocatae*; se la votazione fosse stata contemporanea, tutte le tribù o quasi dovevano aver già votato e avrebbero dovuto esser fatte votare da capo. Lo stesso in Plutarco: la prima tribù vota contro, e si domanda dai senatori di interrompere la votazione *(ψηφοφορίαν)*, non la proclamazione dei voti. E le parole sopra riferite di Servilio mostrano che lo scrittore pensava alla possibilità di sorvegliare mano mano il voto di tutte le tribù, ciò che sarebbe stato impossibile con una votazione simultanea. Il Mommsen invece interpreta così (p. 415 n. 4): " Das Plebiscit über die Gestattung des Triumphs für L. Aemilius Paulus... wird von der ersten Tribus verworfen; worauf der vorsitzende Magistrat beschliesst der Renuntiation keine Folge zu geben, ein weiteres Suasionsverfahren anordnet und dann abermals die Abstimmung vornimmt ". E

altrove (p. 399 n. 1): " In den meisten der livianischen Stellen ist der Ausdruck (cioè *intro vocatae tribus*) insofern denaturirt, als für das Aufrufen zur Abstimmung diese selbst sich unterschiebt und während der Aufruf an alle Abtheilungen gleichzeitig ergeht, die successive Vollendung der Abtheilungsabstimmungen sich auf das *intro vocari* über trägt. Es ist das wohl nichts als eine Nachlässigkeit des Ausdrucks „. Questa confusione tra la votazione e la *renuntiatio* è piuttosto strana: e strano è pure che Livio, se si rappresentava così male il procedimento di un comizio, non abbia avuto modo di ricredersi leggendo le descrizioni di comizi date dalle sue varie fonti e certo spesse volte con ricchezza di particolari. Infatti la votazione successiva è evidente anche nel passo sulla

2) *votazione delle leggi Licinie-Sestie* (a. 368) in VI 38. Si chiamano al voto le tribù nonostante l'intercessione dei colleghi; allora i patrizi nominano Camillo dittatore. Ma i tribuni popolari persistono e *concilio plebis indicto, tribus ad suffragium vocant. Cum dictator, stipatus agmine patriciorum, plenus irae minarumque consedisset atque ageretur res solito primum certamine inter se tribunorum plebi ferentium legem intercedentiumque et, quanto iure potentior intercessio erat, tantum vinceretur favore legum ipsarum latorumque et " uti rogas „ primae tribus dicerent, tum Camillus etc.* Se qui Livio parlasse della *renuntiatio*, non s'intenderebbe come Camillo attenda solo allora ad intervenire, e non subito tosto che i primi risultati delle tribù votanti vengono riportati al presidente. La stessa concezione delle tribù votanti successivamente informa, per quanto meno evidente per la maggior concisione del testo, anche il passo seguente:

3) Liv. XL 42, 10: *cum plures iam tribus intro vocatae dicto esse audientem pontifici duumvirum iuberent, multamque remitti, si magistratu se abdicasset, ultimum de caelo quod comitia turbaret intervenit.* Si confronti anche

4) IV 5, 2: *oportet licere populo Romano, si velit, iubere legem; an, ut quaeque rogatio promulgata erit, vos dilectum pro poena decernetis, et, simul ego tribunus vocare tribus in suffragium coepero, tu statim consul sacramento iuniores adiges et in castra educes et minaberis plebi, minaberis tribuno?* ove si sarebbe detto *vocavero* e non *vocare coepero* se l'appello delle tribù non venisse pensato come successivo.

Ora è già difficile ammettere che Livio, in punti assai diversi dei suoi annali e dipendenti da fonti diverse, abbia ripetuto lo stesso errore: ma sarebbe addirittura strano che nello stesso errore di rappresentazione fossero cadute parecchie altre fonti, di solito ben informate ed esatte, per fatti di tempi recenti.

5) Nel 67 a. C. il tribuno L. Trebellio si oppose energicamente alla rogazione Gabinia sulla guerra contro i pirati: allora Gabinio, sospesa la votazione sul suo progetto di legge, chiamò le tribù a votare l'abrogazione della potestà tribunizia di Trebellio. Questa votazione è descritta da Asconio p. 64 K. Sch. e da Dione Cassio XXXVI 30 B. e il concetto della votazione successiva delle tribù è evidente. Asconio: *quo* (*Trebellio*) *perseverante intercedere... intro vocare tribus Gabinius coepit* (e non *introvocavit* o *intro vocare iussit*, come si sarebbe detto se tutte le tribù contemporaneamente fossero state chiamate al voto), *ut Trebellio magistratum abrogaret..... Et aliquamdiu Trebellius ea re non perterritus aderat perstabatque in intercessione, quod id minari magis quam persevaturum esse Gabinium arbitrabatur; sed postquam X et VII tribus rogationem acceperunt et una modo supererat, ⟨ut⟩ populi iussum conficeret, remisit intercessionem Trebellius.* E Dione: *ὁ οὖν Γαβίνιος ἀγανακτήσας, τὴν μὲν περὶ τοῦ Πομπηίου διαψήφισιν ἐπέσχεν, ἑτέραν δὲ περὶ αὐτοῦ ἐκείνου ἀντεσῆγε. καὶ ἔδοξεν ἑπτακαίδεκα φυλαῖς ταῖς πρώταις χρηματισάσαις ἀδικεῖν τε αὐτὸν καὶ μηκέτι χρῆναι δημαρχεῖν. μελλούσης οὖν καὶ τῆς ὀκτωκαιδεκάτης τὰ αὐτὰ ψηφιεῖσθαι* (*votare*, non essendosi per *annunciare il voto* della 18ª tribù), *μόλις ποτὲ ὁ Τρεβέλλιος ἐσιώπησεν.* Per il Mommsen, abbiamo qui la solita inesattezza: Trebellio avrebbe desistito dall'intercessione dopo fatta la recitazione per 17 tribù, mentre si stava per recitare la 18ª. Ma Trebellio era là presente con Gabinio e se già tutte le tribù avessero contemporaneamente votato e i singoli risultati fossero già stati riferiti al presidente, egli doveva ben sapere che la maggioranza o la totalità delle tribù gli avevano votato contro ed era inutile attendesse la recitazione dei risultati delle prime 17 tribù per battere in ritirata.

6) La stessa procedura per una votazione sullo stesso argomento, cioè la proposta fatta da Tiberio Gracco per l'abro-

gazione della potestà tribunizia del collega M. Ottavio, abbiamo in Appiano *b. c.* I 12, 52 sg. e Plutarco *Ti. Gr.* 12. Ambedue questi autori riproducono la stessa fonte, e tutto il racconto in Appiano della rivoluzione di Tiberio Gracco è condotto con grande precisione. Tuttavia si rivolge generalmente ad Appiano l'accusa di essere qui impreciso e di aver confusa la successiva recitazione dei risultati del voto delle tribù con la votazione stessa: alcuni storici moderni anzi raccontano la scena della deposizione di Ottavio riproducendo Appiano ma riveduto secondo la trattazione del Mommsen (cfr. ad es. Greenidge *History of Rome* I p. 124). Eppure difficilmente s'intende perchè la fonte di Appiano dovesse così alterare i fatti, e tutta la drammaticità del racconto va perduta se si sostituisce alla effettiva votazione successiva delle tribù la recitazione dei singoli voti dopo avvenuta la votazione contemporaneamente. Appiano dice: *ἐπείτε γὰρ Ὀκτάουιος οὐδὲν καταπλαγεὶς αὖθις ἐνίστατο* (*intercessit*), *ὃ δὲ προτέραν τὴν περὶ αὐτοῦ ψῆφον ἀνεδίδου* (*in suffragium misit*). *καὶ τῆς πρώτης φυλῆς καταψηφισαμένης τὴν ἀρχὴν τὸν Ὀκτάουιον ἀποθέσθαι, ἐπιστραφεὶς πρὸς αὐτὸν ὁ Γράκχος ἐδεῖτο μεταθέσθαι. οὐ πειθομένου δὲ τὰς ἄλλας ψήφους ἐπῆγεν. οὐσῶν δὲ τότε φυλῶν πέντε καὶ τριάκοντα καὶ συνδραμουσῶν ἐς τὸ αὐτὸ σὺν ὀργῇ τῶν προτέρων ἑπτακαίδεκα, ἡ μὲν ὀκτωκαιδεκάτη τὸ κῦρος ἔμελλεν ἐπιθήσειν* (cfr. sopra Asc.: *ut populi iussum conficeret*), *ὁ δὲ Γράκχος αὖθις, ἐν ὄψει τοῦ δήμου, τότε μάλιστα κινδυνεύοντι τῷ Ὀκταουίῳ λιπαρῶς ἐνέκειτο . . . . . καὶ τάδε λέγων . . . . . ἐπῆγε τὴν ψῆφον. καὶ ὁ μὲν Ὀκτάουιος αὐτίκα ἰδιώτης γενόμενος διαλαθὼν ἀπεδίδρασκε.* È inutile riferire anche la versione di Plutarco, la quale però dimostra che il racconto di Appiano non è stato alterato passando d'autore in autore, ma che così stava nell'ottima fonte alla quale risalgono i tratti comuni ai due scrittori greci. Se la votazione successiva in Appiano è più evidente che mai, ciò dipende non da una maggiore imprecisione o da più grave malinteso, ma dalla precisione con la quale la fonte di Appiano si esprime in proposito.

7) Nell'87 a. C. il senato romano dovette capitolare di fronte a Mario e Cinna che assediavano la città, riconoscere Cinna come console e riaccogliere l'esule Mario in città. Al momento di entrare però, Mario, con terribile ironia, disse che

egli era legalmente bandito dalla città e che non poteva quindi entrarvi (App. *b. c.* I 70, 323): bisognava prima far approvare una legge che lo richiamasse. E così fu fatto (Vell. II 21, 6: *Cinna de recipiendo Mario legem tulit*; Dio Cass. fr. 102, 8 Boiss.; Cic. *post red. in sen.* 38; *ad Quir.* 10). Ora ecco come Plutarco *Marius* 43 racconta di questo comizio: *Μάριος δὲ παρὰ ταῖς πύλαις ὑποστὰς εἰρωνεύετο πρὸς ὀργήν, φυγὰς εἶναι λέγων καὶ τῆς πατρίδος εἴργεσθαι κατὰ τὸν νόμον, εἰ δὲ χρῄζοι τις αὐτοῦ παρόντος, ἑτέρᾳ ψήφῳ λυτέον εἶναι τὴν ἐκβάλλουσαν, ὡς δὴ νόμιμός τις ὢν ἀνὴρ καὶ κατιὼν εἰς πόλιν ἐλευθέραν. ἐκάλει δὴ τὸ πλῆθος εἰς ἀγοράν, καὶ πρὸ τοῦ τρεῖς ἢ τέτταρας φυλὰς ἐνεγκεῖν τὴν ψῆφον ἀφεὶς τὸ πλάσμα καὶ τὴν φυγαδικὴν ἐκείνην δικαιολογίαν κατῄει κτλ.* Qui è impossibile intendere che Mario pazientasse sino alla recitazione delle tribù prima di gettare la maschera: è invece evidente che, avendo cominciato le tribù a votare successivamente, egli attese solo il voto di tre o quattro e poi impaziente passò oltre.

8) Una prova assolutamente decisiva della votazione successiva delle tribù abbiamo in Valerio Massimo VIII 1, 7 per un fatto accaduto probabilmente nel 329 (cfr. Münzer in Pauly-Wissowa *R. E.* VI c. 2528 n° 19). *Q. Flavius a C. Valerio aedili apud populum reus actus, cum quattuordecim tribuum suffragiis damnatus esset, proclamavit se innocentem opprimi. Cui Valerius aeque clara voce respondit, nihil sua interesse, nocensne an innoxius periret, dummodo periret. Qua violentia dicti, reliquas tribus adversario donavit.* La votazione successiva è qui così evidente, che per rimanere coerente al suo sistema, il Mommsen dovette per questo passo fare l'inverosimile ipotesi (respinta ora energicamente anche dal De Sanctis p. 14), che i votanti potessero fino alla *renuntiatio* cambiare i loro voti (*Staatsr.* III p. 410 n. 3: dieses ist nicht wohl anders zu denken als nach vollzogener Abgabe der Stimmen während der Auszählung und der Theilrenuntiation und nur verständlich unter der Voraussetzung, dass die Wähler bis zur Renuntiation ihre Stimmen ändern konnten). Anche il Herzog (*Geschichte und System* I p. 1184), che pure ammette la votazione contemporanea, deve riconoscere che nel passo di Valerio è evidente la votazione successiva, e pensa che le tribù abbiano potuto votare successivamente quand'eran poche (al tempo del processo riferito da

Valerio erano solo 29), mentre più tardi questo procedimento avrebbe richiesto uno spazio di tempo eccessivo (cfr. anche MADVIG *Verfassung* I p. 258 n. 2). Ma di un passaggio dalla votazione successiva ad una votazione contemporanea non è traccia in alcuna delle nostre fonti: e non si vede poi come il tempo richiesto per la votazione non dovesse sembrare eccessivo per 29 tribù, lo dovesse sembrare per sole 6 di più.

9) Dopo la guerra sociale e il riconoscimento del diritto di cittadinanza agli alleati italiani, gli uomini di stato romani si preoccuparono dell'influenza che avrebbe avuto nei comizi la gran massa dei nuovi cittadini. APPIANO *b. c.* I 49, 214, in una notizia che va riferita alla *lex Iulia* (MOMMSEN *Staatsr.* III p. 179 n. 1), c'informa che si tentò di risolvere così il problema: *Ῥωμαῖοι μὲν δὲ τούσδε τοὺς νεοπολίτας οὐκ ἐς τὰς πέντε καὶ τριάκοντα φυλάς, αἳ τότε ἦσαν αὐτοῖς, κατέλεξαν, ἵνα μὴ τῶν ἀρχαίων πλέονες ὄντες ἐν ταῖς χειροτονίαις ἐπικρατοῖεν, ἀλλὰ δεκατεύοντες* (così i codd., corretto in *δέκα, δέκα πέντε, δέκα ἐνεδρεύοντες*: vd. Viereck al passo) *ἀπέφηναν ἑτέρας, ἐν αἷς ἐχειροτόνουν ἔσχατοι. καὶ πολλάκις αὐτῶν ἡ ψῆφος ἀχρεῖος ἦν, ἅτε τῶν πέντε καὶ τριάκοντα προτέρων τε καλουμένων καὶ οὐσῶν ὑπὲρ ἥμισυ.* Anche qui si accenna ad una votazione successiva, nella quale le nuove dieci tribù avrebbero votato per ultime; l'*ἔσχατοι* (cfr. DIONIS. VII 59 per il voto dell'ultima centuria nei comizi centuriati: *ἔσχατοι τὴν ψῆφον ἀνελάμβανον*) infatti esclude l'interpretazione che le 35 vecchie tribù venissero fatte votare per prime contemporaneamente e i loro voti venissero *renuntiati* e poi votassero le dieci nuove, come avveniva per le varie classi nei comizi centuriati. Quindi si ripete anche per questo passo il ritornello che Appiano *renuntiationem cum suffragiorum latione confudit* (Mendelssohn al passo): non s'intende però come tutti questi autori dovessero cadere con tanta concordia nello stesso errore. Vedremo che qui invece Appiano si riferisce specialmente ai comizi legislativi tributi, e i comizi tributi avevano importanza sopratutto legislativa.

10) Polibio VI 14, parlando della giurisdizione popolare romana, così s'esprime: *τοῖς ..... θανάτου κρινομένοις, ἐπὰν καταδικάζωνται, δίδωσι τὴν ἐξουσίαν τὸ παρ'αὐτοῖς ἔθος ἀπαλλάττεσθαι φανερῶς, κἂν ἔτι μία λείπηται φυλὴ τῶν ἐπικυρουσῶν τὴν κρίσιν ἀψηφοφόρητος, ἑκούσιον ἑαυτοῦ*

καταγνόντα φυγαδείαν. Ho riferito questo passo per ultimo, perchè assai discusso. Per il Mommsen (*Staatsr.* III p. 413 n. 4) l'espressione *ἀψηφοφόρητος* è inesatta, come è un errore parlare di *φυλή* in processi capitali da discutersi dinanzi alle centurie (*ib.* p. 357 n. 4). Per il Rosenberg (p. 68) invece il passo si riferisce ai comizi tributi, mentre il De Sanctis (p. 8) mantiene fermo il riferimento al comizio centuriato e osserva che in questo passo *φυλή* ha lo stesso valore che l'espressione *extrema tribus suffragiorum* in Cicerone *de l. agr.* II 4, che si riferisce indubbiamente a comizi centuriati. Non è mio compito discutere qui questo passo, del quale del resto il De Sanctis dà una spiegazione soddisfacente: però se si dovesse riferire a comizi tributi, è evidente che Polibio non poteva parlare di una *φυλὴ ἔτι ἀψηφοφόρητος* se non pensando ad una votazione successiva delle tribù: e che non possiamo, senza grave ragione, impugnare d'inesattezza un'espressione di quei capitoli in cui Polibio trattava della costituzione romana.

Riassumendo, dopo aver esaminati tutti i testi sopra riferiti, si rimane assai perplessi: le tribù votavano successivamente o contemporaneamente? Lo statuto di Malaga, Varrone nel *de re rustica* e Cicerone *pro Plancio l. c.* ci rappresentano indubbiamente le tribù come votanti contemporaneamente; tutti gli altri testi si spiegano invece solo con una votazione successiva. La via d'uscita si può trovare osservando che i comizi di Malaga sono disposti soltanto per l'elezione dei magistrati, mancando a loro del tutto la competenza legislativa e giudiziaria: così pure in Varrone e in Cicerone si tratta di comizi elettorali, mentre in tutti gli altri testi si parla di comizi legislativi o giudiziari. È naturale quindi pensare ad una differenza di procedura tra l'una e l'altra specie di comizi: e la differenza più importante sarebbe stata appunto, che negli elettorali si votava contemporaneamente da tutte le tribù, negli altri successivamente.

Rimane però una difficoltà. L'espressione *uno vocatu* sarebbe perfettamente a posto nella legge di Malaga per i suoi comizi elettorali; ma Dionisio VII 59 adopera per un comizio tributo giudiziario dell'età di Coriolano un'espressione che sembra l'esatta traduzione di quella contenuta anche nello statuto malacitano; nei comizi tributi, egli dice, *μιᾷ κλήσει τὴν ψῆφον*

ἐπενέγκωσι κατὰ φυλάς. E il passo di Dionisio, collegato con quello della legge, ha indotto specialmente i trattatisti a ritenere che la votazione fosse sempre contemporanea. Io invece, fra i passi testè riferiti a provare la votazione successiva e Dionisio, sto con i primi. Nessuna meraviglia che un retore costretto a lavorare su annali stesi con criteri giuridici a lui estranei e colpevole quindi di tante confusioni e inesattezze (cfr. SCHWARTZ in PAULY-WISSOWA V c. 939 sg.), abbia adoperato per comizi giudiziari un'espressione esatta in sè ma solo per i comizi elettorali. L'interminabile racconto delle vicende di Coriolano come sta in Dionisio, non può essere stato riprodotto fedelmente da una fonte romana buona conoscitrice del diritto: le discussioni in senato riferite da Dionisio si collegano assai probabilmente colla falsa teoria del *προβούλευμα* del senato prima dei plebisciti, e invece del *concilium plebis* di soli plebei, Coriolano è fatto erroneamente condannare dai comizi tributi dell'intero *populus*: Dionisio dice perfino VII 64 che se Coriolano avesse avuto 10 voti su 21 tribù sarebbe stato assolto per parità di voti! In questa erronea costruzione non fa meraviglia sia entrato a torto anche l'accenno alla *vocatio* unica delle tribù per i comizi elettorali.

Stabilita così la votazione successiva delle tribù per un determinato genere di comizi, veniamo ad altri particolari.

Com'è noto, la *praescriptio* di una legge romana portava l'indicazione della tribù ch'era stata *principium* e del primo votante *pro tribu*: *lex Quinctia* in FRONT. *de aquis* 129 (BRUNS *Fontes*[6] p. 115): *T. Quinctius Crispinus consul populum iure rogavit populusque iure scivit in foro pro rostris aedis divi Iulii pr*(*idie*) ⟨*k.*⟩ *Iulias. Tribus Sergia principium fuit, pro tribu Sex... L. f. Virro* ⟨*primus scivit*⟩: cfr. *lex agraria* 1; *lex Cornelia de XX quaestoribus*. Il *principium* è ricordato anche per i comizi curiati: LIV. IX 38, 15: *Faucia curia fuit principium*. Ora per il Mommsen il *principium* è la tribù che la sorte designava per essere *recitata* per prima dopo fatto lo spoglio dei voti di tutte le tribù che avevano contemporaneamente votato (*Stadtrechte* p. 426; *Staatsrecht* III p. 411). All'estrazione a sorte del *principium*, dopo avvenuto lo spoglio dei voti di tutte le tribù, si accennerebbe chiaramente in VARRONE *rer. rust.* III 17, 1 (comizi edilizi): *latis tabulis sortitio fit tribuum, ac coepti sunt a praecone*

recini (*recitari* Mommsen), *quem quaeque tribus fecerit aedilem*. Così pure si riferirebbe all'estrazione a sorte della *curia principium* la disposizione del c. 57 dello statuto di Malaga. Quest'opinione del Mommsen si presenta subito come assai difficilmente accettabile. Non s'intende come i Romani facessero votare tutte le tribù contemporaneamente, per trarne poi a sorte dopo il voto una qualunque dalla quale cominciare la *recitatio* e scrivessero poi nella *praescriptio* della legge che il primo votante della tribù estratta era stato il primo a votare (*primus scivit*): un po' che l'inizio delle operazioni elettorali nella sua tribù, per un incidente qualunque, fosse stato ritardato, egli poteva essere stato il 35° o il 70°, per modo di dire, a votare. Nella sua arringa per Gn. Plancio, Cicerone dice (35): *Quamquam, iudices, (agnosco enim ex me) permulta in Plancium, quae ab eo numquam dicta sunt, conferuntur*. Fra l'altro, gli si faceva colpa d'aver votato per primo la *lex Iulia de publicanis* rogata da Cesare nel 59. *Nam quod primus scivit legem de publicanis tum, cum vir amplissimus consul id illi ordini per populum dedit, quod per senatum, si licuisset, dedisset, si in eo crimen est, quia suffragium tulit, quis non tulit publicanus? si, quia primus scivit, utrum id sortis esse vis an eius, qui illam legem ferebat? Si sortis, nullum crimen est in casu; si consulis, splendor etiam Planci hunc a summo viro principem esse ordinis iudicatum*. Questo passo, sul quale anche il Mommsen (*Staatsr.* III p. 411 n. 2) s'è fermato, mi sembra inintelligibile se si accetta la sua opinione sul *principium* (Gn. Plancio doveva essere stato colui che *primus scivit* della sua tribù, ch'era stata la prima recitata — *principium* — in quella votazione). Gli avversari dovevano rinfacciare a Plancio d'essere stato il primo a votare la legge nel senso che egli aveva dato così il brutto esempio: Cicerone dice che nessun publicano poteva votare diversamente e che la sorte aveva destinato che egli fosse il primo a votare. Ma il rimprovero ha senso solo se si ammette che Plancio sia stato effettivamente il primo a votare di tutti i comizianti, non dei soli suoi *tribules*, per esser toccato in sorte alla sua tribù di votare per prima; non l'ha se si interpreta che la sua tribù fu indicata dalla sorte (o dal presidente) ad essere *recitata* per prima ed egli si trovò ad essere il primo votante della tribù designata a *principium*. Posto dalla sorte in condizione di essere il primo effettivamente

e sulla prerogativa del *principium* sono concordi molti dei trattatisti anteriori e posteriori al Mommsen (cfr. BECKER-MARQUARDT *Handb.* II 1 p. 374; II 3 p. 131 cfr. 136; LANGE *Röm. Altert.* II³ p. 483; HERZOG *System* I p. 1184; LIEBENAM in PAULY-WISSOWA IV c. 706; cfr. però c. 684 per le curie; BOTSFORD *The Roman Assemblies* — New-Jork 1909 — p. 466; mentre rimasero col Mommsen p. es. HUMBERT in DAREMBERG-SAGLIO I p. 1385; MADVIG *Verfassung* I p. 262; GREENIDGE *Roman public life* p. 259). Bisogna quindi ammettere che la *sitella* portata innanzi per l'estrazione a sorte che valeva come il primo atto del comizio (passi in MOMMSEN *Staatsr.* III p. 397 n. 1), servisse non soltanto per l'estrazione a sorte della tribù nella quale dovevano votare i Latini, ma anche per l'estrazione a sorte del *principium.* Se Livio XXV 3, 16 ricorda solo la *sortitio* per la tribù dei Latini, è perchè questa avveniva per prima, e in rapporto all'*intercessio* (della quale qui Livio parla) segnava l'ultimo momento in cui secondo le buone norme essa poteva esser fatta valere.

In quale ordine votassero le altre tribù dopo il *principium* non sappiamo; ma molto probabilmente doveva valere l'*ordo tribuum* che era fisso e generalmente osservato (vd. ad es. CIC. *de lege agr.* II 79: *quae est ista superbia et contumacia, ut populi pars amputetur, ordo tribuum neglegatur?* e cfr. MOMMSEN *Staatsr.* III p. 164 sg.). Si può ritenere che per le tribù chiamate al voto secondo l'*ordo*, si adoperasse l'espressione *iure vocatae tribus* che è in un passo di Livio (V 18, 2) che è però sospetto e che si riferisce ai comizi delle centurie. Inoltre due ipotesi si possono fare: o che le tribù venissero chiamate al voto secondo l'*ordo* cominciando dalla prima (la *Suburana*? cfr. MOMMSEN *Staatsr.* III p. 164 n. 1) e saltando naturalmente la tribù *principium* che aveva votato per prima, o che venissero chiamate secondo l'*ordo* ma cominciando da quella che veniva dopo il *principium* sino alla fine per continuare poi con le tribù che nell'*ordo* precedevano il *principium.* Noi non abbiamo elementi per decidere per l'una o per l'altra ipotesi.

Una grave difficoltà è ora presentata da un altro fatto. Lo statuto di Malaga ed altri testi mostrano che quando un candidato ha raggiunto nella *recitatio* la maggioranza dei voti, si proclama eletto; coperti tutti i posti colla *recitatio* di un nu-

votante di tutti i comizianti, diede col suo voto il cattivo esempio e ciò poteva essergli rimproverato (Cicerone lo scusa dicendo che come publicano non poteva fare diversamente); ma gli si poteva serbar rancore se, a votazione compiuta, la sorte indicò la sua tribù ad essere recitata per prima? In tal caso egli avrebbe dato il cattivo esempio alla sua sola tribù, e molti altri potevano essere incolpati della stessa cosa, mentre evidentemente qui s'intende che Plancio diede il cattivo esempio a tutto il comizio.

La *lex Clodia* del 58 sull'esilio di Cicerone portava nella *praescriptio* il nome di un tale *Fidulius*, come quello del primo votante della tribù *principium*. Se questo Fidulio non avesse effettivamente votato per primo, non s'intenderebbe come Cicerone desse importanza al fatto, accanto all'altro che in quel comizio aveva votato un branco di miserabili e di schiavi (*de domo* 79: *consulari homini P. Clodius eversa re publica civitatem adimere potuit concilio advocato, conductis operis non solum egentium, sed etiam servorum, Fidulio principe, qui se illo die confirmat Romae non fuisse*). Non solo; ma non avrebbe significato l'allusione ironica che Cicerone subito dopo (§ 80) fa alla condizione di vagabondo di questo Fidulio: *Sin autem is primus scivit, quod facile potuit, ⟨qui⟩ propter inopiam tecti in foro pernoctasset, cur non iuret se Gadibus fuisse, cum tu te fuisse Interamnae probaveris?* In altre parole: non c'è da meravigliarsi che quel Fidulio sia stato lì pronto a votare per primo, poichè egli non aveva una casa e dormiva sul foro. Il pensiero di un primo votante su tutti è ben chiaro.

Si deve quindi ritenere, contro il parere del Mommsen, che nei comizi legislativi la tribù *principium* era designata dalla sorte a votare effettivamente per prima, analogamente a quanto avveniva nei comizi centuriati ove una centuria della prima classe veniva tratta a sorte per votare per prima e il risultato del suo voto veniva proclamato subito dopo (*centuria praerogativa*: Mommsen *Staatsr.* III p. 398). Al *principium*, votante per primo, si allude nel racconto in Plutarco della votazione sulla proposta per il trionfo di Emilio Paolo (sopra p. 7: *ἡ τε πρώτη φυλὴ τὸν θρίαμβον ἀπεψηφίζετο*: cfr. Schwarze m. c. p. 56) e in quello di Appiano sulla deposizione di Ottavio (sopra p. 10: *καὶ τῆς πρώτης φυλῆς καταψηφισαμένης κτλ.*);

mero di tribù inferiore a 35, il voto delle tribù rimanenti non veniva pubblicato. Colla doppia proclamazione sostenuta dal Mommsen, si sarebbe saputo però ufficialmente quanti voti nei comizi elettorali un candidato aveva effettivamente ottenuto, e la sorte, cioè in fondo la divinità (Klebs p. 231), decideva nel caso che parecchi avessero ottenuto la maggioranza assoluta. Con la *renuntiatio* unica del Rosenberg invece, doveva accadere spesso che solo l'ultimo candidato proclamato venisse ufficialmente eletto con la sola maggioranza di 18 tribù, mentre quelli proclamati prima dovevano spesso sentir comunicare ufficialmente anche i voti che potevano aver avuto oltre i 18. Era una diversità di trattamento notevole. In ogni caso la votazione effettiva doveva essere facilmente nota appena fatto lo spoglio delle tribù votanti contemporaneamente: quantunque non s'aspetterebbe che gli annali sapessero di voti mai fatti ufficialmente noti. Ma le fonti dànno spesso il voto di tutte le tribù anche per casi nei quali la votazione doveva essere successiva e per i quali s'aspetterebbe che le tribù votassero tutte solo quando colla 34ª tribù i voti fossero ancora pari (ad es. votazione della *lex Sempronia iudiciaria* in Diodoro XXXIV 27). Invece Asconio p. 71, 27 K. Sch.: *plenissime Silanus absolutus est; nam duae solae tribus eum, Sergia et Quirina, damnaverunt.* Per alcuni passi di Livio come III 63, 11: *omnes tribus rogationem acceperunt*; XXIX 13, 7: *omnes tribus* e così XXX 43, 3; XXXVIII 54, 12 potrebbe anche valere la spiegazione che il Rosenberg (p. 71) dà dei passi ove si parla di votazione unanime di tutte le centurie, cioè che la maggioranza fu ottenuta senza alcun contrasto. Ma ci sono altri passi di Livio come questo XLIII 8, 9: *omnes quinque et triginta tribus eum condemnarunt*, o quello VIII 37, 10: *tribus omnes praeter Polliam antiquarunt legem.* Anche Ti. Gracco in Plutarco *Ti. Gr.* 15, 4 contrappone l'elezione del tribuno Ottavio avvenuta a maggioranza alla sua deposizione approvata all'unanimità: *καὶ μὴν εἰ δικαίως ἔλαβε τὴν δημαρχίαν, τῶν πλείστων φυλῶν ψηφισαμένων, πῶς οὐχὶ κἂν ἀφαιρεθείη δικαιότερον πασῶν ἀποψηφισαμένων*; viceversa la decisione che avviene effettivamente col voto della 18ª tribù è messa fortemente in rilievo da Appiano *b. c.* I 12, 54 appunto per la deposizione di Ottavio (*αὐτίκα ἰδιώτης γενόμενος*: cfr. sopra p. 10): cfr. anche Asconio p. 64 (sopra p. 9). Tut-

tavia, colla votazione successiva, non resta che ammettere che tutte le tribù votassero. Ciò che specialmente urtava la plebe nei comizi centuriati era il fatto che parte del popolo non era di solito neppur chiamata a votare: e non dovrebbe quindi far meraviglia che nei popolari comizi delle tribù, queste volessero far tutte ugualmente noto il loro voto anche dopo raggiunta la maggioranza.

La *recitatio* dei voti delle tribù secondo un ordine indicato dalla sorte, è ammessa dal Mommsen per i comizi tributi in genere; ma essa si rivela evidentemente come una particolarità dei comizi elettorali ed ha scopo solo se considerata in relazione alla necessità di determinare gli eletti fra i candidati che abbiano avuto la maggioranza assoluta dei voti e che potevano facilmente essere in numero maggiore dei posti da coprire. E infatti noi la troviamo nello statuto di Malaga e in Varrone, ove si tratta di comizi elettorali. Viceversa non si saprebbe vedere quale scopo essa potesse avere nei comizi legislativi e giudiziari, nei quali si votava solo *sì* o *no* e nei quali una maggioranza non si poteva non formare in un senso o nell'altro, dato che ogni tribù disponeva di un sol voto. È quindi ragionevole pensare che nei comizi legislativi, dopo il voto successivo delle tribù, si annunciasse senz'altro il risultato finale senza estrazione a sorte. Invece non è parola di *principium* nella legge Malacitana; e non è in generale verosimile che nei comizi elettivi si traesse a sorte una tribù prerogativa (così noi intendiamo il *principium* contro l'opinione del Mommsen), che poi fra l'altro avrebbe potuto non essere indicata dalla sorte fra le tribù il cui voto si doveva *renuntiare*: quindi si può escludere che nei comizi elettorali vi fosse un *principium*. Ciò è confermato da un passo di Cicerone sui comizi edilizi che elessero Plancio (cfr. sopra, p. 6) e che sembra, a ben leggerlo, escludere in essi un *principium* (*pro Pl.* 49): *Ain tandem? una centuria praerogativa tantum habet auctoritatis, ut nemo umquam prior eam tulerit, quin renuntiatus sit aut iis ipsis comitiis consul aut certe in illum* (*alium?* Mommsen) *annum; aedilem tu Plancium factum esse miraris, in quo non exigua pars populi, sed universus populus voluntatem suam declararit, cuius in honore non unius tribus pars, sed comitia tota comitiis fuerint praerogativa.* Se in questi comizi, nei quali pare che Plancio abbia riportato

tutte le tribù, ci fosse stato un *principium*, Cicerone, anche in relazione con quello ch'egli dice nella prima parte del periodo, avrebbe dovuto esprimersi press'a poco così: *in quo non solum exigua pars populi..... cuius in honore non unius tantum tribus pars*, cioè notare che Plancio non aveva avuto solo il voto del *principium*, l'*omen comitiorum*, ma anche quello di tutte le tribù. Invece tutte le tribù furono per lui la *praerogativa* favorevole: cioè voto contemporaneo di tutti senza *principium*.

Stabilite queste diversità di procedura fra comizi elettorali e giudiziari, una serie di difficoltà che prima potevano sembrare insormontabili (venivano infirmati numerosi passi di vari scrittori relativi a comizi) sparisce facilmente. Non crederei tuttavia (prove decisive però mancano affatto) che questa differente procedura dei comizi legislativi e elettorali sia sempre esistita da che le tribù furono chiamate a votare o sia anche soltanto molto antica. Si potrebbe pensare che il sistema della votazione contemporanea di tutte le tribù e della *recitatio* in un ordine determinato dalla sorte dei risultati *pro tribu* sia stato introdotto più tardi d'un solo tratto. L'assoluta uguaglianza che con questo sistema venivano ad avere le tribù i cui voti potevano sì avere un valore diverso a seconda che erano recitati prima o dopo, ma sempre ad arbitrio della sorte, accenna ad un periodo di avanzata democrazia, quando la differenza di dignità fra le tribù era meno sentita; perciò questo ordinamento non è forse di molto anteriore alla proposta di democratizzazione dei comizi centuriati fatta da Caio Gracco (ps. Sall. *de re publ. ord.* 2, 8). Io penserei alla democratica legge *Gabinia* sul voto scritto e segreto nei comizi elettorali approvata nel 139, pochi anni prima che si scatenasse in Roma la rivoluzione. Infatti bisogna tenere anche presente quale conseguenza aveva per la durata della procedura elettorale il voto scritto. Col voto orale, ogni votante, passando dinanzi al *rogator* (Mommsen *Staatsr.* III p. 403), pronunciava due nomi o quattro etc. a seconda dei posti da coprire coll'elezione: il *rogator* avrà segnato un punto sotto o accanto al nome del relativo candidato che egli aveva già dinanzi sulla *tabula*. Le operazioni per un centinaio, ad es., di votanti (ordinariamente le tribù non dovevano comprendere molti votanti; alle volte qualcuna era deserta e si doveva far rappresentare in altro

modo) non dovevano richiedere così molto tempo. Ben diverso era invece il caso colla *tabella*. Noi non abbiamo molti particolari in proposito (*Staatsr.* III p. 404): ma possiamo ben immaginare che la distribuzione delle *tabellae* con parecchi nomi nell'interno del *saeptum*, la deposizione nella *cista* votante per votante e poi la *diribitio*, lo scrutinio, dovevano richiedere un gran tempo. Per questo Varrone ha potuto, sceneggiando il terzo libro del *de re rustica*, immaginare che dopo la votazione gli interlocutori, per non annoiarsi, si siano recati all'ombra e lì abbiano potuto tenere un dialogo che si svolge per un libro intero prima che lo spoglio dei voti fosse compiuto.

Questa difficoltà era infinitamente minore per i comizi legislativi o giudiziari, nei quali si doveva deporre nella *cista* delle *tabellae* con espressioni assai semplici, *uti rogas* o *antiquo*, *libero* o *damno*, abbreviate in *V* o *A*, *L* o *D*, e quindi tali da potersi facilmente e rapidamente fare e ancor più rapidamente scrutinare. Ciò spiegherebbe perchè la legge Gabinia abbia ordinato diversamente i comizi elettorali, mentre invece le posteriori leggi tabellarie che estendevano il voto segreto anche agli altri comizi, conservarono per questi l'antico sistema di votazione.

Con l'introduzione della votazione contemporanea nei comizi tributi elettorali, deve essersi accompagnata l'abolizione del *principium*. La prima traccia di un comizio elettorale senza *principium* io la vedrei nelle elezioni tribunizie dell'estate del 133 (Appiano *b. c.* I 14, 60), nelle quali Tiberio Gracco si presentò candidato per la seconda volta al tribunato. *γιγνομένης δὲ τῆς χειροτονίας δύο μὲν ἔφθασαν αἱ πρῶται φυλαὶ Γράκχον ἀποφῆναι*: ma i ricchi si oppongono sostenendo che la iterazione del tribunato era illegale. Col sistema del *principium*, l'opposizione avrebbe dovuto sorgere subito dopo lo spoglio della tribù votante per prima, come si deve forse intendere nel racconto di Pisone sull'elezione di Gn. Flavio ad edile in Gellio VII (VI) 9, 2: *Gn. Flavius patre libertino natus scriptum faciebat, isque in eo tempore aedili curuli apparebat, quo tempore aediles subrogantur, eumque pro tribu aedilem curulem renuntiaverunt. Aedilem, qui comitia habebat, negat accipere* etc. (= Livio IX 46, 1: in questi due passi non è però necessario supporre, come alcuni credono, il *principium*). Nell'elezione di Gracco in-

vece, si tratta evidentemente delle due prime tribù delle trentacinque votanti, i cui scrutatori giunsero, compiuta l'opera loro prima degli altri, al presidente per riferire i risultati.

Con l'introduzione della votazione simultanea nei comizi tributi elettorali, si collega poi il fatto che poco dopo essi cominciarono ad essere convocati nel campo Marzio, ove si tenevano già i comizi delle centurie, invece che sul Campidoglio e sul Foro (vd. Mommsen *Staatsr.* III p. 380). L'ultimo comizio elettorale tributo, tenuto sul Campidoglio, a noi noto, è quello in cui trovò la morte Ti. Gracco; suo fratello Caio, dieci anni dopo, è già eletto *in campo* (*τοῦ πεδίου μὴ δεξαμένου τὸ πλῆθος*) secondo una notizia di Plutarco (*C. Gr.* 3, 1) che il Mommsen ritiene (*ib.* p. 381 n. 6) senza ragione inesatta. Per il primo secolo a. C. tutte le notizie di comizi tributi *in campo* si riferiscono a elezioni (Mommsen *ib.* p. 382 n. 3). La ragione è chiara. Nelle ristrette aree del Foro e del Campidoglio intorno al tempio di Giove, sempre più diminuite da nuove costruzioni, era difficile disporre agevolmente i *saepta* per 35 tribù votanti contemporaneamente: si richiedeva uno spazio ed un armamentario non indifferente, e perciò si pensò di utilizzare anche per le elezioni da parte delle tribù l'ampia spianata del *campus*. Io non ritengo che con l'antico sistema della votazione successiva si disponessero tanti *saepta* quant'erano le tribù: sarebbe stato perfettamente inutile. Dalle notizie degli autori (Mommsen *o. c.* p. 398) nulla si ricava in proposito: ma si può congetturare che all'invito *si vobis videtur, discedite, Quirites* (Liv. II 56, 12) i cittadini si disponessero in gruppi per tribù, e che quindi ciascuna tribù venisse mano mano *intro vocata* (cfr. Livio X 13, 11 per le centurie: *ut quaeque intro vocata erat centuria*; per le tribù XL 42, 10: *cum plures iam tribus intro vocatae dicto esse audientem pontifici duumvirum iuberent*; XLV 36, 7: *intro vocatae primae tribus*). Infatti del *discedere* e dell'*intro vocare* si parla come di due atti distinti (Mommsen *o. c.* p. 398 n. 5; 399 n. 1), mentre ciò sarebbe stato inutile se tutti i votanti avessero dovuto entrare ciascuno nel *saeptum* della sua tribù per votare contemporaneamente. È più logico quindi ritenere che per la votazione successiva si erigesse un recinto da occuparsi mano mano da una tribù dopo l'altra. Così si spiegherebbe anche come, dopo costruiti nel campo Marzio i monu-

mentali *saepta Iulia*, terminati da Agrippa nel 26 a. C., siasi continuato a convocare altrove i comizi tributi quando si trattava non di elezioni, ma di approvare delle rogazioni; la *lex Quinctia* sugli acquedotti del 9 a. C. fu votata *in foro pro rostris aedis divi Iulii* (Hülsen *Foro Romano* p. 127), come è detto nella *praescriptio* (sopra p. 14), e Valerio Probo *de iuris notarum* (*Grammatici Latini* IV p. 272) nella *praescriptio* che egli dà come tipica indica il foro come il luogo in cui regolarmente si tenevano i comizi legislativi: *P(opulum) I(ure) R(ogavit) P(opulus) Q(ue) I(ure) S(civit) I(n) F(oro) P(ro) R(ostris) E(x) A(nte) D(iem) P(ridie)*: cfr. Mommsen *o. c.* p. 383. Ora sarebbe stato assurdo di rizzare altrove un macchinamentoso edifizio di tavole e di corde per i *saepta* necessari a 35 tribù, se i *saepta* esistevano stabili e marmorei *in campo*: vuol dire che l'apparecchio richiesto dai comizi legislativi era molto più semplice.

Roma, gennaio 1914.

L'Accademico Segretario
R. Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Marzo 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Naccari, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, e Segre Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Vengono comunicati i tre seguenti inviti: 1° a contribuire alle onoranze alla memoria di Giovanni Schiaparelli; 2° a prender parte alla cerimonia che si farà a Palermo il 14 aprile in onore del Prof. Guccia, fondatore del Circolo Matematico; 3° a partecipare al Congresso internazionale di Meteorologia che si terrà a Venezia verso la metà di settembre.

Il Socio straniero Noether ha inviato in omaggio la sua commemorazione di P. Gordan.

Il Socio Parona presenta, per la stampa negli *Atti,* una Nota del Prof. L. Colomba intitolata: *Speziaite, nuovo anfibolo di Traversella.*

Vengono successivamente lette dal Socio Somigliana e dal Socio Mattirolo (anche a nome dei Colleghi D'Ovidio e Parona) le Relazioni sulle Memorie Sannia e Terracciano, presentate nelle ultime sedute. E con due successive votazioni unanimi vengono accolte quelle Memorie per i volumi accademici.

Il Socio Mattirolo trae occasione dalla Memoria Terracciano per informare la Classe come egli, continuando nelle pratiche iniziate con Michele Lessona fin dal 1891, sia giunto ora felicemente ad attuare il desideratissimo scambio dei materiali dell'Erbario Re, riguardante la *Flora Segusiensis* e la *Flora Torinese*, che si trovavano all'Università di Sassari (legati del Professore M. Reviglio), con una collezione dei doppi dell'Erbario della *Flora Sardoa* di G. G. Moris, che si conserva a Torino. Egli comunica all'Accademia l'importante notizia, lieto che finalmente i documenti che illustrano l'opera scientifica di G. F. Re siano ritornati nell'ambiente più adatto per la loro utilizzazione scientifica.

Infine il Socio Somigliana presenta una Memoria di E. Laura *Sopra il problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi*. Vengono incaricati di riferirne i Soci Naccari e Somigliana.

LETTURE

Speziaite, nuovo anfibolo di Traversella.

Nota di LUIGI COLOMBA.

Tra le formazioni di contatto più caratteristiche del giacimento di Riondello, a Traversella, sono da menzionare le pirosseniti spesso granatifere che costituiscono una parte molto importante delle grandi masse di silicati localmente indicate col nome di *porta del ferro*, perchè al di là di esse generalmente incominciano a comparire le vere formazioni metallifere.

Queste pirosseniti sono spesso anfiboliche e, come appunto si osserva nelle parti centrali della galleria indicata col nome di Ribasso Mongenet, passano a vere anfiboliti pirosseniche il cui tipo più frequente venne già descritto da A. Traverso [1]. Però, mentre in queste comuni anfiboliti pirosseniche, l'anfibolo è sempre costituito da attinoto, nelle vere pirosseniti al posto dell'attinoto è contenuto un altro minerale che, per quanto ancora riferibile, come si vedrà in seguito, al gruppo degli anfiboli monoclini, tuttavia presenta un complesso di caratteri che permettono di considerarlo come una varietà ben distinta e meglio ancora come una vera specie minerale indipendente.

A detto minerale, il cui studio forma oggetto della presente Nota, ho dato il nome di *Speziaite* in omaggio alla venerata memoria del mio compianto maestro Prof. Giorgio Spezia.

[1] " Atti della Soc. Lig. di Sc. Nat. e di Geogr. ", V, fasc. 1°.

Il modo di presentarsi di questo minerale nelle pirosseniti varia assai per il fatto che, oltre ad essere diffuso, per quanto sempre scarsamente, nella loro massa, lo s'incontra anche accumulato in alcune loro parti.

Quando è disseminato nella massa delle pirosseniti, esso non presenta, per quanto riguarda la sua frequenza e la sua ripartizione nell'interno delle pirosseniti, nulla di particolare, essendo in fibre isolate o riunite in fascetti, dotate di tinta nera o verde scurissima a luce riflessa e disseminate fra i cristalli di pirosseno. A differenza però di quanto si nota nelle anfiboliti pirosseniche della stessa località, nelle rocce contenenti la speziaite non si osservano mai cristalli di pirosseno parzialmente o totalmente trasformati direttamente in speziaite; tuttavia ho osservato in alcune sezioni di pirossenite che talvolta l'anfibolo derivante dalla parziale trasformazione del pirosseno era sotto forma di aggregati di fibre che all'estremità opposta, cioè nella parte più lontana dal pirosseno, presentavano caratteri molto prossimi a quelli della speziaite, perdendo il primitivo aspetto di attinoto; tuttavia non potendosi in tal modo escludere che la speziaite possa essersi formata a spese del pirosseno preesistente, dal complesso dei suoi caratteri di giacitura, sembra più logico concludere che essa rappresenti un minerale di formazione posteriore al pirosseno.

Quando è in accumuli questi possono essere di varie dimensioni, assumendo a seconda dei casi l'aspetto di geodi o di druse. Le prime, quando hanno piccole dimensioni sono disseminate, senza ordine alcuno, qua e là nelle pirosseniti ed hanno forme assai varie, sebbene prevalgano quelle foggiate a mandorla od a lente; in esse la speziaite apparisce in fasci di cristalli aciculari o fibrosi molto allungati ed associati a granato ed a calcite spatica, la quale, come ultimo minerale formatosi, ne riempie le cavità, avvolgendo gli altri minerali in esse contenuti.

Nelle geodi, specialmente nelle maggiori, si hanno pure talvolta cristalli pentagonododecaedrici di pirite, i quali sono specialmente visibili dove abbonda la speziaite; si osserva anzi che nelle loro vicinanze la speziaite modifica sensibilmente il suo colore passando, con gradazioni molto rapide, ad un altro

anfibolo bianco-grigiastro, non essendo raro il caso di fibre in parte costituite da vera speziaite ed in parte dal detto anfibolo chiaro, a seconda che dette parti siano lontane o vicine a qualche cristallo di pirite.

Quando invece gli accumuli formano druse, la speziaite si presenta con caratteri differenti; essa è ancora in detti casi sotto forma di fasci di fibre, ma queste compariscono nei fasci curvate a spirale, spiccando assai, per il loro intenso color bruno e per la loro viva lucentezza, sul fondo costituito da un intreccio di fibre di un anfibolo bianco-verdiccio e di clorite microlamellare verdastra, ottenendosi in tal modo un aspetto molto elegante per gli esemplari.

Anche le fibre dell'anfibolo chiaro presentano in parte le stesse curvature a spirale, essendo generalmente, in detti casi, intercalate fra le fibre di speziaite.

La speziaite è monoclina; però dal lato dei suoi caratteri geometrici poco posso dire per il fatto che per l'abito prevalentemente fibroso o puramente aciculare dei suoi cristalli, come anche per la scarsità grandissima di cristalli dotati di facce terminali, non potei ottenere che poche misure ed anche solo approssimative, rese ancora più difficili dalle esigue dimensioni dei cristalli di cui potevo disporre.

Nei cristalli di speziaite, anche quando essi hanno facce terminali, si nota sempre una grandissima povertà di forme, essendo queste esclusivamente rappresentate dalle 110, 010, 011.

La prima è costantemente presente; però mentre nei cristalli di dimensioni minori le sue facce, come anche quelle della 010 pure assai frequente, appariscono molto nitide, ciò non avviene nei cristalli più grossi; in questi la nitidezza delle facce di dette forme va diminuendo fino a scomparire completamente, essendo i cristalli, più che da un solo individuo, costituiti da un aggregato di più individui riuniti in posizione parallela.

Questo fatto, assai comune del resto in tutte le specie del gruppo dell'anfibolo, mi rese assai difficile di ottenere buone misure per l'angolo del prisma 110, non avendo potuto impiegare per tali ricerche i cristalli dotati di facce nitide in causa

della loro piccolezza; malgrado queste difficoltà ebbi da un gruppo di cristalli accuratamente scelti fra le molte centinaia che avevo a mia disposizione, alcune discrete misure che mi permisero di stabilire che l'angolo acuto del prisma 110 oscilla fra 55° 30′ e 56°.

Per quanto riguarda l'angolo β ebbi pure modo di ricavare alcuni valori, però anche meno approssimati dei precedenti, usando alcuni fra i cristalli dotati di facce terminali, appartenenti, come già ho detto, alla 011. Trattandosi di cristalli del tutto microscopici, dovetti limitarmi a compiere alcune misure coll'oculare goniometrico; scelsi a questo scopo alcuni cristalli nei quali, oltre alle facce della 110 e della 011, erano anche presenti e bene sviluppate quelle della 010 e li disposi in modo che essi venissero ad appoggiarsi sul porta oggetti con una delle facce di quest'ultima forma. In tal modo, misurando l'angolo piano fatto dalla coppia di spigoli 110 . $1\bar{1}0$ e 011 . $0\bar{1}1$, ambedue giacenti in un piano parallelo alla 010, e quindi, data la disposizione dei cristalli, al piano del porta-oggetti, potei determinare l'angolo β, essendo detto angolo uguale a quello da me misurato; trovai per esso valori oscillanti fra 73° e 74°.

La speziaite presenta a luce naturale, per trasmissione, un color verde-scuro molto intenso, per cui la sua trasparenza è sempre molto scarsa anche nei cristalli piccoli, mancando completamente in quelli maggiori, i quali, come già ho detto, assumono in conseguenza di ciò un color nero ed una viva lucentezza vetrosa tendente all'adamantina; nelle sezioni allungate si osservano al microscopio striature parallele all'allungamento dei cristalli e nelle sezioni rombiche è visibile un reticolato in cui l'angolo acuto delle maglie oscilla fra 55° e 57°; tanto le une quanto le altre dipendono evidentemente dalla presenza di una sfaldatura prismatica secondo la 110, corrispondente quindi a quella propria degli anfiboli monoclini. Ho anche notato spesso nei cristalli di speziaite una tendenza a rompersi quasi normalmente al loro massimo allungamento.

Il pleocroismo è assai intenso nelle sezioni relativamente poco sottili, mantenendosi però sempre nettamente visibile anche nelle sezioni sottilissime; in queste anzi la perfetta trasparenza lascia vedere molto bene i colori e la maggiore o minore intensità dell'assorbimento nelle varie direzioni.

Si ha:

$\mathfrak{a}$ = verde-smeraldo con tendenza talvolta al verde-giallicio:
$\mathfrak{b}$ = bruno-giallastro;
$\mathfrak{c}$ = azzurro:

essendo $\mathfrak{b} > \mathfrak{c} > \mathfrak{a}$; per quanto la differenza fra $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$ sia molto piccola.

Misurando l'angolo di estinzione sulle facce della 010 ottenni per $\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ valori compresi fra $+ 23°$ e $+ 24°$; sulle facce del prisma 110 tale angolo oscilla fra $+ 15°$ e $+ 16°$; nei cristalli policromi si nota che le parti dotate di tinta chiara hanno per l'angolo di estinzione sulle facce della 010 valori oscillanti fra $+ 14°$ e $+ 16°$.

Per il momento non ho potuto compiere altre osservazioni ottiche, in causa delle difficoltà insormontabili opposte dal materiale di cui disponevo; ho stabilito però che il piano degli assi ottici coincide col piano di simmetria. Riguardo al peso specifico della speziaite constatai che i suoi cristalli introdotti nel joduro di metilene puro, ad una temperatura di circa 12°, rimanevano sospesi nel liquido avendo però una certa tendenza a portarsi verso il basso, dimostrando in tal modo di possedere una densità molto prossima a quella del liquido. Onde avere risultati più esatti, impiegando oltre quattro grammi di sostanza, ho fatto col picnometro una determinazione diretta che mi diede il valore di 3,362.

Considerata rispetto ai suoi caratteri chimici si osserva che la speziaite, nelle ordinarie condizioni fisiche, non è decomposta che dal solo acido fluoridrico; scaldata al cannello fonde senza troppa difficoltà in uno smalto bruno che è decomposto anche dall'acido cloridrico.

Dall'analisi qualitativa essa risulta essenzialmente costituita da un silicato di ferro, calcio, magnesio e sodio, contenente anche piccole quantità di alluminio, potassio, manganese ed acqua, essendo il ferro per la massima parte allo stato di sesquiossido. Da una serie di saggi quantitativi, compiuti su

materiale accuratamente scelto e disaggregato con carbonato sodico-potassico o con acido fluoridrico, ottenni risultati assai concordanti che mi hanno portato ai seguenti valori medii centesimali:

SiO_2	36,21
Al_2O_3	0,79
Fe_2O_3	34,57
CaO	10,53
MgO	7,87
FeO	3,56
MnO	0,67
Na_2O	4,08
K_2O	0,93
H_2O	0,50
	99,71

Date le minime quantità del sesquiossido di alluminio e degli ossidi di manganese e di potassio, ho creduto utile, allo scopo di evitare formole troppo complicate, di trasformarle rispettivamente nelle corrispondenti quantità di sesquiossido e di protossido di ferro e di ossido di sodio; ho reputato però conveniente di non trascurare l'acqua per quanto anch'essa sia presente in quantità molto piccola.

Compiendo tale trasformazione per i detti ossidi e portando la somma a 100, si ottengono dai soprascritti dati analitici i valori riferiti nella prima colonna della seguente tabella, nella quale sono pure contenuti i corrispondenti rapporti molecolari:

	Composizione centesimale	Rapporti molecolari		
SiO_2	36,26	0,604		2,69
Fe_2O_3 (Al_2O_2)	35,88	0,224		1
CaO	10,55	0,188		
MgO	7,88	0,195		
FeO (MnO)	4,23	0,059	0,546	2,43
Na_2O (K_2O)	4,70	0,076		
H_2O	0,50	0,028		
	100,00			

Questi rapporti molecolari portano con grandissima approssimazione alla seguente formola greggia:

$$27\ SiO_2\ .\ 10\ Fe_2O_3\ .\ 24\ (Ca,\ Mg.\ Fe,\ Na_2,\ H_2)\ O$$

come risulta dai valori contenuti nella seguente tabella e teoricamente corrispondenti alla detta formola, quando si mantengano per i varî protossidi gli stessi rapporti:

$$CaO : MgO : FeO : Na_2O : H_2O :: 6,7 : 7 : 2,1 : 2,7 : 1$$

determinati dalle analisi:

SiO_2	36,50
Fe_2O_3	35,80
CaO	10,58
MgO	7.83
FeO	4,02
Na_2O	4,77
H_2O	0.50
	100.00

non potendo avere alcuna sensibile influenza le piccole differenze che si hanno nel tenore in silice ed in protossido di ferro.

Per cui, supponendo che il sesquiossido di ferro abbia esclusivamente funzione basica, si giungerebbe per la speziaite alla seguente formola di un ortosilicato

$$5Fe'''_4\ (SiO_4)_3 + 12\ (Ca,\ Mg,\ Fe'',\ Na_2,\ H_2)_2\ SiO_4$$

essendo pure presenti piccole quantità di K_2O, di Al_2O_3 e di MnO.

Dal complesso delle precedenti ricerche risulta che la speziaite, pur presentando caratteri specifici ben distinti, deve, come già ho detto, riferirsi per i suoi caratteri geometrici al gruppo degli anfiboli monoclini. Infatti, se si considerano i valori angolari da me ottenuti per il prisma 110 e per l'angolo β, essi sono compresi fra quelli che si hanno per i detti

angoli nelle principali specie e varietà appartenenti al detto gruppo, come risulta dalla seguente tabella che contiene alcuni fra i più sicuri valori dei detti angoli:

	110 . 110	100 . 001
Orneblenda	55° 8′ (1)	73° 58′ 15″ (1)
„	55° 32′ 36″ (2)	75° 4′ 13″ (2)
„	55° 54′ 30″ (3)	74° 35′ 24″ (3)
Glaucofane	55° 57′ (4)	73° (5)
Riebeckite	56° (1)	73° 4′ (6)
Arfvedsonite	56° 5′ (7)	73° 2′ (7)
Crocidolite	56° (1)	—
Barkevikite	55° 44′ 30″ (8)	—

Sebbene questi dati indichino chiaramente l'esistenza di un isomorfismo geometrico fra la speziaite e le sopra riportate specie e varietà, tuttavia, data la poca approssimazione delle mie misure, non è possibile di stabilire se essa presenti dal lato geometrico una qualche maggiore affinità per taluna di esse e particolarmente per quelle che, al pari di essa, sono molto ricche in ferro ed in alcali.

L'esistenza di queste relazioni è però da escludersi quasi completamente quando si tenga conto di ciò che io ottenni dalle ricerche chimiche e dalle osservazioni ottiche da me compiute sulla speziaite, risultando evidente, sia dalle une che dalle altre, quanto io ho in principio della presente nota affermato sulla impossibilità di identificare la speziaite con qualcuna delle dette specie e varietà, opponendovisi le differenze molto grandi che si notano nelle loro composizioni chimiche e nel loro comportamento ottico rispetto a quei caratteri da me determinati nella

(1) Dana, *System of Mineralogy* (1892), pag. 385.
(2) Zambonini, " Zeit. für Kryst. und Miner., XL, pag. 231.
(3) Id., " Id. „, XXXVII, pag. 369.
(4) Id., " Atti della R. Acc. dei Lincei „, Roma (1902), I, pag. 204.
(5) Klochmann, *Lehrbuch der Mineralogie* (1912), pag. 523.
(6) Sollas, " Proc. R. Irish Acad. (1895), 3, pag. 516.
(7) Brögger, " Zeit. für Kryst. und Miner. „, XVI, pag. 398.
(8) Id., " Id. „, id., pag. 412.

speziaite, cioè rispetto al pleocroismo, all'assorbimento ed agli angoli di estinzione.

Ciò è evidente nel caso della glaucofane, la quale, mentre presenta un pleocroismo ed un assorbimento del tutto differenti da quelli della speziaite, se ne allontana pure notevolmente tanto per il piccolo valore in essa assunto dall'angolo cc, quanto per la composizione chimica, non solo perchè in essa, a differenza di quanto avviene nella speziaite, è sempre in prevalenza il sesquiossido di alluminio, ma anche e specialmente perchè, in causa del suo alto tenore in silice, la glaucofane è da considerarsi come un metasilicato, mentre la speziaite, come si è visto, ha la formola di un ortosilicato.

A conclusioni analoghe si giunge considerando gli altri anfiboli sodici del gruppo della arfvedsonite, della riebeckite ecc.: anche questi, sebbene presentino in alcuni casi una notevole ricchezza in sesquiossido di ferro ed una conseguente scarsità, talvolta molto spiccata, in sesquiossido di alluminio, tuttavia mostrano differenze sensibilissime nella loro composizione chimica in confronto a quella della speziaite, per il fatto sopratutto che, pur essendo in generale centesimalmente meno abbondante la silice, tuttavia corrispondono ancora, al pari della glaucofane, a formole di metasilicati; inoltre differenze non meno importanti si hanno per quanto riguarda sia il pleocroismo e l'assorbimento che hanno nulla di comune con quelli della speziaite, sia gli angoli di estinzione i quali sono per nulla paragonabili a quello da me ottenuto per la speziaite, essendo in esse, come è noto, l'angolo cc grandissimo e prossimo a 90°.

A risultati poco dissimili si arriva confrontando la speziaite colla orneblenda e con le sue varietà, poichè anche in questo caso, se pure si può riconoscere che esista dal lato chimico una qualche maggiore affinità che non colle precedenti specie, tuttavia i caratteri complessivi si mantengono sostanzialmente distinti.

Invero, se, per quanto riguarda la composizione chimica della speziaite, il fatto che sono abbastanza frequenti nella orneblenda i tipi riferibili ad ortosilicati o che molto vi si approssimano, può lasciar supporre che esista una certa affinità di costituzione fra le due sostanze, tuttavia occorre non dimenticare come anche riguardo ai caratteri chimici si abbiano differenze assai grandi,

specialmente in quanto si riferisce ai rapporti nei quali entrano i singoli componenti nell'una e nell'altra.

Tali differenze sono pure assai grandi dal lato ottico, perchè, mentre al pari di quanto si è visto avvenire nel caso degli anfiboli ricchi in alcali, non esiste nessuna relazione fra il pleocroismo della speziaite e quello della orneblenda, ciò pure avviene per l'assorbimento, essendo estremamente rari i casi di orneblende che presentano lo stesso schema di assorbimento della speziaite.

Rispetto alle estinzioni, il fatto che i valori da me trovati per l'angolo $c\,c$ nella speziaite sono compresi fra quelli presentati per il detto angolo dalla orneblenda, lascia a tutta prima supporre che per detto carattere esistano relazioni abbastanza strette fra l'uno e l'altro minerale; ma anche in questo caso si può conchiudere negativamente se si tiene conto delle osservazioni compiute da Wjik [1] sulle variazioni del valore dell'angolo $c\,c$ negli anfiboli col variare delle quantità di sesquiossido di alluminio in essi contenute. Infatti il detto autore ha dimostrato che il valore di questo angolo aumenta nelle dette specie coll'aumentare delle quantità di sesquiossido di alluminio, per modo che i massimi suoi valori, paragonabili a quelli da me trovati per la speziaite, si hanno negli anfiboli che contengono oltre il 20 % di detto sesquiossido, il quale invece manca quasi completamente nella speziaite.

Rimane quindi in tal modo confermata la completa indipendenza della speziaite dalle altre specie e varietà costituenti il gruppo degli anfiboli monoclini e quindi la necessità di considerarla come una specie a sè.

Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

5 marzo 1914.

---

[1] Zeit. für Kryst. und Miner. .. VII, pag. 79; XI, pag. 314.

Relazione sulla Memoria del Dott. GUSTAVO SANNIA: *Caratteristiche multiple delle equazioni lineari alle derivate parziali in due variabili.*

In una precedente Memoria, pubblicata dalla nostra Accademia (S. II, vol. LXIV, 1913) il Dott. Sannia si è proposto lo studio delle caratteristiche multiple delle equazioni a derivate parziali con due variabili indipendenti. E potè compiere tale studio per le caratteristiche il cui ordine di multiplicità non supera il quarto.

Nella presente Memoria il Dott. Sannia riprende a trattare lo stesso problema, e limitandosi alle equazioni lineari, riesce a fare lo studio completo delle loro caratteristiche con qualunque ordine di molteplicità. Egli classifica le caratteristiche ν-ple in ν classi, che poi suddivide in numerosi tipi, trovandone le proprietà più notevoli. Particolarmente interessanti sono le caratteristiche di una delle dette classi, le cui proprietà si presentano come la più naturale estensione delle proprietà delle caratteristiche semplici. Per esse, come per le semplici, passano infinite superficie integrali dell'equazione.

Dopo avere studiata una caratteristica multipla isolata, il Sannia tratta dei sistemi di caratteristiche multiple ed assegna forme tipiche per quelle equazioni che ammettono non più di due sistemi di caratteristiche multiple appartenenti a classi o tipi prefissati. Ciò gli permette di arrivare ad una classificazione completa delle equazioni lineari dei primi cinque ordini, che può essere utile nella ricerca dei teoremi di esistenza delle superficie integrali delle equazioni medesime.

Questi risultati, sebbene limitati alle equazioni lineari, sono di notevole importanza, sia perchè tali equazioni sono quelle che più frequentemente si incontrano nelle applicazioni, sia perchè da essi sembra si possa ricavare qualche lume anche

riguardo al problema insoluto delle caratteristiche multiple di un'equazione qualunque. Il Sannia ritiene infatti di poter dimostrare che la maggior parte delle proprietà trovate nel caso lineare non mutino sostanzialmente nel passaggio al caso generale.

Per queste ragioni riteniamo che il lavoro del Dott. G. Sannia possa essere accolto nelle Memorie Accademiche.

E. D'Ovidio.
C. Somigliana, *Relatore.*

Relazione sulla Memoria presentata dal Prof. Achille Terracciano dal titolo: *La " Flora Sardoa „ di Michele Antonio Plazza redatta sui suoi manoscritti.*

Nell'anno 1906, io ebbi, unitamente al Professore Belli, l'onore di presentare a questa Accademia una Memoria intorno a " *Michele Antonio Plazza da Villafranca* (Piemonte) *e la sua opera in Sardegna* „. Un fortunato evento e la generosità di un pronipote del Plazza, il Signor Cav. Francesco Pacchiotti, mi avevano concesso di poter rintracciare alcuni preziosissimi manoscritti che il Plazza aveva lasciato sulla Flora della Sardegna e sulle antichità dell'Isola.

Lo studio di questi cimelii ci rivelò il Plazza sotto una luce novissima, assolutamente insospettata; ci mise in presenza di un'opera di grande importanza sulla Flora della Sardegna; e noi di questi manoscritti ci eravamo allora di proposito occupati, studiandoli da un punto di vista generale, nella Memoria presentata all'Accademia nella Adunanza del giorno 29 aprile 1906.

In detta Memoria il Belli, allora Professore di Botanica a Cagliari, si interessò dell'esame dei mss. botanici. Il Professore Taramelli Direttore del Museo di Antichità di Cagliari, e il Dott. Loddo pure di Cagliari, si occuparono di quelli riguardanti i preziosi documenti archeologici raccolti dal Plazza; mentre io mi studiai di ricostruire e di seguire la vita e l'attività scientifica del nostro chirurgo, botanico, archeologo, che visse in Sardegna dal 1748 al 1791, anno della sua morte.

Queste cose ho stimato necessario premettere all'esame del lavoro oggi presentato alla Accademia dal Prof. Achille Terracciano della Università di Sassari, perchè si potesse convenientemente valutare l'importanza dello studio al quale il Terracciano si accinse, or fa un anno, nel nostro Istituto.

Egli riprese l'esame particolareggiato del principale manoscritto botanico del Plazza (per generosa disposizione del Ca-

valiere Pacchiotti ora di proprietà dell'Istituto di Torino) e volle così completare l'opera che noi avevamo appena lumeggiata nei suoi momenti principali.

Così la " *Flora Sardoa* „ lasciataci manoscritta dal Plazza viene fuori oggi illustrata e messa in paragone colle opere posteriori che trattano lo stesso argomento, e principalmente con quella classica di Giuseppe Giacinto Moris.

Il lavoro del Terracciano, pur troppo, per ragion di tempo, finora dall'Autore ristretto allo esame delle Crittogame e delle Monocotiledoni (ma che speriamo verrà presto completato collo studio delle Dicotiledoni), è riuscito un documento interessantissimo, e molto onorevole per la storia dei botanici piemontesi. Esso ci dimostra, con nuovi documenti, quale realmente fosse stato il valore scientifico del Plazza, già da noi altamente proclamato.

Noto per il solo cenno che di lui aveva fatto Carlo Allioni nel " *Fasciculus Stirpium Sardiniæ in Diocesis Calaris lectarum a M. A. Plazza Chirurgo Taurinensi, quas in usum botanicorum recenset Carolus Allionus* „ il nome del Plazza, da tutte queste pubblicazioni, documentate colla più scrupolosa serietà di critica, balza fuori come quello di un vero scienziato.

Egli è vero che occorse più di un secolo, ed una fortunata combinazione, perchè il suo nome uscisse dall'oblio immeritato nel quale fu mantenuto, anche per l'incomprensibile silenzio che il Moris tenne su di lui e sulle opere sue; ma oggi rifulge la sua memoria di nuova luce e la sua natìa Villafranca può ben vantarsi di tale suo figliolo, perocchè l'opera sua oggi si manifesta in tutta la sua importanza, in tutto il suo alto valore scientifico.

La " *Flora Sardoa* „ di M. A. Plazza, che precorse di molti anni quella del Moris e che fu dovuta agli eccitamenti illuminati del celebre Ministro di Carlo Emanuele III, G. B. Bogino ed a quelli di Carlo Allioni, ci appare anche per un altro riguardo che non sia quello scientifico, interessante e simpatica, perocchè essa rappresenta un nuovo nobile documento di quei vincoli di fratellanza che legarono e legheranno sempre il Piemonte alla nobilissima Isola di Sardegna.

Il lavoro del Terracciano fu in parte eseguito sotto gli

occhi di uno di noi nell'Istituto di Torino (dove si conservano i cimelii del Plazza), per cui, anche per riguardo al metodo di studio seguito dall'Autore, possiamo assicurare che esso è, secondo il nostro giudizio, condotto in modo ottimo e che noi perciò lo riteniamo degnissimo di essere accolto nei volumi delle Memorie, dove già si trovano la massima parte degli studi finora eseguiti sulla Flora di Sardegna.

Torino, 1° Marzo 1914.

C. F. Parona.
Oreste Mattirolo, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Marzo 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE.

Sono presenti i Soci: Pizzi, De Sanctis, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Renier Segretario. — Scusano l'assenza i Soci: Carle, Ruffini, Stampini.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 1° marzo 1914.

Il Socio Brondi presenta un suo lavoro stampato su *La trasformazione degli istituti equiparati e l'iniziativa locale*, Milano, Soc. editr. lombarda, 1913.

Il Socio De Sanctis presenta per gli *Atti*:

1° la seconda parte di una Nota del compianto dott. Emilio Pozzi, *Studi sulla guerra civile sillana*, della cui prima parte ha fatto presentazione nell'adunanza dell'8 giugno 1913;

2° alcune proprie *Note di epigrafia ellenistica*.

A nome del Socio Stampini assente e sotto la responsabilità di lui, il Segretario offre, pure per gli *Atti*, alcune *Note di fonetica italiana meridionale* del prof. Clemente Merlo dell'Università di Pisa (*).

Sempre per l'inserzione negli *Atti*, il Socio Renier presenta uno scritto del prof. Giuseppe Manacorda intitolato *Un testo di grammatica latino-veneta del sec. XIII*.

(*) Questa Nota comparirà in una prossima dispensa.

LETTURE

Studi sulla guerra civile Sillana.

Note di EMILIO POZZI (1).

I.

I precedenti e la campagna dell'83 a. C.

La guerra nella quale Silla riuscì a distruggere il governo democratico, che era stato istituito nell'anno 87 a. C. da Cinna e da Mario, per sostituirvi la costruzione geniale, ma, per necessità fatale di cose, effimera, della propria costituzione, rappresenta un momento importantissimo nella storia della rivoluzione secolare in cui maturò il passaggio dello Stato romano dalla forma repubblicana a quella monarchica (2). Essa fu vinta

(1) Presentate nelle adunanze dell' 8 giugno 1913 e del 15 marzo 1914 [Questo saggio, la cui seconda parte s'arresta ai precedenti immediati della battaglia di Porta Collina, non è se non un frammento d'un più ampio lavoro che il giovane studioso preparava e che la morte (22 novembre 1912) gl'impedì di compiere. Chi lo presentò postumo a questa R. Accademia e ne cura ora la pubblicazione ritiene che, incompiuto com'esso è, rechi un utile contributo alla conoscenza d'un periodo oscurissimo della storia di Roma. G. De Sanctis].

(2) Mommsen, *Storia di Roma antica* (nuova vers. ital.), II, p. 257 e segg.; Ihne, *Geschichte Roms*, V, p. 370 e segg.; Drumann-Groebe, *Geschichte Roms in seinem Uebergange von der republikanischen zur monarchischen Verfassung*, II (*L. Corn. Sulla Felix*) p. 383 e segg.; Neumann, *Geschichte Roms während des Verfalles der Republik* (Breslau 1881), p. 572 e segg.; Fröhlich, *L. Corn. Sulla Felix* (Pauly-Wissowa, IV, p. 1544 e segg.). Una trattazione compiuta dell'argomento, che abbia reale valore scientifico, manca. Citerò soltanto Pr. Mérimée, *Études sur l'histoire romaine*[2] (Paris 1853), p. 155 e segg.; P. Cantalupi, *La guerra civile Sillana in Italia — Studio delle fonti* (Roma 1892); E. Linden, *De bello civili Sullano* (Freiburg 1896, Diss.); P. Cantalupi, *La*

da Silla, in nome d'un partito che rappresentava la minoranza nello Stato, contro la stragrande maggioranza democratica, col favore d'un esercito fedele a tutta prova al suo duce, ad opera sopratutto del suo genio di stratega e di diplomatico, e del suo temperamento freddo e raziocinatore, ad ora ad ora audace e prudente, sempre sorretto da una acuta e sicura visione degli avvenimenti, così come spregiudicato nella scelta dei mezzi.

Una indagine che cerchi di sviscerare dalle scarse notizie delle fonti, integrate fra di loro e interpretate reciprocamente (1), il carattere e la natura della guerra nelle sue varie fasi, ten-

magistratura di Silla durante la guerra civile (Roma, 1900), p. 53 e segg. e p. 65 e segg. Non conosco direttamente la dissertazione del Cybulski, *De bello civili Sullano* (Berlin, 1838).

(1) Sulle fonti citerò solo alcune opere principali: H. Peter, *Die Quellen Plutarchs in den Biographieen der Römer* (Halle 1865); Busolt, *Quellenkritische Beiträge zur Geschichte der Römischen Revolutionszeit* (" Fleckeisen's Jahrbücher „ vol. 141 (1890), pp. 321 e segg.; 405 e segg., dove mi pare che l'influenza di Posidonio, esattamente veduta nelle linee generali, sia erroneamente seguita nei particolari); Arnold, *Untersuchungen über Theophanes von Mytilene und Posidonios von Apamea* (" Fleckeisen's Jahrbücher „, Suppl. Bd. XIII, p. 75 e segg.); Maurenbrecher, *C. Sallustii Crispi Historiarum fragmenta* Prolegomena (Leipzig 1891); Schwartz, *Appianus* (Pauly-Wissowa, II, p. 222 e segg.); e particolarmente la magnifica memoria di E. Meyer, *Untersuchungen zur Geschichte der Gracchen* (Halle 1894), [ora riprodotta in " Kleine Schriften „ (Halle 1910), pp. 381 segg.], le cui osservazioni sono fondamentali, benchè riferentisi a un periodo di tempo limitato; E. Kornemann, rec. dello studio del Linden in " Woch. f. kl. Philol. „, 1897, p. 207 e segg.; Id., *Zur Geschichte der Gracchenzeit*, Leipzig 1903 (" Klio „, Beiheft I). Degli studiosi che si occuparono della guerra civile Sillana in particolare hanno compiuto uno studio delle fonti il Linden (op. cit., p. 1 e segg.) e il Cantalupi (*Guerre civ.*, p. 41 e segg.), l'uno e l'altro limitandosi ad esaminare negli autori i pochi capitoli relativi alla guerra stessa. Il Linden per parte sua non ha che desunto, e, direi, trascritto dallo studio del Busolt; quanto al Cantalupi, egli è giunto per conto suo a risultati affatto errati, com'io credo, ciò che era da presumersi, data la ristrettezza della base della sua ricerca. In massima io penso che possa dimostrarsi l'unità sostanziale della tradizione storica pel periodo 133-78 av. C., pur nella varietà delle tendenze degli scrittori. Converrà quindi procurarci la maggior conoscenza storica di questo periodo integrando fra loro i dati delle varie fonti. Nè questo procedimento potrà essere tacciato di antiscientifico; poichè infatti solo dove entra in campo la tesi che l'una o l'altra parte sostiene noi troveremo nella tradizione varianti notevoli.

tando di lumeggiarle nei vari rapporti così militari che diplomatici, potrà essere non inutile per una più completa conoscenza d'uno dei più geniali uomini di Roma antica. Che, se è vero che la storia non debba essere ridotta al còmpito, pur esso importante, di formare una serie di biografie degli uomini più segnalati e, diremo, rappresentativi, ma debba seguire il sorgere, lo sviluppo, il decadere dei grandi organismi sociali, rare volte come nel nostro caso potrà darsi, e a ragione, come fine d'una parziale ricerca, la più esatta conoscenza d'una personalità, poichè rare volte si presenta un caso, come quello di Silla, di una personalità, che tenta di opporsi al grande corso degli avvenimenti della storia; sì che possa dirsi, che essa formi il centro propulsore e direttivo degli avvenimenti in cui la troviamo impegnata.

Dopo la pace conclusa a Dardano con Mitridate e il suicidio di Fimbria le cui truppe passarono tutte a Silla (1), Silla

---

(1) La data della pace, e della susseguente morte di Fimbria, si ricava facilmente. Dopo la battaglia di Orcomeno, Silla devasta la Beozia, per punirla dell'amicizia verso Mitridate (App., *Mithr.*, 51) e quindi *sverna in Tessaglia* (ibid.). Le trattative di Delio, narrate nel c. 54, intavolate appena Mitridate, residente a Pergamo, ha notizia della sconfitta di Orcomeno, cadono evidentemente prima dello svernare in Tessaglia, quindi sulla fine dell'a. 86. Contemporaneamente si svolge l'azione del console Flacco e i suoi dissensi con Fimbria. Il dissenso di Flacco con Fimbria a Calcedonia o Bisanzio avvenne nell'inverno 86-5, poichè Fimbria (Dio, fr. 101-3) eccita i soldati contro il console, accusandolo di stare nel lusso in città, mentre soffrivano sotto le tende *ἐν χειμῶνι*. Nella primavera 85 pertanto si svolge la rapida e vittoriosa offensiva di Fimbria, mentre Silla, dopo la risposta di Mitridate, attende i risultati delle ulteriori trattative, per opera di Archelao (Plut., *Syll.*, 23, 3). Silla intanto guerreggia in Macedonia contro alcune popolazioni barbare (Liv., *Per.*, LXXXIII; App., 55 fine; Gr. Lic., 35 p. 35 B). Silla è ancora occupato in Macedonia quando gli giunge la dedizione che gli offre Ilium assediata da Fimbria; egli promette che verrà (App. 53). La pace a Dardano non è che la ratifica dei patti di Delio, e quindi è conclusa rapidamente. La data che le assegno è perciò il principio dell'estate 85, conforme alla comune opinione. Non so su che si fonda la cronologia del Cantalupi (*La magistratura di Silla*, p. 50-3). *Intra biennium* di Velleio, II, 23, si spiega benissimo colla morte di Flacco al principio dell'85.

poteva guardare innanzi, libero da ostacoli, alla guerra contro il governo democratico di Roma. Ma egli era troppo prudente per procedere nella lotta con indebita precipitazione. Egli sapeva troppo bene che il governo impersonato particolarmente da Cinna in Roma, aveva con sè il consenso dell'Italia e delle province occidentali. Esso aveva poi l'appoggio sicuro ed entusiasta degli antichi alleati italici di Roma, dei neo-cittadini, dei quali aveva regolato la posizione in modo pienamente conforme ai loro desideri. Quando nell'87 s'iniziò il " Bellum Octavianum ", circondata Roma dai quattro eserciti democratici di Mario, Cinna, Carbone, Sertorio, il Senato pregò Q. Cecilio Metello Pio, pretore con imperio proconsolare, che guerreggiava i Sanniti, di far pace con essi ai patti migliori possibili. Le condizioni dei Sanniti (concessione della cittadinanza a sè e ai rifugiati nel loro campo, restituzione dei loro beni e della preda) furono respinte senz'altro dal Senato come non confacentisi al prestigio dello Stato, e di questo passo del Senato approfittò Cinna, che, accordata loro pace, per mezzo del legato C. Flavio Fimbria, a tutte le condizioni che essi richiedevano, li trasse dalla parte democratica (App., I, 68; Dio, fr. 100, 7; Gr. Licin., XXXV, p. 27 B). Invano il proconsole Cn. Pompeo Strabone, accortosi del passo falso del Senato, che, sotto l'influsso dell'intransigenza del console Ottavio, aveva senz'altro troncate le trattative, facendo così l'utile dei propri avversari, aveva proposto e fatto approvare una legge, che, a quanto pare, prorogava il termine stabilito dalla legge Plauzia Papiria per la sottomissione degli Italici. La legge venne tardi, e la colpa del suo insuccesso, che la tradizione Liviana rigetta tutta sul proconsole Strabone, evidentemente toccava piuttosto chi il male, fatto ora irreparabile, aveva voluto colla sua ostinazione e il suo poco tatto politico.

Seguì la vittoria dei democratici ed allora, oltre alla cittadinanza concessa a tutti gli alleati italici, per cui erano cessate le ostilità completamente, veniva compiuta dal governo di Cinna la seconda grande riforma che gli alleati richiedevano e che solo poteva rendere praticamente utile il vantaggio della ottenuta cittadinanza, la divisione dei nuovi cittadini in tutte le trentacinque tribù, anzichè in otto, e dei libertini in tutte le tribù anzichè solo nelle quattro urbane. E la grande riforma

veniva completata col censimento compiuto precisamente nell'anno 85, nel quale veniva per la prima volta fatto il censo dei nuovi cittadini, a tutti gli effetti legali di esso (*Periochae*, LXXXIV). L'Italia era pertanto concorde nell'appoggiare il governo democratico, e particolarmente l'Etruria, dove la concessione della cittadinanza romana, aveva spezzato il ferreo giogo secolare delle aristocrazie dominanti (1). E profondamente fedele al nuovo governo era del pari la Gallia Cisalpina. Eccetto Silla, tutti gli altri avversari del nuovo regime erano o periti nelle stragi, o organizzavano qua e là piccole resistenze senza speranze di successo.

Contro questo governo, in apparenza così forte, Silla non aveva che due sussidi, il suo genio di generale e di diplomatico, e l'esercito, del quale in lunghi anni di ininterrotto comando dalla guerra marsica alla guerra mitridatica aveva coll'accorta concessione e colle lusinghe, dando alle sue truppe quelle soddisfazioni che una soldatesca suole sempre richiedere al suo generale, a volte indulgendo anche a gravi loro colpe (l'assassinio del legato L. Postumio Albino in Campania nell'a. 89), aveva formato uno strumento perfetto di azione, ligio al suo capo e a lui solo, pronto per lui a qualunque prova. Ma le sue forze erano ben misere di fronte a quelle che poteva mettere in campo il governo democratico. Egli era partito per la spedizione contro Mitridate con 5 legioni (App., *Mithr.* 30): quelle stesse forze e poco più poteva portare in Italia, poichè le legioni già di Flacco e poi di Fimbria, passate a lui a Pergamo, egli doveva lasciarle a presidio della riconquistata provincia di Asia. Per quanto, come vedremo, avesse rinforzato i suoi contingenti con leve di ausiliari Tessali e Macedoni, noi dobbiamo essere convinti, considerando le perdite da lui subite nei vari sanguinosi scontri della campagna contro Mitridate, che non più di 30.000 uomini in cifra tonda, come ci dice Velleio (II, 24, 4), egli recasse in Italia nell'a. 83. Di contro stavano le forze immense di cui poteva disporre il governo democratico, calcolate da Silla (pr. Plut., *Syll.*, 27) a 15 comandanti e 450 coorti, e cioè 225.000 uomini, o 200.000 in cifra tonda

(1) Beloch, *Der italische Bund*, p. 163 seg.

come dà Velleio (1). Questa enorme sproporzione di forze militari (ancorchè, dopo la morte del vecchio Mario, il partito avversario non possedesse un generale, che anche lontanamente potesse accostarsi a Silla; e benchè le truppe avversarie si rivelassero poi alla prova, com'era da presupporsi, nè agguerrite, nè fedeli come quelle sillane) doveva anch'essa consigliare a Silla prudenza.

E poichè intanto doveva procedere al riordinamento della provincia d'Asia e regolare le cose in Grecia, attività che, come vedremo, seppe del pari porre a servizio della sua causa, egli aprì una serie di trattative diplomatiche, che non potevano muovere in lui da una fiducia nella possibilità d'una pace, ma che intendevano introdurre un elemento di discordia nel campo avversario. In una lettera diretta al Senato, subito dopo la morte di Fimbria e la defezione del suo esercito, Silla (la data sicura in App., *Mithr.*, 60), rilevando che in ricompensa dei servizi da lui resi, i suoi nemici lo avevano dichiarato nemico della patria, avevano distrutto la sua casa, ucciso i suoi amici, sì che a stento la moglie ed i figli di lui, Silla, avevano potuto fuggire, dichiarava che contro coloro che questo avevano fatto egli sarebbe venuto subito quale vendicatore; ma agli altri, ed ai nuovi cittadini, egli non avrebbe fatto alcun male (App., *b. c.* I, 77). Questa lettera doveva produrre una grande impressione in Roma, dove i consoli L. Cornelio Cinna e Cn. Papirio Carbone, all'annunzio della pace conclusa da Silla con Mitridate a Dardano, sul principio dell'estate, avevano iniziato grandi preparativi, facendo leve, sopratutto nei territori degli alleati, cui facevano presente l'obbligo morale di aiutare un governo che per causa loro si trovava in questo pericolo. Nello stesso tempo veniva stabilita una crociera a guardia delle coste

(1) Il Cantalupi (*Guerra civ.* p. 27) ritiene che si tratti del numero complessivo delle forze messe in campo dai democratici durante la guerra. L'interpretazione che mi pare preferibile è quella data nel testo. Si confronti quanto sappiamo per la seconda guerra punica, in cui il massimo delle forze che Roma tenne in campo contemporaneamente fu di 20 legioni (negli a. 212 210, 207 a. C.) corrispondenti allora, ad effettivi completi, a 240.000 uomini, tra romani e alleati (cfr. Beloch pr. Cantalupi. *Studi di storia antica*, I, p. 48).

italiche per prevenire possibili sorprese e veniva richiamata dalla Sicilia nell'Adriatico la flotta che vi era di stazione (App., I, 76). Questa era la situazione, allorchè giunse a Roma il messaggio di Silla, ed ebbe l'effetto che l'accorto generale si attendeva. Poichè di fronte ad uomini partigiani d'una resistenza ostinata, e che comprendendo l'inevitabilità della guerra volevano combatterla nelle condizioni più vantaggiose per loro, quali, oltre ai due consoli dell'anno, C. Mario il Giovane, C. Norbano, Q. Sertorio, esisteva un forte gruppo che vedeva con terrore l'appressarsi d'una nuova terribile guerra civile coll'inevitabile seguito di stragi e di processi, e si lasciava guidare dall'illusione che una pace fosse possibile; tra essi il *princeps Senatus*, L. Valerio Flacco, e il futuro console L. Cornelio Scipione. E il messaggio di Silla era anche abile nel togliere agli avversari quella che sarebbe stata la piattaforma più atta per la loro campagna, mettendo fuori di discussione i neo-cittadini, con una frase molto generica. Abbiamo già accennato alla maniera con cui il governo di Cinna aveva risolto la vasta questione della cittadinanza agli alleati: la concessione, cioè, a condizioni onerose per lo Stato romano, della cittadinanza ai ribelli ancora in armi nell'a. 87 a. C. e la assegnazione dei nuovi cittadini e dei libertini in tutte le tribù. Quest'ultima disposizione, come vedremo da accenni ulteriori (Liv., *Periochae,* LXXXVI), Silla non volle oppugnarla: essa era una concessione che era stata richiesta con tanta ostinazione e accolta con tanto entusiasmo dagli Italici, che il combatterla gli avrebbe moltiplicato dinanzi la resistenza; e perciò non lo fece neppure più tardi nel corso della guerra; tanto più che oramai essa era cosa compiuta, essendo stata introdotta nel censo dell'85 a. C. Piuttosto egli fu sempre avversario della concessione fatta da Cinna ai ribelli Sanniti e Lucani, la stessa che il Senato aveva respinto, come indegna del nome romano. Ma per ora ne dovette tacere, aperta la via per l'avvenire con qualche frase di valore ambiguo; l'anno seguente però, allorchè vincitore a Sacriporto si ritenne sicuro dell'esito della campagna, egli cominciò a mostrare chiaro il suo pensiero al riguardo, coll'uccisione dei prigionieri fatti nella battaglia, sistema che poi seguì nel corso della guerra con quella logica fredda e implacata nella crudeltà che forma una delle caratteristiche di quest'uomo singolare. Di qui

la terribile sollevazione dei Sanniti e Lucani, guidati da Ponzio Telesino e M. Lamponio, e la ferocia senza pari della lotta dinanzi alla porta Collina; di qui le stragi dei Sanniti che seguirono la battaglia e la resa di Preneste.

Naturalmente dal messaggio di Silla, che tendeva a ridurre il dissenso profondo di idee e di programmi esistente fra lui e il partito democratico a una questione personale, aprendo per giunta una porta di salvezza a molta gente semi-compromessa, che sperava in questo modo di togliersi dagli impicci senza troppa difficoltà, ebbero buon giuoco i membri del partito della pace, che poterono accusare i consoli Cinna e Carbone, di avversare le trattative, perchè per i loro speciali interessi dovevano desiderare la guerra. E la proposta di inviare messi a Silla per la pace, dopo un discorso del *princeps Senatus* L. Valerio Flacco, venne approvata. Proponeva il Senato che Silla deponesse l'esercito, e che delle sue controversie cogli avversari lasciasse giudice il Senato, che a lui (e agli altri esuli) avrebbe garantito la sicurezza personale. Intanto venivano invitati i consoli a sospendere gli armamenti (App., *ibid.*; *Periochae*, LXXXIII).

Nello stesso tempo (fine dell'estate 85 a. C.) Silla riordinava la provincia d'Asia: premiate le poche città rimaste fedeli a Roma, Ilio, Chio, Rodi, Magnesia e la confederazione Licia, le altre ebbero tutte un presidio. Quindi in un proclama, dato da Efeso, stabiliva per la provincia il pagamento di 5 anni di tributo (= 20.000 talenti, e cioè 120 milioni) più il pagamento delle spese di guerra e di quelle per il riordinamento della provincia stessa; inoltre i disgraziati abitatori dell'Asia dovevano alloggiare a loro spese le truppe di Silla e pagare loro doppio soldo (App., *Mithr.*, 61-3; Plut., *Syll.*, 25, 3). Le enormi contribuzioni che Silla, secondo la sua caratteristica mancanza di riguardo nella scelta dei mezzi, imponeva alla provincia, quasi non fosse già stata saccheggiata abbastanza dai pubblicani, e poi dai cavalieri per la legge di C. Gracco, mostrano che egli non aveva mutato pensiero rispetto alla guerra. Egli la riteneva, come aveva sempre pensato, inevitabile, e mandava innanzi, di pari passo colle trattative, la preparazione militare. Ed infatti la risposta che egli dava agli inviati del Senato mostrava chiaramente il suo pensiero. Egli non sarebbe mai stato amico di

coloro che s'eran macchiati di siffatte colpe (i capi del partito democratico): ma se la città si fosse interposta per la loro salvezza, egli non avrebbe mancato di riguardo ad essa. Quanto alla sicurezza personale, egli poteva sempre assicurarla agli esuli che erano nel suo campo, avendo l'esercito favorevole. Chiedeva poi al Senato la restituzione degli onori, dei beni e delle dignità a sè e agli altri esuli, e inviava suoi ambasciatori, insieme con quelli senatorii, a presentare le sue proposte al Senato (App., I, 79; *Periochae*, LXXXIV). In complesso Silla delle condizioni del Senato respingeva precisamente quella che formava il punto essenziale delle proposte, lo scioglimento dell'esercito, e chiedeva senz'altro la reintegrazione degli esuli nei loro diritti dando una ambigua promessa rispetto ai capi del partito avversario.

Questi intanto non stavano inattivi. Non appena partiti i legati di Silla, essi avevano ripreso, contro il divieto del Senato, i preparativi militari. L'idea di Cinna era precisamente di evitare lo sbarco di Silla in Italia, dove le sue forze scarse avrebbero trovato largo appoggio da parte di tutti i malcontenti del nuovo regime, portando la guerra in Grecia. A tale scopo la flotta e un importante corpo d'esercito venivano concentrati ad Ancona, donde il passaggio poteva avvenire più facilmente senza contrasto del nemico, perchè troppo lontano da poter accorrere in tempo (1). Per ciò fare i consoli alla partenza da Roma convocavano anticipatamente i comizi consolari, per non essere costretti a ritornare dopo breve tempo e si facevano rieleggere per l'anno seguente, quindi si recavano presso l'esercito. Sul principio dell'anno 84 a. C., non appena si pensò che l'imbarco

(1) La località di Ancona è data da [Aur. Vict.], *De vir. illustr.*, c. 69 4. È noto il falso che ritroviamo a questo riguardo in Plut., *Pomp.*, 5, come pure in Dione Cassio (pr. Zon., X, 1) che però quasi nessuno ha accolto come verità storica. Piuttosto è singolare a questo punto l'economia dell'opera Liviana, come ci appare in *Periochae*, LXXXIII. In questo libro, narrandosi i fatti dell'a. 85 a. C., viene introdotta una parentesi sui fatti di Roma tra i preparativi di guerra dei consoli Cinna e Carbone posteriori alla pace di Dardano (estate 85) e la morte di Cinna (a. 84), e ciò dopo la narrazione dell'impresa di Fimbria; e *prima* della pace di Dardano. Che la morte di Cinna sia avvenuta nell'a. 84, sappiamo sicuramente e dai *fasti Capitolini*, e da Oros., V, 19, che lo dice in questa occasione " consul *quartum* ".

potesse farsi con sufficiente sicurezza, si cominciò a far traghettare il mare ai soldati del corpo di spedizione. Le prime navi approdarono felicemente, ma quelle sopraggiunte più tardi furono colte da una violenta tempesta e in parte affondate. Nei soldati che stavano in Ancona a questa notizia scoppiò una sommossa. Cinna avendo tentato di costringerli colla forza a imbarcarsi sulle navi, venne ucciso. Allora il console Carbone, vedendo impossibile per l'indisciplina dei soldati la spedizione in Oriente, richiamò le truppe già sbarcate in Dalmazia. L'offensiva dei democratici fuori d'Italia, era così troncata prima di nascere. Carbone richiamato a Roma dai tribuni della plebe a nominare il cons. *suffectus*, in luogo di Cinna, dopo aver a lungo indugiato con vari pretesti, alla fine costretto si recò a Roma, ma colse a pretesto che un fulmine era caduto sul tempio della Luna e di Cerere, per far rimandare, secondo il consiglio degli aruspici, le elezioni stesse ad oltre il solstizio di estate. E così egli restò per tutto l'anno solo console (App., I, 78 e le altre fonti) (1).

(1) A questi precedenti della guerra civile non è stata data di solito dagli storici moderni l'importanza che ad essi compete. Solo P. Cantalupi (*La magistratura di Silla*, p. 53 e segg.) li ha fatti tema d'un'indagine particolare, che non mi pare nè troppo acuta, nè esatta. Egli vede in queste trattative di Silla apparire " l'uomo d'ordine, logico e risoluto, consapevole del grave momento che la repubblica attraversa ai segni che se ne manifestano, consapevole della crisi alla quale tenta porre rimedio colle idee conciliatrici pur non mancando di tenersi pronto a una possibile e necessaria azione di forza, consapevole dei bisogni che la repubblica ha di riordinamento, profondamente irritato delle responsabilità che per la guerra si erano assunte il console Scipione e Norbano, etc. " (p. 62). Per me invece Silla, da uomo politico accortissimo qual'era, non dubitò mai un istante dell'inevitabilità della guerra, come pure avevano fatto i capi democratici, mentre politici di corta vista erano proprio quei membri del partito della pace, che avevano la prevalenza in Senato. Certo, come dice il Cantalupi (p. 61), la condotta abile e prudente di Silla era riuscita a far cadere la responsabilità della guerra sul governo democratico, e questo è una prova della sua grandissima accortezza diplomatica; ma l'accusa d'insipienza che il Cantalupi muove a questo governo (ibid.) non tocca i capi del partito, che da Cinna a Carbone e a Sertorio non vollero sentir parlare di pace, bensì proprio il Senato, a cui pare che il Cantalupi dia lode dell'iniziativa. Che la guerra fosse inevitabile lo dimostrò il furore spaventevole con cui divampò l'anno 82. E questo furore (e particolarmente l'episodio culmi-

In queste condizioni di cose, a Roma giunsero coi messi del Senato gli inviati di Silla. Ma questa volta le trattative erano destinate immediatamente a fallire. Infatti gli inviati Sillani non avevano alcun desiderio che si venisse ad un accordo, poichè pensavano che se la guerra doveva essere, come infatti era realmente, inevitabile, si doveva approfittare di questo momento di confusione in cui il partito democratico veniva privato inopinatamente del suo capo riconosciuto e rispettato (1).

---

nante di quell'anno, la sollevazione dei Sanniti e dei Lucani) avrebbe dovuto mostrare al C., coll'esperienza storica alla mano, che per un contrasto ben più profondo di idee e di tendenze si combatteva, che non fossero i dissidi personali tra Carbone e i suoi e Silla. Un particolare. Che Silla coll'esercito potesse avanzare fino a Roma (p. 57), mentre coll'estensione della cittadinanza agli Italici territorio romano era divenuta tutta l'Italia, questo può dirlo il C., ma deve ricordare che di diverso parere era il governo democratico che nell'83 a. C., appena conosciuto lo sbarco di Silla a Brindisi, affidava il noto potere straordinario ai consoli col *SC. ultimum*. È segno che del conferimento della cittadinanza all'Italia erano state tratte tutte le conseguenze, e che non si può affermare il contrario, come fa senza prove, il C.

(1) Mi sono permesso di contaminare le narrazioni di App., I, 79, e *Periochae*, LXXXIV, che, riferendosi ai medesimi fatti, sono apparentemente diverse. Secondo Appiano, i legati da Silla inviati a Roma, insieme coi legati del Senato di ritorno, a presentare le sue condizioni *εὐθὺς ἀπὸ τοῦ Βρεντεσίου, Κίνναν τε πυθόμενοι τεθνάναι καὶ τὴν πόλιν ἀδιοίκητον εἶναι, πρὸς τὸν Σύλλαν ἀνέστρεφον ἄπρακτοι*. La Perioca non ha nulla di questo. Riferita la risposta di Silla al Senato, prosegue: " quae condicio cum iusta senatui videretur, per Carbonem factionemque eius, cui bellum videbatur utilius, ne conveniret effectum est ". Ho ritenuto che in Appiano vi fosse un errore di riassunto assai comprensibile; e cioè che egli, avendo letto nella sua fonte che i legati di Silla, appresa a Brindisi la morte di Cinna, non cercarono di spingere innanzi le trattative troppo alacremente, e in breve ritornarono [da Roma, s'intende] *ἄπρακτοι*, ne abbia dedotto che essi ritornarono da Brindisi senz'altro. La mia opinione non deriva da vaghezza di conciliare gl'inconciliabili, bensì dal fatto ch'io ritengo assai grave, che se i legati di Silla avessero commesso l'errore di abbandonare l'incarico avuto, giunti a Brindisi, anzitutto non si sarebbe avuta quella forte tendenza per la pace, che Livio ci mostra, nelle trattative, e queste sarebbero state singolarmente esautorate; in secondo luogo, la colpa del fallimento delle trattative stesse e quindi della guerra non avrebbe potuto da nessun accorgimento esser allontanata da Silla, e questi non avrebbe potuto seguire la direttiva che invece sempre tenne, e che

Non dunque per colpa della frazione Carboniana, come vuole la tradizione, fallirono le trattative, ma piuttosto perchè nessuno, salvo i membri del partito senatorio, aveva interesse a proseguirle. Certo, il partito di Carbone approfittò delle circostanze per prendere sicuramente la direzione del governo, e per dargli quella unità di indirizzo che era venuta a mancare in seguito all'iniziativa poco felice del Senato. Poichè in questi tempi Q. Cecilio Metello Pio pretore con imperio proconsolare durante la guerra sociale, e poi richiamato a Roma alla difesa della città contro i democratici durante il " Bellum Octavianum ", riunitosi con altri proscritti, tra cui M. Licinio Crasso, il futuro triumviro, reduce dalla Spagna in cui s'era tenuto nascosto sin che gli giunse la notizia della morte di Cinna (Plut., *Crass.*, 6), aveva tentato una sommossa in Africa, ed era stato respinto dal pretore della provincia C. Fabio Adriano, essi ottenevano che fosse emesso un *senatus-consultum*, di contenuto generale, che veniva a colpire particolarmente Silla, e che in coerenza col principio fissato dal Senato nelle trattative precedenti, stabiliva: *ut omnes ubique exercitus dimitterentur* (*Periochae*, LXXXIV). Era ormai la rottura: e mentre da un lato il console Carbone proseguiva le leve nell'Italia settentrionale, cercando di assicurarsi con ostaggi la fedeltà delle ricche e grandi colonie latine della valle del Po, procedimento che apparve illegale al Senato, che perciò vi si oppose (*Periochae*, *ibid.*; cfr. Val. Max., VI, 2, 10); dall'altro lato Silla il quale sul principio dell'a. 84 s'era da Efeso, con tutte le sue forze, trasferito ad Atene per osservarvi meglio, più da vicino la piega degli avvenimenti (Plut., *Syll.*, 26) (1) (dopo aver lasciato in Asia le due legioni di Fimbria sotto il comando del legato L. Licinio Murena) ed aveva atteso l'esito dei negoziati di Roma in Atene e ad Aedepsos, nell'Eubea settentrionale, dove si era recato a curare la gotta, avuta notizia del fallimento delle

gli fu politicamente utilissima, di far le viste d'esser sempre stato contrario alla guerra stessa ed esservi stato costretto contro voglia.

(1) La data si deduce da Cassiod., che sotto i coss. dell'84 a. C. ha " *His coss. Asiam in XLIIII regiones Sulla distribuit* ", dal che si apprende che parte di quell'anno Silla rimase ancora occupato ad Efeso, nel riordinamento dell'Asia.

trattative, apriva leve per corpi ausiliari nella Tessaglia e nel Peloponneso e dava tutte le disposizioni necessarie per il passaggio in Italia sul principio dell'anno seguente.

Sul principio dell'anno 83, Silla che probabilmente aveva sulla fine dell'anno precedente concentrato le sue forze nella Macedonia meridionale, e in essa aveva svernato, moveva colle sue forze per la via *Egnatia* diretto a Dyrrachium. Lo stesso obiettivo aveva assegnato alla flotta, forte di 1200 navi tra onerarie e da guerra, in cui erano comprese le 70 consegnate da Mitridate, la quale dal Pireo, circumnavigando il Peloponneso doveva toccare Patrae e di qui trovarsi a Dyrrachium per trasportare e scortare l'esercito (1). Al principio della buona stagione l'esercito di Silla sbarcava di sorpresa a Brindisi (App., I, 79; Plut., *Syll.*, 27; Vell., II, 24; Liv., LXXXV; Eutrop., V, 7), dove nessuna resistenza era preparata. Un'operazione importantissima era compiuta. Le forze di Silla contavano 5 legioni italiche, 6000 cavalieri, più ausiliari Peloponnesiaci e Tessali, un totale, a quanto si vede, di 40.000 uomini, ad effettivi completi, così come lo calcola Appiano: ma effettivamente non poteva essere superiore a 33 o 34.000 uomini, sì che realmente possiamo considerare esatta la cifra di Velleio, II, 24, 4 (da Livio, e quest'ultimo evidentemente da Silla), che parla in cifra tonda di 30.000 uomini. Questo contingente si andava via via accrescendo di fuorusciti, che si univano di mano in mano a Silla, portandogli l'appoggio dei loro aderenti, di manipoli di soldati, di *familiae* di schiavi. Così M. Licinio Crasso, che si era congiunto con Metello in Africa, e poi se n'era diviso per discordie scoppiate tra loro, aveva raggiunto Silla forse ancora a Dyrrachium (Linden, p. 33; Plut., l. cit.); Metello Pio stesso, sconfitto in Africa, colle poche forze che gli restavano si era congiunto con Silla, dopo il suo sbarco a Brin-

(1) App., I, 79 dà il numero delle navi in 1600: ho scelto il numero minore, senza però troppa fiducia d'aver colto nel segno. La fusione dei dati di Appiano con Plut., *Syll.*, 27, proposta dal Linden (op. cit., p. 33) mi par buona.

disi (App., I 80) (1); M. Licinio Lucullo, fratello del legato di Silla durante la guerra Mitridatica (Plut., *Syll.*, 27; Vell., II, 28), L. Marcio Filippo (*Per.*, LXXXVI), Cn. Cornelio Dolabella (Plut., *Syll.*, 29); e poi i primi disertori dal campo nemico P. Cornelio Cetego (App., l. c.), che già era stato uno dei dodici banditi da Silla nell'88 a. C., in seguito alla rivoluzione Sulpicia. C. Verre, già questore del console Carbone (Cic., *Verr.*, I, 2, 38), Q. Lucrezio Ofella (Vell., II, 27, 6). E del pari come tale dovrebbe considerarsi, benchè la tradizione tenti di nasconderlo quanto più le è possibile, Cn. Pompeo, figlio del vincitore di Ascoli Cn. Pompeo Strabone, che colla sua condotta incerta tra i due partiti nel " Bellum Octavianum " si era acquistata viva avversione ed era morto durante la guerra (87 a. C.); il figlio aveva avuto salvo il patrimonio, dopo la vittoria democratica, per intervento di Cn. Papirio Carbone il futuro console (Val. Max., V, 3, 5), e nell'a. 84, se almeno questo può trarsi dall'aneddoto di Plutarco (*Pomp.*, 5), militava nell'esercito di Cinna ad Ancona. Alla notizia della venuta di Silla, Pompeo lasciata Roma si recava nel Piceno, pieno di clientele paterne, vi coscriveva una legione e con essa raggiungeva Silla (cfr. per le forze di Pompeo sopra p. 659). Aumentate così le proprie forze, in cui dava un comando pari al suo a Q. Metello Pio, Silla per la via Appia (Brundisium-Tarentum-Beneventum) moveva verso la Campania (2). Poichè il punto di vista di Silla nella guerra attuale era sempre che egli la combatteva costretto, ed egli ne rigettava la colpa su pochi agitatori (i capi del partito democratico); perciò aveva astretto i soldati, al momento della sua partenza da Dyrrachium, a un singolare giuramento di ubbidienza, obbligandoli a non devastare, senza ordine suo, i territori dei popoli Italici (Plut., *Syll.*, 27). Conseguentemente la marcia di Silla attraverso l'Apulia e il paese degli Irpini fu contras-

(1) La correzione del Linden, p. 34 e n. 29 (p. 57), in Appiano, di *ἐν Λιγυστίδι*, in *ἐν Λιβυστίδι*, è ottima, e fu giustamente accolta dal Viereck nell'ed di Appiano.

(2) L'itinerario è noto con sicurezza sulla scorta dei luoghi dove son riferiti essere avvenuti i prodigi narrati da Silla (pr. Plut., *Syll.*, 27). Uno di questi, § 6, presso Tarentum, un altro, § 11, a Silvium, in Apulia.

segnata (come dice Velleio, II, 25) da un singolare riguardo avuto per i campi e i beni delle popolazioni.

Frattanto, alla notizia, giunta improvvisa a Roma, dello sbarco di Silla a Brindisi, il governo di Roma rispondeva col *SC. ultimum* (Exup., 7) dando ordine ai due consoli, Scipione e Norbano, di muovere contro Silla. La forza totale delle milizie democratiche allora sotto le armi sommava, come ci informa Appiano (I, 82), a 200 coorti di 500 uomini, cioè un totale di 20 legioni e di 100.000 uomini, naturalmente in cifra tonda e sui quadri. Queste forze erano presumibilmente distaccate in varie parti; un primo nucleo di 8 legioni distinte in due eserciti consolari (Floro, II, 9, 18; cfr. Plut., *Syll.*, 28) fu inviato immediatamente a fronteggiare Silla. Il console Norbano avanzò per la via Appia fino alla nuova colonia di Capua; il console Scipione d'altra parte procedeva per la via Latina. Ma le mosse dei democratici non giunsero a tempo, perchè intanto Silla aveva già occupato la posizione importantissima di Beneventum: ed allora presero il consiglio pericoloso di operare separatamente per ovviare alle due possibili vie di avanzata di Silla: il console Norbano, facendo base di operazioni Capua, fortificò i passi delle *Furculae Caudinae*; il console Scipione da Venafrum guardava il corso dell'alto Volturno e la via Latina.

Successe quanto era inevitabile. Silla approfittando della divisione delle forze avversarie, si gettò con tutto l'esercito su Norbano, tentando di isolarlo e di staccarlo dal collega. Anzichè assalirlo di fronte, nelle sue posizioni sulla via Appia, egli le girò di fianco, e si avanzò sulla via *Caiatia* — *Castra Hannibalis* e (passando il Volturno) *Capua*, dandogli battaglia presso il santuario di Diana, sul monte Tifata, che sorge appunto a metà strada tra le due località a N-N-E di Capua (1) (Plut.,

(1) La località precisa e i precedenti della battaglia sono stati veduti esattamente dal Linden (n. 34 p. 58). Per il noto fatto che in Appiano sia nominato, come luogo della battaglia, *Κανύσιον*, rimando alla più recente raccolta del materiale pr. Linden, ibid., avvertendo che credo si tratti d'una svista d'Appiano per *Καστλῖνον* (= Capua moderna), vicino alla quale realmente la battaglia fu combattuta. Non è un errore di riassunto, in cui Appiano abbia ripreso un nome ricordato prima dalla sua fonte come una delle tappe della marcia di Silla. Questi infatti non passò per Canusium.

Syll., 27; App., I, 84; Oros., V, 20, 2; Eutrop., V, 7; Flor., II, 9, 19., Vell., II, 25; Liv., *Per.*, LXXXV). Dopo uno scontro accanitissimo Norbano fu ricacciato dalle sue posizioni e costretto a rinchiudersi in Capua; che venne bloccata da Silla (App., I, 84; la località esatta in Velleio, II, 25, 4). Le perdite, intorno alle quali discordano le nostre fonti, non dovettero però essere di troppa gravità (1).

Alla notizia del pericolo del proprio collega, il console L. Cornelio Scipione da Venafro passava a Teano e di qui scendeva rapidamente in soccorso di Norbano rinchiuso in Capua. La posizione di Silla, con 6 legioni soltanto, di fronte agli avversari forti di 8 legioni, in pericolo di essere assalito da due parti, si faceva grave. Una circostanza fortunata lo salvò. Il console L. Corn. Scipione e molti dei comandanti dell'esercito erano sempre dell'idea che fosse stato un errore il rompere le trattative che il Senato aveva iniziato con Silla; e perciò mal volentieri conducevano una guerra che non reputavano necessaria. Avvertito di queste disposizioni del campo nemico, Silla, che con una parte delle sue forze (20 coorti) si era avanzato per sbarrare il passo all'esercito consolare, come già aveva fatto, senza successo, col console Norbano prima della battaglia al monte Tifata (Liv., *Periochae,* LXXXV; Vell., II, 25), così fece pro-

Incidentalmente e senza discutere ricordo P. Cantalupi (*La magistratura* etc., p. 71) che ammette uno scontro a Canusium, differente da quello del Tifata (!).

(1) Le perdite di Norbano sono secondo Appiano e Eutropio 6000 uomini, per Plutarco e Orosio 7000; secondo Eutropio e Orosio ancora 6000 prigionieri. Le perdite di Silla, secondo Appiano 70 morti e molti feriti, secondo Orosio e Eutropio 124 morti. Le redazioni appaiono diverse, anche nelle fonti che sappiamo con sicurezza ridursi a Livio. La differenza si spiega in questo punto, come nei casi analoghi, nel senso che Livio doveva dare, delle perdite, diverse relazioni, citando i vari autori, e gli epitomatori hanno scelto tra queste. Certo non possiamo, per quanto sappiamo degli avvenimenti successivi, ammettere anche approssimativamente le perdite di 6 o 7000 + 6000 = 12 o 13.000 uomini per Norbano. Chi ci spiegherà allora come con 7 o 8000 uomini Norbano abbia tenuto testa con successo a Silla, forte, dopo la dedizione dell'esercito del console Scipione, di 10 legioni? Conglobiamo pertanto i prigionieri nella cifra totale delle perdite 6000 o 7000, ritenendo ancora quest'ultima assai esagerata. Non molto minori devono essere state le perdite di Silla.

poste al console Scipione per riannodare le trattative di pace, interrotte l'anno precedente. Mostrava evidentemente Silla che egli si era indotto alla guerra solo contro volontà, perchè costrettovi dagli avversari. E ora, pure già vittorioso una volta d'un esercito consolare, si induceva ad accordi collo stesso spirito di conciliazione che per l'innanzi.

Fu pertanto stabilito un armistizio generale (sicuramente esteso anche al console Norbano a Capua), e a tre delegati per parte fu deferito l'incarico di trattare. Un passo importantissimo di Cicerone (*Phil.*, XII, 27) ci attesta che nella discussione si decise *de auctoritate Senatus, de suffragiis populi, de iure civitatis.* Tanto più sentiamo dolorosa la mancanza in Cicerone, e ciò si comprende per la menzione del tutto incidentale che ne è fatta, d'una parola sul risultato di questa discussione stessa; perchè, e ciò è indubitato, si trattava d'una vera pace che il console Scipione aveva già sottoscritto, e per cui veniva inviato Q. Sertorio al console Norbano in Capua, per ottenere anche la sua approvazione; e come una pace vera e propria, violata dai propri avversari, la considerò Silla, che stabilì il fondamento legale delle proprie proscrizioni, nell'anno seguente, precisamente in questo (App., I, 95): che egli non avrebbe risparmiato alcuno dei suoi nemici; di più avrebbe punito colla forza (*μετελεύσεσθαι κατὰ κράτος*) *τοὺς στρατηγοὺς ἢ ταμίας ἢ χιλιάρχους ἢ ὅσοι τι συνέπραξαν ἄλλοι τοῖς πολεμίοις, μεθ' ἣν ἡμέραν Σκιπίων ὁ ὕπατος οὐκ ἐνέμεινε τοῖς πρὸς αὐτὸν ὡμολογημένοις.*

Ma questa maniera di condurre la guerra suscitava una vivace indignazione nel campo dei democratici, in cui si lamentava che *τὰ μὲν ἀνανδρίᾳ καὶ μαλακίᾳ τῶν στρατηγῶν ἐφθείρετο, τὰ δὲ οἱ προδιδόντες ἀπώλλυσαν*, e particolarmente si lamentava che gli avvenimenti prendessero una piega pericolosa *διὰ τὸ χεῖρον φρονεῖν τοὺς μᾶλλον δυναμένους* (Plut., *Sert.*, 6) precisamente per la tendenza favorevole alla pace, di cui abbiamo parlato. Partecipe di questa indignazione era nel campo di Scipione il suo valoroso legato Q. Sertorio, il quale aveva tentato invano di distogliere il console dagli accordi con Silla. E a lui si riconduce, o almeno Silla e la tradizione che da Silla procede (Plut., App., ed evidentemente anche Livio, come appare dalla *Periocha*) hanno ricondotto, la responsabilità della rottura

della pace. Ma è evidente che non era se non un pretesto di Silla per rompere le trattative, dato che nel frattempo abili suoi emissari, inviati nell'accampamento avversario, avevano saputo attrarre la maggior parte dell'esercito alla causa Sillana. Mentre si svolgevano le trattative, Silla era riuscito a guadagnare a sè la colonia latina di Suessa sulla via tra Teanum e Minturnae, una posizione che minacciava il fianco destro dell'esercito di Scipione. Inviato dal console a comunicare al console Norbano gli accordi intervenuti a Teano, Sertorio credette necessario ristabilire lo *statu quo*, rioccupando di sorpresa Suessa. Di fronte all'immediata protesta che del fatto avanzò Silla a Scipione, questi non seppe trovare altra soluzione che rinviare gli ostaggi a Silla. In questo modo confessava di essere egli la causa della rottura delle trattative: un atto di debolezza gravissimo, di cui Silla non poteva mancare di trar profitto. E infatti se ne videro presto i risultati: riprese le ostilità, non appena le due legioni di Silla giunsero in vista dell'accampamento di Scipione, i soldati, accusando il console di aver violato i patti della pace, passarono in massa a Silla. Il console Scipione, sorpreso affatto impreparato dagli avvenimenti, fu trovato dai soldati Sillani nella sua tenda col figlio e condotto a Silla, che li lasciò liberi. Gli altri duci dovevano essere fuggiti prima. Tra essi Sertorio (App., I, 85-6; Plut., *Syll.*, 28; Diod., XXXVIII-IX, fr. 16).

L'esercito di Silla veniva così portato a 10 legioni, cioè una forza effettiva di un 45.000 uomini, e con tale esercito rinforzato egli tentò di indurre a battaglia Norbano. Ma questi, appoggiato saldamente sulle fortezze di Capua, Nola e Neapoli (1), si tenne in una stretta difensiva, che gli era assai vantaggiosa, perchè le comunicazioni gli restavano aperte per via di mare. E Silla non potendo venirne a capo, tentò la via delle trattative, che così felicemente era riuscita con Scipione. Ma Norbano, ammaestrato dal caso del collega, non troppo sicuro della fedeltà delle truppe di fronte alle abilissime arti di Silla, rifiutò di accondiscendere.

(1) Neapoli fu acquistata di sorpresa dai Sillani sul principio dell'anno 82 (App. I 89); Nola nell'a. 81 (Liv., *Periochae*, LXXXIX).

E a questo punto le sorti dei democratici che fino ad allora parevano precipitare nel modo più indecoroso, si rialzano improvvisamente. Per sventura Appiano qui nel suo estratto ha quasi troncato gli avvenimenti: pertanto la costruzione che ne faremo non potrà essere che ipotetica. Press'a poco i fatti devono essersi svolti così. Noi sappiamo da Appiano (I, 86) che in quel tempo il proconsole Carbone venne in Roma, dove dichiarò nemici della patria Metello e quanti altri s'erano uniti a Silla dopo il suo sbarco. Da questo punto data una parziale riscossa democratica. Cn. Pompeo, il giovane figlio di Pompeo Strabone, che aveva saputo colla sua particolare abilità attrarre a sè la simpatia di Silla, era stato da lui inviato ad eseguire nuove leve nell'agro Piceno (la distinzione tra la prima legione reclutata e le altre 2 che reclutò più tardi è solo in App., I, 80). Carbone apprestò un colpo ardito che, se non riuscì a pieno, ebbe però sostanzialmente il successo che il suo autore desiderava. Tre corpi di esercito, guidati da legati di Carbone, dovevano convergere sul Piceno e circondare e soffocare il focolare della ribellione: i due primi, comandati dai legati C. Celio Caldo e C. Carrinate, forse provenienti dall'Umbria; il terzo inviato da Roma stessa, probabilmente per la via Valeria sotto il pretore L. Giunio Bruto Damasippo (1), doveva tagliare all'audace luogotenente di Silla la ritirata. Mentre inviava a Silla messi urgenti per esserne appoggiato, Pompeo seppe togliersi egregiamente dalla propria difficile posizione: infatti con tutte le sue forze fatto impeto sul più prossimo dei suoi avversari, il pretore Damasippo, lo sconfisse.

Silla frattanto, *πρὸς ... τὰς πρώτας ἀγγελίας καὶ φήμας ὑπὲρ αὐτοῦ δεδοικὼς ἐν τοσούτοις καὶ τηλικούτοις ἀναστρεφομένου στρατηγοῖς πολεμίοις, ἐδίωκε βοηθήσων* (Plut., *Pomp.*, 8). Benchè la susseguente narrazione di Plutarco presupponga che Silla raggiungesse Pompeo, io non crederò fino a conferma in contrario che il corpo d'esercito inviato da Silla in soccorso di

(1) Per l'identificazione dei personaggi ricordati da Plutarco Drumann, *Gesch. Roms*, IV², p. 55 seg., la cui opinione è generalmente accettata. — Münzer, P. W., III, 1612 s. v., mostra che *Carrinate* è nome gentilizio non cognome come altri crede (P. Albius Carrinas).

Pompeo fosse comandato da Silla in persona (1). E poichè l'anno seguente noi troviamo al comando delle truppe Sillane il pretore con imp. proconsolare Q. Cecilio Metello Pio, mentre Silla conservava colla direzione suprema della guerra il comando nel versante del Tirreno, non vedendo che esista una ragione di opportunità e quindi una verosimiglianza di supposizione per ammettere uno scambio susseguente negli alti comandi, ritengo che a Metello Pio fosse affidato il comando delle forze Sillane (che, ipoteticamente, computerò a 4 legioni) inviate in soccorso di Pompeo. In questo modo fu fermato il movimento d'offensiva Carboniano sull'Adriatico, ma al tempo stesso Silla colle forze rimanenti (6 legioni, secondo la nostra ipotesi) non era più in grado di mantenere il blocco delle 4 legioni di Norbano. È affatto oscuro quale genere preciso di avvenimenti si celi sotto la frase che Appiano adopera subito dopo aver parlato delle fallite trattative di pace tra Silla e Norbano a Capua: *ἀναστήσας Σύλλας ἐχώρει πρόσω τὰ πολέμια πάντα δῃῶν· τὸ δ'αὐτὸ καὶ Νωρβανὸς ἔπραττε κατ'ἄλλας ὁδούς*. Ad ogni modo è certo che in seguito a questi avvenimenti (ignoti) il console C. Norbano riuscì a liberarsi dal blocco di Capua e a ritirarsi verso il Nord. Cercare di sapere di più vorrebbe dire, almeno fino a che le nostre conoscenze storiche per questo punto non siano accresciute, eventualità affatto improbabile, lavorare di

(1) L'opinione, che credo poco fondata, è del Mérimée (op. cit., p. 169 seg.), che ritiene, come il Linden (op. cit., p. 39), che Silla in persona sia mosso verso l'Adriatico in soccorso di Pompeo. Il Linden poi ha creduto troppo *in verba Plutarchi*, ripetendo *ad litteram* la narrazione ampollosa che questi fa delle gesta di Pompeo. Così per la sua cronologia fa che Pompeo debba attendere *un mese* la venuta di Silla (cfr. la nota cronologica) mentre è chiarissimo che la vittoria su Damasippo ebbe per Pompeo l'esito, importante certo, di farlo sfuggire all'accerchiamento del nemico, ma è pure indubitato che, lasciato a se stesso, egli sarebbe stato dalla forza stessa del numero sopraffatto. Nè l'uno nè l'altro studioso accennano a questo punto a una divisione dell'esercito di Silla, e come a questo punto si debba far risalire lo scaglionamento delle forze avversarie sui due versanti, che poi si mantenne per tanta parte della guerra. Ma in tutt'e due l'osservazione non è troppo proseguita. Citerò, per finire, P. Cantalupi (*La magistratura di Silla*, p. 74-5) che vuole che l'esercito di Norbano (4 legioni) si sia arreso a Silla, come quello di Scipione.

pura fantasia. Nello stesso tempo Q. Sertorio e altri duci democratici aprivano nuove leve in Etruria, raccogliendovi 40 coorti, pari a 4 legioni (Exup., 7); e anche nelle altre regioni e particolarmente nella Gallia Cisalpina venivano aperte leve che portavano a un considerevole accrescimento degli eserciti democratici.

Per altro, per il rimanente di quest'anno non vi furono più operazioni militari. Le due parti (App., I, 86) si preparavano febbrilmente per la lotta decisiva. Da un lato il console C. Norbano, ancorchè sfuggito al blocco di Silla a Capua, non poteva mantenersi saldamente sulla difensiva sbarrando la via di Roma, su un punto un po' più arretrato; e perciò si ritirò decisamente fino a Praeneste, rocca naturale fortissima in ogni tempo, dalla quale gli era possibile guardare così la via Latina, come, attraverso alla pianura di Velitrae tra i monti Albani e i Lepini, la via Appia, le due grandi vie di accesso a Roma. E d'altra parte il proconsole Carbone (poichè evidentemente Scipione, seppure da Diodoro appaia (XXXVIII-IX, fr. 16) dopo la resa aver comandato altre forze, non può che aver avuto un comando nominale) si riportava anch'egli indietro fino ad Ariminum, dove stabiliva la sua base d'operazione all'inizio della via Aemilia, la grande rete di comunicazione della Gallia Cisalpina, mentre la via Flaminia attraverso l'Appennino lo manteneva in comunicazione con Roma, e conseguentemente col console Norbano a Praeneste. La sua avanguardia era sul fiume Aesis (Esino) poco sopra Ancona.

Nello stesso tempo Silla aveva anch'egli procurato di accrescere il suo esercito con leve nei paesi da lui dipendenti (la Campania, il Sannio, l'Apulia, la Lucania, il Bruzio), sia con concessioni, sia con minacce, sia con denaro (App., I, 86). E mandava innanzi un altro dei giovani avventurosi, accorsi al suo campo, M. Licinio Crasso, a fare leve tra i Marsi (Plut., *Crass.*, 6). Il suo esercito era diviso, come abbiamo veduto, in due parti. L'esercito del Nord, comandato da Q. Cecilio Metello Pio, aveva probabilmente come base Asculum sulla Salaria. L'altro, l'esercito del Sud, comandato da Silla in persona, aveva probabilmente per base Capua.

Queste operazioni occuparono i capi dei due opposti eserciti, *μέχρι τὸ λοιπὸν τοῦ θέρους ἑκατέροις ἐς ταῦτα ἀνηλώθη.*

L'a. 83 non poteva definirsi se non un anno di preparazione: le forze democratiche erano tutt'altro che distrutte, anzi svanito quello che per molti era stato un vivo miraggio, la speranza della pace, tutta la tensione degli animi e delle energie si volgeva alla lotta mortale e decisiva che si attendeva per l'anno seguente. Ma non era men vero che Silla, colle sue qualità elettissime di uomo di stato e di generale aveva riportato un grande successo. Aveva sorpreso il nemico e aveva approfittato della disorganizzazione del primo momento per stabilire la sua base di operazioni in Campania: un'altra ne aveva quindi posta nel Piceno. Contro qualunque evento avvenire si presentava saldo nelle posizioni dominanti l'uno e l'altro mare, nelle migliori condizioni per la lotta decisiva.

Nota cronologica.

È noto come unico termine che abbiamo per stabilire la cronologia degli avvenimenti di quest'anno sia l'aneddoto, riferito da Plutarco (*Syll.*, 27) di su le memorie dello stesso Silla, che, allorchè Silla procedendo verso la Campania, giunse a Silvio in Apulia, gli apparve dinanzi uno schiavo, il quale come ispirato dalla divinità lo ammonì ad affrettarsi a muovere su Roma, perchè se non si fosse affrettato il Campidoglio sarebbe arso: ὃ (scil. l'incendio) — soggiunge Plut. — *καὶ συμβῆναι τῆς ἡμέρας ἐκείνης, ἧς ὁ ἄνθρωπος προηγόρευσεν.* E cioè il *6 Quintile* = 6 luglio. La data di questo incendio del tempio di Giove Capitolino (che dovette produrre una enorme impressione e apparire come un triste prodigio della divinità adirata per le stragi delle lotte civili; cfr. le fonti presso Linden, op. cit., p. 35) è stata dal Linden adottata per ordinare cronologicamente gli avvenimenti di quest'anno. Egli, volendo distribuirli equamente in tutto l'anno, ha congetturato che la data del 6 luglio sia quella della dimora di Silla a Silvio, opinione possibile dal testo greco inteso alla lettera, ma assurda nel senso che se l'incendio fosse avvenuto in quel giorno, non si capisce il costrutto del consiglio e della profezia, dato che a Silla non era umanamente possibile in quel giorno essere a Roma.

Ma andiamo innanzi. Ecco l'ordine approssimativo che il Linden dà degli avvenimenti: Silla parte dai suoi quartieri di inverno, che sono presupposti in Attica al principio di marzo, e per la metà di aprile è a Dyrrachium (noi abbiamo supposto che egli svernasse in Macedonia stessa). Quivi si ferma un mese, fino alla metà di maggio, attendendo gli aiuti del Peloponneso raccolti a Patrae dalla flotta, e poi alla fine di maggio opera lo sbarco a Brindisi. Quivi attende un mese, non si sa bene cosa, e quindi alla fine di giugno o al principio di luglio si pone in via; il 6 luglio è a Silvio;

circa la fine di luglio combatte con Norbano al monte Tifata, mentre in questo mese si svolge l'azione di Pompeo nel Piceno contro i legati di Carbone. L'agosto è dedicato alle trattative tra Silla e Scipione a Teano; finite queste al principio di settembre, Silla, un po' troppo in ritardo, pensa a soccorrere Pompeo. Per occupare il mese viene a proposito la defezione dell'esercito di Scipione a Pompeo (Plut., *Pomp.*, 7; Zon., X, 2) (un secondo caso, identico alla defezione dell'esercito del console stesso a Silla, una falsificazione non so come nè perchè fatta buona dal Linden, mentre nessun altro studioso ha mai pensato a considerarla storica). Alla fine, nell'autunno, avviene la sosta nelle operazioni militari, le leve di Sertorio e degli altri duci in Etruria. Finalmente gli eserciti entrano negli accampamenti di inverno. La mia costruzione è alquanto differente e tiene conto *a)* del testo di Appiano I, 86, secondo il quale, dopo narrate le trattative di Silla con Norbano a Capua, posteriori alla defezione dell'esercito del console Scipione, si soggiunge della venuta di Carbone a Roma, contemporanea circa ai fatti narrati prima, *αἷς ἡμέραις*, accadde l'incendio del tempio di Giove Capitolino. Questo in senso un po' lato, impossibilmente però alla distanza di tempo in cui l'ha posto Linden; *b)* di esigenze militari di prim'ordine, la cui importanza pare ignorata dal Linden stesso. È evidente che Silla, di fronte alle forze superiori degli avversari doveva operare di sorpresa lo sbarco in Italia (e vi riuscì), e quindi, appena sbarcato, colla maggiore celerità possibile raggiungere il suo obiettivo, la Campania, prima che una forte resistenza gli impedisse di varcare i passi dell'Apennino. Ed infatti egli mosse innanzi così rapidamente, che gli avversari non poterono opporglisi se non dinanzi a Capua. E là avvenne appunto il primo scontro.

Pertanto, considerando il vasto e complesso ordinamento della spedizione e i movimenti della flotta e dell'esercito per concentrarsi a Dyrrachium, possiamo calcolare almeno un mese necessario per gli apparecchi di questo concentramento e la partenza; quindici giorni almeno per gli sbarchi: totale un mese e mezzo. Tempo sufficiente, ponendo il principio dei preparativi alla metà di marzo, per dare allo sbarco di Silla a Brindisi la data del principio di maggio. Ammettendo qualche tempo per la sistemazione della base d'operazione, e ricordando d'altra parte la rapidità necessaria alla mossa di Silla verso la Campania, noi porremo nel giugno le trattative di Silla con Norbano e la battaglia al monte Tifata, e sino alla fine di luglio la serie degli avvenimenti (trattative e loro rottura) che conducono alla defezione dell'esercito di Scipione. Subito dopo, la venuta di Carbone a Roma, contemporanea al tentativo di rinnovate trattative di Silla con Norbano; *αἷς ἡμέραις* (con una latitudine di tempo perfettamente possibile), il *6 luglio* avvenne l'incendio del Campidoglio. Intanto, Pompeo si recò per nuove leve nel Piceno, e, sulla fine di luglio o sul principio di agosto, contemporaneamente alla venuta di Carbone in Roma, si svolsero le operazioni dei tre legati Carboniani contro Pompeo. Lo spostamento di parte dell'esercito Sillano da Capua al versante Adriatico, la liberazione del console Norbano dal blocco, con particolari ignoti, sono avvenimenti

che possono ben empire il mese di agosto e parte del settembre successivo. Se, del resto, Pompeo, contro forze superiori, avesse dovuto attendere *un mese* il soccorso di Silla, la sua impresa nel Piceno sarebbe terminata con una catastrofe. Nel rimanente poi della buona stagione, dalla metà di settembre ad ottobre (novembre), si chiusero le operazioni militari e s'iniziarono i grandi preparativi per l'anno seguente.

II.

La campagna dell'82 a. C. fino alla battaglia di Porta Collina.

Le elezioni consolari per l'a. 82 avevano portato al potere due dei più risoluti partigiani della guerra, Cn. Papirio Carbone, dopo la morte di Cinna, possiamo dire, capo riconosciuto del partito democratico in Italia, e C. Mario, giovane ardente e valorosissimo, seppure la fresca età (aveva soli 26 anni) non gli consentiva soverchia esperienza, caro alle moltitudini pel nome glorioso e popolare del grande capitano, suo zio (1). Il partito della guerra era dunque vittorioso su tutta la linea. Ora doveva farsi il tentativo della riscossa generale, se non si voleva cadere a mano a mano, ingloriosamente, per le abili arti e gli intrighi di Silla.

A noi sarebbe caro, per meglio valutare il valore e la portata delle operazioni militari, vaste e importantissime, di quest'anno di guerra, di conoscere la quantità esatta delle singole forze impegnate: ma disgraziatamente questo, per lo stato della tradizione, ci è possibile solo fino a un certo punto. Il calcolo generale riesce abbastanza profittevole per Silla, di cui conosciamo (App., I, 100, cfr. 104) il numero esatto delle legioni

(1) Sull'età di C. Mario, il giovane, quando ottenne il consolato, cfr. Linden, n. 51, p. 60, che riassume i precedenti risultati. È indubbio che egli lo ottenne a 26 anni compiti, l'oscillazione tra i 26 e 27 anni che troviamo nelle fonti non provenendo che da un diverso sistema nel computo degli anni (a. iniziato, a. compiuto), che si verifica tuttora. Che il console dell'a. 82, uguale al proscritto dell'a. 88 (App., I, 60; 62, dov'è detto *υἱὸν αὐτοῦ Μαρίου*), fosse nipote per parte di fratello, *ἀδελφιδοῦς*, del vecchio Mario, come dice App., I, 87, adottato da lui (Busolt, art. cit., p. 434 n. 33, seguìto dal Linden, ibid.), ha grande apparenza di verità.

alla fine della guerra (*23*) (1) e le forze dell'esercito del quale abbiamo potuto seguire sino alla fine dell'anno precedente, in cui abbiamo riscontrato nell'esercito Sillano un totale di 12 legioni. Tenendo calcolo che, a quanto vediamo dalla narrazione più completa di Appiano, non meno di 4 legioni, e certamente più, disertarono nel corso della campagna a Silla — 5 coorti di fanteria e 2 *turmae* di cavalleria a Sacriporto (I, 87), 5 coorti in una battaglia durante la ritirata di Carbone (I, 88), 6000 uomini = 12 coorti nella battaglia di Faventia (I, 91), 1 legione lucana di P. Albinovano (ibid.), totale 32 coorti e 2 *turmae* di cavalleria, più i presidi prossimi a Rimini etc. che si arresero dopo il tradimento di Albinovano (ibid.) — avremo come risultato delle leve promosse da Silla sulla fine dell'anno precedente 6 o 7 legioni. Di queste, due o tre certamente coscritte da Crasso nei Marsi; il resto da Silla nei paesi occupati. Questo scarso numero (che si accresce non di molto, calcolando le leve supplementari che dovettero essere fatte per supplire alle perdite verificatesi di mano in mano nella campagna) sta a dimostrare ancora una volta quale fosse rispetto a Silla l'animo delle popolazioni italiche: nè poteva presumersi diversamente, qualora solamente si pensasse che i Sanniti e i Lucani formavano un nucleo fortissimo negli eserciti democratici, e si ricordasse la loro sollevazione in massa nell'a. 83. Essi dovettero tenere quindi rispetto a Silla un contegno di diffidenza e di sospetto, nè Silla dovette insistere, conoscendo l'ambiente, per non avere sorprese pericolose. Ad ogni modo sta il fatto che Silla iniziò la campagna con meno di 19 legioni ai suoi ordini, delle quali presuppongo circa 12 (6 per ciascuno) contassero gli eserciti di prima linea, di Silla e di Metello, le altre 7 adoperate in vari uffici, per es., con probabilità un forte nucleo in Campania, dove Neapoli ancora resisteva e così Nola, che fu occupata solo nell'a. 80.

---

(1) Ho accettato il dato di Appiano, perchè, essendo in lettere, era meno soggetto a corruzione di testo; infatti esso è confermato più oltre c. 104, dove si dice che i soldati di Silla che avevano ottenuta la distribuzione di terreno erano 120.000 (Infatti 5000 × 23 = 115.000, 120.000 in cifra tonda). In Livio (*Periochae*, LXXXIX) il numero delle legioni è di XLVII, che alcuni hanno corretto in XXIII, altri in XXVII.

Quanto alle forze dei due consoli democratici, abbiamo solamente l'accenno di Appiano (I, 82) che esse superavano il totale di 200 coorti (= 20 legioni) raggiunto nell'a. 83. Considerando che le 4 legioni coscritte da Sertorio e dagli altri in Etruria, andavano in compenso di quelle che avevano disertato dal console Scipione, possiamo ritenere che le legioni democratiche fossero superiori di numero di circa 10 alla somma iniziale delle forze Sillane. Più tardi nel corso delle ostilità molti aumenti ebbero, ma anche molte perdite. Gli eserciti di prima linea, comandati l'esercito del Sud, già di Norbano, dal console C. Mario, con base, come abbiamo veduto, a Preneste, e quello del Nord dal console Carbone, e a lui in sottordine dal proconsole C. Norbano (legati: Flavio Fimbria, C. Carrinate, C. Celio Caldo, Marcio, P. Albinovano), con base ad Ariminum, non dovevano essere di molto superiori a quelli Sillani loro contrapposti. Di più si doveva contare il presidio di Roma, 2 legioni sotto il pretore L. Giunio Bruto Damasippo, e importanti corpi di riserva in Etruria e in Gallia Cisalpina. Mancava dei comandanti democratici Q. Sertorio, che era partito per prendere il governo della sua provincia, la Spagna Citeriore.

Durante l'inverno, infine, che, come ci avverte Appiano (I, 87), fu in quell'anno assai lungo, Silla provvide ad assicurarsi le spalle stringendo trattati coi singoli popoli italici, garantendo loro il mantenimento del diritto di cittadinanza, e, più, del *ius suffragii*, ben inteso in tutte le 35 tribù (*Periochae*, LXXXVI). Poichè abbiamo sopra illustrato (p. 647) quale è la nostra profonda convinzione circa l'attitudine adottata da Silla di fronte agli accordi tra i ribelli e Cinna nell'87 a. C., avremmo viva curiosità di conoscere quale fosse il testo di questi trattati, ma dobbiamo rassegnarci ad ignorarlo.

Il carattere speciale degli avvenimenti militari seguenti, svolgentisi su due versanti opposti, era l'influenza reciproca che doveva esercitarsi tra l'una e l'altra serie di operazioni, dato che il primo successo notevole riportato dall'uno dei belligeranti su uno dei versanti, costituendo una minaccia sul fianco dell'avversario che operava sul versante opposto, gli avrebbe dato la vittoria o almeno un risultato molto favorevole anche su questo. Era una gara di prontezza, di abilità, di decisione, nel

condurre una offensiva a fondo, e Silla si mostrò in essa superiore.

Egli avanzò col suo esercito, al principio della buona stagione, per la via Latina incontro al console C. Mario, che gli sbarrava la via. Una sorpresa, colla quale Silla occupò la forte città di Signia (Segni) sul fianco destro di Mario, costrinse quest'ultimo ad abbandonare la sua posizione e portarsi più indietro, a Sacriportum. Dei precedenti della battaglia abbiamo un confuso accenno in Plutarco. A quanto pare C. Mario deve aver preso una posizione di fianco alla via Latina, e assaliti alcuni reparti Sillani in marcia, affaticati da un temporale sopraggiunto. Dietro le preghiere di alcuni ufficiali, Silla si vide indotto contro sua voglia ad arrestarsi ed accamparsi. Era questo il momento atteso dal console democratico, che assalì con veemenza l'esercito Sillano mentre stava procedendo ai lavori dell'accampamento. Ne successe un combattimento accanitissimo, che iniziatosi nelle condizioni più sfavorevoli per Silla, si mutò in suo favore da ultimo, e in seguito al tradimento di 5 coorti di fanteria e 2 *turmae* di cavalleria democratica formanti l'estrema ala sinistra nemica, si ridusse per Mario in disfatta completa. C. Mario cercò di riparare nella piazza forte di *Praeneste* coi suoi, ma non vi riuscì se non in mezzo a una terribile strage dei fuggiaschi, avvenuta durante l'inseguimento e sopratutto sotto le mura della città. Solo 15.000 uomini poterono chiudersi in essa col console, il quale evidentemente, avendo fatto argine sino alla fine con un corpo di retroguardia all'avanzata nemica per permettere ai suoi lo scampo, potè a stento riparare anch'egli tra le mura, trattovi su dagli abitanti per mezzo d'una corda.

Ma il resto dell'esercito, e cioè più di 20.000 uomini, andò perduto: di essi 8.000 prigionieri, gli altri o caddero nella strage, o si dispersero (fonti principali App., I, 87; Plut., *Syll.*, 28; Diod., fr. 15; inoltre *Periochae*, LXXVII; Flor., II, 9, 23; Eutrop., V, 8; Oros., V, 20, 6) (1). Ed è a questo punto che

(1) La forza dell'esercito di C. Mario combattente a Sacriporto è data da Plutarco (ibid.) in 85 coorti, che però, come ha ben notato il Cantalupi (*La guerra civ.* p. 34), sono il risultato d'un calcolo. Infatti, sommando

noi vediamo per la prima volta l'esplicazione del pensiero di Silla, di fronte agli accordi della reggenza democratica coi Sanniti nell'87. Ci viene attestato da Appiano che *πλῆθος αἰχμαλώτων ὁ Σύλλας ἔλαβεν, ὧν τοὺς Σαυνίτας ἔκτεινε πάντας ὡς αἰεὶ χαλεποὺς Ῥωμαίοις γενομένους*. Evidentemente, quella addotta da Appiano non è la ragione vera. Essa può solo essere invece che *Silla non considerò in questa occasione*, come più tardi, i Sanniti *come cittadini Romani*, bensì volle mostrar loro che li riteneva alleati ribelli. Il suo procedimento però doveva suscitare terribili complicazioni, e ad esso dobbiamo ricondurre l'insurrezione dei Sanniti e dei Lucani che poco più tardi scoppiò alle sue spalle. Silla aveva creduto colla battaglia di Sacriporto di aver dato all'avversario un tale colpo, che, pur non essendo definitivo, avesse determinato per altro l'esito ultimo della guerra; ma il suo atto, oltrechè un atto crudele, era anche un errore politico, e le conseguenze non se ne fecero attendere. Come dice con una frase scultoria Sallustio (fr. 35) " Marius victus duplicaverat bellum ".

Intanto Silla lavorava attivamente a stabilire una linea di circonvallazione intorno a Preneste *ἐκ μακροῦ διαστήματος*; e quindi, dovendo procedere, richiamò (questo almeno si deve supporre) altre forze dalla Campania, certamente un 4 legioni, per poter tenere efficacemente il blocco, e ad esso prepose Q. Lucrezio Ofella, un ex-mariano, con ordine tassativo di non indurre mai a battaglia Mario, ma di prenderlo per fame. Sistemato il blocco di Preneste, mosse su Roma. Qui però i Mariani, com'era naturale, non si apprestavano ad alcuna resistenza, perchè la città aperta e solo protetta a N-W dal monte

20.000 (morti), 8.000 (prigionieri), 15.000 salvi (Diod. fr. 15: Plut., *Syll.*, 32) si hanno 43.000 uomini, e 85 coorti = 42.500, in cifra tonda lo stesso. La cifra degli scampati è l'unica sicura: il resto è tratto per calcolo, e, secondo me, nei ventimila — cifra data da Silla pr. Plut. (Oros. da Claudio [Quadrig.] 28.000) — vanno compresi gli 8.000 prigionieri, come pure i dispersi etc. Si verrebbe a un esercito di 35.000 uomini = 7 legioni, quale è affatto probabile fosse quello del console C. Mario. Per le perdite di Silla, mettendo da parte i 23 morti, che egli solo accusava nei suoi commentari, e considerando la cifra di Eutropio: 400 morti, abbiamo un totale complessivo delle perdite di 2000 o 3000 uomini.

Gianicolo non si sarebbe potuta difendere in alcun modo, tanto più colle due legioni di cui disponeva il pretore urbano L. Giunio Bruto Damasippo. Questi infatti aveva ricevuto ordine dal console Mario, rinchiuso a Preneste, di sgombrare immediatamente la città portandosi al Nord in Etruria. Prima però egli doveva sopprimere quei membri del Senato che erano sospetti di favorire nascostamente il partito Sillano. Adunato con un pretesto il Senato, P. Antistio e C. Papirio Carbone Arvina, lo stesso che come tribuno era stato l'a. 89 uno dei proponenti della legge Plauzia Papiria *de civitate*, furono trucidati nella Curia stessa; il Pontefice massimo Mucio Scevola, che aveva tentato di rifugiarsi nel tempio di Vesta, fu ucciso prima di raggiungere la soglia (App., I, 88; Liv., *Per.*, LXXXVI; Oros., V, 20, 4; Vell., II, 26; Flor., II, 9, 21; cfr. Diod., fr. 17). Compiute così le ultime vendette, Damasippo colle sue legioni abbandonò la città, e lo seguirono i principali membri del partito democratico (1).

In questo modo senza resistenza si compiè l'entrata di Silla in Roma. L'esercito Sillano aveva ricevuto ordine di occupare di sorpresa le porte della città, e per ogni evenienza era stato stabilito come punto di concentramento dei singoli corpi di truppa, qualora qualcuno fosse stato respinto, la città di Ostia. Ma non fu necessario alcun combattimento. L'occupazione delle città vicine, che si diedero senza resistenza a Silla, affamò in breve la città, e questa si arrese. Silla vi entrò lasciando l'esercito accampato fuori delle mura nel campo Marzio. Radunato il popolo in assemblea, egli deplorò di essere stato

(1) È noto come, secondo la tradizione liviana (Orosio, *Periochae*) l'uccisione sarebbe stata ordinata da C. Mario al pretore Damasippo *prima* della battaglia di Sacriporto; mentre in Appiano è detto espressamente che fu dopo. Le ragioni per cui il Linden (op. cit., n. 60, p. 61) ha creduto di dover accettare la tradizione liviana, non sono persuasive (improbabilità che i Mariani dopo la battaglia di Sacriporto osassero commettere le stragi ricordate [le grandi stragi in epoca rivoluzionaria sono appunto conseguenza di disastri esterni, cfr. le stragi di settembre del 1792] — impossibilità per Mario rinchiuso in Praeneste, di comunicare con Roma [egli poteva farlo per mezzo d'un emissario, prima che fosse stretta la linea di circonvallazione, come avrebbe anche potuto farlo dopo. La storia di tutti gli assedi insegni]).

costretto contro sua volontà alla presente guerra, ma assicurò che lo stato attuale non sarebbe durato a lungo. Quindi pose all'asta i beni degli avversari, e riordinò le cariche dello Stato e cittadine. Terminate queste cose, egli mosse contro il nucleo più forte dei democratici, raccolto in Etruria. Ma per comprendere gli avvenimenti seguenti è necessario che ora ci facciamo indietro ad esaminare le vicende che erano occorse nel frattempo sull'altro teatro della guerra.

Apertesi le ostilità anche sul versante adriatico, Q. Metello Pio aveva riportato un successo su C. Carrinate, in un primo scontro sul fiume Aesis (Esino), così che aveva stabilito la propria autorità sui paesi vicini; ma il console Carbone, accorso in aiuto (1) del suo luogotenente, aveva vinto l'esercito Sillano e lo aveva pressochè circondato (*Μέτελλον δὲ Κάρβων καταλαβὼν ἐφρούρει περικαθήμενος*, App., I, 87). Nel frattempo però gli giungeva la notizia della gravissima disfatta del collega C. Mario a Sacriporto e del suo assedio a Preneste per opera di Silla. Continuare nell'offensiva contro Metello in queste condizioni non era possibile, perchè l'avanzata di Silla poteva prenderlo di fianco, mentre egli aveva Metello di fronte (era questo, lo abbiamo veduto, un rischio dovuto allo speciale teatro in cui la guerra si combatteva). In queste condizioni Carbone iniziò una operazione difficilissima, la ritirata di fronte ad un esercito nemico press'a poco pari a lui di forze, e la disposizione delle sue forze su tutt'altra linea, per obbedire alle mutate esigenze del momento. L'aver condotto sapientemente a termine questa colossale operazione militare, che per-

(1) Non comprendo la ragione, per cui il Linden (p. 41) fa partire Carbone da Clusium per muovere nell'Agro Piceno: egli vi era già, e dedurre dal fatto che in epoca posteriore, *per rispondere a mutate esigenze militari*, Carbone aveva posto il quartier generale a Clusium, che egli lo avesse fatto anche prima, *contro ogni necessità militare*, è fuor di luogo. Il Linden poi ha fatto compiere ben *quattro volte* questa marcia a Carbone coll'esercito; la seconda volta (p. 45) [unica reale] dopo la notizia della sconfitta di C. Mario a Sacriporto; la terza volta (p. 47) prima della battaglia di Faventia; la quarta (p. 48) [una fuga] dopo la battaglia. Ha il L. mai pensato quale operazione complessa e difficile sia il trasporto d'un esercito, e fosse particolarmente allora, e specie a sì grave distanza? Di più, che, come vedremo, non ce n'è affatto necessità.

mise ai democratici la riscossa, e per poco non assicurava loro la vittoria finale, è una prova di particolari virtù militari di Carbone, un merito che non gli è stato dai moderni adeguatamente riconosciuto.

Il primo punto del nuovo piano di Carbone era la ritirata dell'esercito dal fiume Aesis ad Ariminum. Benchè la retroguardia dell'esercito Carboniano, comandata dal legato Marcio, fosse danneggiata in alcuni scontri dall'avanguardia di Metello, guidata da Cn. Pompeo — abbiamo notizia particolarmente d'uno scontro vittorioso, attribuito in modo generico a Metello, sui Carboniani, in cui 5 *coorti* passarono a Metello, e d'una vittoria di Pompeo su Marcio a Sena Gallica (App., I, 87-8; Oros., V, 20) — la ritirata fu eseguita felicemente.

Ad Ariminum Carbone divise il proprio esercito. Un corpo che possiamo calcolare ipoteticamente a 4 o 5 legioni fu lasciato in questa città al comando del proconsole C. Norbano, a guardia della Gallia Cisalpina, assistito dai legati C. Flavio Fimbria, P. Albinovano e altri. Colle rimanenti due o tre legioni Carbone scendeva per la via Faventia-Faesulae-Florentia-Arretium a Clusium. E qui si operava il concentramento dei comandanti democratici e si stabiliva il quartier generale delle loro forze: conviene calcolare oltre alle due legioni del pretore Damasippo, provenienti da Roma per la via Cassia, almeno quattro legioni o già stanziate in Etruria o quivi concentrate, cosicchè possiamo pensare a un totale da 40 a 45.000 uomini, raccolti in Etruria in attesa dell'assalto di Silla. Contro ad essi Silla poteva disporre, a quanto abbiamo calcolato, d'un 30.000 (6 legioni), forze assai inferiori, tanto che egli dovette, come or ora vedremo, distaccare dall'esercito di Metello un corpo di truppe, che possiamo valutare a 2 legioni (10.000 uomini), sotto Cn. Pompeo. La posizione di Carbone a Chiusi appariva ottimamente scelta per quello che costituiva ora il fine supremo degli sforzi dei democratici: la liberazione del console C. Mario a Preneste. Essa infatti era in posizione centrale, dominatrice della rete stradale dell'Italia media. E come Norbano da Ariminum copriva la Gallia Cisalpina, così Carbone, collegato con lui sicuramente per la via di Faventia, copriva l'Etruria, le due *fidissimae terrae* dei democratici, donde essi traevano copia quasi inesausta di forze. Ma prima dell'offensiva, Carbone

e Norbano dovevano attendersi l'attacco di Silla. E questi non tardò a sopraggiungere.

Silla aveva elaborato a sua volta un piano arditissimo e vastissimo, che mirava all'avvolgimento e alla distruzione completa delle forze democratiche, così in Gallia, come in Etruria. Tre corpi d'esercito: un distaccamento per la via Clodia, con obiettivo Saturnia; il corpo centrale comandato da Silla in persona per la via Cassia e il corso del Clanis (Chiana) con obiettivo Clusium, quartier generale e posizione fortissima di Carbone; un distaccamento, comandato dal legato M. Crasso, che per la via Amerina, di conserva con un corpo di truppe staccato dall'esercito di Metello e comandato dal legato Cn. Pompeo (via Auximum-Nuceria Camellaria), doveva assalire da due parti le posizioni presso Spoletium tenute dal legato C. Carrinate e assicurare a Silla il dominio della via Flaminia. Contemporaneamente Q. Cecilio Metello, dalle sue posizioni dinanzi ad Ariminum, doveva per via di mare prendere posizione dietro all'esercito del console Norbano, sbarcando a Ravenna con obiettivo a Faventia, staccandolo al tempo stesso e dalla Gallia Cisalpina e dalla via principale di comunicazione col console Carbone, che appunto in questa città fa capo alla via Emilia.

Le operazioni procedettero con un sincronismo straordinario: *τοῦ αὐτοῦ χρόνου* il distaccamento operante sulla via Clodia vinceva a Saturnia un corpo avversario che gli era opposto, e Silla sul fiume Clanis prendeva contatto colle avanguardie di Carbone (in uno scontro tra la cavalleria Sillana e un corpo di cavalieri Celtiberi, inviati dai governatori della Spagna ai consoli, questi furono respinti colla perdita di 50 uomini, 270 passarono a Silla, gli altri furono fatti uccidere dal console Carbone, per dare un esempio di severità alle sue truppe); mentre nell'Italia Settentrionale Q. Metello Pio, sbarcato a Ravenna, devastava alle spalle del proconsole Norbano l'*ager Uritanus* (o *viritanus*) pr. Faventia (App., I, 89). Subito dopo M. Crasso, avanzando per la via Amerina, occupava Tuder (Plut., *Crass.*, 6) (1) e d'accordo con Pompeo vinceva C. Car-

(1) Che Crasso agisse in relazione con Pompeo, è dato dalla combinazione tra App. e Plut. L'occupazione di Tuder (contro quanto ha supposto

rinate nella pianura Spoletina, infliggendogli una perdita di tremila uomini e circondandolo da ogni parte (App., I, 90 principio). Ma l'attacco del corpo principale, guidato da Silla in persona, contro le trincee di Carbone, fallì completamente. Dopo uno scontro accanitissimo, durato dalla mattina alla sera, egli venne respinto (App., I, 89 fine). Nello stesso tempo, Carbone procurava di disimpegnare Carrinate, inviandogli un corpo di truppe in soccorso. Riuscì a Silla di tendere un agguato alle truppe Carboniane (inviate per la via Clusium-Perusia), e di cagionar loro gravi perdite (2000 uomini); ma C. Carrinate riusciva ugualmente a ingannare la vigilanza dei suoi avversari, e in una notte di tempesta, lasciati accesi i fuochi dell'accampamento per simulare la sua presenza in esso, fuggiva colle sue truppe riunendosi a Carbone (App., I, 90).

Ed ora Silla veniva a trovarsi in una posizione difficilissima, perchè nello stesso tempo gli giungeva notizia d'una gravissima sollevazione scoppiata alle sue spalle, fra i Sanniti e i Lucani, i quali avevano compreso dall'eccidio di Sacriporto, quale sarebbe stato in avvenire il contegno di Silla contro di loro, dopo la vittoria. Ed egli giunse a tempo, possiamo dire miracolosamente, per opporsi all'attuazione del piano concordato tra Carbone e gli insorti, che tendeva a schiacciare Silla nell'Italia Centrale. Infatti, da una parte l'esercito dei ribelli, forte di circa 30.000 uomini (1), comandato dal Sannita Ponzio Telesino, uno dei

---

il Linden, p. 46) deve essere *anteriore* alla sconfitta di Carrinate a Spoleto, perchè la città si trova sulla via, e subito dopo la battaglia di Spoleto accadde il concentramento e la ritirata delle forze sillane. Crasso non viene dalle leve dei Marsi (Linden, p. 45), che furono compiute sulla fine dell'anno precedente, tra altre leve, cui accenna in generale Appiano, ma è distaccato dall'esercito di Silla.

(1) La forza attribuita all'esercito Sannita-Lucano è di 70.000 uomini (App., I, 90; Floro, II, 9, 24, a proposito della battaglia di Porta Collina,); forza enormemente esagerata, che prova soltanto l'enorme impressione prodotta in Roma dalla battaglia di Porta Collina stessa; Vell. II, 27, dà presenti alla battaglia 40.000 uomini, cifra assai più moderata, e credibile perciò, benchè sempre considerevolissima. Tenuto conto che la battaglia fu combattuta dopo che ai Sanniti si erano congiunti i contingenti di Marcio, C. Carrinate e Damasippo, la cifra iniziale delle forze sannitiche deve esser all'incirca quella indicata nel testo.

duci superstiti della guerra sociale (Vell., II, 31, 1), e che aveva per legati M. Lamponio, lucano, uno dei capi nelle ultime resistenze della guerra stessa (Diod., XXXVII, fr. 24, 11), e il capuano Gutta, moveva per la via Latina in soccorso di Preneste, dove, cooperando cogli assediati, doveva distruggere i 20.000 uomini circa sillani, che attendevano al blocco sotto Q. Lucrezio Ofella, e unitosi ai 15.000 uomini di Mario, cioè con una forza totale di 45.000 uomini, occupata Roma, doveva poi muovere contro Silla. D'altra parte, un corpo di 8 legioni (a effettivi completi 40.000 uomini), in gran parte composti di leve recenti, al comando del legato Marcio, doveva assalire Silla dal Nord. Ed è indubbio che preso così tra due fuochi (comprese le forze di Pompeo, egli non poteva avere che 8 legioni o poco più, e cioè *la metà delle forze nemiche*), Silla doveva necessariamente soccombere, anche se le legioni di Marcio erano in gran parte composte di soldati recenti. Del pari rinforzato (possiamo pensare a una legione), il proconsole C. Norbano doveva dare battaglia decisiva a Q. Metello, che isolato ormai dopo la sua mossa alle spalle dell'avversario, in cui come egli aveva tagliato a quello la base di operazione, così l'aveva avuta tagliata egli stesso, e non potendo ricevere soccorso da Silla, si trovava rinchiuso, pareva, senza speranza di uscita, tra la Gallia nemica alle spalle, e l'esercito di Norbano di fronte.

Era il piano di offensiva del console Carbone che si esplicava in tutta la sua ampiezza. E se questo piano, che ci appare egregiamente concepito, non ebbe l'effetto a cui mirava, e cioè la distruzione delle forze Sillane allora operanti, ciò fu merito principalmente della mirabile freddezza e serenità d'animo, che Silla dimostrò sempre nei più gravi momenti, della sua perspicacia e sicurezza d'azione come generale, e in secondo luogo dello scarso valore militare e della dubbia fedeltà di buona parte delle milizie democratiche (eccezione fatta dei Sanniti e Lucani), che non corrispose alle speranze e all'aspettativa di chi il piano stesso aveva ideato. Certamente Silla ebbe notizia della natura delle mosse nemiche, e stabilì di prevenirle. Il punto essenziale era impedire che i Sanniti e Lucani riuscissero nell'intento di liberare Preneste, facendo la loro unione col console C. Mario. E perciò Silla prese rapidamente la sua deci-

sione: abbandonare al suo destino Metello, ordinandogli di difendersi da sè quanto meglio gli era possibile, e concentrare le sue forze disperse tra Spoleto, la valle del Chiana e Saturnia. Dopo questo concentramento, che dovette avvenire tra Horta e Narnia, egli divise le sue forze. Egli stesso con parte di esse, possiamo calcolare la metà, 4 legioni, proseguì per la via Flaminia, verso Roma, e di qui per la via Latina, prese una posizione atta a coprire le trincee di Q. Lucrezio Ofella, e si tenne risolutamente sulla difensiva, data la sua manifesta inferiorità numerica (secondo il nostro calcolo, che è ipotetico, ma non improbabile, 20.000 uomini di fronte a 30.000).

La posizione di Silla non è facile a definirsi. App., I. 90 parla di *τὰ στενά, ᾗ μόνῃ διαβατὸν ἦν*, e quest'ultima determinazione esclude qualunque altra posizione che non sia sulla via Latina, la via più diretta per cui i Sanniti potevano muovere verso Preneste, e non sia *prima* del punto in cui la vallata di Velletri si apre tra i monti Albani e i Lepini. Un passo quale apparirebbe da Appiano: *τὰ στενά*, non esiste nell'ampia valle del Trerus (Sacco) che conduce a Preneste; e poichè, anche per quanto dobbiamo presumere riguardo ai precedenti della battaglia di Porta Collina, dobbiamo ritenere che la posizione di Silla non fosse troppo lontana da Roma, riteniamo con quanti ci hanno preceduto, che la parola di Appiano, con cui ha tradotto la parola latina corrispondente della sua fonte, non sia completamente esatta. Ora tra Artena sull'estremo orlo dei monti Lepini, e i monti su cui sorge Palestrina (Praeneste) di fronte esiste un passaggio, di circa 12 km. e $^1/_2$ in linea retta. Naturalmente Silla non poteva coprire *tutto* il passaggio, tanto meno con le deboli forze che gli abbiamo assegnate (circa 20.000 uomini). L'opinione che mi pare più probabile è di supporre che egli abbia occupato una posizione colla destra sulla via Latina sotto Artena (alt. m. 277), avendo in quest'ultimo paese (sede, nell'antichità, dei Fortinesi), che sorge a strapiombo sulla pianura (da m. 277 a m. 448 di colpo) e che è pressochè inaccessibile anche dal lato S, un piccolo presidio, il centro su Valmontone (m. 303) e la sinistra circa colle Pratarolo (m. 366), con un'estensione di 8 km. in linea retta, in modo da potere, d'accordo colle trincee di Ofella, *ἐκ μακροῦ διαστήματος* da Preneste, sbarrare tutto il passaggio. In questo

modo Silla avrebbe dominato la via Latina e la Labicana, Ofella la Praenestina; in una posizione che a Silla permetteva sempre di gettarsi sul fianco dell'avversario, qualora avesse immediatamente assalito le trincee di blocco (1).

Mentre Silla era giunto a tempo ad impedire, chiudendo il passaggio, che i Sanniti potessero compiere la loro mossa su Preneste — invano C. Mario tentò in una sortita disperata (2), concentrate tutte le sue forze su di un colle, sorgente tra la città e la linea di circonvallazione di Ofella, di rompere il blocco, perchè dopo una giornata di lotta varia ed incerta, dovette ritirarsi (App., I, 90) —, non meno attivo era rimasto il suo luogotenente Cn. Pompeo, che aveva il compito di respingere quelle truppe che Carbone avesse inviato, per cooperare coi Sanniti alla liberazione di Preneste. La posizione di Pompeo credo che non andremo errati ponendola a Narnia, un centro di comunicazioni stradali, e quindi un punto strategico importantissimo per dominare i passaggi che conducono a Preneste. A cavaliere della via Flaminia, nel punto ove vi si ricongiunge la diramazione passante per Spoletium, questa posizione domina altresì la via Amerina e la linea del Tevere, lasciando solo fuori del suo controllo immediato la Cassia, via più lunga e

(1) La posizione generale delle trincee di Silla di fronte ai Sanniti è stata veduta dai precedenti studiosi (Mérimée, Neumann, Mommsen, Cantalupi; Linden); ma ho creduto precisare un po' maggiormente perchè questi scrittori hanno lasciato alcuni punti oscuri. Così il Mommsen (II p. 286 n. 6) dice che Silla aveva libere le comunicazioni con Roma per la *Via Praenestina*, i Sanniti per la *Via Latina* e *Labicana*. Ciò non mi pare sostenibile, anzitutto perchè esistevano attorno a Praeneste le trincee di Ofella, e poi perchè Silla *sbarrava* il passo. Dobbiamo quindi intendere che la prima via era chiusa da Ofella, le altre due da Silla. Ammettere lo sbarramento (Cantalupi, *La guerra civ.*, p. 19) a Nord di Palestrina è insostenibile pure, perchè i Sanniti, se avessero avuto tal via aperta su Roma, non avrebbero tardato tanto a seguirla; nè si potrebbe attribuire ad un generale come Silla un errore così grave.

(2) Comunque si voglia evitare di far doppioni, evidentemente la sortita di C. Mario ricordata da Appiano non si può far coincidere con quella narrata in Livio (*Periochae*, LXXXVII) subito dopo la battaglia di Sacriporto e la presa di Roma, " (Sulla) Marium erumpere temptantem reppulit ", perchè essa è narrata anche prima della battaglia di Clusium, di cui si parla nella *Perioca* seguente.

poco atta ad esser seguita (che però Pompeo poteva raggiungere facilmente p. e. a Forum Cassii distante in linea retta da Narnia circa chilometri 37) e la Clodia lontana circa km. 44. Dal lato Sud la posizione di Pompeo dominava i due gruppi di linee *a)* per la vallata del Tevere, anzitutto il fascio di vie ricordate, a cui bisogna aggiungere la Salaria per mezzo della via Quinctia (Narnia-Reate); *b)* per la valle dell'Avente, dove la via più facile era quella del Tolenus, Carsioli (sulla Valeria) Sublaqueum Anagnia. Questa via sboccava però oltre Preneste, e non doveva per allora esser tentata dagli eserciti Carboniani, che per ora, anzichè a riunirsi coi Sanniti per superare la posizione di Silla, dovevano mirare a prenderlo tra due fuochi.

Il grande tentativo del legato Marcio, su cui erano riposte da Carbone tante speranze, fallì miseramente. Appiano (I, 90) non ce ne dice se non che esso fu sorpreso da Pompeo *ἐξ ἐνέδρας ἐν τῷ στενῷ*, e sconfitto con gravi perdite: il resto dell'esercito venne circondato. Marcio, ingannando il nemico col lasciare accesi i fuochi dell'accampamento, come già aveva fatto Carrinate, riuscì a liberarsi felicemente, ma l'esercito gli si ribellò, incolpando della rotta la scarsa abilità del comandante. Una parte si disperse alle proprie case, una legione senza ordine si ritirò ad *Ariminum*, presso C. Norbano; Marcio ritornò con sole 7 coorti al console Carbone presso Clusium. Non sappiamo dove sia avvenuto lo scontro, ma il dato della legione ritiratasi ad *Ariminum*, rende assai probabile che esso sia avvenuto sull'uno dei rami della via Flaminia: inutile sarebbe pensare, per ora, a saperne di più.

E contemporaneamente all'incirca le speranze di Carbone rovinavano per quanto si riferiva anche alla riscossa nell'Italia Superiore. Anzi il tentativo di riscossa del proconsole Norbano, preludeva allo sfacelo delle forze democratiche in tutta la Gallia Cisalpina. *Περὶ τὰς αὐτὰς ἡμέρας*, della rotta di Marcio, il proconsole C. Norbano, rinforzato, lo abbiamo veduto, da truppe inviategli dall'Etruria dal console Carbone (1), aveva tentato un

---

(1) Da Appiano (I, 91) sembra apparire che anche Carbone abbia preso parte alla battaglia: *καὶ περὶ τὰς αὐτὰς ἡμέρας ἐν Φαυεντίᾳ Κάρβων καὶ Νωρβανὸς .....ἐπὶ τὸ Μετέλλου στρατόπεδον ἐλθόντες .... ἐς μάχην ἐξέταττον*

colpo decisivo contro l'accampamento di Q. Metello a Faventia. Ma dobbiamo dire che della sconfitta subìta una grande responsabilità risale sul comandante, il quale non considerò qual imprudenza grandissima fosse il tentare una sorpresa in condizioni difficili, con truppe poco sperimentate e pressochè raccogliticce. Egli assalì pertanto Metello sull'imbrunire (*λοιπῆς οὔσης ὥρας μιᾶς*) su un terreno difficile e coltivato a vigneti. Conseguentemente Metello ebbe buon gioco, respinto il nemico, a contrattaccarlo con esito decisivo. Secondo Appiano circa 10.000 furono i morti (si intende il complesso delle perdite), 6000 passarono dalla parte di Metello, gli altri si dispersero; solo 1000 ripararono ad Arretium, congiungendosi coll'esercito di Carbone.

Ed ora avvenne lo sfacelo doloroso e vergognoso delle forze democratiche della Gallia dinanzi a Metello: una legione lucana, comandata da P. Albinovano, ad insaputa del comandante, passò al campo di Metello. Il suo comandante allora, uno dei mariani proscritti nell'88 a. C., in seguito alla rivoluzione Sulpicia, pensò di salvarsi col tradimento dalla catastrofe che vedeva ormai imminente. Accordatosi segretamente con Metello invitò a banchetto i capi dell'esercito democratico C. Antipatro, Flavio Fimbria ed altri, e li trucidò. Quindi passò a Metello. Arimino

---

κ. τ. λ. Così hanno ritenuto i più dei moderni (Drumann-Groebe, p. 394; Neumann, p. 584; Mérimée, p. 180; Linden p. 47). Non mi posso indurre a ritenere che Carbone per qualunque motivo abbia abbandonato la posizione centrale di Clusium, dalla quale poteva mantenersi in comunicazione ugualmente facile colle varie forze distaccate al suo comando, e ritengo col Mommsen, II, p. 280, e il Cantalupi (*La guerra civ.*, p. 21) che vi sia in Appiano uno spiegabilissimo *errore di riassunto*; di cui abbiamo veduto più sopra esempi notevoli e pienamente analoghi, e che si debba intendere che la battaglia fu combattuta dal proconsole C. Norbano, *avuti rinforzi* dal console Carbone. Effettivamente, nel racconto della catastrofe del legato Marcio, vien detto che una legione *senz'ordine* *ἐπανῆλθεν ἐς Ἀρίμινον*, cioè " ritornò indietro nella direzione di Ariminum ", mentre Marcio con 7 coorti sole tornò a Carbone. Questi non era dunque ad Ariminum. Nè può dirsi che Carbone fosse già tornato in Etruria, come fa il Linden. È chiaro infatti che il particolare d'essersi la legione ritirata ad Ariminum, prova che la situazione qui appariva più sicura che in Etruria, e non s'era ancora combattuta la battaglia di Faventia. Senza contare quanto ho osservato più sopra sulla verosimiglianza di questi " andirivieni di eserciti ".

e gli altri presidi passarono allora alle parti Sillane, e C. Norbano, vista ormai disperata la situazione, fuggì a Rodi. Più tardi, l'anno seguente (*Periochae,* LXXXIX), richiesta la sua estradizione da Silla, perchè segnato nelle liste di proscrizione, egli si uccise, mentre i Rodii stavano deliberando in proposito. La Gallia Cisalpina cadde così tutta in potere di Metello; non si tentò più, qua e là, che qualche disperata difesa isolata (App., I, 91).

Il piano grandioso di Carbone era fallito: dinnanzi alle truppe agguerrite di Silla, le truppe democratiche si erano mostrate d'un'insufficienza bellica e d'un'indisciplina impressionante. Ed anche i duci, Marcio e lo stesso C. Norbano, avevano mostrato quale maggiore, quale minore imperizia, mentre si doveva dire l'opposto per i legati di Silla. Un ultimo tentativo di Carbone, non sappiamo con quali intenti e quali speranze concepito, per soccorrere Preneste, inviando due legioni al comando del legato L. Giunio Bruto Damasippo, falliva pure come il precedente (App., I, 92). Al tempo stesso Quinzio, forse un altro legato, inviato nella Gallia Cisalpina, per tentare di iniziarvi una insurrezione generale, e che aveva già ottenuto con 5 legioni di milizie raccogliticce un successo notevole sorprendendo M. Licinio Lucullo, e obbligandolo a rinchiudersi con 8000 uomini (16 coorti), veniva sorpreso da una sortita del generale Sillano, e il suo esercito di volontari non resisteva all'urto e si disperdeva. Carbone, ormai disperato, dopo aver tentato ogni sforzo per rialzare la situazione del proprio esercito, abbandonava le truppe ai suoi ordini in Etruria, e si imbarcava per l'Africa. Ma le forze democratiche, abbandonate dai loro duci, Carbone e Norbano, disperse e ormai sfiduciate, trovavano nell'ultimo momento nel sannita Ponzio Telesino, *πολεμιστὴς ἀνὴρ καὶ μεγάλων ἀγόνων ἔμπειρος*, come lo dice Plutarco da Livio, il generale geniale e audacissimo che doveva risollevare ancora una volta le loro fortune, e che per poco non riuscì a strappare a Silla una vittoria di cui questi si sentiva ormai sicuro, e per la genialità dimostrata in tutta la guerra, aveva mostrato di essere pienamente degno. Uno studio sulla marcia di Ponzio e sulla battaglia di Porta Collina non potrebbe non portare a conclusioni importanti e nuove.

Note di epigrafia ellenistica.

Del Socio GAETANO DE SANCTIS.

I.

Tra le iscrizioni delfiche pubblicate recentemente dal Pomtow nelle "Götting. gelehrte Anzeigen" del 1913 (fasc. III p. 143 segg.) una ve n'è di speciale interesse, che egli ha saputo ricostruire da tre frammenti d'incerta provenienza (p. 171 seg.). In essa gli ieromnemoni e il loro segretario son lodati, tra l'altro, perchè

πρός τε τοὺς βασιλεῖς [Πτολ]εμαῖον καὶ Ἀντίγον[ον πρεσ-
βεις ἀπέστειλαν καὶ δι[έσω]σαν ὥστ' εἶναι τὴν ἀσφάλ[ει-
αν πᾶσιν παρ' ἀμφοτέρων, [α]ὐτοί τε πρὸς τοὺς ἄλλο[υς
5 *Ἕλληνας διεπρέσβευσαν καὶ κήρυκας διαποστέλλον-*
τες παρεκάλεσάν τε καὶ παρεσκεύασαν ἀσφάλει-
αν πᾶσιν τοῖς παραγινομένοις, φύλακας πανταχο[ῦ
καταστήσαντες ἐκόλασά[ν τε τοὺς ἀδικήσαντας] τῶν ἐ-
10 *ναχθέντων πρὸς αὐτοὺς κτλ.*

e perchè

τῆς συ[νόδου τῶν Ἀμφικτυόνων ἐν
Θερμοπύλαις διὰ τὸν πόλε[μον διακωλυθείσης κατὰ χρό-
νον πολύν, οὗτοι πρῶτον πα[ρέσχον συνελθεῖν τοὺς Ἕλ-
ληνας καὶ παρασκευάσαν[τες φύλακας κατέστησαν
15 *πᾶσιν τοῖς ἀφικνουμένοις ἀγορ[ατροῖς τὴν ἀσφάλειαν*
καὶ τὰς θυσίας καὶ τἆλλα πάν[τα συνετέλεσαν κατὰ τοὺς
νόμους τῶν Ἀμφικτυόνων λ[αμπρῶς φιλοτίμως καὶ εὐσε-
βῶς.

Queste lodi — che io, salvo un lieve ritocco ai v. 14-15 (*παρασκευάσαντες ἀσφάλειαν κατέστησαν π. τ. ἀ. ἀ. φύλακας καὶ αὐτόθι* Pomtow) ho qui ripetuto coi supplementi del Pomtow, soddisfacenti per la sostanza se pur non sempre, al v. 9 ad esempio, soddisfacenti in tutto per la forma — si riferiscono a provvedimenti presi non già per la sicurezza delle sacre ambascerie dirette ad una solennità panellenica, ma per assicurare il libero intervento dei rappresentanti degli Stati anfizionici al sinedrio comune e render possibile che novamente gli anfizioni si riunissero alle Termopile. È chiaro che a ciò si richiedeva soltanto. col consenso delle libere repubbliche greche, quello dei principi che avevano possessi territoriali nella penisola e più precisamente o presso le Termopile o in paesi appartenenti all'anfizionia. Ora i Tolemei d'Egitto non ebbero mai in Grecia possessi territoriali, se si eccettua Megara che fu tenuta da Tolemeo di Lago per qualche mese o settimana del 308, Corinto che lo stesso principe presidiò dal 308 al 305 o 4, Metana nell'Argolide che Tolemeo Filadelfo, pare, acquistò, non sappiamo precisamente quando, e i suoi successori conservarono (Beloch *G. G.* III 1 p. 640 n. 1). Di queste città Megara e Corinto erano atte, veramente, ad impedire o a render men facile il passo agli anfizioni peloponnesiaci; ma la ipotesi che la epigrafe spetti al 305 circa non è neppur degna d'essere discussa. Quanto poi al possesso di Metana, esso per le riunioni anfizioniche non aveva importanza alcuna. Nè vale il dire che il Filadelfo o l'Evergete potevano persuadere i loro amici di Grecia, Atene e i suoi alleati al tempo della guerra di Cremonide, Alessandro figlio di Cratero quando si ribellò ad Antigono, gli Achei da ultimo e Sparta, a lasciar tranquilli i popoli anfizionici; perchè Tolemeo ed Antigono nel decreto non intervengono punto presso i rispettivi alleati, ma per conto proprio assicurano agli Anfizioni la *ἀσφάλεια*.

È quindi evidente che può trattarsi soltanto di quell'unico Tolemeo che ha avuto ampi possedimenti nei pressi delle Termopile, Tolemeo Cerauno il re di Macedonia. La iscrizione è pertanto un documento del breve periodo in cui, anteriormente alla invasione gallica, i Greci cercavano di destreggiarsi tra lui e il suo nemico e rivale Antigono Gonata (marzo-aprile 281 — agosto-settembre 280; per la cronologia v. la mia *Storia dei*

Romani II 390 n. 2). E così si spiega bene come vi si dica che negli anni antecedenti per la guerra eran rimaste chiuse le Termopile e sospese le riunioni anfizioniche colà. Per la lunga guerra, deve intendersi senza dubbio, combattuta pel possesso della Grecia centrale e settentrionale da Demetrio Poliorcete prima, da Antigono Gonata poi, che con lievi intervalli si protrasse dall'intervento di Demetrio in Macedonia nel 294 fino quasi alla invasione gallica. Sarebbe invece assai più strano che le riunioni anfizioniche alle Termopile rimanessero sospese più tardi quando le Termopile erano in mano degli Etoli, ed essi avevano di fatto la preponderanza nell'anfizionia. Questa loro preponderanza, com'è noto, cominciò ad affermarsi per l'appunto dopo la invasione gallica; e allora o poco dopo essi acquistarono le Termopile per non abbandonarle più, pare, fino al 190. Il nostro decreto è dunque anche per questo anteriore all'età della preponderanza etolica nella Grecia centrale. Il che si conferma dal vedervi regolate faccende politiche importanti, come il libero passo ai delegati anfizionici e il libero intervento dei popoli anfizionici alla pilea, senza il menomo cenno d'intromissione etolica. Vedasi quanto diversamente il decreto anfizionico dell'anno di Damaios, che il Pomtow ripubblica nello stesso saggio con l'aggiunta di un nuovo cospicuo frammento (p. 174 seg.), ai *δόγματα τῶν Ἀμφικτυόνων* associ *τὰ δόξαντα τοῖς Αἰτωλοῖς*.

Entro quei termini la data del nostro documento può ancora precisarsi maggiormente. Ad esso diede occasione il buon esito d'un convegno anfizionico, che non sappiamo però se fosse di quelli che si tenevano in autunno o di quelli di primavera. Esclusa pertanto la riunione primaverile del 281, per la quale non vi sarebbe stato il tempo di ottenere guarentie da Tolemeo Cerauno, che appunto nel marzo-aprile di quell'anno, assassinato Seleuco, occupò la Macedonia, e l'autunnale del 280, che avvenne probabilmente quando il Cerauno era già perito combattendo contro i Galli, non rimangono se non l'ultima pilea del 281 e la prima del 280; tra le quali non abbiamo modo di scegliere; e del resto, in ragione del breve intervallo, non importa.

Comunque, la situazione politica presupposta dal decreto è quella originata in Grecia dalla disfatta navale d'Antigono Gonata levatosi contro Tolemeo Cerauno per contendergli il regno di Macedonia (*Memn.* 13). Allora fra la Macedonia indebolita

da tanti cambiamenti di dinastia e Antigono esautorato dalla nuova sconfitta potè parere che per gli Stati della Grecia centrale s'aprisse una nuova êra di libertà sotto la guida degli Etoli usciti incolumi da tante contese, mentre nel Peloponneso Patre, Dime, Tritea e Fare iniziavano la nuova lega achea. Ma fu speranza fallace. Chè da una parte l'incremento della potenza etolica suscitò tosto le gelosie di quella città che dal 294 aveva capitanato nel Peloponneso la guerra per la indipendenza e che ora, rassodata (o ricuperata) la propria autonomia, aspirava a maggiori fortune, Sparta. Dall'altra la invasione gallica mostrò tosto ai Greci la necessità d'una Macedonia potente, che fosse baluardo contro i barbari del settentrione.

La nostra epigrafe non importa solo come documento di questo periodo oscurissimo, sì anche per quel tanto che intorno alla cronologia delfica se ne ricava, confrontandola con altre iscrizioni men sicuramente databili. Circa i caratteri paleografici di essa veramente non c'informa punto il Pomtow che la pubblica, dal particolare di poco conto in fuori che l'*o*, il *ϑ* e l'*ω* sono più piccoli delle altre lettere. Ma egli non manca di notare a buon diritto la somiglianza che corre tra essa e il decreto anfizionico, già sopra menzionato, di Damaios; e rileva pure che la lode data al segretario degli anfizioni ha riscontro e in quel decreto e nelle iscrizioni in generale del gruppo d'arconti tra cui Damaios s'inserisce. Quel gruppo (Athambos, Damosthenes, Pleiston), che designa con la sigla D^1, il Pomtow lo riporta ora al 237-231, mentre il Beloch (*G. G.* III 2, 329 seg.) lo riferisce invece al 270-263. Non è questo certo il luogo di trattare a fondo la spinosissima questione della cronologia degli arconti delfici. Ma prescindendo da argomenti che a più d'uno non parranno, come non parvero al Beloch, decisivi, tratti dalla grafia e dalla disposizione di certe iscrizioni di questo gruppo, l'argomento principale contro la cronologia del Beloch è il seguente che riferirò con le parole del Walek *Die delphische Amphiktyonie in die Zeit der aitol. Herrschaft* (Berlin 1911, Diss.) p. 122: ' Vor allem zeichnen sich alle Urkunden unserer Gruppe in formeller Hinsicht durch die Hinzufugung des Namens des Grammateus der Amphiktyonen aus, wodurch sie mit den Inschriften der folgenden Gruppe aus den zwanziger Jahren engverwandt erscheinen und anderseits im scharfen Gegensatz zu

allen älteren Urkunden stehen, welche den Grammateus niemals erwähnen. Schon diese Tatsache allein würde genügen, um die Unhaltbarkeit der Belochschen Ansicht zu beweisen? '. Ora se veramente, come credo non dubbio, la epigrafe nostra in cui è messa in tanta evidenza l'opera del segretario spetta al 280, non solo la menzione del segretario anfizionico non basta più ad escludere per quelle altre la data del 270, ma riferendole a questa data si spiega anzi assai bene. Una differenza vi è del resto, capitale, tra il decreto anfizionico di Damaios e il nostro: la preponderanza manifesta che in quello hanno gli Etoli nell'Anfizionia. Ma siffatta differenza si giustifica anche se i due decreti distano d'un solo decennio: perchè di mezzo c'è a ogni modo, con tutte le sue conseguenze, la invasione gallica.

In conclusione non basta certo la nostra iscrizione da sola, a fissare la data di Damaios e degli arconti vicini. Basta però a dimostrare quanto sia vacillante anche questa parte dell'edifizio cronologico del Pomtow. Dal quale edifizio del resto con la dimostrazione che abbiamo dato indipendentemente il Tarn (*Antigonos Gonatas*, Oxford 1913, p. 394 n. 84), e, qualche tempo prima, io (negli ' Atti di questa R. Accademia ' vol. XLVII, a. 1911/2, p. 267 segg.), doversi riferire ad Areo II e non ad Areo I la epigrafe dell'arcontato di Emmenida edita dal Bourguet ' BCH ' 1911 p. 488, è stata già smurata, come nota il Ferguson ' Class. Review ' 1913 p. 271, ' if not the keystone..... at least a stone of structural importance '.

II.

Rinvenuto in Delfi, fu pubblicato non ha molto dal Walek in ' Revue de philologie ' XXXVII (1913) p. 262 segg. un notevole frammento d'un trattato fra Etoli e Beoti, in cui ad un accenno lacunoso agli opliti (che i contraenti, pare, dovevano all'occasione inviarsi scambievolmente con certi patti) e ad un articolo concernente la pubblicazione del trattato in Etolia, in Beozia e in Delfi segue in questi termini il testo del giuramento:

Συμμα|[χήσ]ω κατὰ τοὺς ὅρκους καὶ τὰς συνθήκας τὰς γεγενημένας
10 *[Βοιωτ]οῖς καὶ Αἰτωλοῖς καὶ Φωκεῦσιν τοῖς μετ' Αἰτωλῶν ἀδόλως*
[οὐδὲ] ἐνκαταλείψ[ω] οὔτε πολέμου ὄντος οὔτε εἰρήνης
[ἀλλὰ βο]ηθήσω παντὶ σθένει καθ' ὅ τι ἂν παρακαλῶσι· εἰ μὲν εὐ-
[ορκοίην π]ολλά μοι κἀγαθὰ εἴησαν, εἰ δ' ἐφιορκοίην ἐξώλης εἴην
[αὐτὸς καὶ] γένος· εἰ δέ τις ὅπλα ἐπιφέροι ἐπὶ Βοιωτοὺς ἐπὶ πο-
15 *[λέμωι ἢ ἐπ' Αἰ]τωλοὺς βοηθεῖν ἀλλήλοις παντὶ σθένει,*
[εἰ δέ τις φίλ]ος Βοιωτοῖς ἢ σύ[μμαχος....

Per intendere storicamente la importanza di tale accordo, conviene determinarne anzi tutto la data. Al qual fine giova tenere presente che E. Bourguet, giudicando dai caratteri, sarebbe disposto ad attribuire la epigrafe alla fine del IV secolo o al più tardi al principio del III. Entro questi limiti il contenuto dimostra alla prima che il trattato è posteriore alla battaglia d'Ipso. Dalla guerra di Lamia infatti a quella battaglia i Beoti, ora propendendo per l'uno ora per l'altro dei Diadochi, non furono in realtà che satelliti minori nel sistema degli Stati ellenistici. Solo dopo il 301 gli Etoli, i Focesi, i Beoti, gli altri piccoli Stati della Grecia cominciarono ad avere in parte una relativa libertà di movimento. Chè alla Beozia e alle regioni vicine pare soprattutto riferirsi quanto Plutarco *Demet.* 3 dice dei possedimenti di Demetrio Poliorcete dopo la battaglia d'Ipso: *ἐξέπιπτον γὰρ ἑκασταχόθεν αἱ φρουραὶ καὶ μεθίστατο πάντα πρὸς τοὺς πολεμίους*; mentre Megara, Corinto e buona parte almeno dei possedimenti peloponnesiaci rimasero fedeli, volenti o nolenti, al principe sconfitto (Beloch III 2 p. 302). Ma stupirebbe in questi anni di non vedere partecipe ad un trattato per la difesa della libertà quello fra gli Stati della Grecia centrale che più efficacemente si studiava di mantenere la propria autonomia a fronte del Poliorcete, Atene (cfr. i miei *Contributi alla storia ateniese* in 'Studi di storia antica' II 25 seg.): tanto più che le buone relazioni fra Atene e la Beozia

in quel torno, son testimoniate dall'essersi in Beozia rifugiato l'ateniese Lacare (Plut. *Demet.* 33. Polyaen. III 7, 1) quando la città nel 294 venne novamente in mano di Demetrio Poliorcete. E del resto nella misura stessa che s'estendeva la ribellione contro Demetrio pare che tornasse allora a vigoreggiare l'autorità di Cassandro. Ne sono indizio e la frase di Plutarco su citata, *μεθίστατο πάντα πρὸς τοὺς πολεμίους*, e una notizia di Pausania (I 25, 7) circa le origini della tirannide di Lacare (v. i *Contributi* cit., p. 26 n. 2) e l'asserzione d'Eusebio (I 241 Schöne) che ad Elatea morì nel 297 il figlio di Cassandro Filippo, se per Elatea deve qui intendersi col Beloch (III 2, 301) la città focese. Difficoltà del resto queste gravi sì, ma non insuperabili per riferire al 300 circa il nostro trattato fra l'Etolia e la Beozia; se non si aggiungesse che in questo periodo, prima delle dimostrazioni di forza date dagli Etoli intorno al 290 nella guerra accanita contro Demetrio Poliorcete, riesce meno spiegabile l'incremento di potenza all'esterno che è presupposto dalla stretta amicizia loro coi Focesi o meglio dalla egemonia su parte della Focide significata nella espressione del trattato *Φωκεῖς οἱ μετ' Αἰτωλῶν*.

Ma anche men verisimile è che il documento spetti agli anni 294-282. In quegli anni novamente, come prima della battaglia d'Ipso, i popoli della Grecia centrale furono travolti nelle guerre dei maggiori Diadochi. E non si vede qual posto e quale importanza avrebbero potuto avere, in tanto strepito di guerra, alleanze così limitate come quella cui si riferisce l'epigrafe. Vediamo a ogni modo più partitamente. Conquistata la Macedonia, Demetrio tre volte fece guerra ai Beoti. La prima li trovò impreparati affatto e, pare, soli (Polyaen. IV 7, 11, cfr. Wilamowitz *Antigonos v. Karystos* p. 203): la seconda superò una loro ribellione promossa dagli Spartani sotto Cleonimo (Plut. *Demetr.* 39): la terza li vinse, novamente indotti a insorgere dalla sua spedizione in Tracia, per quanto soccorsi anche da un altro suo nemico, Pirro, che invase appunto la Tessaglia per fare una diversione a loro profitto (Plut. *Demet.* 39 seg.). Se dunque i Beoti nella prima guerra rimasero probabilmente soli, nella seconda e nella terza Etoli e Focesi non furono nè i loro unici alleati nè i più attivi. Sicchè come non alla prima, così neanche all'una o all'altra delle due ultime pare sia da ri-

ferire il documento in cui come alleati dei Beoti compaiono soltanto Focesi ed Etoli.

E tuttavia circa questo tempo si avverò per la prima volta una delle condizioni di fatto che la nostra epigrafe presuppone: vale a dire, il predominio degli Etoli in Delfi, che non è molto anteriore al 290 (Plut. *Demet.* 40) e contro cui appunto nelle Eleusinie celebrate in Atene nel 290 gli Ateniesi invocavano, in un carme itifallico conservato da Ateneo VI 253 e inteso per la prima volta a dovere dal Wilamowitz *Antigonos* p. 242, la protezione del re, permise e preparò il predominio etolico nella Focide (cfr. A. Reinach, " Journ. d'arch. numism. „, 1911, p. 224 sgg.).

Da allora, per circa un decennio, gli Etoli perseverarono nell'avversione, i Beoti nell'amicizia verso Demetrio Poliorcete e il suo successore Antigono Gonata. Così quelli si accostarono a Lisimaco quando ebbe occupato il trono macedonico (v. i miei *Contributi* p. 33 n. 1). E questi riebbero bensì la libertà da Demetrio nel 287 (*Θηβαίοις ἀπέδωκε τὴν πολιτείαν*, Plut. *Demet.* 46), ma rimasero fedeli alla sua casa, tanto che come in Beozia, dopo cacciato di Macedonia, il Poliorcete aveva radunato e ricostituito quel che gli rimaneva di forze, così in Beozia ripiegò nel 281 Antigono sconfitto da Tolemeo Cerauno (Memn. 13). Dopo ciò peraltro, se è forse arrischiato l'asserire che avvenne in Beozia una vera e propria ribellione contro Antigono — in questi termini il Walek *Die Delphische Anphiktyonie* p. 54 n. 20 può aver ragione contro il Beloch III 1, 259 — e se anzi è probabile che le relazioni d'amicizia non fossero troncate, la Beozia, già libera da guarnigioni, si riaffermò potenza indipendente. Come tale essa mandò nel 279 un suo contingente alle Termopile (Pausan. X 20, 3); e come tale, più tardi, in lega con gli Achei resistette, invano, circa il 245, agli Etoli (Polyb. XX, 4; Plut. *Arat.* 16). Sembra quindi assai acconcia la supposizione che, allora, nel primo momento della novamente asserita indipendenza, si stringesse in amicizia non con gli avversari della Macedonia nel Peloponneso, ma con gli Etoli i quali, dopo aver combattuto per un decennio e mezzo Demetrio ed Antigono, dovevano aver fatto pace con Antigono vinto in Tessaglia e aver stretto con lui, da pari a pari, s'intende, da potenza a potenza, relazioni amichevoli. *In Graecia* (narra Giu-

stino XXIV 1, 1-5 non senza qualche inesattezza d'espressione, ma dipingendo bene nel tutt'insieme le condizioni della penisola in quei tempi) *dissidentibus inter se bello Ptolomeo Cerauno et Antiocho et Antigono regibus, omnes ferme Graeciae civitates ducibus Spartanis velut occasione data ad spem libertatis erectae missis invicem legatis per quos in societatis foedera alligarentur in bellum prorumpunt et ne cum Antigono sub cuius regno erant bellum coepisse viderentur socios eius Aetolos adgrediuntur.* Queste relazioni amichevoli, che non menomarono punto la libertà d'azione dell'Etolia all'estero nè posero un freno alle sue mire d'espansione, durarono poi a lungo (cfr. i miei *Contributi* p. 35 n. 1) negli anni seguenti, interrotte appena da una breve parentesi aperta dal ritorno di Pirro in Grecia e chiusa dalla sua morte. Riferendo pertanto il trattato fra Etoli e Beoti al 281 0 si spiega assai bene e lo spirito d'indipendenza che tra i principi contendenti mostrano i popoli della Grecia centrale e la mancanza d'Atene, indebolita ed esautorata, e quella dei Peloponnesiaci avversi alla Macedonia, che le loro particolari ambizioni mettevano in lotta con gli Etoli.

Dopo la invasione gallica e prima della guerra di Cremonide un trattato come il nostro sarebbe stato impossibile fra Etoli e Beoti? Non oserei asserir ciò. Nulla, per questo periodo, sappiamo dei Beoti e poco degli Etoli. Ma, fra le possibilità varie, quella è da preferire che meglio s'accordi con le osservazioni cronologiche fatte dal Bourguet sulla paleografia: quella dunque che meno si discosti dai primordi del sec. III. Tale è la ipotesi or ora proposta, che mi sembra d'aver anche dimostrata per ogni rispetto consentanea con quel che sappiamo sulle condizioni della Grecia circa il 280.

Un testo di grammatica latino-veneta del sec. XIII.

Nota di GIUSEPPE MANACORDA.

Un testo di grammatica latino-volgare del sec. XIII, destinato ad uso scolastico, non è più una rarità, dopo che frammenti di un libretto siffatto, di origine bergamasca, pubblicò, commentandolo grammaticalmente, Remigio Sabbadini (*), ed un altro, di provenienza veronese, molto più esteso e ricco di esempi volgari, rese noto, illustrandolo in particolare dal lato glottologico, il De Stefano (**). Questo che io ora segnalo agli studiosi, è rappresentato da un solo foglietto — due facciate — il quale trovasi a guardia del cod. 1796, pergamenaceo, dell'Universitaria di Bologna, contenente il noto testo grammaticale in versi di Everardo di Bethun, voglio dire il *Graecismus*. Il codice del Bethun paleograficamente appare del sec. XIII, ed a quel secolo lo assegna nel suo catalogo Lodovico Frati (***); il foglio di guardia — se pure è lecito tentare una assegnazione di tempo in base alla sola scrittura — pare a me, ed a qualche valente paleografo, al quale lo sottoposi per esame, dell'estremo sec. XIII o del principio del XIV. È notevole il fatto che questo stesso foglio di guardia, ove si legge il frammento di grammatica latino-volgare, reca l'indicazione che il libro — s'intende il *Graecismus* — fu *ad usum* del domenicano bolognese Tommaso de poetis, ma appartenne al Convento dei predicatori di Bologna. Questa notazione, che appare del sec. XV,

(*) In " Studi medievali „, vol. I (1904), fasc. 2°, pag. 281.

(**) In " Revue des langues romanes „, tom. XLVIII (1905), pag. 495.

(***) *Indice dei codici latini conservati nella R. Biblioteca universitaria di Bologna*, negli " Studi italiani di filologia classica „, vol. XVI e XVII, Firenze, Seeber, 1909, n° 930 (1796).

non va trascurata, anzi, per quello che dirò poi, va posta a confronto col fatto che anche il testo di grammatica latino-bergamasco, edito dal Sabbadini, fu trovato a frammenti, usati come guardia, in un codice ascetico, appartenente ai frati minori milanesi.

L'importanza di questi testi latino-volgari dei secoli XIII o XIV è doppia, perchè interessano, da un lato la storia della cultura e della scuola, dall'altro la glottologia.

L'età nella quale questi testi vengono compilati — l'estremo duecento — risponde a quella nella quale la scuola laica e libera nei nostri Comuni si afferma risolutamente di fronte alla scuola vescovile e parrocchiale; la scuola laica è sostenuta dalla borghesia mercantile dei Comuni, che a detta scuola invia i propri figli, pagando l'onorario — maggiore o minore, a seconda della classe o del grado di studio — al pedagogo (*). È l'età nella quale dai Comuni liberi sorge una poesia in volgare, schietta e viva nella sua rozzezza, che si fa interprete dei sentimenti sinceri del popolo minuto. — Se a Bergamo, a Verona vanno assegnati i due testi fin qui noti di grammatica latino-volgare, questo che io presento è certo veneto e mi pare debba riferirsi a Padova, glottologicamente. Siamo adunque davanti a documenti di quel volgare, che già in quel tempo era usato in componimenti poetici, quali i poemetti di Giacomino di Verona ed il *Lamento della sposa padovana*. Non si dimentichi che nell'estremo duecento in Toscana un maestro-notaro (e forse anche poeta), Goro d'Arezzo, scrivendo di grammatica, adduceva non pochi esempi in volgare (**). La borghesia insomma, avida di cultura, si creava scuole proprie e per quelle si preparava dei

---

(*) Mi sia lecito a questo proposito rinviare alla mia *Storia della scuola in Italia*, vol. I: il *Medio Evo*; parte I, cap. IV, V, VI (scuole cenobiali, private, comunali), e parte II, cap. V, § 1. — *Le grammatiche*. — Palermo, Sandron.

(**) Il testo di Goro vien fatto conoscere, ed in parte edito, da C. Marchesi, *Due grammatici latini del M. E.*, in " Boll. d. Soc. filologica romana ", n° 12, Perugia, 1910. — Il Marchesi dubita che Goro grammatico possa essere tutt'uno con Goro notaio e poeta, ma il Novati (*Le epistole di Dante*, Firenze, Sansoni, 1906) pose già in rilievo come Goro di Arezzo succedette a fra' Guidotto, quale maestro di retorica in Siena.

testi pratici, che permettessero — a chi non poteva avere col latino la dimestichezza continua, che avevano i chierici — di vedere la corrispondenza di significato tra il latino, in uso nelle carte, ed il volgare corrente sulle bocche di tutti (*).

È notevole che questi testi latino-volgari, in quanto sorgono nel sec. XIII o XIV, sono perfettamente contemporanei ai grandi trattati versificati di grammatica, i quali sono scritti appunto nel sec. XIII, dopo le vaste riforme scolastiche-clericali di Innocenzo III e di Onorio III (1215-1219). Di tali testi versificati sono sempre autori monaci, come è noto, dei due nuovi ordini religiosi, i francescani, cioè, e — zelantissimi della scuola — domenicani.

La *Poetria nova* dell'inglese Gaufredo di Vinesauf — commentata da Bartolomeo di San Concordio (**) — il *Graecismus* del Bethun, molto spesso glossato nei codici pervenutici, come in questo appunto bolognese — sopratutto il *Dottrinale* del Villadei, tutti testi poetici redatti da monaci del sec. XIII, nonchè il *Catholicon* di Giovanni Balbi, domenicano di Genova, ebbero presso di noi una fortuna immensa, come provano le tavole delle biblioteche scolastiche medievali, che io compilai (***). Pure quelle tavole sono frutto di spogli fatti sui cataloghi di biblioteche cenobiali; alcune librerie di maestri privati di cui mi fu noto il catalogo, recano, è vero, i testi poetici di grammatica: ma sono librerie di maestri dell'estremo sec. XIV o del sec. XV. Se un catalogo si conoscesse del sec. XIII o del sec. XIV di una biblioteca appartenente ad un maestro libero e laico, è probabile che in quello, non i testi poetici del Villadei, del Bethun, o del Vinesauf troveremmo, bensì quelli latino-volgari: mi induce a crederlo, per ragion di antitesi, il fatto stesso che due dei testi latino-volgari che noi conosciamo, li ritroviamo in librerie cenobiali lacerati, dissi, ed usati come legatura di testi sacri, oppure, come nel codice bolognese, a guardia appunto del

---

(*) Anche in Francia il Thurot segnala del sec. XIV qualche codice contenente testi in volgare (*Notices et extraits*, vol. XXII, pag. 169).

(**) Il commento di Bartolomeo da San Concordio alla *Poetria nova* trovasi nel cod. 311 della Casanatense e di esso si è occupato già il sottoscritto in apposito studiolo.

(***) Nella cit. *Storia della scuola*, vol. II, Appendice.

Graecismus di Everardo. È vero che lo stesso Alessandro di Villadei consiglia che talora nella scuola è bene usare il volgare (*), ma è vero altresì che questi testi scolastici latino-volgari appaiono extra-chiesastici — quasi dicevo — antichiesastici, anche per certo soffio più vivo di umanità, di vita reale, pratica, comunale, che corre e si diffonde, pur tra le bigie pagine grammaticali, e scoppietta qua e là negli esempi. Si noti nel testo nostro l'esempio in latino: *Petrus amat Bertam* e *Berta amatur a Petro* — e — a parte l'eco della leggenda cavalleresca, pur manifesta nella scelta del nome — si cerchi se si trova alcun che di simile in Alessandro, in Everardo, o nell'arcigno Giovanni Balbi, nemico ai laici. Ed ancora si noti l'esempio: *Mesere la podeste priva Pero del so oficio,* eco schietta questa di vita comunale risonante in scuola!

Gli esempi addotti tanto dal nostro testo, quanto da quello veronese, sono tolti per lo più dalla vita scolastica: così essi da un lato provano l'uso didattico del testo, dall'altro recano testimonianze non trascurabili del costume scolastico medievale. Se il testo veronese adduce ad esempio: *i scolari batuj va a la piaza* (**), e in quello di Goro d'Arezzo si legge il nobile esempio: *vapulo a magistro* (***); non altrimenti nel nostro troviamo questo significante esempio: *Pero fu despoià de le vestimenta dal maistro.* E perchè *Pero* debba essere stato spogliato dal maestro, è ben chiaro a chi osservi la fig. 15 del lavoro mio su citato, ove si vede un maestro che percuote le nude parti posteriori di uno scolaro sorretto a cavalcioni e tenuto fermo dai compagni!

Remigio Sabbadini dimostrò già che Guarino non fu quel grande riformatore dell'insegnamento grammaticale che si credeva; anzi egli non poco si mostra fedele ai grammatici medievali. Nel '400 — se si eccettua il Valla — gli umanisti, da

(*) Reichling. Praef. al *Dottrinale* ed. in " Monumenta Germaniae Paedagogica ,, vol. VII, pag. LXI. 7-10:

..... qui doctoris vice fungens
Atque legens pueris, *layca lingua* reserabit,
Et pueris etiam pars maxima plana patebit.

(**) De Stefano, pag. 522.

(***) Marchesi, pag. 35.

noi, furono ancora ligi al Villadei, che ritrovasi in tutte le loro biblioteche, che viene dato alle stampe più volte, che trova anzi in Italia vari commentatori, quali Pilade da Brescia e — fortunatissimo — Lodovico Guasco. Il vero e proprio tentativo di creare un testo scolastico spontaneo, fresco, lontano dalle artificiosità e dagli arzigogoli scolastici, lo troviamo nel nostro Comune medievale, in quel Comune borghese, mercantile, in cui tutto, arte, poesia, sgorga spontaneo dal popolo, senza dottrinario sforzo, per schietta creazione. Ebbene, se il testo edito dal De Stefano contamina — dirò così — la didattica popolare con quella culta e chiesastica, disseminando qua e là regole in versi, il testo bergamasco del Sabbadini e questo restano documento della pura, schietta didattica ducentesca, sorta tra il popolo, e che tramonterà per cedere il posto ai testi versificati, o, più tardi, a quelli umanistici, via via che la scuola, da libera e popolare, si tramuterà in comunale o signorile, ed umanistica. — Notinsi, nel testo che segnalo, le lunghe serie di vocaboli latini colla versione volgare a lato: qui siamo di fronte, non ad una pura grammatica, ma ad una grammatica-glossario, quale la pratica della vita richiede. Di fronte ai glossari medievali di Ansileubo, del Papia, di Uguccione, del Balbi, che dànno in latino la spiegazione dei vocaboli latini, e si rivolgono quindi a coloro che l'antica lingua conoscono, questo testo è destinato agli indotti, a chi di latino non sapeva, proprio come agli indotti si rivolgevano nel sec. XIV i dettatori in volgare. È noto ad es. che il *Fiore di rettorica* si propone appunto di ammaestrare " i laici, che hanno valente intendimento... i gentili huomini volgari „. Come incunabulo adunque dei nostri vocabolari latino-volgari il testo bolognese può trovare posto fra gli antichi glossari romanzi, che già il Diez prese ad illustrare (*), benchè di quelli sia più recente.

Glottologicamente, il testo nostro, dissi, è facilissimo ad assegnarsi al territorio veneto, nè occorre, credo, prova in proposito; difficile invece appare il riferirlo a questa od a quella

(*) *Anciens glossaires romans*, Paris, 1870.

città del veneto, appunto perchè i molti esempi di verbi tradotti si presentano tutti all'infinito, senza varietà di flessioni, e le proposizioncine, sulle quali siamo costretti a poggiare le nostre osservazioni, sono in realtà assai povera cosa. A farlo ritenere padovano ci induce la conservazione o interpolazione della *e* atona postonica: notisi *libero* (= libro), *zénzere* (= cingere). Non farebbe al caso nostro il participio *toleto* (tolto) che il Mussafia (*) trova anche in altri testi veronesi (Giacomino) ed avrebbe la sua origine in un participio *tollectum* della bassa latinità.

Alcune forme e particolarità dialettologiche meritano, parmi, d'essere rilevate.

Fonetica.

c iniziale palatina passa in *z*: *zénzere* da cingere. Cfr. emil.: *zento*, *zentura*, *zento d'una zentura* (Monaci, *Crestomazia*, 445, 183).

c intervocalico degrada in *g*: *gramadega*, di regola nel veneziano, ma anche nel cremonese (Patecchio, *D. T.*, 147).

t intervocalico passa in *d* (*podeste*); il gruppo *li* intervocalico in *j*: da *spoliare* si ha *despojare*; cfr. *asomejare*, *fameja*, ecc. Osservisi pure la forma *nurigare*, e si confronti con *nurigamento* nella *Regola dei servi*, testo bolognese del 1281 (Monaci, *ivi*, 362, 151) e nel testo veneto *Della caducità della vita umana* (ed. Mussafia, testo E, v. 55). Nel testo però di Rainardo e Lisengrino, pure veneto, leggesi *nudrigare* (Monaci, 352, 196).

Morfologia.

Gli infiniti dei verbi non sono mai tronchi, ma sempre colla *e* finale, il che non è proprio del dialetto veneto, antico e moderno: che si tratti di influenza toscana già sul finir del sec. XIII?

Regolarmente venete sono le forme tronche dei participi in *a*, *u*, *i*: *comparà*, *metù*, *vestì*, ecc. Notevole la forma doppia del

(*) *Monumenti antichi di dialetti italiani*, nei " Sitzungsberichte " dell'Acc. di Vienna, 1864.

participio del verbo *odire*, che fa *ozu* ed *ozudo*. Di questa forma non trovo altri esempi: il Monaci segnala nel veneto il participio *oldù*, nel lombardo *olzudo*, nell'emiliano *olduo*, dal verbo *oldire* (= udire). Il Salvioni rileva nel trevigiano la forma *zu*, *zudo* da *gire* (*).

GIUSEPPE MANACORDA.

(*v*) ...*Petrus dat... soldos Martino.*

do das	per dare
contradico-cis	per contradire
mito-is	per mandare
fero-es	per portare
prepono-is	per metere inanci
compero (sic) as	per asomeiare
manifesto-as	per manifestare
mando-as	per mandare
oppono-is	per metere incontra, et sic similibus

Notandum est quod ista sunt illa verba activa quae possunt regere, ultra activum persone facientis, activum neutrius persone ex natura cause finalis vel ex natura cause materialis: verbi gratia dicendo *lo maistro amaistra i scoleri gramadega*, dicemus: magister docet scolares gramaticam — scilicet:

doceo-es	per amaistrare
rogo-as	per pregare
disco-is	per domandare
induo-sis	per vestire
cingo-is	per zenzere
moneo-es	per amonire
peto-is	per domandare
vestio-is	per vestire
calcio-as	per calzare
celo-as	per celare

Notandum est quod ista sunt illa verba activa quae possunt regere, ultra accusativum persone pacientis, ablativum neutrius persone,

(*) " Arch. Glott. ", XVI, 271.

a vel *ab* mediante, ex natura separacionis: verbi gratia dicendo: *Pero ode la lecion dal maistro*, dicemus: Petrus audit lecionem a maistro (sic) — scilicet:

audio-audis	per odire
suscipio-suscipis	per recevere
acipio-acipis	per tore
inteligo-inteligis	per intendere
recipio-recipis	per recevere
divido-dividis	per partire
segrego-as	per partire et sic similibus

Notandum est quod ista sunt illa verba activa quae possunt regere, ultra accusativum persone pacientis, ablativum neutrius persone sine praeposicione, ex natura cause materialis: verbi gratia dicendo: *mesere la podeste priva Pero del so oficio*, dicemus: dominus potestas privat Petrum suo oficio — scilicet:

spolio-as	per despoiare
pasco-is	per pasere
alevio-as	per aleviare
honoro-as	per onorare
nutrio-is	per nurigare
onero-as	per caregare
privo-as	per privare
cibo-as	per cibare
vacuo-as	per nudare

tamen michi videtur quod possent computari in una et eadem manerie cō verbis regentibus, ultra accusativum persone pacientis, genitivum vel ablativum neutrius persone sine preposicione, ut emo, vendo, ecc.

Notandum est quod verbum passivum est illud quod desinens in *or*, formatur ab activo desinente in *o* per adiunctione istius littere, scilicet *r*, ut amo, addicta *r*, fit *amor* et vult suppositum per nominativum persone pacientis et determinacionem per ablativum agentis, *a* vel *ab* mediante; et potest fieri conversa locucio, ut, Berta amatur a Petro — cum - Petrus amat Bertam, et sic de similibus.

Notandum est quod verbi passivi quinque sunt maneries, nam quidam possunt regere ultra (*la pergamena qui è mutila*) . . .

. . . . . .

(*r*) possunt regere ultra ablativum persone agentis, ablativum neutrius persone sine preposicione.

Notandum est quod ista sunt illa verba passiva quae possunt regere, ultra ablativum persone agentis, genitivum vel ablativum neutrius persone ex natura cause materialis, verbi gratia dicendo: *uno libero e sta compara da mi cento fiorini*, dicemus: unus liber fuit emptus a me centum florenorum vel centum florenis; — scilicet:

vendor-ris	per fire vendu
sacior-ris	per fire sacia
dampnor-ris	per fire dana
emor-ris	per fire compara
estimor-ris	per fire astima
purgor-ris	per fire purga
redarguor-ris	per fire represo.

Notandum est quod ista sunt illa verba passiva quae possunt regere, ultra ablativum persone agentis, dativum neutrius persone ex natura acquisicionis: verbi gratia, dicendo: *la sciencia fi data da ... a i omini del mundo,* dicemus: scientia datur a Deo hominibus mundi; — scilicet:

dor-daris	per fire dato
contradicor-ris	per fire contradito
mittor-ris	per fire manda
opponor-ris	per fire metu incontro
comperor-ris (sic)	per fire asomeia
manifestor-ris	per fire manifesta
ferror-ris (sic)	per fire porta
preponor-ris	per fire metu inanci.

Notandum est quod ista sunt illa verba passiva quae possunt regere, ultra ablativum persone agentis, accusativum neutrius persone ex natura cause finalis vel materialis: verbi gratia dicendo: *Pero fi amaistrà gramadega dal so maistro,* dicemus: Petrus docetur gramaticam a suo magistro — scilicet:

moneor-ris	per fire amoni
rogor-ris	per fire prega
petor-ris	per fire domanda
poscor-ris	per fire domanda
postulor-ris	per fire domanda
doceor-ris	per fire amaistra
celor-ris	per fire cela
induor-ris	per fire vesti
vestior-ris	per fire vesti
amictor-ris	per fire vesti.

Notandum est quod ista sunt illa verba passiva quae possunt regere, ultra ablativum, accusativum persone agentis, ablativum neutrius persone, *a* vel *ab* mediante, ex natura separacionis: verbi gratia dicendo: *la lecion fi ozuda da mi dal maistro*, dicemus: lecio auditur a me a magistro — scilicet:

accipior-ris	per fire toleto
dividor-ris	per fire desparti
segregor-ris	per fire desparti
seperor-ris (sic)	per fire desparti
audior-ris	per fire ozu
inteligor-ris	per fire inteso
recipior-ris	per fire recevu
suscipior-ris	per fire recevu.

Notandum est quod ista sunt illa verba passiva quae possunt regere, ultra ablativum persone agentis, ablativum neutrius persone sine praeposicione ex natura cause materialis, verbi gratia dicendo: *Pero fi despoia le vestimente dal maistro*, dicemus: Petrus expoliatur vestibus a magistro — scilicet:

privor-ris	per fire priva
spolior-ris	per fire despoia
honoror-ris	per fire onora.

L'Accademico Segretario
R. Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Marzo 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, D'Ovidio, Naccari, Peano, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari, Balbiano e Segre, Segretario.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica un telegramma di saluto inviato dal nuovo Ministro della Pubblica Istruzione, S. E. Daneo. La Classe unanime ringrazia e ricambia cordiali saluti.

Il Socio corrispondente Taramelli ha inviato in omaggio un suo opuscolo su *Giovanni Riva-Palazzi*, ed un altro intitolato: *Il paesaggio della " Gioconda „ e l'" Uomo pliocenico di Castenedolo „*.

Il Socio Camerano presenta, per la stampa negli *Atti*, una sua Nota: *Osservazioni intorno al lacrimale e al nasale bipartiti nel Camoscio*; ed il Socio Segre uno scritto di S. Cherubino: *Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè e sui loro moduli algebrici.*

LETTURE

Osservazioni intorno al lacrimale e al nasale bipartiti nel Camoscio.

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

(Con una tavola).

In una mia precedente nota (*) a proposito delle ossa fontanellari della fontanella *fronto-naso-maxillo-lacrimale* del camoscio formulai la domanda se esse si possano saldare col lacrimale, oltre che col nasale, col quale la saldatura è frequente.

La domanda era provocata dall'esame di due crani uno ♀ delle Valli Piemontesi e l'altro ♂ delle Valli Ossolane (figg. 15 e 16 della tavola unita alla nota sotto citata) e conchiudevo che da essi non era possibile una risposta sicura e che erano necessarie più ampie ricerche. La questione è da studiarsi in rapporto col fatto, non infrequente nei cranii di camoscio, della divisione dell'osso lacrimale in due parti.

Una nuova serie di 170 cranii di camoscio maschi, femmine e giovani di numerose località delle Alpi e del Caucaso, che ho potuto studiare dopo la pubblicazione della nota sopracitata, mi concede di precisare meglio il fenomeno della divisione del lacrimale.

I nuovi casi di divisione simmetrica del lacrimale sono: 1° In un cranio ♂ di due anni del Churfirsten (fig. 8); 2° in un cranio ♀ di meno di un anno di Cauco (fig. 2); 3° in un cranio ♂ adulto della Revier Rothis (Vorarlberg); 4° in un cranio ♂ di un anno di Ayse (fig. 5).

(*) *Osservazioni intorno alle ossa wormiane della " fontanella fronto-naso-maxillo-lacrimale e intorno all'osso " lacrimale " nel camoscio* " — " Atti R. Acc. Scienze Torino ", vol. XLVII, 1912.

La divisione del lacrimale è ben evidente nel solo lacrimale sinistro: 1° in un cranio ♀ di pochi mesi di Val Bavona (fig. 3); 2° in un cranio ♂ di pochi mesi di Val Formazza (fig. 4); nel solo lacrimale sinistro 1° in un cranio ♂ adulto di Peccia (fig. 6); 2° in un cranio di S. Bernardino (fig. 7).

Oltre che negli esemplari figurati nella tavola unita a questo lavoro, ho trovato segni di divisione del lacrimale analoghi a quelli dei lacrimali rappresentati nelle figg. 5 e 6 anche nei casi seguenti:

Nel lacrimale sinistro: 1° in un cranio di Val d'Aosta; 2° in un cranio di Valsavaranche; 3° in un cranio ♂ adulto di Val d'Ossola; 4° in un cranio di pochi mesi del Cimolais.

Nel lacrimale destro: 1° in un cranio di Cauco;

2° in un cranio ♂ di un anno dei Dents Vertes (Cant. Friburgo).

Sono poi frequenti i lacrimali nei quali nel loro margine a contatto col frontale si presenta assai spiccata una intaccatura seguìta da una sporgenza che corrisponde al punto in cui viene a far capo la linea di divisione del lacrimale (figg. 5, 8, 6, *a* e fig. 9 *a*) e che lascia supporre una primitiva divisione del lacrimale susseguita da una saldatura completa.

Rari sono i casi in cui la linea di divisione del lacrimale lo tagli in due parti quasi eguali per estensione e in cui la linea stessa sia schiettamente in direzione trasversale dell'osso, come nei lacrimali rappresentati nelle figg. 11, 14 della tavola della precedente nota e nelle figg. 4, 8 nella tavola unita a questo lavoro; per lo più il segmento inferiore, anche quando la linea di divisione è in direzione trasversale, è più piccolo del segmento superiore (figg. 3, 2).

Frequentemente la linea di divisione del lacrimale invece di essere in direzione trasversale e di giungere al margine a contatto col zigomatico, si porta in basso e fa capo al margine del lacrimale a contatto col mascellare superiore (figg. 16, 15, 13 della tavola della precedente nota, fig. 1 della tavola unita a questo lavoro).

In questi casi il segmento inferiore del lacrimale è notevolmente più piccolo del superiore e viene ad assumere una forma più o meno regolarmente triangolare.

In un cranio (fig. 7 *d*) si ha una disposizione particolare

dovuta forse a qualche causa traumatica, come lascia credere l'incisione anormale del mascellare superiore.

Nella mia precedente nota avevo espresso il dubbio che nei casi dei cranii rappresentati nelle figg. 15 e 16 della relativa tavola si trattasse non del segmento inferiore del lacrimale: ma dell'osso fontanellare che invece di unirsi col nasale si unisce invece col lacrimale.

Il nuovo caso che ho potuto esaminare nel cranio del Vorarlberg rappresentato nella fig. 1 della tavola, unita alla presente nota, in cui lo spazio fontanellare ha il suo wormiano cospicuo, unito al nasale e contemporaneamente presenta il segmento inferiore del lacrimale nella forma appunto indicata nelle figg. 15 e 16 sopra citate, concede di affermare che il wormiano non si salda col lacrimale e che, quando si ha la disposizione di cose come nelle figg. 15 e 16, si tratta del segmento inferiore del lacrimale e non di un wormiano della fontanella fronto-naso-mascillo-lacrimale.

La fig. 8 della tavola unita a questa nota, presenta pure il caso di un wormiano piccolo e saldato col nasale e di un grande segmento inferiore del lacrimale.

Dal numero relativamente notevole di casi osservati, nel materiale che ho avuto a mia disposizione, di divisione del lacrimale nei giovani e negli adulti, in tutta l'area di distribuzione geografica della specie, e dal numero relativamente notevole di casi in cui, pur non essendovi la divisione del lacrimale, si può tuttavia arguire, per le ragioni sopradette, che tale divisione vi sia stata, si può pensare che la divisione stessa sia da considerarsi come fatto normale, e che nel camoscio il lacrimale abbia due centri di ossificazione. Nella maggior parte dei cranii di camoscio l'unione delle due parti del lacrimale è precoce e completa.

A chiarire questa ipotesi sarebbe necessario studiare il lacrimale all'inizio della sua formazione, cosa certamente non agevole per la difficoltà di procurarsi il materiale adatto.

***

In un cranio ♂, di poco più di due anni, proveniente dal Caucaso occidentale (Valle dello Tschache, Gruppo del Ciugscc),

ho osservato una rara conformazione della parte inferiore del frontale in rapporto coi nasali, accompagnata da una speciale conformazione di questi ultimi, e da un caso di divisione trasversale di uno dei nasali stessi.

Il frontale si insinua profondamente fra i due nasali. Questa conformazione non è frequente e, oltre che nel cranio in discorso, l'ho osservata in un cranio di ♀ di tre anni di val di Campo (fig. 10) e in un cranio di ♂ di quattro anni del monte Antelao e, in una misura meno spiccata, anche in un cranio ♂ adulto di Dent du Broc (Friburgo), in un cranio di ♂ adulto della Valle del Gesso, in due cranii di individui molto giovani di Valle d'Ossola, in un individuo di Val Bavona e in un cranio femmina adulta del Vorarlberg. In nessuno tuttavia i prolungamenti dei frontali sono così estesi come nel cranio del Caucaso sopra detto (fig. 11) e nel cranio di Val di Campo (fig. 10). Nel cranio del Caucaso i nasali sono più corti di ciò che sogliono essere in generale nei cranii di poco più di due anni di età e hanno una forma che è frequente sopratutto nei giovani. Il nasale sinistro è nettamente separato in senso trasversale in due parti quasi di eguale estensione.

Casi di nasali bipartiti in senso trasversale se ne conoscono parecchi, oltre che nell'uomo, particolarmente negli Equidi e nei Suidi (*). Nei camosci credo che il caso in discorso sia il primo che viene osservato. In questi animali tale conformazione è certamente molto rara.

(*) Confr. a questo riguardo: F. Le Double, *Traité des variations des os de la face de l'homme* ecc., Paris, Vigot Frères, pag. 27 (1906); U. Zimmerl, *Intorno ad un'anomalia delle ossa nasali in alcune specie di animali domestici*, " Monitore Zool. Ital. „, vol. XII, pag. 43 (1901); P. Livini, *Varietà delle ossa nasali*, " Idem „, vol. IX, pag. 100 (1898); ecc.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

(Le figure sono in grandezza naturale).

Fig. 1. — Maschio adulto di camoscio (Revier Rothis) (Vorarlberg) (*a* wormiano fontanellare saldato col nasale — *b* segmento inferiore del lacrimale — *c* segmento superiore del lacrimale — *f* frontale — *n* nasale — *m* mascellare superiore).

" 2. — Femmina di meno di un anno di Cauco (lettere come nella figura precedente).

" 3. — Femmina di meno di un anno di Val Bavona (*o* intermascellare che eccezionalmente si spinge fino a contatto coi nasali — le altre lettere come nella figura 1).

" 4. — Maschio di meno di un anno di Val Formazza (lettere come nella figura 1).

" 5. — Maschio di Ayse di un anno (lettere come nella fig. 1 — *a* punto di partenza della linea di separazione dei due segmenti del lacrimale).

" 6. — Maschio adulto di Peccia (lettere come nelle figure 1 e 5).

" 7. — S. Bernardino (*m* zigomatico — *max.* mascellare — le altre lettere come nella figura 1).

" 8. — Maschio di due anni del Churfirsten (*p* wormiano saldato col nasale — le altre lettere come nella figura 1).

" 9. — Maschio adulto — Valli Piemontesi (*a* insenatura del lacrimale dalla quale parte nei lacrimali divisi la linea di separazione dei due segmenti e prominenza susseguente — *z* zigomatico — *l* lacrimale — *f* frontale — *n* nasale — *m* mascellare).

" 10. — Femmina di tre anni di Val di Campo (*n* nasali — *m* mascellari — *l* lacrimale — *f* frontali).

" 11. — Maschio di poco più di due anni della Valle della Tschache (Caucaso occidentale) (*l* lacrimali — *f* frontali — *m* mascellari — *n* nasale intiero — *o* segmento superiore del nasale diviso — *p* segmento inferiore).

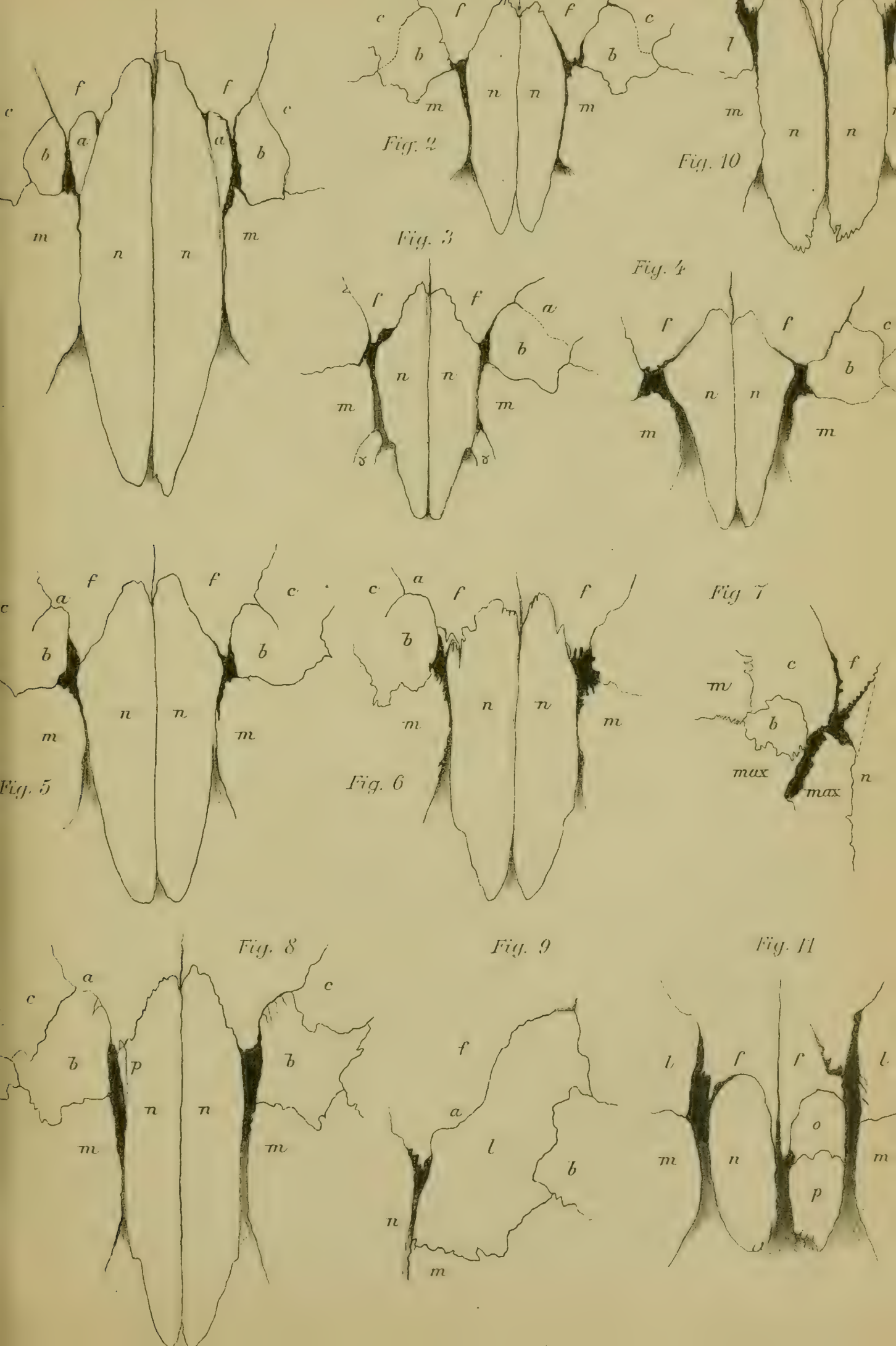


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
max
max

Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè e sui loro moduli algebrici.

Nota di SALVATORE CHERUBINO

Nella presente nota mi occupo delle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali *singolari* in sè.

Poichè la condizione d'identità birazionale di due curve iperellittiche rappresentate sopra una retta doppia mediante i *gruppi di diramazione* G, G' è che i gruppi stessi siano proiettivi, per scriverle tutte basta ricercare le forme binarie che ammettono gruppi proiettivi in sè.

Tale questione è senz'altro risoluta dalla formola del KLEIN

$$f(x_1, x_2) = F_1^{\alpha} . F_2^{\beta} . F_3^{\gamma} . \Pi_i (F_1^{\nu_1} + \alpha_i F_2^{\nu_2}) \text{ (*)}.$$

Tra le forme binarie così ottenute, volendo avere curve iperellittiche birazionalmente distinte, occorre sceverar quelle che sono proiettivamente distinte. Il che equivale a costruire i gruppi proiettivi che mutano in sè i gruppi poliedrali. La ricerca si compie agevolmente: il relativo risultato trovasi al n. 2 (**).

Come conclusione della I^a parte del lavoro, dò la tabella completa delle curve iperellittiche con trasformazioni birazio-

(*) *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Leipzig, 1884, p. 49).

(**) Non trovo traccia di tal risultato nè in WIMAN (ed. tedesca dell'Encicl., Bd. 1, Heft 5, p. 523), nè in VIVANTI (*Funzioni poliedriche e modulari*, Milano, 1906), nè in DE SÉGUIER (*Théorie des groupes finis*, Paris, 1904, 1912). Tuttavia credo che implicitamente possa esser occorso varie volte nella teoria dei gruppi proiettivi sulla retta.

nali in sè, assegnando per ciascuna famiglia il numero dei moduli ed il *genere del relativo gruppo poliedrale.*

Nella seconda parte, mi occupo del problema della determinazione dei moduli algebrici delle curve suddette: questo problema, come è noto, equivale a quello della determinazione dei periodi normali degli integrali di prima specie, su dati tagli.

Già il Bolza (*) aveva risoluto questo problema per il caso particolarmente semplice $p = 2$. Ma, almeno pel caso generale, non ho notizia che altri l'abbia già risoluto oppure tentato.

Valendomi dei noti principii esposti in una classica memoria del Sig. Hurwitz (**) scrivo le relazioni

$$\sum_{1}^{2p}{}_s\, m_{sl}\, \omega_{ks} = \sum_{1}^{p}{}_i\, \pi_{ki}\, \omega_{il} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)\ (l = 1, 2, \ldots 2p)$$

fra i periodi normali ω degli integrali di prima specie linearmente indipendenti per una curva algebrica dotata di una corrispondenza algebrica qualunque (***).

Dopo aver indicato *in generale* (§ 6) la possibilità ed il modo di calcolare gli intieri m_{sl} delle precedenti relazioni, mi trattengo brevemente sulle curve algebriche con trasformazioni birazionali in sè.

Passando alle nostre curve iperellittiche, deduco che la conoscenza degli intieri m_{sl} e di certe radici n^{me} dell'unità è sufficiente per determinare tutti i periodi degli integrali di prima

(*) *On binary sextic with linear transformations on themselves* (" Am. Journ. ", vol. X, 1888).

(**) *Ueber algebraischen Correspondenzen*, ecc. (" Math. Ann. ", Bd. 28, 1887, s. 561).

(***) Il Sig. Hurwitz veramente scrive le relazioni suddette pel caso particolare di integrali normali, ma le sue considerazioni valgono in generale. Delle relazioni sotto forma generale fa uso il Sig. Severi nella sua nota: *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una curva algebrica* (" Math. Ann. ", Bd. 74, 1913) (V. anche " Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris ", 156 (1913), p. 287). Anzi il Sig. Severi ha anche dimostrato, *a priori*, che quando son date le ω, i coefficienti π ed m sono univocamente determinati gli uni per gli altri (loc. cit., n° 3, pag. 7).

specie, meno, naturalmente, quelli che dipendono dai λ moduli che rimangono arbitrarii per la curva.

Infine, mercè opportuna scelta delle retrosezioni sulla riemanniana a due fogli della curva, riesco ad assegnare le relazioni lineari che determinano, in generale, i periodi ω per il caso di un gruppo ciclico qualunque operante sul gruppo di diramazione. Ed in questo caso rientrano tutti gli altri.

I.

Forme algebriche binarie ammettenti un gruppo finito di sostituzioni lineari che le trasformi in sè. Loro indipendenza proiettiva.

1. I tipi normali di forme poliedrali.

Considerando i gruppi poliedrali sotto la forma normale solita, la citata formola del Klein, dove le F sono tre forme *fondamentali*, dà subito, con qualche facile semplificazione, i seguenti tipi normali di *forme poliedrali*:

1. *Forme cicliche:*

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} . x_2^{\beta} . (x_1^{\lambda n} + p_1 x_1^{(\lambda-1)n} . x_2^{n} + p_2 x_1^{(\lambda-2)n} . x_2^{2n} + \ldots$$
$$\ldots + p_{\lambda-1} x_1^{n} . x_2^{(\lambda-1)n} + x_2^{\lambda n}).$$

2. *Forme diedrali:*

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} . (x_1^{n} + x_2^{n})^{\beta} . (x_1^{n} - x_2^{n})^{\gamma} . (x_1^{2\lambda n} + p_1 x_1^{(2\lambda-1)n} . x_2^{n} + \ldots$$
$$\ldots + p_{\lambda} x_1^{\lambda n} . x_2^{\lambda n} + p_{\lambda-1} x_1^{(\lambda-1)n} . x_2^{(\lambda+1)n} + \ldots$$
$$\ldots + p_1 x_1^{n} . x_2^{(2\lambda-1)n} + x_2^{2\lambda n}).$$

3. *Forme tetraedrali:*

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} (x_1^4 - x_2^4)^{\alpha} . (x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4)^{\beta} .$$
$$. (x_1^4 - 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4)^{\gamma} . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^{12} + 6\alpha_i \sqrt{-3}\, x_1^{10} x_2^2 -$$
$$- 33 x_1^8 x_2^4 + 12\alpha_i \sqrt{-3}\, x_1^6 x_2^6 - 33 x_1^4 x_2^8 +$$
$$+ 6\alpha_i \sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^{10} + x_2^{12}).$$

4. *Forme ottaedrali:*

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} (x_1^4 - x_2^4)^{\alpha} . (x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8)^{\beta} .$$
$$. (x_1^{12} - 33 x_1^8 x_2^4 - 33 x_1^4 x_2^8 + x_2^{12})^{\gamma} . \prod_1^{\lambda}{}_i [(x_1^{24} - 6\alpha_i x_1^{20} x_2^4 +$$
$$+ 3(253 + 8\alpha_i) x_1^{16} x_2^8 + 4(644 - 9\alpha_i) x_1^{12} x_2^{12} +$$
$$+ 3(253 + 8\alpha_i) x_1^8 x_2^{16} - 6\alpha_i x_1^4 x_2^{20} + x_2^{24}].$$

5. *Forme icosaedrali:*

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} (x_1^{10} + 11 x_1^5 x_2^5 - x_2^{10})^{\alpha} . [-(x_1^{20} + x_2^{20}) +$$
$$+ 228 (x_1^{15} x_2^5 - x_1^5 x_2^{15}) - 494 x_1^{10} x_2^{10}]^{\beta} . [(x_1^{30} + x_2^{30}) +$$
$$+ 522 (x_1^{25} x_2^5 - x_1^5 x_2^{25}) - 10005 (x_1^{20} x_2^{10} + x_1^{10} x_2^{20})]^{\gamma} .$$
$$. \prod_1^{\lambda}{}_i [(1 - \alpha_i)(x_1^{60} + x_2^{60}) + 36(29 + 19\alpha_i)(x_1^{55} x_2^5 - x_1^5 x_2^{55}) +$$
$$+ 6(42079 - 26239\alpha_i)(x_1^{50} x_2^{10} + x_1^{10} x_2^{50}) -$$
$$- 20(5222610 - 626373\alpha_i)(x_1^{45} x_2^{15} - x_1^{15} x_2^{45}) +$$
$$+ 15(6672001 - 5164033\alpha_i)(x_1^{40} x_2^{20} + x_1^{20} x_2^{40}) -$$
$$- 24(435261 - 5445381\alpha_i)(x_1^{35} x_2^{25} - x_1^{25} x_2^{35}) +$$
$$+ 4(49913771 + 8302981\alpha_i) x_1^{30} x_2^{30}].$$

In tutte queste forme va sempre posto $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots$

2. Gruppi che trasformano in sè stessi i gruppi poliedrali.

È evidente che due forme binarie fra loro proiettive *ammettono* gruppi isomorfi di sostituzioni lineari che le trasformano ciascuna in sè. Trattandosi di due forme poliedrali entrambe ridotte a forma normale, esse, se proiettive, ammettono lo *stesso* gruppo G: e ogni sostituzione capace di trasformare una delle due forme nell'altra è una di quelle che, senza appartenere a G, trasformano G in sè stesso. E viceversa. Queste ultime formano esse stesse un gruppo, che indichiamo con Σ.

Qualunque sia il gruppo finito di operazioni G, mercè un isomorfismo che si stabilisce fra G e Σ, si riconosce immediatamente che:

Se è finito il numero delle operazioni (della stessa specie di quelle di G) *che trasformano, ciascuna in sè, tutte le opera-*

zioni del gruppo finito G; — *ovvero è finito il numero delle operazioni che trasformano in sè stesso un sottogruppo di* G, *od anche una sola operazione di* G; — *è finito il numero di tutte le operazioni della stessa specie che trasformano* G *in sè stesso* (è finito Σ).

Questa osservazione permette di trovare subito, con metodo unico, i gruppi di trasformazioni lineari che trasformano in sè i 5 gruppi poliedrali. Eccoli:

1. *Il più ampio gruppo di trasformazioni lineari che contiene come invariante (che trasforma in sè stesso) un gruppo ciclico* $G_n^{(1)}$ *è il gruppo infinito* $\Sigma_n^{(1)} \equiv \left[x' = kx,\ x' = \frac{k'}{x};\ k,\ k' \text{ arbitrarii}\right]$.

2. *Il più ampio gruppo di trasformazioni lineari che contiene come invariante (che trasforma in sè stesso) un gruppo diedrale* $G_{2n}^{(2)}$, *per* $n > 2$, *è il gruppo diedrale di ordine doppio:* $\Sigma_{2n}^{(2)} = G_{4n}^{(2)}$. *Per* $n = 2$, *il più ampio gruppo contenente come invariante il* $G_4^{(2)}$ *è il gruppo ottaedrale:* $\Sigma_4^{(2)} = G_{24}^{(8)}$.

3. *Il più ampio gruppo trasformante in sè stesso (che contiene come invariante) il gruppo tetraedale è quello ottaedrale:* $\Sigma_{12}^{(4)} = G_{24}^{(8)}$.

4-5. *Il gruppo ottaedrale e quello icosaedrale non sono contenuti, come invarianti, in nessun altro gruppo di sostituzioni lineari, nè finito, nè infinito.*

3. Forme poliedrali normali proiettivamente indipendenti.

Se le due forme f e φ ammettono lo stesso gruppo G, ed S è una sostituzione che trasforma f in φ, ogni $G\,S$ (od ogni $S\,G$) farà altrettanto. Da ciò e dal paragrafo precedente si deduce che:

1. *Tutte le forme normali proiettive ad una forma ciclica normale si ottengono applicando a questa le sostituzioni* $x' = kx$ $\left(k \neq e^{\frac{2r\pi i}{n}},\ r = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right)$, $x' = \frac{k'}{x}$ (k' arbitrario).

2. *Tutte le forme normali proiettive ad una forma diedrale normale si ottengono, se* $n > 2$, *applicandovi la sola sostituzione*

$x' = e^{\frac{\pi i}{n}} . x$. *Se* $n = 2$, *si ottengono invece applicando le sostituzioni* $x' = \frac{i}{x}, \frac{x+1}{x-1}, \frac{x+i}{x-i}, i\frac{x+1}{x-1}, i\frac{x+i}{x-i}$.

3. *Tutte le forme normali proiettive ad una forma tetraedrale normale si ottengono applicando ad essa la sola sostituzione* $x' = ix$ (*).

4-5. *Le forme normali ottaedrali ed icosaedrali già trovate son tutte proiettivamente distinte.*

4. Curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè e birazionalmente indipendenti.

Tutte le curve cui si riferisce questo titolo sono quelle le cui equazioni hanno per primo membro $y^2 x_2^{2p}$ e per secondo membro una forma poliedrale normale di ordine $2p + 2$, dove p è il genere della curva. E sono birazionalmente indipendenti quelle che hanno gruppi di diramazione proiettivamente distinti.

Ricordiamo che, a meno di una trasformazione birazionale della curva (**), il gruppo di diramazione non ha radici multiple. Ed osserviamo che le tre forme F_1, F_2, F_3 sono a radici semplici ed a 2 a 2 non hanno radici a comune; così per una o due forme come $F_i + k F_j$ (per k generico o per due valori diversi di k).

Si ottiene perciò senz'altro la seguente tabella, la quale contiene i gruppi di diramazione, cioè i secondi membri, per tutte le richieste curve iperellittiche birazionalmente indipendenti.

I. *Gruppo ciclico* ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$):

1. $x_1^{\lambda n} + p_1 x_1^{(\lambda-1)n} . x_2^n + \ldots + p_{\lambda-1} x_1^n . x_2^{(\lambda-1)n} + x_2^{\lambda n}$,
2. $x_1 (x_1^{\lambda n} + p_1 x_1^{(\lambda-1)n} . x_2^n + \ldots + p_{\lambda-1} x_1^n . x_2^{(\lambda-1)n} + x_2^{\lambda n})$,
3. $x_1 . x_2 . (x_1^{\lambda n} + p_1 x_1^{(\lambda-1)n} . x_2^n + \ldots + p_{\lambda-1} x_1^n . x_2^{(\lambda-1)n} + x_2^{\lambda n})$. $(\lambda > 0)$.

Per $n = 2$, il tipo 3 rientra nell'1.

(*) Si osservi che ogni trasformazione S che scambia una forma f, ammettente un $G^{(2)}_{2n}$ $(n > 2)$ od un G^4_{12}, in un'altra φ scambia anche φ in f.

(**) V., ad es., Severi, *Geom. alg.* (Padova, 1908), p. 189.

II. *Gruppo diedrale* ($n > 2$; $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$):

$$1.\ x_1^{2\lambda n} + p_1 x_1^{(2\lambda-1)n} . x_2^n + \ldots + p_\lambda x_1^{\lambda n} . x_2^{\lambda n} + p_{\lambda-1} x_1^{(\lambda-1)n} . \\ . x_2^{(\lambda+1)n} + \ldots + p_1 x_1^n . x_2^{(2\lambda-1)n} + x_2^{2\lambda n},$$

$$2.\ x_1 x_2 . (x_1^{2\lambda n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_2^{2\lambda n}),$$

$$3.\ (x_1^n + x_2^n) . (x_1^{2\lambda n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_2^{2\lambda n}),$$

$$4.\ x_1 x_2 . (x_1^n + x_2^n) . (x_1^{2\lambda n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_2^{2\lambda n}).$$

Per $n = 2$, il tipo 3 rientra nel 2 ed il tipo 4 nell'1.

III. *Gruppo tetraedrale* ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$):

$$1.\ \prod_1^{\lambda+1}{}_i (x_1^{12} + 6\alpha_i \sqrt{-3}\, x_1^{10} x_2^2 - 33 x_1^8 x_2^4 + 12\alpha_i \sqrt{-3}\, x_1^6 x_2^6 - \\ - 33 x_1^4 x_2^8 + 6\alpha_i \sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^{10} + x_2^{12}),$$

$$2.\ (x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4) . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^{12} + \ldots\ldots + x_2^{12}),$$

$$3.\ x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) . \prod_1^{\lambda+1}{}_i (x_1^{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_2^{12}),$$

$$4.\ (x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4) . (x_1^4 - 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4) . \\ . \prod_1^{\lambda+1}{}_i (x_1^{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_2^{12}),$$

$$5.\ x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) . (x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4) . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^{12} + \ldots + x_2^{12}),$$

$$6.\ x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) . (x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4) . \\ . (x_1^4 - 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4) . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^{12} + \ldots + x_2^{12}).$$

IV e V. *Gruppo ottaedrale e gruppo icosaedrale:*

Rimandiamo alle 4 e 5 dell'art. 1, posto, però, $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$; $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$.

Osserviamo che tutte le forme di questa tabella si possono ottenere dando, a parte dei parametri dei 3 tipi ciclici, speciali valori numerici (*).

(*) Da questa tabella deduconsi subito le osservazioni del Sig. Wiman nel caso del periodo massimo $2(2p+1)$ della trasformazione (" Bih. till K. Svenska Vet-Akad. Handlingar ", Bd. 21 (1895), Afd. 1, $n : 1$).

Poichè il $G_4^{(2)}$ è contenuto come invariante in $G_{24}^{(8)}$, si hanno ancora i seguenti altri casi di identità birazionale delle nostre curve.

Due curve iperellittiche, i cui gruppi di diramazione siano rispettivamente dei tipi:

$$x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} . (x_1^2 + x_2^2)^3 . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^4 + p_i x_1^2 x_2^2 + x_2^4) ;$$

$$x_1^{\beta} x_2^{\beta} . (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha} . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^4 + q_i x_1^2 x_2^2 + x_2^4) ,$$

sono birazionalmente identiche se sono soddisfatte le λ relazioni:

$$(p_i - 2)(q_i - 2) = 1 \qquad (i = 1, 2, .. \lambda).$$

Analogamente per altre due coppie di tipi ottenuti come i precedenti, salvo una permutazione circolare delle F_1, F_2, F_3.

E poi ancora, ponendo:

$$f = (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha} . (x_1^2 - x_2^2)^{\beta} . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^4 + p_i x_1^2 x_2^2 + x_2^4),$$

$$f' = x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} . (x_1^2 + x_2^2)^2 . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^4 + q_i x_1^2 x_2^2 + x_2^4),$$

$$f'' = (x_1^2 - x_2^2)^{\alpha} . x_1^{\beta} x_2^{\beta} . \prod_1^{\lambda}{}_i (x_1^4 + r_i x_1^2 x_2^2 + x_2^4),$$

si ha che sono birazionalmente identiche due curve iperellittiche i cui secondi membri sono f ed f', quando si ha $p_i (q_i - 1) = 2 (q_i - 3)$, $(i = 1, 2, ..., \lambda)$. Altrettanto avviene, se i secondi membri sono f' ed f'', quando $(q_i - 2)(r_i + 2) = 1$, $(i = 1, 2, ..., \lambda)$; ed ancora se i secondi membri sono f'' ed f, quando si ha $p_i (r_i + 3) = -2 (r_i + 1)$, $(i = 1, 2, ..., \lambda)$.

5. Ordine di infinità delle curve precedenti per un genere dato. Loro moduli algebrici. Generi dei gruppi poliedrali.

Fissato il genere p, mediante la nostra tabella si verifica immediatamente che: *Dato il genere della curva iperellittica ed il gruppo che la trasforma in sè, essa curva non può appartenere che ad uno solo dei tipi della tabella.*

Chiamato λ l'ordine di infinità delle curve birazionalmente distinte, ossia il numero dei coefficienti arbitrarii figuranti linearmente nei tipi sopra elencati, si ha che λ soddisfa, rispettivamente, le seguenti equazioni:

pei gruppi:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{ciclico} & 2p+2=\alpha+\beta+(\lambda+1)n \\ \textit{diedrale} & 2p+2=2\alpha+n\beta+2\lambda n \\ \textit{tetraedrale} & 2p+2=4\alpha+4\beta+6\gamma+12\lambda \\ \textit{ottaedrale} & 2p+2=6\alpha+8\beta+12\gamma+24\lambda \\ \textit{icosaedrale} & 2p+2=12\alpha+20\beta+30\gamma+60\lambda \end{array}\right\} \alpha, \beta, \gamma=0, 1. \quad \text{(I)}$$

Quindi:

Ogni curva iperellittica di genere p, *ammettente un certo gruppo di trasformazioni birazionali in sè, non può aver variabili più di* λ *moduli, dove* λ *soddisfa la corrispondente equazione* (I). *I rimanenti* $2p-\lambda-1$ *moduli sono numericamente fissati.*

Intendendo per *genere di un gruppo poliedrale* (*) il minimo genere di una curva iperellittica il cui gruppo di diramazione lo ammette, si ha che i cinque generi sono, rispettivamente: $g=\frac{3n-2}{2}$, $\frac{n-2}{2}$, 3, 2, 5 (n pari). Se n è dispari, i generi dei due gruppi ciclico e diedrale sono rispettivamente $\frac{n-1}{2}$, $n-1$.

II.

I periodi degli integrali di prima specie delle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè.

6. Le corrispondenze $T(\alpha, \beta)$ ed i periodi normali degli integrali di prima specie di una curva algebrica.

Se sopra una curva algebrica di genere p esiste una corrispondenza algebrica $T(\alpha, \beta)$, fra i valori, nel punto x della curva, dei p integrali abeliani di prima specie linearmente in-

(*) Per questa locuzione, vedi anche Hurwitz: *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* (" Math. Ann. ", 32, 1889, s. 290).

dipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ed i valori negli α punti $y', y'', \ldots, y^{(\alpha)}$, della curva stessa, corrispondenti ad x, sussistono le relazioni:

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^{\alpha}{}_r\, u_k(y^{(r)}) = \sum_1^{p}{}_i\, \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

dove i coefficienti π_{ki} sono numeri non dipendenti dal posto x, ma bensì dagli indici k ed i, e le π_k sono costanti additive (*).

Fissiamo un sistema di retrosezioni sulla riemanniana R appartenente alla curva, e scriviamo la tabella dei periodi normali degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ relativi a queste retrosezioni:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & A_1, & A_2, & \ldots, & A_p, & A_{p+1} \equiv B_1, & A_{p+2} \equiv B_2, & \ldots, & A_{2p} \equiv B_p \\
u_1 \ldots & \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1p} & \omega_{1p+1} & \omega_{1p+2} & \ldots & \omega_{1\,2p} \\
u_2 \ldots & \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2p} & \omega_{2p+1} & \omega_{2p+2} & \ldots & \omega_{2\,2p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
u_p \ldots & \omega_{p1} & \omega_{p2} & \ldots & \omega_{pp} & \omega_{p\,p+1} & \omega_{p\,p+2} & \ldots & \omega_{p\,2p}.
\end{array}$$

Si faccia attraversare ad x uno dei tagli, p. es. A_l; allora, nella (I), $u_i(x)$ diventa $u_i(x) + \omega_{il}$, mentre il primo membro si altera di una combinazione lineare a coefficienti interi di tutti i $2p$ periodi di u_k, e si ottengono le relazioni generali

$$(1) \qquad \sum_1^{2p}{}_s\, m_{sl}\, \omega_{ks} = \sum_1^{p}{}_i\, \pi_{ki}\, \omega_{il} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)\ (l = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Gli intieri m_{sl} sono caratteristici per la corrispondenza e dipendono dall'indice l, ma non dall'indice k.

Si dimostra agevolmente che:

Fissati i tagli della riemanniana, ad un sistema di coefficienti π_{ki} *non può corrispondere che un determinato sistema di* m_{sl}, *e viceversa* (**).

Come determinare direttamente gli intieri m_{sl}?

Basterà considerare un modello concreto della riemanniana sostegno della curva, con il fissato sistema di retrosezioni. Si

(*) Hurwitz (" Math. Ann. ", Bd. 28, 1887, s. 561, § 1).

(**) È la già citata proposizione del Sig. Severi.

faccia ad x descrivere un circuito fondamentale A_l: i corrispondenti punti y', y'', ..., $y^{(a)}$ descriveranno dei cammini, — in generale aperti, — formanti tanti *circuiti* quanti sono i cicli della permutazione da essi subita. A ciascun circuito è omologo una combinazione lineare a coefficienti interi dei $2p$ circuiti fondamentali.

Come si deduce immediatamente da un lemma del Sig. Severi (*), i coefficienti intieri della somma di queste combinazioni sono appunto gli m_{sl}, i quali risultano, per lo stesso lemma, determinati univocamente.

È questa, in sostanza, la via che ho seguita per la risoluzione del problema propostomi.

7. Le trasformazioni birazionali di una curva algebrica in sè.

Per queste trasformazioni — o corrispondenze — biunivoche, le relazioni (I) si lasciano scrivere:

$$\text{(II)} \qquad du_k' = \pi_{k1}\, du_1 + \pi_{k2}\, du_2 + \ldots + \pi_{kp}\, du_p \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

ove u_k' dinota il valore dell'integrale u_k nell'unico punto y' corrispondente ad x, od anche, ciò che è lo stesso, l'integrale trasformato di u_k mediante la data corrispondenza.

E, cambiando opportunamente gli u, ancora più semplicemente:

$$\text{(III)} \qquad du'_k = \epsilon_k\, du_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

le ϵ_k essendo radici n^{me} dell'unità, ed n il periodo della trasformazione (**). Onde le (1) si riducono alla forma:

$$(1') \qquad \sum_{1}^{2p}{}_s\, m_{sl}\, \omega_{ks} = \epsilon_k\, \omega_{kl} \qquad \begin{cases} (k = 1, 2, \ldots, p) \\ (l = 1, 2, \ldots, 2p). \end{cases}$$

Tutti i sistemi di relazioni analoghe alle (II) che si ottengono dalle corrispondenze biunivoche esistenti sulla curva, —

(*) Mem. cit. (" Math. Ann. ", Bd. 74, 1913), § 1, pag. 4.

(**) Hurwitz: *Ueber diejenigen*..... (" Math. Ann. ", Bd. 32, 1889, s. 290), § 3.

ciascuno interpretato come una trasformazione lineare omogenea che fa passare da un sistema ad un altro di p differenziali di prima specie linearmente indipendenti per la curva data, — costituiscono, come è noto, un gruppo *oloedricamente isomorfo* al gruppo delle trasformazioni birazionali ammesso dalla curva (*).

Parimenti, detto ω'_{kl} il periodo di u'_k al circuito trasformato di A_l, si ha

$$\text{(IV)} \qquad \omega'_{kl} = \sum_{1}^{2p}{}_s\, m_{sl}\, \omega_{ks} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)\,(l = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Queste relazioni si interpretano come una trasformazione lineare omogenea (a determinante eguale all'unità) che fa passare da un sistema ad un altro di $2p^2$ periodi normali di p integrali di prima specie linearmente indipendenti per la data curva. Stante la corrispondenza biunivoca fra i sistemi di intieri m_{sl} e quelli di coefficienti π_{ki} (§ prec.), di trasformazioni come la (IV) se ne hanno tante quante le precedenti, e formano anche esse un gruppo oloedricamente isomorfo a quello delle trasformazioni birazionali ammesso dalla curva.

Concludendo, *alla considerazione del gruppo di corrispondenze biunivoche sulla data curva, — rispetto ai periodi normali su quei fissati tagli della riemanniana, — può sostituirsi quella delle relazioni* (1)', *derivate dalle prime nel modo già indicato.*

8. Curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè. Loro moduli.

Se il gruppo di diramazione di una curva iperellittica vien trasformato in sè da una sostituzione lineare non identica $x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$, $x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$ (4), la curva è trasformata in sè dalle due trasformazioni birazionali singolari

$$(5) \qquad y' x'^p_2 = \pm\, y x_2^p, \quad x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2.$$

A queste corrispondono, sui differenziali, rispettivamente due trasformazioni lineari omogenee come le

$$\pm\, du'_i = \pi_{i1}\, du_1 + \pi_{i2}\, du_2 + \ldots + \pi_{ip}\, du_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

(*) Hurwitz: *Ueber algebraische Gebilde.....* (" Math. Ann. ", Bd. 41, 1893, s. 403), III Absch., § 9, s. 428.

Convenendo di scegliere il solo segno positivo, tutte le trasformazioni come queste ultime, corrispondenti a quelle lineari del gruppo di diramazione, formano un gruppo in isomorfismo *oloedrico* con quello poliedrale cui appartiene la (4).

Ora, parte I, § 5, — dato il genere ed il gruppo poliedrale, — tutti i moduli della curva iperellittica, tranne certi λ, sono numericamente fissati. E tenendo presente la conclusione del § precedente, deduciamo:

Noti gli intieri m_{sl} *ed i coefficienti* ϵ_k *delle relazioni*

$$(1') \qquad \sum_{1}^{2p}{}_s\, m_{sl}\, \omega_{ks} = \epsilon_k\, \omega_{kl} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)\ (l = 1, 2, \ldots, 2p),$$

per tutte le trasformazioni birazionali della curva in sè, queste relazioni lasciano determinare, in generale, tutti i $2p^2$ *periodi* ω_{kr}, *meno quelli che dipendono dai* λ *moduli della curva rimasti arbitrarii.*

Considerando gli integrali iperellittici

$$u_i(x) = \int \frac{x_1^{p-i} \,.\, x_2^{i-1}\,(x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

ed applicando ad x le sostituzioni

$$x'_1 = \epsilon x_1,\ x'_2 = x_2,\ \epsilon = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

si ottiene subito:

$$\epsilon_k = \frac{\epsilon^{p-k+1}}{\sqrt{c}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

dove c è una radice n^{ma} dell'unità che si calcola caso per caso, senza difficoltà.

Il problema dei moduli, per una curva iperellittica a gruppo di diramazione ammettente un gruppo ciclico, è dunque risoluto con la sola determinazione degli intieri m_{sl}.

Gli altri casi dipendono da questo.

9. Le riemanniane delle nostre curve iperellittiche: retrosezioni notevoli.

In questo §, e nel seguente, ci occupiamo delle curve iperellittiche il cui gruppo di diramazione ammette un gruppo ciclico. Però, poichè ogni gruppo poliedrale contiene sempre un sottogruppo ciclico, tutte le considerazioni e costruzioni fatte e le relazioni ottenute valgono, tutt'al più con lievi varianti ed opportune avvertenze, anche per gli altri casi.

Con riguardo al gruppo di diramazione ed all'ordine n della sostituzione canonica che lo trasforma in sè, possiamo distinguere i 5 casi seguenti:

1. *Il gruppo di diramazione della curva iperellittica possiede il punto zero, ma non quello all'infinito* (ovvero, caso proiettivo, *il punto all'infinito, ma non quello zero*). In tal caso si ha necessariamente: *n dispari.*

2. *Il gruppo di diramazione possiede i punti zero e all'infinito, ed* n *è pari.*

3. *Idem, con* n *dispari.*

4. *Non v'ha punto zero nè punto all'infinito, ed* n *è pari.*

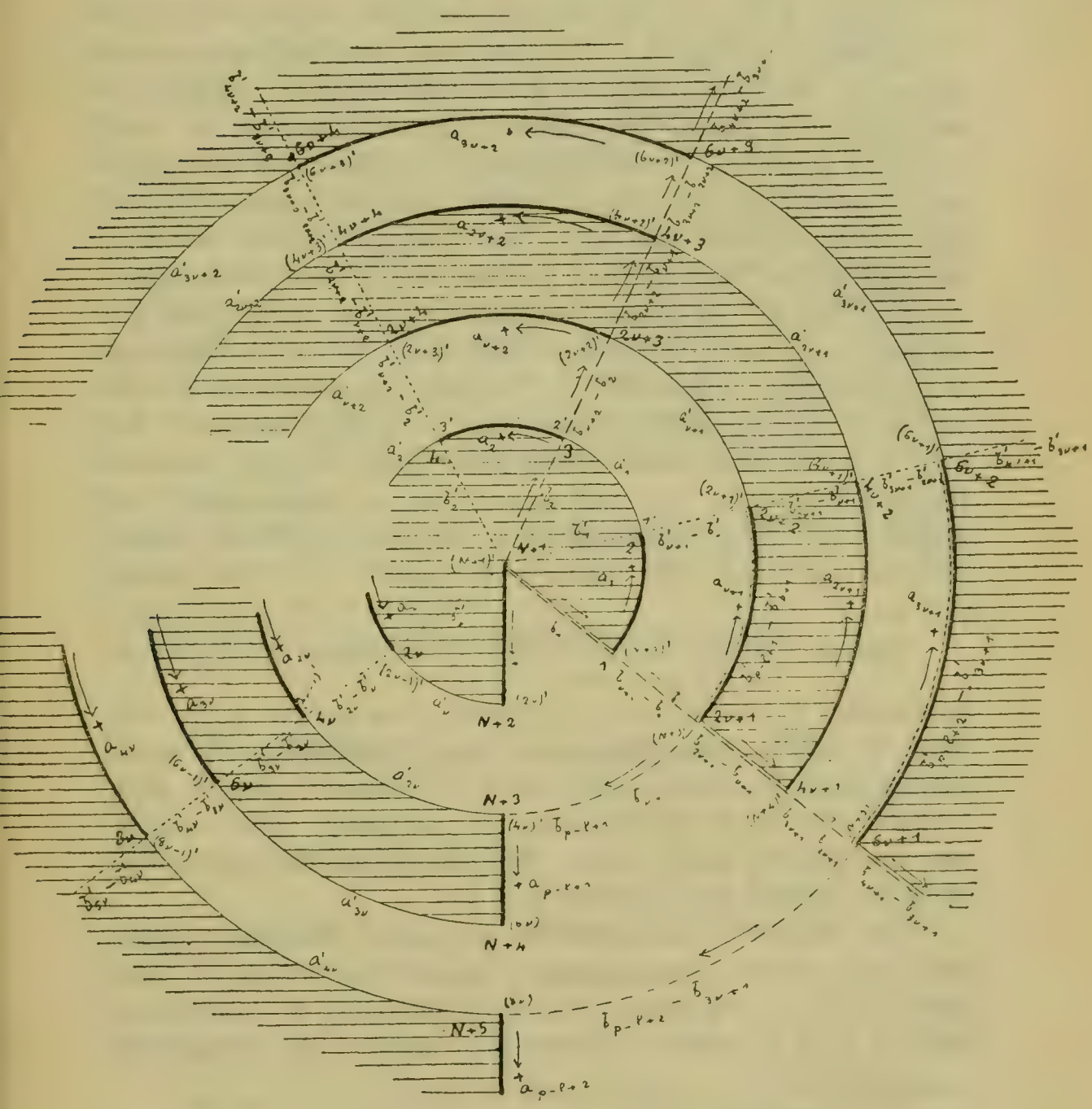
5. *Idem, con* n *dispari.*

Meno il punto zero e quello all'infinito, tutti i punti del gruppo di diramazione si distribuiscono ad n ad n in cicli che, mercè la considerata sostituzione, si scambiano ciascuno in sè stesso: quelli dello stesso ciclo avendo egual modulo, tutte le radici si possono rappresentare, nel piano complesso, su tante circonferenze concentriche, col centro nell'origine.

Le nostre figure schematiche, di cui diamo quella corrispondente al primo tipo, suppongono tutte queste circonferenze di raggi distinti ed i punti di diramazione situati a λ a λ sullo stesso raggio: ad esse ci si può sempre ridurre, per deformazione continua sulla riemanniana dei circuiti che si considerano.

Quando n è pari ($n = 2\nu$), i punti del gruppo di diramazione sono indicati cogli indici da 1 ad n sulla prima circonferenza, da $n + 1$ a $2n$ su la seconda, etc., in modo che gli indici congrui fra loro, modulo n, siano allineati con l'origine. Quando n è dispari ($n = 2\nu + 1$), gli indici vanno rispettivamente da 1 a 2ν, da $2\nu + 1$ a 4ν, etc., come sopra, restando

allineati con l'origine quelli congrui fra loro modulo 2ν: gli n^{mi} punti, sulle varie circonferenze, vengono indicati cogli indici da $N+1$ ad $N+\lambda$ $(N=\lambda(n-1))$. Se v'ha punto zero, senza quello all'infinito, l'indice $N+1$ si assegna ad esso. Quando v'ha punto zero e punto all'infinito insieme, vi si assegnano, ordinatamente, gli indici $2p+1$ e $2p+2$.



I tagli propriamente detti, o linee di passaggio fra i 2 fogli della riemanniana $(A_1, \ldots, A_p)$, sono disegnati con linee piene e

grosse. Sul loro bordo sinistro rispetto al senso crescente degli indici e sul foglio superiore, si calcolano i periodi $a_1, \ldots, a_p$ (*), ciascuno dei quali è il doppio del valore di un integrale di prima specie u, calcolato su questi tagli *sul bordo, nel senso e sul foglio* ora detto. Con F_{ik} indicheremo il valore di u lungo un cammino che va dal punto i al punto k.

I tagli $B_1, \ldots, B_p$, che completano le retrosezioni e sui quali si calcolano i periodi $b_1, \ldots, b_p$, non sono disegnati nelle nostre figure. Ad essi sono sostituiti ν linee tratteggiate: ciascuna di esse parte dall'origine (se questa fa parte del gruppo di diramazione) ovvero dal punto di indice 1 (in caso contrario) passa per un punto di indice dispari sulla prima circonferenza e per tutti quelli allineati con esso e con l'origine. Quando n è dispari, altre linee, tratteggiate e partenti dallo stesso punto, vanno ai punti $2k\nu + 1$ (k dispari) seguendo le linee tratteggiate già segnate e da questi ai punti $N + r$, dove r è dispari, seguendo le circonferenze. I periodi $b_1, \ldots, b_p$ sono eguali ai doppi dei valori di u calcolati lungo queste linee, *sul foglio superiore e nel senso crescente degli indici*, senza tener conto del lato, partendo dal punto di indice 1 (o dall'origine) fino ai singoli punti ora nominati. Il valore dell'integrale u, lungo un tratto di questi cammini che vada dal punto i al punto k, lo indicheremo con I_{ik}.

Quando alla curva, ossia alla riemanniana, si applica la sostituzione $x' = \epsilon x$ ($\epsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$) le linee piene grosse si trasformano in quelle piene sottili, e le linee tratteggiate in quelle punteggiate. Su queste altre linee si calcolano i periodi trasformati a'_i e b'_i. Si determinano, in tal modo, tanti circuiti non racchiudenti punti critici: ciascuno di essi dà luogo ad una relazione lineare fra i periodi a, b, a', b'.

Per chiarire la differenza fra le regioni bianche e quelle nere delle figure, immaginiamo che la trasformata C' della curva C e la curva stessa, ossia la riemanniana R' trasformata della R e la R stessa, siano fra loro distinte, ma sovrapposte.

(*) Qui e nel seguito i periodi son indicati a e b sui due tipi di tagli, invece che con ω. Si adopera un solo indice, perchè quello dell'integrale è qualunque.

Definiamo foglio superiore della R quello sul quale y è positivo: così per la R'. Intorno all'origine le due riemanniane coincidono (si corrispondono) foglio con foglio, e cioè i superiori fra loro e così gli inferiori. Le linee di passaggio per la R sono le grosse piene: per la R' sono le sottili piene. Partendo dall'origine, col valore positivo di y in entrambe le riemanniane, nell'attraversare un taglio grosso si passa sul foglio inferiore della R, rimanendo sul superiore della R'; attraversando un taglio sottile si rimane sul superiore della R passando sull'inferiore della R': avviene il contrario attraversando un secondo taglio, grosso o sottile. Perciò le regioni nere sono quelle in cui le due superficie si corrispondono senza scambio di foglio: le bianche quelle in cui i due fogli sono scambiati.

In conclusione, *ritornando alla* R *unica*, i tagli grossi e le linee tratteggiate si intendono descritte sul foglio superiore, i tagli sottili e le linee punteggiate si intendono descritte sul foglio superiore se appartengono a regioni nere, sull'inferiore se a regioni bianche. Infine, sono *tagli* soltanto le linee grosse piene, e perciò soltanto su esse ha *sempre* influenza il lato, oltre che il senso (*).

Con queste norme, dalle rispettive figure risultano senza difficoltà i varii sistemi lineari le cui soluzioni dànno tutti gli intieri m_{sl} che noi ricerchiamo.

Per brevità, riportiamo soltanto queste ultime.

10. Gli intieri caratteristici m_{sl}.

1° TIPO (quello della figura):

$$2p + 2 = \lambda n + 1\,, \qquad n = 2\nu + 1\,, \qquad \lambda = 2l + 1\,,$$
$$N = \lambda\,(n - 1) = 2\,(p - l).$$

(*) Questa speciale costruzione delle retrosezioni mi è stata suggerita da quella data dal Sig. BOLZA al § 10 della cit. Mem., pel caso $p = 2$. Ciò non pertanto, la costruzione presente non può ritenersi un'ovvia generalizzazione della prima.

Nella figura (quella annessa) abbiam posto:

$$a_r = 2F_{2r-1,\,2r}\,, \qquad b_r - b_{r-\nu} = 2I_{2(r-\nu)-1,\,2r-1}\,,$$
$$(r = 1, 2, \ldots, p - l).$$
$$a_{p-l+i} = 2F_{N+2i+1,\,N+2i+2}\,, \quad b_{p-l+i} - b_{(2i-1)\nu+1} = 2I_{2(2i-1)\nu+1,\,N+2i+1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, l).$$

Formole di risoluzione:

$$(-1)^{k+1} a'_{k\nu+i} = 2\sum_{0}^{k-1}{}_r\, a_{r\nu+i} + a_{k\nu+i} + b_{k\nu+i} - b_{k\nu+i+1}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, \lambda - 1)\ (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

$$a'_\nu = \sum_{0}^{\lambda-1}{}_r \sum_{1}^{\nu-1}{}_i\, a_{r\nu+i} + \sum_{2}^{\lambda}{}_r\, a_{r\nu} + \sum_{0}^{l-1}{}_j\, a_{p-j} - b_\nu\,,$$

$$-a'_{2k\nu} = 2\sum_{0}^{\lambda-1}{}_r \sum_{1}^{\nu-1}{}_j\, a_{r\nu+j} + a_{2k\nu} + 2\sum_{2k+1}^{\lambda}{}_r\, a_{r\nu} + 2\sum_{k}^{l}{}_j\, a_{p-l+j} -$$
$$- b_{2k\nu} + b_{p-l+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

$$a'_{(2k+1)\nu} = 2\sum_{0}^{\lambda-1}{}_r \sum_{1}^{\nu-1}{}_j\, a_{r\nu+j} + a_{(2k+1)\nu} + 2\sum_{2(k+1)}^{\lambda}{}_r\, a_{r\nu} + a_{p-l+k} +$$
$$+ 2\sum_{k+1}^{l}{}_j\, a_{p-l+j} - b_{(2k+1)\nu} + b_{p-l+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

$$a'_{p-l+i} = b_{2i\nu} - b_{(2i-1)\nu+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

$$(-1)^k b'_{k\nu+i} = a_{k\nu+i} + 2(-1)^k \sum_{0}^{k-1}{}_r\, (-1)^r b_{r\nu+i} + b_{k\nu+i}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, \lambda - 1)\ (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$b'_{p-l+i} = 2\sum_{0}^{2(i-1)}{}_r\, (-1)^r b_{r\nu+1} - b_{(2i-1)\nu+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Gli m_{st} sono i coefficienti delle a e delle b dei secondi membri di queste formole. Così per gli altri tipi.

2° TIPO:

$$2p + 2 = \lambda n + 2\,, \qquad n = 2\nu\,, \qquad \lambda \text{ qualunque.}$$

Nella figura:

$$a_r = 2F_{2r-1,\,2r}\,, \qquad b_r - b_{r-\nu} = 2I_{2(r-\nu)-1,\,2r-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, p).$$

Formole risolutive:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{k+1}\, a'_{k\nu+i} &= 2\sum_{0}^{k-1}{}_r\, a_{r\nu+i} + a_{k\nu+i} + b_{k\nu+i} - \\ &\qquad - b_{k\nu+i+1} \\ (-1)^{k}\quad b'_{k\nu+i} &= a_{k\nu+i} + 2(-1)^k \sum_{0}^{k-1}{}_r (-1)^r b_{r\nu+i} + \\ &\qquad + b_{k\nu+i}\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&(k=0,1,\ldots,\lambda-1)\\ &(i=1,2,\ldots,\nu).\end{aligned}$$

In queste formole, per ogni valore di k, va inteso $b_{k\nu+\nu+1} = -b_{k\nu+1}$.

3° TIPO:

$$2p+2 = \lambda n + 2\,, \qquad n = 2\nu+1\,, \qquad \lambda = 2l\,,$$
$$N = \lambda(n-1) = 2(p-l).$$

Nella figura abbiam posto:

$$a_r = 2F_{2r-1,2r} \qquad (r=1,2,\ldots,p);$$
$$b_r - b_{r-\nu} = 2I_{2(r-\nu)-1,2r-1} \qquad (r=1,2,\ldots,p-l);$$
$$b_{p-l+i} - b_{2(i-1)\nu+1} = 2I_{4(i-1)\nu+1,N+2i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,l).$$

Formule risolutive:

$$(-1)^{k+1}\, a'_{k\nu+1} = 2\sum_{0}^{k-1}{}_r\, a_{r\nu+i} + a_{k\nu+i} + b_{k\nu+i} - b_{k\nu+i+1}$$
$$(k=0,1,\ldots,\lambda-1)\ (i=1,2,\ldots,\nu-1),$$

$$a'_{2k\nu} = 2\sum_{1}^{2k-1}{}_r\, a_{r\nu} + a_{2k\nu} - 2\sum_{1}^{k-1}{}_r\, a_{p-l+r} - a_{p-l+k} +$$
$$+ b_{2k\nu} + b_{p-l+k} \qquad (k=1,2,\ldots,l),$$

$$-a'_{(2k+1)\nu} = 2\sum_{1}^{2k}{}_r\, a_{r\nu} + a_{(2k+1)\nu} - 2\sum_{1}^{k}{}_r\, a_{p-l+r} + b_{(2k+1)\nu} +$$
$$+ b_{p-l+k+1} \qquad (k=0,1,\ldots,l-1),$$

$$a'_{p-l+i} = b_{2(i-1)\nu+1} - b_{(2i-1)\nu+1} \qquad (i=1,2,\ldots,l),$$

$$(-1)^k\, b'_{k\nu+i} = a_{k\nu+i} + 2(-1)^k \sum_{0}^{k-1}{}_r (-1)^r b_{r\nu+i} + b_{k\nu+i}$$
$$(k=0,1,\ldots,\lambda-1)\ (i=1,2,\ldots,\nu).$$

$$b'_{p-l+i} = 2a_{2(i-1)\nu+1} + 2\sum_{0}^{2i-3}{}_r (-1)^r b_{r\nu+1} + b_{2(i-1)\nu+1}$$
$$(i=1,2,\ldots,l).$$

4° TIPO:

$$2p+2=\lambda n\,, \qquad n=2\nu\,, \qquad \lambda \text{ qualunque.}$$

Nella figura:

$$a_r=2F_{2r+1,\,2r+2}\,, \qquad b_r-b_{r-\nu}=2I_{2(r-\nu)+1,\,2r+1} \qquad (r=1,2,\ldots,p).$$

Formole di risoluzione:

$$(-1)^{k+1}a'_{k\nu+i}=2\sum_0^{k-1}{}_r\, a_{r\nu+i}+a_{k\nu+i}+b_{k\nu+i}-b_{k\nu+i+1}$$
$$(k=0,1,\ldots,\lambda-1)\ (i=1,2,\ldots,\nu-1),$$

$$(-1)^k a'_{k\nu}=a_{k\nu}+2\sum_{k+1}^{\lambda-1}{}_r\, a_{r\nu}+2\sum_0^{\lambda-1}{}_r\sum_1^{\nu-1}{}_i\, a_{r\nu+i}-b_{k\nu}+b_{k\nu+1}$$
$$(k=1,2,\ldots,\lambda-1),$$

$$(-1)^k b'_{k\nu+j}=a_{k\nu+j}+(-1)^k\sum_0^{\lambda-1}{}_r\sum_0^{\nu-1}{}_i\, a_{r\nu+i}+$$
$$+2(-1)^k\sum_0^{k-1}{}_r(-1)^r b_{r\nu+j}+b_{k\nu+j}$$
$$(k=0,1,\ldots,\lambda-1)\ (j=0,1,\ldots,\nu-1).$$

In quest'ultima va esclusa la coppia $k=j=0$, e nella prima va inteso $b_{k\nu+\nu}=b_{k\nu}$, qualunque sia k.

5° TIPO:

$$2p+2=\lambda n\,, \qquad n=2\nu+1\,, \qquad \lambda=2l\,,$$
$$N=(n-1)\lambda=2(p-l)+2.$$

Nella figura abbiam posto:

$$a_r=2F_{2r+1,\,2r+2} \qquad (r=1,2,\ldots,p),$$
$$b_r-b_{r-\nu}=2I_{2(r-\nu)+1,\,2r+1} \qquad (r=1,2,\ldots,p-l),$$
$$b_{p-l+i}-b_{2(i-1)\nu}=2I_{4(i-1)\nu+1,\,N+2i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,l).$$

Ecco le formole risolutive:

$$(-1)^{k+1}a'_{k\nu+i}=a_{k\nu+i}+2\sum_0^{k-1}a_{r\nu+i}+b_{k\nu+i}-b_{k\nu+i+1}$$
$$(k=0,1,\ldots,\lambda-1)\ (i=1,2,\ldots,\nu-2),$$

$$-a'_{(2i+1)\nu-1} = a_{(2i+1)\nu-1} + 2\sum_{1}^{2i}{}_r\, a_{r\nu-1} + 2\sum_{1}^{i}{}_s\, a_{p-l+s} + \\ + b_{(2i+1)\nu-1} - b_{p-l+i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1),$$

$$a'_{2i\nu-1} = a_{2i\nu-1} + 2\sum_{1}^{2i-1}{}_r\, a_{r\nu-1} + 2\sum_{1}^{i-1}{}_s\, a_{p-l+s} + a_{p-l+i} + \\ + b_{2i\nu-1} - b_{p-l+i} \quad , (i = 1, 2, \ldots, l),$$

$$(-1)^k a'_{k\nu} = a_{k\nu} + 2\sum_{k+1}^{\lambda-1}{}_r\, a_{r\nu} + 2\sum_{0}^{\lambda-1}{}_r \sum_{1}^{\nu-1}{}_i\, a_{r\nu+i} + 2\sum_{1}^{l}{}_i\, a_{p-l+i} - \\ - b_{k\nu} + b_{k\nu+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, \lambda-1),$$

$$a'_{p-l+i} = b_{2(i-1)\nu} - b_{(2i-1)\nu} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

$$b'_{k\nu+i} = (-1)^k a_{k\nu+i} + \sum_{0}^{\lambda-1}{}_r \sum_{0}^{\nu-1}{}_j\, a_{r\nu+j} + \sum_{1}^{l}{}_j\, a_{p-l+j} + \\ + 2\sum_{0}^{k-1}{}_r (-1)^r b_{r\nu+i} + (-1)^k b_{k\nu+i} \\ (k = 0, 1, \ldots, \lambda-1)\ (i = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

$$b'_{p-l+i} = \sum_{0}^{\lambda-1}{}_r \sum_{0}^{\nu-1}{}_j\, a_{r\nu+j} + \sum_{1}^{l}{}_j\, a_{p-l+j} + 2\sum_{1}^{2i-3}{}_r (-1)^r b_{r\nu} + \\ + b_{2(i-1)\nu} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Nella penultima formola, si escluda la coppia $k = i = 0$.

11. Sufficienza delle relazioni ottenute.

Abbiamo ora determinati gli intieri m_{sl} per la sola trasformazione lineare omogenea dei periodi che corrisponde alla trasformazione proiettiva del gruppo di diramazione

$$x' = \epsilon x\,, \qquad \epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}. \tag{6}$$

Questa genera tutto il gruppo ciclico, perciò la corrispondente trasformazione dei periodi genererà tutto il gruppo al primo isomorfo. Tenendo presenti le proposizioni del § 5, si conclude che la sola trasformazione lineare (6), insieme col genere della curva, è atta ad individuare la stessa, a meno dei corrispondenti λ moduli arbitrarii (*). E quindi ancora (§ 8), il

(*) S'intende anche *a meno di trasformazioni birazionali.*

corrispondente sistema di relazioni fra i periodi è da solo sufficiente, in generale, a determinare tutti i periodi numericamente fissati, e tutte le relazioni fra questi.

Riguardo a gli altri gruppi, necessiterà almeno trovare gli intieri m_{st} ed i coefficienti π_{ki} per tutte le generatrici del gruppo.

Però ogni gruppo poliedrale non ciclico contiene un sottogruppo ciclico.

Quindi, per completare la tabella dei moduli della curva, bisogna considerare, insieme ai periodi, o relazioni fra essi, — ottenuti mediante la risoluzione delle equazioni lineari corrispondenti al gruppo ciclico di ordine massimo contenuto nel gruppo considerato, — i valori numerici di quelli fra i λ parametri che, dalla consultazione della tabella del § 5, risultano determinati nel passaggio dalla forma ciclica a quella considerata.

Napoli, ottobre 1913.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 29 Marzo 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Carle, De Sanctis, Ruffini, Stampini, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Renier Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli e del Socio Brondi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 15 marzo 1914.

Il Presidente legge l'invito della *Deutsche Shakespeare Gesellschaft* di Weimar alle feste del cinquantesimo anno di sua fondazione, che si terranno alla fine del prossimo aprile. La Classe delibera che la suddetta benemerita Società sia ringraziata per l'invito e che sia pregato il presidente di essa di rappresentare l'Accademia.

A nome della Deputazione di storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, il Segretario offre il vol. V della *Biblioteca di storia italiana recente*, Torino, Bocca, 1914. Il Socio Baudi di Vesme riferisce intorno al contenuto del volume, che è il primo della corrispondenza del conte Vittorio Amedeo Balbo Bertone di Sambuy, a cura del conte Mario degli Alberti.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Ruffini presenta sotto la propria responsabilità uno scritto di Emilio Albertario, *Nuove osservazioni sulla trasmissibilità del " iudicium operarum " all'erede estraneo.*

LETTURE

Nuove osservazioni sulla trasmissibilità del " iudicium operarum „ all'erede estraneo.

Nota di EMILIO ALBERTARIO.

In un suo recente e ingegnoso scritto sul *iudicium operarum* (1) il Biondi si occupa della trasmissibilità di questo *iudicium* agli eredi estranei del patrono.

La stessa indagine io feci già da qualche tempo (2). Ma il Biondi, pur consentendo nel principio da me allora fissato e chiarito, che le opere spettano al figlio, non all'erede estraneo — precisamente come i sepolcri familiari spettano al figlio, anche non erede; non spettano all'estraneo, benchè erede — perviene a risultati diversi dai miei.

Egli ritiene che le opere dei liberti proprio nell'epoca classica si distinguessero in *praeteritae* e *futurae*, a seconda che fossero, o non, già state richieste (*indictae*) dal patrono. Le prime già nell'epoca classica sarebbero passate anche all'erede estraneo: le seconde sarebbero state nell'epoca classica intrasmissibili.

Con Giustiniano, invece, anche le operae *futurae* passerebbero all'erede estraneo; ed alla distinzione fatta dai classici rispetto al passaggio agli eredi estranei tra opere *praeteritae* e opere *futurae* verrebbe sostituita l'altra tra opere *fabriles* ed opere *officiales*. Nel diritto giustinianeo passerebbero all'erede estraneo solo le opere *fabriles* e non le *officiales*.

Queste affermazioni del Biondi mi presentano la buona occasione di ritornare sull'interessante argomento. Io credo di non dover modificare il risultato che ho già raggiunto: spero, anzi,

(1) Estr. dagli " Annali della Fac. di Giur. dell'Univ. di Perugia „, 1914.

(2) *Sul diritto dell'erede estraneo alle opere dei liberti*, in " Filangieri „, 1910.

di poterlo forse sviluppare maggiormente. Quando mi accinsi allo studio di questo tema la prima volta, non osai spingere la mia indagine fin dove poteva essere condotta; fin dove ora, brevemente, cercherò di condurla.

I. Operae officiales, artificiales, fabriles.

A proposito delle opere dei liberti non è agevole comprendere l'oscuro, qualche volta anche contradditorio, linguaggio delle nostre fonti.

Nella dottrina romanistica del secolo scorso (Burkard, Zimmern, Mühlenbruch, Danz, Keller, Kuntze, Karlowa, Leist) le opere dovute dai liberti ai loro patroni solevano essere classificate in due grandi categorie: *officiales* e *fabriles*. Le prime erano da tutti quegli scrittori a un di presso intese " als Ehren und Liebesdienste persönlich-individueller Natur „; le seconde " als professionelle und daher geldwerthe Arbeitsleistungen „. Questa classificazione poteva trovare la propria base in tre frammenti ulpianei: 26 § 12 D. 12. 6; 6 D. 38. 1; 9 D. eod., che verranno in seguito riferiti e considerati.

Ma la dottrina romanistica tradizionale è stata sopraffatta da un'acutissima nuova analisi dei testi, intrapresa dal Mitteis (1). Il grande romanista rileva che l'*apparente* distinzione delle opere dei liberti in opere *officiales* e opere *fabriles* spicca solamente nei tre frammenti di Ulpiano.

I più antichi classici l'ignorano. Giuliano, sopratutto. Dai Digesti di questo giureconsulto balza fuori la prova luminosa che egli considera le opere *fabriles* completamente diverse dalle opere che il liberto deve al suo patrono.

I frammenti giulianei, richiamati dal Mitteis, non possono lasciare dubbii a questo riguardo.

D. 38. 1. 23. pr. (Jul. l. 22° dig.): Hae operae, quas libertus promittit, *multum distant a fabrilibus vel pictoriis operis*. Denique si libertus faber aut pictor fuerit, quamdiu id artificium exercebit, has operas patrono praestare cogitur. Quare sicut fabriles operas quis potest sibi aut Titio stipulari, ita patronus a li-

(1) *Operae officiales und operae fabriles*, in " Z. S. S. „ (1902), 23, 143-158.

berto operas sibi aut Sempronio recte stipulatur: et libertus obligatione solvetur, si tales operas extraneo dederit, quales patrono praestando liberaretur.

D. 38. 1. 24 (Julianus l. 52° dig.): Quotiens *certa species operarum in stipulationem deducitur, veluti pictoriae fabriles,* peti quidem non possunt nisi praeteritae, quia etsi non verbis, at re ipsa inest obligationi tractus temporis, sicuti cum Ephesi dari stipulemur, dies continetur. Et ideo inutilis est haec stipulatio: " operas tuas pictorias centum hodie dare spondes? „ Cedunt tamen operae ex die interpositae stipulationis. *Sed operae, quas patronus a liberto postulat, confestim non cedunt,* quia id agi inter eos videtur, ne ante cederent, quam indictae fuissent, scilicet quia ex commodo patroni libertus operas edere debet: quod in fabro vel pictore dici non convenit.

In entrambi i testi le opere, che il liberto promette, sono contrapposte nettamente alle opere *fabriles vel pictoriae.* Nel primo di essi è fatta anche l'ipotesi che il liberto sia un *faber* o un *pictor*, ma non è punto detto che per conseguenza le sue opere siano *fabriles* o *pictoriae.* In questo caso è solamente ammessa la validità di una *adiectio solutionis causa.*

I testi or ora considerati, pertanto, consentono di conchiudere così. Le opere *fabriles* sono *opere completamente estranee al rapporto giuridico del patronato.* Esse veramente, come dice il fr. 9 § 1 D. 38. 1, *eius generis sunt, ut a quocumque cuicumque solvi possint.*

Le opere, che il liberto deve al patrono, sono *sempre* nell'epoca classica opere *officiales.* Il liberto può essere un *faber* o un *pictor*: non perciò le sue opere diventano *fabriles*: rimangono opere *officiales*, perchè sono *anch'esse* la concreta manifestazione di quell'*officium* che il liberto deve al patrono.

E i giuristi, per designare le prestazioni *professionali* del liberto, adoperano sempre una stessa parola: *artificium* (fr. 26 § 12 D. 12. 6: officiales operas... nisi forte in *artificio* sint — fr. 9 § 1 D. 38. 1: si in *artificio* sint — fr. 16 D. eod.: eius *artificii*... operas — fr. 23 pr. D. eod.: si libertus faber aut pictor fuerit, quamdiu id *artificium* exercebit — fr. 25 D. eod.: nam si quis pantomimum vel archimimum libertum habeat... medici servos eiusdem artis libertos perducunt, quorum operis perpetuo uti non aliter possunt, quam ut eas locent. ea et in ceteris

artificibus dici possunt — fr. 38 § 1 D. eod.: si tamen libertus *artificium* exerceat... quod si *artificium* exercere desierit — fr. 50 pr. D. eod.: dignitati facultatibus consuetudini *artificio* eius convenientes edendas).

La prestazione *professionale* del liberto è univocamente indicata. E, mentre questa prestazione *professionale*, nel fr. 23 pr. D. 38. 1, già considerato, è nettamente contrapposta all'opera *fabrilis* vel *pictoria*, nel fr. 26 § 12 D. 12. 6 (officiales operas... nisi forte in artificio sint) è esplicitamente riassunta nella categoria dell'opera *officialis* (1).

Non essendo la prestazione *professionale* del liberto che un'opera *officialis* anch'essa, si comprende come i giuristi definiscano l'*opera* un *officium* e adoperino le due parole l'una invece dell'altra.

fr. 1 D. 38. 1: *Operae* sunt diurnum *officium*.

fr. 3 § 1 D. eod.: Nec *pars operae* per horas solvi potest, quia id est *officii diurni*.

fr. 22 pr. D. eod.: cum enim *operarum* editio nihil aliud sit quam *officii* praestatio.

fr. 26 § 12 D. 12. 6: si non *operae* patrono sunt solutae sed, cum *officium* ab eo desideraretur, cum patrono decidit pecunia et solvit.....

Ammettendo che il liberto deve al patrono anche le opere *fabriles* differenziate dalle opere *officiales*, anzi contrapposte ad esse, i testi ora riferiti non sarebbero assolutamente spiegabili.

È preparata la via per giungere ad apprezzare il valore che hanno i tre testi delle Pandette, i quali distinguono le opere *officiales* dalle opere *fabriles* e le une e le altre ricollegano al rapporto giuridico del patronato.

I testi sono i seguenti:

fr. 26 § 12 D. 12. 6 (Ulp.): Libertus cum se putaret operas patrono debere, solvit: condicere eum non posse, quamvis putans se obligatum solvit, Julianus libro decimo digestorum scripsit: natura enim operas patrono libertus debet. sed et si non operae patrono sunt solutae, sed, cum officium ab eo desideraretur,

(1) In un mio precedente studio (cfr. E. Albertario, *La costruzione nisi - tunc enim ed altre somiglianti*, in " Filangieri ", 1911, nn. 11-12, p. 24 estr.) ho ritenuto questo fr. alterato, *ma solo formalmente*.

cum patrono decidit pecunia et solvit, repetere non potest. *sed si operas patrono exhibuit non officiales, sed fabriles, veluti pictorias vel alias, dum putat se debere, videndum an possit condicere...*

Poi, due testi collocati sotto la rubrica *de operis libertorum.*

fr. 6 D. 38. 1 (Ulp.): Fabriles operae, ceteraeque, quae quasi in pecuniae praestatione consistunt, ad heredem transeunt, officiales vero non transeunt.

fr. 9 D. eod. (Ulp.): Operae in rerum natura non sunt. Sed officiales quidem futurae nec cuiquam alii deberi possunt quam patrono, cum proprietas earum et in edentis persona et in eius cui eduntur constitit: fabriles autem aliaeve eius generis sunt, ut a quocumque cuicumque solvi possint. sane enim, si in artificio sint, iubente patrono et alii edi possunt.

Quanto al primo testo, riesce facile dimostrare che il periodo — in cui le opere *fabriles* rappresentano insieme con le opere *officiales* le prestazioni che il liberto deve al suo patrono — è stato alterato.

Il Biondi ritiene il testo alterato anche in più larga misura. Non è compito mio determinare qui i limiti precisi della alterazione: rilevo, però, che il Biondi ha addotto, per una più larga alterazione di quella da me supposta, indizi abbastanza notevoli (1). A me importa fissare l'origine tribonianea del periodo, in cui le opere *fabriles* sono nettamente richiamate al rapporto giuridico del patronato. Ed il fissarla è — lo ripeto ancora — agevole.

Proprio poco prima nello stesso paragrafo Ulpiano avverte:

sed et si non *operae* patrono sunt solutae, sed, cum *officium* ab eo desideraretur, cum patrono decidit pecunia et solvit...; lascia chiaramente intendere, in altre parole, come già rilevai, che *operae* ed *officium* sono due sinonimi; che nel rapporto di patronato non vi possono essere che opere *officiales*, in qualunque modo l'*officium* si presti, quale che sia l'*opera* (professionale, o non) che viene prestata.

Se così è, come è possibile che poi lo stesso Ulpiano distacchi le prestazioni professionali del liberto dal novero delle opere *officiales* e le chiami *fabriles*?

Faccio un altro rilievo. *Exhibere* operas è espressione che

(1) Cfr. anche Beseler, *Beiträge*, III, 148.

non sembra usata dai giuristi; che può, invece, benissimo appartenere a quei compilatori, i quali in testi interpolati adoperano nei più varii significati il verbo *exhibere* (1).

Una scorsa, fatta attraverso il titolo *de operis libertorum* (D. 38. 1), dà il seguente risultato. I giuristi dicono:

edere operas (fr. 9 § 1, 38 § 1, 49, 50) o

solvere operas (fr. 3 § 1, 10 § 1, 15 § 1) o più spesso ancora

praestare operas (fr. 7 § 3, 15 pr., 16, 18, 20 pr., 22 pr., 23, 35, 37 pr., 38, 48 § 2).

Queste considerazioni mi sembrano sufficienti per far ritenere che le opere *fabriles* sono nel fr. 26 § 12 D. 12. 6 riferite al rapporto di patronato dai compilatori, non dal giureconsulto.

Quanto ai due testi ulpianei, riferiti nel titolo *de operis libertorum* (D. 38.1), non resta che da richiamare quanto acutamente osservò già il Mitteis. Soltanto la *collocazione*, che diedero ad essi i compilatori, può far ritenere che le opere *fabriles* rientrino nella categoria delle opere dei liberti. Nel titolo *de operis libertorum* si distinguono le opere *fabriles* dalle opere *officiales*: perciò sembrano opere dei liberti le une e le altre.

Ma nell'opera ulpianea, nel Commentario di Ulpiano ad Sabinum, i due testi non avevano questo esplicito riferimento alle *operae libertorum*, che hanno nella compilazione giustinianea. Il fr. 6 D. h. t. si riferiva originariamente all'*adrogatio* ed il giurista, rilevando quali erano i diritti che dall'arrogato trapassavano nell'arrogante e quali non trapassavano, separava le opere officiales, *cioè le opere dei liberti*, dalle altre opere (von den gewöhnlichen ' operae fabriles ').

Anche il fr. 9 si riferiva originariamente alla restituzione della dote *soluto matrimonio*, e riguardava precisamente l'ipotesi che il marito avesse manomesso uno schiavo dotale. Quid delle opere che il liberto aveva promesso al marito manomettente? Ulpiano avvertiva che, *essendo esse operae officiales*, dovevansi prestare solo al patrono, a meno che consistessero in prestazioni professionali: sane enim, si in artificio sint, iubente patrono et alii edi possunt. " Die daneben noch genannten fabriles — soggiunge il Mitteis — sind dann nicht als unmittelbarer Gegenstand

(1) Cfr. Albertario, *Rend. Ist. Lomb.*, 1913, p. 856, n. 4.

der Dotalrestitution genannt, sondern nur *als theoretisches Beispiel*, um für die officiales die Untersuchung zu vertiefen „.

Dopo ciò possiamo conchiudere. Il diritto romano classico non ricomprendeva nelle *operae libertorum* le *operae officiales* e le *operae fabriles*. Affermava che *operae libertorum* erano solamente le *operae officiales*, le quali sempre così si chiamavano e si consideravano, anche se consistevano *in artificio*, anche se erano, insomma, prestazioni *professionali*.

Le *operae fabriles* erano estranee al rapporto di patronato, completamente.

La riforma giustinianea è duplice: *terminologica* e *sostanziale*.

Il Mitteis lo negò, a mio modesto avviso non esattamente. Dopo essersi domandato, come mai i compilatori poterono trasportare i testi ulpianei sotto la rubrica *de operis libertorum* in modo da far credere che essi annoverino tra le opere dei liberti anche le opere *fabriles*, egli risponde:

" Der Grund ist ganz einfach der, dass sie auf einer feststehenden Terminologie fussten, welche dieses Missverständniss ausschloss. Dass Freigelassenendienste immer officiales sind und fabriles immer Handwerkerdienste, das wusste eben damals, wo das Patronat noch ein lebendes Institut war, Jedermann... „.

A mio avviso, invece, riferendo sotto il titolo *de operis libertorum* i due testi ulpianei (fr. 6 e fr. 9) che avevano originariamente esplicito riferimento non al rapporto di patronato, ma a tutt'altri rapporti, i compilatori dimostrano di voler chiamare *operae fabriles* quelle prestazioni professionali dei liberti, che i classici ritenevano sempre *officiales*, per quanto consistenti *in artificio*. Le prestazioni professionali dei liberti non sono più chiamate nella nuova epoca *operae officiales*, non sono più indicate col tecnico classico termine ' *artificium* ', ma diventano *operae fabriles*.

Interpolato il fr. 26 § 12 D. 12.6, artificiosamente spostati dalla loro originaria sede i ffr. 6 e 9 D. 38.1, i compilatori non alterarono gli altri testi: non alterarono sopratutto il fr. 23 pr. e il fr. 24 D. eod.

Così un'altra volta il cattivo metodo dei compilatori lascia agevolmente scorgere l'alterazione profonda che, a questo riguardo, la classica terminologia romana subì.

Ma la riforma giustinianea è sopratutto sostanziale. La

riforma terminologica non fu che il mezzo adoperato per eseguirla.

I compilatori vogliono che le prestazioni professionali del liberto siano — come qualsiasi altra prestazione professionale al di fuori del rapporto di patronato — *ereditariamente trasmissibili* (trapassino, cioè, anche nell'erede *estraneo*); e siano esigibili da chiunque.

Perciò alterano, ampliandolo, il significato dell'espressione '*operae fabriles*'.

Perchè così vogliano i compilatori, vedremo in seguito. Per ora importa conchiudere che anch'io ritengo, come ritiene il Biondi, che la distinzione tra opere *officiales* e opere *fabriles* in ordine alle opere dei liberti risale ai compilatori giustinianei; che anch'io ritengo, com'egli ritiene, che i compilatori per i primi ammettano il passaggio delle prestazioni professionali del liberto agli eredi estranei del patrono; ma che non giungo a questo risultato attraverso la profonda alterazione del fr. 6 e del fr. 9 D. 38. 1, che egli suppone: alterazione non dimostrata e, per quanto a me sembra, inverosimile. I due testi furono, è vero, alterati; ma mediante quel semplice spostamento, sul quale richiamò l'attenzione il vigile acuto occhio del Mitteis, dal quale — però — il Mitteis non dedusse quella innovazione dei Giustinianei, terminologica e sostanziale insieme, che affermiamo — per vie diverse — il Biondi ed io.

Mediante quel semplice spostamento l'opera *fabrilis* è espressione che indica la prestazione *professionale anche del liberto*: mediante esso, come qualsiasi altra prestazione professionale al di fuori del rapporto di patronato, anche le prestazioni professionali del liberto *ad heredem transeunt*: trapassano, cioè, nell'erede estraneo (fr. 6); *cuicumque solvi possunt* (fr. 9).

II. Operae praeteritae, futurae.

Il Biondi ritiene che il diritto classico distinguesse le opere dei liberti in *praeteritae* e *futurae*, a seconda che fossero, o non, già *indictae*; cioè, già richieste dal patrono: che le *praeteritae* fossero trasmissibili anche all'erede estraneo: le *futurae*, ad esso intrasmissibili: che Giustiniano abbia stabilito il pas-

saggio all'erede estraneo anche delle *futurae* sostituendo, però, alla distinzione classica tra opere *praeteritae* e opere *futurae* la distinzione tra opere *officiales* e opere *fabriles*: all'erede estraneo passerebbero soltanto le opere *fabriles*, non le *officiales*.

Tutta questa complicata innovazione non è, se io vedo bene, esatta. Io ritengo invece che le opere dei liberti — fossero esse *indictae* o non, fossero d'indole strettamente personale (*officiales*, senz'altro) o di carattere professionale (*officiales*, in artificio) — non si trasmettevano nell'epoca classica all'erede estraneo. Nell'epoca giustinianea il diritto alle opere vien fatto aderire con tutti i possibili sforzi alla qualità di erede: perciò in ordine alle opere dei liberti sorge la distinzione tra opere *officiales* e *fabriles*: queste passano all'erede estraneo, *sempre*; perciò le opere officiales si distinguono in *praeteritae* e *futurae*: le *praeteritae* passano *anche* all'erede estraneo. Le sole opere, che non passano all'erede estraneo, sono le opere *officiales futurae*. A tanto neppur Giustiniano si sentì di arrivare.

Il Biondi riconosce l'esattezza del principio, da me posto in luce, che il diritto alle opere era nell'epoca classica ricollegato alla qualità di *discendente agnato* del patrono e non a quella di erede. Ma ritiene che, ciò non ostante, le opere *praeteritae* passassero anche all'erede estraneo, appunto perchè quel carattere strettamente personale e *familiare* del diritto alle opere veniva meno con l'*indictio* fatta dal patrono.

Per provare il suo assunto egli cita la c. 7, C. 6, 3:

Imp. Alexander A. Minicio (a. 224) Nec patronis pro operis mercedem accipere licet, quamvis, si indictae operae praestitae non sint, *ad pecuniae exactionem obsequii non praestiti aestimatio convertatur*.

Queste ultime parole della c. sono, secondo il Biondi, decisive per far ammettere il passaggio delle opere *praeteritae* anche all'erede *estraneo*. Svanito, dopo l'*indictio*, il carattere familiare del diritto alle opere, non resta che una obbligazione avente per oggetto una somma di denaro, perciò ereditariamente trasmissibile.

A me non sembra che, così, sia bene intesa la c. di Alessandro. L'imperatore vuol affermare il principio che il diritto alle opere non deve considerarsi fonte di lucro, anche se per le opere richieste, *e non prestate*, il liberto è tenuto a dare al

patrono l'equivalente in danaro. E niente più. Non è possibile dedurre dalla c. che anche l'erede estraneo può pretendere la *exactionem pecuniae* per le opere richieste dal patrono e non prestate. Anzi, dalla c. si deduce il contrario. Essa dice precisamente così:

Ad pecuniae exactionem *obsequii non praestiti aestimatio* convertatur.

Dice che, dopo l'*indictio*, verrà valutato in una somma di denaro l'*obsequium non praestitum*. Ora, se all'erede *estraneo* l'*obsequium* non è dovuto — come il Biondi ha pur giustamente riconosciuto ricollegando il diritto alle opere *alla qualità di discendente agnato*, non alla qualità di erede —, come è possibile valutare in denaro un *obsequium* che non si deve? Se la somma di denaro *sostituisce* — dopo l'indictio — la prestazione delle opere non avvenuta; se è dovuta invece del non prestato *obsequium*, è evidente che essa non può spettare all'erede estraneo, perchè a lui l'*obsequium* non è dovuto, perchè nel caso dell'erede estraneo essa *non sostituisce* alcuna cosa.

Per sostenere il suo assunto il Biondi invoca anche l'analogia del passaggio agli eredi delle azioni penali. L'obligatio ex delicto — egli avverte — è strettamente personale ed intrasmissibile agli eredi; ma dopo la *litis contestatio* l'obbligazione passa agli eredi, perchè alla precedente obbligazione se ne è sostituita un'altra, ex litis contestatione, avente carattere e contenuto patrimoniale.

Io innanzitutto rilevo che questo argomento *analogico* potrebbe essere addotto *nel solo caso* che, iniziatosi il *iudicium operarum*, fosse avvenuta la *contestazione della lite*. L'analogia, insomma, invocata dal Biondi reggerebbe se il *iudicium operarum* fosse già stato intentato contro il liberto e se già in questo *iudicium* fosse intervenuta la *litis contestatio*: non reggerebbe per le opere *praeteritae* (che sono le opere non prestate durante il tempo stabilito), a proposito delle quali non si fosse ancora verificata la *contestatio litis* nel corso del *iudicium operarum*.

Questa osservazione non mi sembra discutibile. Ma, anche così limitato, l'argomento analogico addotto dal Biondi a mio avviso non regge.

Il diritto alle opere spetta al patrono: morto il patrono

spetta *al suo discendente agnato*, anche se non è erede, anche se il *iudicium operarum* non era stato promosso dal patrono e la *litis contestatio* non era intervenuta. Ciò è detto con la più limpida chiarezza dal fr. 29 D. 38. 1:

Si operarum iudicio actum fuerit cum liberto et patronus decesserit, convenit translationem heredi extraneo non esse dandam: *filio autem et si heres non extat et si lis contestata non fuerat...*

Se quell'analogia, che il Biondi richiama, realmente esistesse, ne deriverebbe che il liberto, convenuto col *iudicium operarum* dal proprio patrono — che però muore dopo la *litis contestatio* — sarebbe contemporaneamente tenuto e verso il figlio e verso l'erede estraneo. Cosa assurda ed impossibile.

L'azione penale passa dopo la *litis contestatio* all'erede; il diritto alle opere, no.

È naturale. Perchè il diritto alle opere è un diritto *in ogni momento* estraneo all'eredità. Ce lo dicon chiaramente le fonti. Nel fr. 4 D. 38. 1 Ulpiano avverte:

A duobus manumissus utrique operas promiserat: altero ex his mortuo nihil est, quare non *filio* eius..... operarum detur petitio: *nec hoc quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione.*

Credo di aver già così scalzati gli argomenti sui quali il Biondi appoggia la tesi che anche all'erede estraneo potevano nell'epoca classica spettare le opere *praeteritae*, sia che per *praeteritae* si intendano — come qualche volta il Biondi intende — le opere *indictae* e non prestate nel tempo per il quale furono richieste, sia che per *praeteritae* s'intendano — come egli intende qualche altra volta — le opere, a proposito delle quali è stato esperito il *iudicium operarum* e la *litis contestatio* è già intervenuta.

Possiamo ora considerare i singoli testi per dimostrare come l'esegesi fattane dal Biondi è, se non erro, insostenibile. E innanzitutto vediamo più da presso il fr. 4 D. 38. 1 (Ulp. l. 4° ad Sabinum), or ora in parte riferito:

A duobus manumissus utrique operas promiserat: altero ex his mortuo nihil est, quare non filio eius, quamvis superstite altero, operarum detur petitio. nec hoc quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione: [*perinde enim operae ac pecunia credita petitur.*] haec ita Aristo scripsit, cuius

sententiam puto veram: [*nam etiam praeteritarum operarum actionem dari heredi extraneo sine metu exceptionis placet.*] dabitur igitur et vivo altero patrono.

Secondo il Biondi, i compilatori avrebbero interpolato soltanto '*etiam*', giacchè, mentre — secondo lui — i giuristi classici ammettevano il passaggio all'erede estraneo delle opere *praeteritae*, i compilatori — sempre secondo lui — vorrebbero ammettere il passaggio all'erede estraneo anche delle opere *futurae*, purchè *fabriles*.

Cavar fuori tutto ciò dal testo ulpianeo non è possibile. Per un motivo assai semplice. Il Biondi — che afferma passare all'erede estraneo nell'epoca giustinianea le opere *fabriles* (anche se *futurae*), non le *officiales* (anche se *praeteritae*) — non s'è dato pensiero di vedere che nel testo non si distingue tra opere *fabriles* e opere *officiales*. Ora, anche non ritenendo che le opere dei liberti sono nell'epoca classica soltanto *officiales* e che *opera* è sinonimo di *officium*, avremmo qui un testo, che parla *genericamente* di opere (le quali possono essere e anche più solitamente non essere *in artificio*); un testo, in cui i compilatori intercalando '*etiam*' avvertirebbero che, *praeteritae* o *futurae*, le opere passano all'erede estraneo: *tutte le opere*, anche le *officiales*. Ed ecco, così, che il Biondi ammette una interpolazione che rovina la sua stessa tesi.

A mio avviso, il testo è diversamente e più largamente interpolato. In esso il principio classico e il principio giustinianeo — come molte altre volte — si sovrappongono, in modo che il separarli non è difficile.

Consideriamo perchè Ulpiano dice che l'*operarum petitio* possa esser data al figlio di uno dei due manomittenti, anche se ancor viva l'altro. Ulpiano spiega così:

nec hoc quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione: [*perinde enim operae a libertis ac pecunia credita petitur*].

Questa spiegazione ulpianea è composta di due parti, che cozzano fra loro.

Nec hoc quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione — va benissimo.

È una volta di più affermata energicamente l'indipendenza del diritto alle opere dalla eredità o dalla *bonorum possessio*.

Ma, come si riallaccia a questa osservazione la motivazione successiva:

perinde enim operae a libertis ac pecunia credita petitur?

Io proprio non so. Se le opere si chiedono ai liberti come una *pecunia credita*, perchè dire che il diritto alle opere dei liberti *nec quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione*?

Dovrebbe essere tutto l'opposto: come *ogni altra pecunia credita*, dovrebbe far parte della eredità e della *bonorum possessio*.

Non si può uscire da questo intrico, se non ammettendo che la frase

perinde enim operae a libertis ac pecunia credita petitur

sia tribonianea. A ciò deve indurre anche la imperdonabile sgrammaticatura, sulla quale io prima non insistei, e che il Biondi ora non rileva: *operae* (pl.) ..... *petitur* (sing.)!

Perchè i compilatori interpolarono questa frase? È facile comprenderlo. Essi volevano concedere l'*operarum petitio* per le opere *praeteritae* anche all'erede estraneo. Trovavano un ostacolo nell'affermazione del giurista affermante che il diritto alle opere '*nec quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione*' e vi riparano avvertendo — con una frase che è sostanzialmente una stonatura e formalmente una sgrammaticatura — che il diritto alle opere è come il diritto a una *pecunia credita*!

Fatto ciò, essi possono, subito dopo, interpolare: *nam etiam praeteritarum operarum actionem dari heredi extraneo sine metu exceptionis placet*.

Io dimostrai già come questa frase si dovesse ritenere tribonianea, e ho avuto il piacere di veder accolto questo mio modesto rilievo critico dal severo intelletto di P. Krüger. Il bisogno, che il Mommsen sente, di inserire, dopo '*dabitur igitur et vivo altero patrono*', le parole '*patroni filio*' nasce per l'appunto e solamente dall'aver i compilatori intrusa la menzione dell'*erede estraneo*. Liberato dalle alterazioni subite per concedere anche all'erede estraneo il diritto alle opere *praeteritae*, il testo ulpianeo presenta un limpido dettato:

A duobus manumissus utrique operas promiserat: altero ex his mortuo nihil est, quare non filio eius, quamvis superstite altero, operarum detur petitio, nec hoc quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione, haec ita Aristo scripsit,

cuius sententiam puto veram. dabitur igitur et vivo altero patrono.

Veniamo al fr. 6 D. h. t. (Ulp. l. 26° ad Sabinum):

Fabriles operae ceteraeque, quae quasi in pecuniae praestatione consistunt, ad heredem transeunt, officiales vero non transeunt.

Il Biondi crede di ricostruire il testo classico in modo sicuro, così:

Praeteritae operae, quae quasi in pecuniae praestatione consistunt, ad heredem transeunt, futurae vero non transeunt.

Egli sostituisce *praeteritae* a *fabriles, futurae* a *officiales* non per qualche nuova considerazione, ma per quell' '*etiam*' che egli crede sia la sola parola interpolata nel fr. 4 D. h. t., che abbiamo testè veduto. L'erroneità della sua esegesi e dei suoi rilievi intorno al fr. 4 prova l'inconsistenza della *sostituzione* che egli vuol fare nel fr. 6. Perchè poi egli sopprima *ceteraeque*, data quella ricostruzione e data la sua tesi in ordine alle opere dei liberti, io non comprendo.

Anche il fr. 6 è interpolato, ma in ben diversa maniera e per ben diverso fine da quel che il Biondi suppone.

Che cosa sono le *ceteraeque* (operae) *quae quasi in pecuniae praestatione consistunt*? È pronta la risposta: le opere *praeteritae*! Le opere *fabriles* sono per i giustinianei — come abbiamo visto — le prestazioni professionali del liberto, *valutabili in denaro*: le altre opere, *quae quasi in pecuniae praestatione consistunt*, non possono essere che le opere *officiales* (nel senso giustinianeo, già chiarito) *praeteritae*! Nel fr. 4 i giustinianei ammettono il passaggio delle opere *praeteritae* all'erede estraneo perchè le considerano '*pecunia credita*': qui nuovamente le considerano opere '*quae quasi in pecuniae praestatione consistunt*'. La stessa mano interpolante; in fondo, anche lo stesso concetto interpolato.

A far vieppiù ritenere la interpolazione, rilevo l'indeterminatezza di '*ceteraeque*' e le frequentissime interpolazioni fatte con questa parola; noto anche il compilatorio uso del '*quasi*'.

Il testo classico diceva soltanto:

Fabriles (e s'intendevano le opere estranee al rapporto di patronato!) *operae ad heredem transeunt, officiales* (e s'intendevano *tutte* le opere dei liberti!) *vero non transeunt.*

Consideriamo ora un successivo testo ulpianeo, il fr. 9 D. h. t. (l. 34° ad Sabinum):

Operae in rerum natura non sunt. Sed officiales quidem futurae nec cuiquam alii deberi possunt quam patrono, cum proprietas earum et in edentis persona et in eius cui eduntur constitit: fabriles autem aliaeve eius generis sunt, ut a quocumque cuicumque solvi possint. sane enim, si in artificio sint, iubente patrono et alii edi possunt.

Il Biondi trova, come tutti del resto, stranamente collocato il '*futurae*' e *da ciò* prende la spinta per ricostruire il testo classico in questa maniera:

Operae in rerum natura non sunt. Sed quidem futurae nec cuiquam alii deberi possunt quam patrono et liberis eius. praeteritae eius generis sunt, ut cuicumque solvi possint.

Questa ricostruzione è ben lungi dal persuadere. Intere frasi sono tolte via dal frammento del giurista, parole sono sostituite a parole, senza saperne il perchè.

Perchè la frase '*cum proprietas earum et in edentis persona et in eius cui eduntur constitit*' è spazzata via? perchè egual sorte tocca alla frase finale '*sane enim, si in artificio sint, iubente patrono et alii edi possunt*'?

Perchè è interpolato '*aliaeve*'; perchè è interpolato '*a quocumque*'?

Il Biondi non dice una parola. E, a mio modesto avviso, non poteva dirla.

Ma anche l'eliminazione della parola '*officiales*', anche la sostituzione di '*praeteritae*' a '*fabriles*' sono impossibili. Prescindo da tutte le considerazioni già svolte. Curiosi quei compilatori, che intercalerebbero tra un '*sed*' e un '*quidem*' la parola '*officiales*' e lascierebbero sopravvivere '*futurae*' proprio per esprimere *inesattamente* la loro pretesa riforma! E che cosa vorrebbe dire nel testo ricostruito dal Biondi il barbaro '*sed quidem*'?

Che il giurista poi dica: *fabriles* (operae) eius *generis* sunt, ut a quocumque cuicumque solvi possint, io capisco; ma non capirei se dicesse: *praeteritae* (operae) eius *generis* sunt, etc. Le opere *praeteritae* possono essere giuridicamente disciplinate (Giustiniano, secondo me, le disciplina) in modo diverso dalle opere *futurae*: ma si può dire che *perciò* esse hanno uno speciale *genus*? Io credo di doverlo negare.

Vediamo invece come i compilatori hanno alterato il testo. Chiudo tra le parentesi le parole che io ritengo interpolate.

Operae in rerum natura non sunt. Sed officiales [*quidem futurae*] nec cuiquam alii deberi possunt quam patrono, cum proprietas earum et in edentis persona et in eius cui eduntur constitit: fabriles autem [*aliaeve*] eius generis sunt, ut a quocumque cuicumque solvi possint. sane enim, si in artificio sint, iubente patrono et alii edi possunt.

L'aggiunta '*quidem futurae*' è compilatoria. I compilatori, che nel precedente fr. 4 e nel precedente fr. 6 ammettono il passaggio delle opere *officiales praeteritae* anche all'erede estraneo (fr. 4: nam etiam *praeteritarum* operarum actionem dari heredi extraneo sine metu exceptionis placet — fr. 6: *ceteraeque quae quasi in pecuniae praestatione consistunt, ad heredem transeunt*) non possono riferire, senza alterarlo, il principio classico riaffermato da Ulpiano che 'officiales (operae) nec cuiquam alii deberi possunt quam patrono'. Il principio non è più vero per le opere *officiales*, che siano già *praeteritae*: perciò essi soggiungono la limitazione '*quidem futurae*'. Così si spiega '*quidem futurae*' nel testo, così si spiega '*quidem*' (1).

Connessa con questa è la successiva intercalazione di '*aliaeve*'. Che cosa significa '*aliaeve*' accanto a '*fabriles*'? Non mi par dubbia la risposta: significa '*operae officiales praeteritae*'. La interpolazione di '*aliaeve*' richiama irresistibilmente la interpolazione fatta nel precedente fr. 6: '*ceteraeque*'. È la innovazione giustinianea che spicca limpida anche qui. Le opere *officiales futurae* non spettano che al patrono (e ai suoi discendenti agnati): le opere *fabriles* e le opere *officiales praeteritae* possono essere prestate a chiunque, anche all'erede estraneo: sono come una '*pecunia credita*' (fr. 4); '*quasi in pecuniae praestatione consistunt*' (fr. 6); '*eius generis sunt ut cuicumque solvi possint*' (fr. 9).

Un testo, a proposito del quale le considerazioni del Biondi sono ancor più evidentemente inaccettabili, è il fr. 20 § 2 D. 29. 2 (Ulp. l. 61° ad ed.):

---

(1) Il Krüger segnala nella sua dodicesima edizione del *Digesto* anche questa interpolazione da me rilevata, per quanto non gli sembri così sicura come quella avvertita nel fr. 4. Spero che queste nuove osservazioni convertiranno la probabilità in certezza.

Si quid tamen quasi heres petit, sed ex his quae ad heredem extraneum non transeunt, videamus an oneribus se immerserit hereditariis. ut puta a liberto parentis operas petit; has heres extraneus petere non potuit, hic tamen petendo consequi potest. et constat pro herede eum non gessisse, cum petitio earum etiam *non heredibus* (Cuiacio: la Fiorentina ha un impossibile: *creditoribus*) competat [*et maxime futurarum*].

Secondo me, è interpolato questo ultimo inciso '*et maxime futurarum*'. La forma stessa dell'inciso è sospetta: 'maxime' è un tipico modo di dire dei compilatori. Qui essi riaffermano un'altra volta la loro innovazione. Il testo classico diceva che il figlio, istituito erede, non compie una *gestio pro herede* se chiede le opere al liberto del proprio padre, giacchè gli spetterebbero anche non erede. I compilatori che concedono *anche all'erede estraneo* il diritto alle operae officiales *praeteritae* e riservano al discendente agnato solamente il diritto alle operae officiales *futurae*, non possono più dire in modo *assoluto* che le operae *officiales* spettano al figlio anche non erede, ma devono porre in rilievo che le opere spettanti al figlio anche non erede, non spettanti all'estraneo anche erede, sono ora le operae officiales *futurae*. Perciò soggiungono '*et maxime futurarum*', che altrimenti non sarebbe spiegabile.

Le osservazioni che il Biondi fa intorno a questo testo sono, se io non vedo male, addirittura inverosimili. Anch'egli ritiene interpolato l'inciso '*et maxime futurarum*', ma per di più egli ritiene interpolato anche il precedente '*etiam*' e, d'altra parte, ritiene l'una e l'altra interpolazione fondate su considerazioni, che mi sembrano strane assai.

Egli è ugualmente disposto a leggere col Cuiacio " etiam *non heredibus* " o col Mommsen " etiam *liberis tamquam* creditoribus ". Ma, dopo ciò, osserva:

" Qualunque delle due emendazioni si accetti, è chiaro che l'*etiam* si appalesa intruso: Ulpiano verrebbe a dire che *anche* ai figli compete la petitio delle operae! L'*etiam* invece si spiega in bocca dei compilatori ed ha la stessa portata dell'altro *etiam* intruso nel fr. 4 esaminato: cioè accordare anche all'erede estraneo la petitio delle operae futurae ".

Per me, tutto ciò è incomprensibile. Non dice una esattissima cosa Ulpiano, se dice (tenendo presente l'emendazione cuia-

ciana, che pure il Biondi accetta) che il diritto alle opere spetta ai figli *anche non eredi*? Non è ciò il principio riaffermato altrove dallo stesso Ulpiano, proprio nel fr. 4 D. 38. 1 che il diritto alle opere non ha alcunchè di comune colla eredità e colla *bonorum possessio* (nec hoc quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione)? E, d'altra parte, che cosa permette di riferire l'*etiam* all'*heres extraneus*? Io non so come il Biondi possa pensare a questo fantastico riferimento.

Ancor più strano è il modo col quale egli spiega l'interpolazione dell'inciso '*et maxime futurarum*'.

" Solo i compilatori — egli incalza — rispetto al diritto dei figli alle operae possono dire *maxime* futurarum perchè per essi anche l'erede estraneo ha diritto anche alle operae futurae ".

Se io non m'inganno, il Biondi è caduto in un grave equivoco. Ma, se i compilatori avessero voluto affermare il principio (dal Biondi a loro attribuito) che all'erede estraneo passano anche le opere *futurae*, io dico che se ci sono parole che essi non dovevano mai interpolare, sono proprio quelle in realtà interpolate '*et maxime futurarum*', colle quali queste opere sono riservate ai figli non eredi.

C'è ancor di peggio. Il Biondi non si è accorto che il testo parla genericamente di *operae*: che non parla assolutamente di *operae fabriles*: che perciò, *anche secondo la sua tesi*, le *operae* in questo caso non dovrebbero passare per il diritto giustinianeo all'erede estraneo. E non si è accorto che il limpido dettato del testo scalza d'un colpo tutta la sua tesi. Egli sostiene che nel diritto classico l'erede estraneo aveva diritto alle opere *praeteritae*. Questa affermazione trova in questo testo la sua confutazione più netta e più recisa:

Si quid tamen (filius) quasi heres petit, sed *ex his quae ad heredem extraneum non transeunt... ut puta a liberto parentis operas petit: has heres extraneus petere non potuit.*

Incredibile è l'esegesi, che il Biondi fa del fr. 29 D. 38. 1 (Ulp. l. 64 ad ed.):

Si operarum iudicio actum fuerit cum liberto et patronus decesserit, convenit translationem heredi extraneo non esse dandam: filio autem et si heres non extat et lis contestata non fuerat, tamen omnimodo competit, nisi exheredatus sit.

Io addussi questo testo, sfuggito all'attività interpolatrice

dei compilatori (e poteva sfuggire tanto più che appartiene alla massa *edittale* mentre il fr. 4, il fr. 6 e il fr. 9 appartengono alla massa *sabiniana*), proprio per riprovare che nell'epoca classica le opere dei liberti, anche *praeteritae*, non passavano all'*erede estraneo*. E ho avuto il piacere di notare che, mentre nelle precedenti edizioni del Digesto veniva richiamato in nota a questo testo il tentativo cuiaciano (sconsigliato dai Basilici!) di togliere il *non*, il Krüger nella sua più recente edizione (1911) insiste nell'avvertire che il *non* dev'essere mantenuto.

Se c'è testo che rispecchia nel modo più chiaro il classico stato di cose, è per l'appunto questo. L'erede estraneo non ha diritto alle opere anche se è stata contestata la lite col patrono; il figlio ha diritto ad esse anche se la *contestatio litis* non s'è verificata, anche se non è erede.

Che cosa fa il Biondi? Giustamente egli non si sente il coraggio, per eliminare l'insormontabile difficoltà che questo testo costituisce per la sua tesi, di sopprimere il *non*; ma fa di peggio. Egli ritiene interpolato il *non* e interpolato tutto l'inciso '*filio autem et si heres non extat et si lis contestata non fuerat, tamen omnimodo competit, nisi exheredatus sit*'.

Questa esegesi mi sembra disperata. Che all'attività interpolatrice dei compilatori un testo possa sfuggire, è cosa non soltanto spiegabile, ma anche indubitabile, dati i frequenti esempi che ormai possediamo. Che, invece, i compilatori, trovandosi innanzi un testo che fa per loro, lo interpolino per fargli dire cosa *opposta* a quella che è la loro dottrina, è cosa che nessuno ha detto finora e che nessuno potrà mai dire.

Ciò avverto per quanto riguarda la supposta interpolazione del *non*. Ciò posso avvertire anche per la frase '*filio autem et si heres non extat et si lis contestata non fuerat*'. Questa frase, se appartiene al giurista, si spiega; se appartiene ai compilatori che innovano come pensa il Biondi, *non si può spiegare*. Se appartiene ad Ulpiano, non fa che ripetere ciò che lo stesso Ulpiano altrove dice: '*nec hoc* (petitio operarum) *quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione*' [fr. 4 D. 38. 1]; *hic* (filius) *petendo* (operas) *consequi potest, et constat pro herede eum non gessisse, cum petitio earum etiam non heredibus competat* [fr. 20 § 2 D. 29. 2].

Se appartiene ai compilatori, perchè costituire una diffe-

renza tra il *filius* e l'*heres extraneus* col dire che al filius spettano anche se *lis contestata non fuerat*, dal momento che il Biondi ritiene che per *innovazione giustinianea* all'erede estraneo spettano anche le opere *futurae*? E ancora: non ritiene il Biondi che nell'epoca giustinianea passino all'erede estraneo le opere *fabriles* anche se *futurae*, non passino le *officiales* anche se *praeteritae*? come mai i compilatori qui non distinguono?

Egli è trascinato a supporre l'interpolazione da questo motivo: " la dichiarazione che le operae spettano al figlio *et si heres non extat* è in aperto contrasto coll'insegnamento che ci tramanda come ius receptum Gaio nel fr. 22 § 1 D. h. t.: constat liberis eius ita demum deberi, si patri heredes extiterint ".

Ma, anche a questo riguardo, mi pare che il Biondi non colga nel segno. Il testo gaiano, da lui riferito, dice così:

Cum libertus promiserit patrono operas se daturum *neque adiecerit liberisque eius*, constat liberis eius, etc.

Il Biondi ha trascurato la circostanza essenziale '*neque adiecerit liberisque eius*'. In questo caso era necessario che i figli fossero eredi, ma questo era anche il caso *eccezionale*. Perchè solitamente le opere venivan promesse al patrono '*liberisque eius*'. Accadeva per le opere quel che accadeva per i sepolcri. Era cosa eccezionale che il patrono facesse promettere le opere soltanto a sè, come era eccezionale che il *paterfamilias* dedicasse un sepolcro a sè soltanto. Il patrono faceva promettere le opere a sè e ai suoi figli, nella stessa guisa che il *paterfamilias* dedicava il sepolcro '*sibi liberisque suis*'. Paolo riferisce nel fr. 37 pr. D. 38. 1 le parole della *lex Julia et Papia*: ' ne quis eorum operas doni muneris aliudve quicquam libertatis causa *patrono patronaeve liberisque eorum*, de quibus iuraverit vel promiserit obligatusve erit, dare facere praestare debeto ' (1).

---

(1) In un altro suo scritto (*Il giuramento decisorio nel processo civile romano*, Palermo, 1913, 28, n. 1) il Biondi afferma che nel fr. 29 D. 38. 1 si nega la *translatio iudicii* all'erede estraneo, perchè l'erede acquistava in questo caso *iure proprio* il diritto alle opere. *Jus proprium*? Ciò contraddice a quanto afferma anche il Biondi, che le opere nell'epoca classica spettavano al patrono e *ai discendenti agnati*, non agli eredi.

III. Il rapporto di patronato e l'eredità.

Ho cercato, modestamente, di confutare gli argomenti generali e i rilievi esegetici particolari sui quali il Biondi con molto acume ha collocato la sua nuova tesi. Io spero, così, di aver ristabilita l'esattezza del risultato già raggiunto in quel mio primo scritto e di averlo anche più ampliato e più determinato: di avere, insomma, intorno a questo punto del diritto dell'erede estraneo alle opere dei liberti, esaurita l'interessantissima indagine.

Prima di chiudere queste nuove osservazioni, è opportuno rivolgere uno sguardo al vario atteggiarsi del rapporto di patronato rispetto all'eredità nel mondo romano.

Il diritto di patronato e il diritto di sepolcro hanno la stessa storica vicenda.

Sono elementi extrapatrimoniali dell' eredità in un' epoca molto remota, nella quale soltanto i figli potevano essere eredi. Nell'antica organizzazione *politica* della *familia* romana gli elementi costituenti il *nucleo centrale* della eredità sono i *sacra*, il diritto di sepolcro, il diritto di patronato. Un meraviglioso ricorso storico dello stesso fenomeno constatiamo, a più di due millenni di distanza, presso la familia *giapponese*, anch'essa piccolo organismo politico come l'antica familia *romana*.

Sopraggiunge nel mondo romano un momento in cui sono chiamati alla *eredità* estranei alla *familia*. La chiamata di eredi estranei altera e scompone l'originario contenuto dell'eredità romana. Non essendo più il concetto dell'*eredità* in funzione del concetto di *familia*, nel senso che ora potevano essere eredi anche i non familiari, occorreva provvedere alla *trasmissibilità di quei diritti* che, come il diritto di sepolcro e il diritto di patronato, avevano un *carattere familiare*, essenziale e indistruttibile.

Il contenuto patrimoniale dell'eredità poteva spettare anche all'estraneo, ma il contenuto *extrapatrimoniale* di essa, avente un incancellabile carattere familiare — come il diritto di sepolcro e il diritto di patronato — non poteva spettare all'estraneo anzichè alla familia o all'estraneo insieme con la familia.

La profonda fondamentale struttura di quei diritti sarebbe stata colpita.

È appunto per questo che, quando si attuò la possibilità di chiamare all'eredità estranei, il diritto di sepolcro e il diritto di patronato si staccarono dall'eredità per restare sempre attaccati alla *familia*. È, questa, la *fase classica* dello svolgimento dei due diritti.

Io ripresento un'altra volta, notevolmente aumentati, i testi classici che affermano la indipendenza del diritto di patronato dalla eredità, o che comunque pongono in splendido risalto il suo carattere familiare.

D. 37. 10. 11: " ..... edicto Carboniano locus non est: ac similiter cum certus est, quamvis filius sit, eum tamen heredem non fore, veluti si Titio herede instituto postumus aut impubes exheredatus negetur filius. nec ad rem pertinet, quod interest illius in quibusdam *filium* esse, *veluti propter* fratris ex alia matre nati bona vel *iura libertorum*.....: istos enim casus ad Carbonianum constat non pertinere „.

D. 38. 1. 29: " Si operarum iudicio actum fuerit cum liberto et patronus decesserit, convenit translationem *heredi extraneo non* esse dandam: *filio autem et si heres non extat* et si lis contestata non fuerat..... „.

D. 29. 2. 20. 2: " Si quid tamen (*filius*) quasi heres petit, sed *ex his, quae ad heredem extraneum non transeunt*, videamus, an oneribus se immerserit hereditariis. *ut puta a liberto parentis operas petit; has heres extraneus petere non potuit*... „.

C. 6. 3. 6: " Liberti libertaeque defunctorum operas *neque extraneis heredibus* patronorum debent neque maritis patronarum „.

D. 37. 14. 9. pr.: " Filii hereditate paterna se abstinentes ius, quod in libertis habent paternis, non amittunt..... „

D. 38. 1. 4: " A duobus manumissus utrique operas promiserat: altero ex his mortuo nihil est, quare non filio eius, quamvis superstite altero, operarum detur petitio. *nec hoc quicquam commune habet cum hereditate aut bonorum possessione*... „.

D. 48. 22. 3: " Eum, qui civitatem amitteret, nihil aliud iuris adimere liberis, nisi quod ab ipso perventurum esset ad eos, si intestatus in civitate moreretur: hoc est hereditatem eius *et* libertos, et si quid aliud in hoc genere repperiri potest „.

D. 38. 2. 47. 4: " Paulus respondit, quamvis filii a patre milite praeteriti *pro exheredatis* habeantur, tamen non eo usque

silentium patris eis nocere debere, ut *et a bonis libertorum avitorum* repelli debeant. idem responsum est etiam de bonis libertorum paternorum „.

D. 38. 1. 48. pr.: " Sicut patronus, ita etiam patroni *filius et nepos et pronepos*, qui libertae nuptiis consensit, operarum exactionem amittit... „.

§ 2: " Patronae, item *filiae et nepti et pronepti* patroni, quae libertae nuptiis consensit, operarum exactio non denegatur... „.

D. 38. 1. 51: " Interdum operarum manet petitio, etiamsi ius patroni non sit: ut evenit in fratribus eius, cui adsignatus est libertus, aut nepote alterius patroni *extante alterius patroni filio* „.

C. 2. 2. 2: " Venia edicti non petita patronum seu patronam parentes *et liberos* — a libertis seu liberis eorum non debere in ius vocari certissimum est... „.

D. 2. 4. 4. 1: " Parentem patronum patronam, *liberos* parentes patroni patronae in ius sine permissu meo ne quis vocet „.

In alcuni testi sembra che il diritto di patronato sia conglobato coll'eredità. Ma ritenere ciò sarebbe errore. Quei testi riguardano casi in cui l'erede è il *filius* e in cui, perciò, quei diritti spettano per la qualità di *filius,* non per la qualità di erede.

D. 36. 1. 57 (55): " Si patroni *filius extrario* restituerit ex Trebelliano hereditatem, *operarum actio, quae transferri non potuit*, apud heredem manebit... „.

D. 37. 1. 24: " Camelia Pia ab Hermogene appellaverat, quod diceret iudicem de dividenda hereditate inter se et coheredem, non tantum res, sed etiam libertos divisisse: nullo enim iure id eum fecisse. *plane nullam esse libertorum divisionem* „.

D. 38. 1. 7. 6: " Si liberi patroni ex inaequalibus partibus essent instituti, utrum pro parte dimidia an pro hereditariis habeant operarum actionem? et puto verius liberos pro aequalibus habituros actionem „.

Il diritto di sepolcro e il diritto di patronato entrano nella loro ultima fase, quando incomincia l'epoca romano-ellenica.

L'ultima fase del diritto di sepolcro ci è nota. Il sepolcro familiare viene aperto anche all'erede estraneo (1).

(1) Le interpolazioni in questo campo sono state viste dal Mitteis, *Römisches Privatrecht bis auf die Zeit Diocletians*, 103, n. 22 e da me, *Se-*

L'ultima fase del diritto di patronato si svolge in modo uniforme e parallelo. Il liberto non poteva durante l'epoca classica, *venia edicti non petita*, chiamare in giudizio il patrono e certe persone a lui più vicine (*patronum patronam eorumque parentes et liberos*).

Il liberto non poteva (è il caso che le fonti più chiaramente segnalano) chiamare in giudizio i *figli* del proprio patrono defunto. Ma l'epoca romano-ellenica anche a questo riguardo innovò. L'innovazione spicca in C. th. 4. 10. 2; C. iust. 6. 7. 3 (a. 423); nella Nov. XXV (a. 447) di Valentiniano, e nella c. 2 C. 2. 2, la cui interpolazione, già vista dal Mitteis (1), è stata con finezza di osservazioni dimostrata dal Castelli (2). E l'innovazione consiste nel pareggiare la condizione dell'erede estraneo a quella del figlio. Ora il liberto non può chiamare in giudizio neppure l'*erede estraneo* del patrono defunto.

Analogamente si sviluppò il diritto alle opere. Il liberto durante l'epoca classica doveva le opere al patrono e ai suoi discendenti agnati.

Occorreva per aver diritto ad esse la qualità di figlio: non era richiesta, ed era vana, la qualità di erede. Ma l'epoca romano-ellenica fu anche qui innovatrice. L'erede estraneo ora ha diritto a tutte le prestazioni *professionali*, valutabili in denaro (*operae fabriles*) ed anche a quelle prestazioni di carattere strettamente *personale, non prestate nel tempo per il quale furono richieste*, anch'esse valutabili in denaro (*operae officiales praeteritae*).

Il diritto di sepolcro e il diritto di patronato sono, pertanto, nell'epoca romano-ellenica e giustinianea *riaccostati nuovamente*, per quanto *incompletamente*, all'eredità. Il riaccostamento è incompleto per l'uno e per l'altro diritto. La vittoria dell'*erede estraneo* non è assoluta.

---

pulchra familiaria e sepulchra hereditaria in " Filangieri ", 1910. Nella dimostrazione, da me data, consente ora il Costa, *Storia del dir. rom. priv.*, 1911, 466, n. 1.

(1) *Römisches Privatrecht bis auf die Zeit Diocletians*, 103, n. 23.

(2) *Sulla 'in ius vocatio' dell'erede estraneo del patrono* in " Filangieri ", 1913, p. 3 (estr.). La genuinità della c. di Gordiano è affermata — ma, come il Castelli dimostra, non esattamente — dal Costa, *Storia*, ecc., 1911, 467, n. 1.

Anche l'erede estraneo può essere seppellito nel sepolcro familiare; ma l'erede estraneo non può, in forza del suo titolo di erede, escludere il *familiaris* non erede dal sepolcro familiare. Anche l'erede estraneo ha diritto alle opere del liberto, quando siano prestazioni professionali (*operae fabriles*) o comunque valutabili in denaro (*officiales praeteritae*), ma l'erede estraneo non ha, in forza del suo titolo di erede, diritto alle prestazioni di carattere strettamente personale non ancora richieste (*officiales futurae*), che al *filius* spettano appunto per la sua qualità di *filius*.

Lo sviluppo del diritto di sepolcro e del diritto di patronato nella nuova epoca *non romana* sembra essere stato imperfetto: complicato assai e poco armonico.

In realtà (specialmente per quel che riguarda il diritto alle opere dei liberti, di cui mi sono occupato in questa indagine) lo sviluppo — ch'esso subì — s'intravede e si spiega, a mio avviso, chiaramente. Il rapporto di patronato, innestato sull'organismo della familia agnatizia romana, era destinato a modificarsi e ad alterarsi nella nuova epoca, che segnò lo sfacelo di quell'antico organismo, e nel nuovo territorio. Sfasciatasi l'organizzazione agnatizia della familia, i rapporti su essa innestati non potevano sopravvivere illesi; e d'altra parte, nel nuovo ambiente ellenico, i rapporti tra patrono e liberto dovevano smarrire anch'essi l'antica impronta potestativa e familiare.

Pertanto, quei diritti, che prima erano esclusivi del *discendente agnato*, perdono il loro carattere di esclusività e spettano, anche, *in gran parte* ad una persona, che nel nuovo riordinamento della *familia*, nel mutato ambiente giuridico-sociale, ha più luminoso risalto: l'*erede*.

La nuova epoca, innovando, doveva anche qui procedere cauta: sovrapporsi all'antico stato di cose senza distruggerlo, neanche senza gravemente scomporlo. E il processo di riforma è, più che mai, cauto per ciò che riguarda le opere dei liberti.

Come spetteranno le opere dei liberti all'*erede estraneo*? I giustinianei hanno dato questa risposta. Le opere, che non hanno carattere *strettamente personale*, possono spettare anche a lui, appunto per la sua qualità di erede, perchè costituiscono, in fondo, un *credito* del patrono verso il liberto. E l'erede, qualunque esso sia, subentra *in tutti i crediti* del patrono defunto.

Essi avevano dinanzi a sè ciò che il diritto classico stabiliva per le opere, che venivano prestate al di fuori del rapporto di patronato.

Quelle opere, essendo *professionali*, quindi valutabili in denaro, passavano naturalmente all'erede. Erano le classiche *operae fabriles*. I giustinianei stabiliscono la trasmissibilità all'erede delle opere professionali *anche del liberto* che chiamano anch' esse *fabriles*.

Un gran passo, così, veniva compiuto.

Ma, se si trasmettono all'erede estraneo le prestazioni professionali, *in quanto sono valutabili in denaro*, perchè non si trasmetteranno le altre opere di carattere strettamente personale, non prestate nel tempo per il quale furono richieste, *e che non si possono prestare se non in denaro*? Con questa considerazione i giustinianei compiono un altro passo: riconoscono la trasmissibilità all'erede estraneo delle opere *officiales*, richieste e non prestate (*praeteritae*).

Il *poter* essere (*operae fabriles*), o il *dover* essere (operae officiales *praeteritae*) valutate in denaro è *il momento* per i giustinianei *essenziale*.

Per i giuristi classici, questo momento era di nessun valore. La prestazione delle opere era incardinata sull'*obsequium* che il liberto doveva al patrono e ai *discendenti agnati*. All'erede estraneo l'*obsequium* non era dovuto *mai*: l'erede estraneo, quindi, *mai* poteva aver diritto alle opere.

febbraio 1914.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Aprile 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Guareschi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Guidi, Naccari e Somigliana.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Grassi presenta in omaggio il 1° volume della 3ª edizione del suo *Corso di Elettrotecnica*. — Inoltre, risultandogli che nella collezione degli " Atti del Reale Istituto d'incoraggiamento di Napoli ", posseduta dall'Accademia, manca il volume 6° della 4ª serie, egli offre in dono quel volume. — Il Presidente ringrazia.

Vengono presentate, per l'inserzione negli *Atti*, le seguenti Note:

G. Gola, *Epatiche del Kashmir raccolte dalla spedizione Piacenza*, dal Socio Mattirolo;

C. L. Ricci, *Dell'attrito nei freni e nei perni*, inviata dal Socio Guidi;

G. Fubini, *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie*, dal Socio Segre;

" *Osservazioni meteorologiche* fatte nell'anno 1913 all'Osservatorio della R. Università di Torino, calcolate dal Dr Ettore Roggero „ inviate dal Socio Naccari.

Il Socio Segre legge la Relazione dei Colleghi Naccari e Somigliana sulla Memoria del Dr Laura: *Sul problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi.* Con votazione unanime la Classe accoglie la proposta di quella Relazione, favorevole alla stampa della Memoria.

Infine il Socio Mattirolo presenta, pure pei volumi delle *Memorie*, un altro lavoro del Dr G. Gola: *Epatiche della regione del Kenia (Africa orientale)*, ed uno di Enrico Mussa: *La flora dell'Agro torinese, dopo i lavori di G. Balbis e di G. F. Re, e considerazioni sopra l'indigenato di talune specie.* Riferiranno su entrambi i Soci Mattirolo e Parona.

LETTURE

Epatiche del Kashmir raccolte dalla Spedizione Piacenza.

Nota del Dott. GIUSEPPE GOLA

(con una tavola).

Nella recente (Maggio - Settembre 1913) spedizione nel Kashmir, organizzata e diretta dal dott. Mario Piacenza, il dottor prof. Lorenzo Borelli, tra le altre importanti osservazioni e raccolte, radunò una collezione briologica donata all'Istituto Botanico di Torino, e che fu affidata per lo studio al collega dottor Negri per i Muschi, e a me per le Epatiche.

La collezione, ricca di esemplari rappresentanti assai bene tutte le località percorse dalla Spedizione, è costituita per la massima parte da Muschi (400 esemplari circa) ancora sotto studio, e da un assai minor numero di esemplari di Epatiche (17); di queste rendo conto nella presente nota.

Esprimo anzitutto i più vivi ringraziamenti agli egregi esploratori per avermi fornito l'occasione di studiare una regione epaticologicamente pressochè sconosciuta; del Kashmir infatti si conoscono solo poche specie raccolte nel 1892-93 dal Duthie, e che sono state studiate dallo Stephani, senza fare oggetto, per quanto io so, di una pubblicazione speciale, ma che vennero e vengono descritte a poco a poco dallo stesso Stephani nel corso dell'opera " Species Hepaticarum ". Esse provengono specialmente dalla Valle Lindar.

Gli esemplari che io ho avuto da studiare furono raccolti per la massima parte nella Valle del Sind a Nord e Nord-Est di Srinagar, ad una altezza tra i 1700 e 2600 m. sm. Altre provengono dal versante SW della catena del Nun-Kun nelle Valli Prool, Kiar e Brahma tra i 1900 e i 2800 m. sm. Uno

solo fu raccolto nella regione elevata verso i 4500 m. al Campo Safet. In tali 17 esemplari sono rappresentate 10 specie, delle quali tre nuove. Tutte mostrano la stretta affinità che lega la flora epaticologica di questa regione con quella del sistema alpino e dell'Europa e dell'Asia settentrionali.

Fimbriaria Calciatii n. sp.

Dioica, parva, fusco-virens, margine subatra, crassa. Frons ad 8 mm. longa, 4 mm. lata, saepius minor, simplex, rarissime apice furcata, postice innovata, antice canaliculata, postice late convexa, costa lata plano-convexa, fronde subduplo angustiore, alis attenuatis. Stratum anticum in medio frondis costae aequilatum, cavernis parvis, sub poro filis liberis brevibus. Stomata magna (30 μ) parum convexa, 7-9 cellulis biseriatis instructa: Cellulae epidermidis altae, trigonis maximis acutis. Squamae posticae majusculae atropurpureae, tenerae, appendiculo lanceolato-acuminato, apice integro. Pedunculus brevis 3-8 mm., basi infima paleatus, paleis setaceis thallo adpressis, ceterum omnino nudus. Capsula (valde matura) sphaerica, plano-convexa, centro magno, papuloso, lobis oblique patulis, inflatis, parvis, usque ad apicem connatis. Perianthia hyalina; capsulae fusco-flavescentes. Sporae 54 μ (immaturae flavescentes), postea rufae, alis angustis, grosse papulosae. Elateres 300 μ rufi, bispiri, longe acuminati. Androecia non vidi.

Hab. in Kashmir prope Srinagar.

Kashmir: Valle Sind; prima catena a partire da Srinagar: Gund-Sonamarg: 21 V 1913 m. 2100-2600 sm. (N° 3).

Metzgeria coniugata Ldbg.

Kashmir: versante S W della catena del Nun-Kun: Valle Brahma 6, IX 1913, m. 2800-3300 sm. (N° 41); id. 4, IX 1913, m. 1900-3800 sm. (N° 39); id. 5 IX 1913 m. 2800-3300 sm. (N° 40).

Metzgeria pubescens (Schl.) Raddi.

Kashmir: versante S W della Catena del Nun-Kun: Valle Brahma 5 IX 1913, m. 2800-3300 (N° 40); id. 6 IX 1913 m. 2800-3300 (N° 41).

Lophozia Piacenzai n. sp.

Dioica, minor, brunneola, caespitosa, terricola. Caulis ad 1 cm. longus, parce ramosus, ramis interdum flagelliferis, sub flore innovatus. Folia oblique inserta, arcuato-recurva, subsymmetrica, oblongo-rectangulata, basi postica parum ampliato-rotundata, ad 1/6 excisa, sinu rotundato obtuso, laciniis late triangulatis. Cellulae apicales 25 μ, medianae 40 μ, basales 22 $\times$ 50 μ, trigonis magnis acutis, cuticola laevi vel subpapillosa. Amphigastria parva sed semper bene distincta, ovata, ad medium bifida, laciniis acutis. Folia et amphigastria floralia caulinis subduplo maiora, ceterum similia, amphigastria autem laciniis 1-2 dentatis. Perianthia (sterilia) 3 mm. longa, ovato campanulata, ore truncato laciniato, laciniis gemmiferis. Gonidia ad summitates ramulorum sterilium, subfusca, 2-3 cellularia.

Hab. in Kashmir in montibus Himalayae occidentalis.

Prossima alla *L. heterocolpa*, ma ne differisce, tra altro, per gli amfigastrii non ciliati, sempre evidenti, per le foglie meno profondamente incise.

Kashmir; Valle Sind; prima catena a partire da Srinagar: Mummer-Gund. 20 V 1913 m. 2000-2100 sm. (N° 2).

Lophozia alpestris (Schl.) Ev.

Kashmir; Valle Surù ai piedi del Nun-Kun: Campo Safet. 24 VII 1913 m. 4500 sm. (N° 23).

Plagiochila asplenioides Dum.

Kashmir: versante S W della catena del Nun-Kun: Valle Brahma; 5 IX 1913, m. 2800-3300 sm. (N° 40).

Lepidozia reptans (L) Dum.

Kashmir: versante S W della Catena del Nun-Kun; Valle Prool: 30-31 VIII 1913 m. 3300-2500 sm. (N° 30).

Radula Lindembergiana Gott.

Kashmir: versante S W della catena del Nun-Kun: Valle Brahma 5 IX 1913, m. 2800-3300 (N° 40.

Madotheca Borellii n. sp.

Dioica, mediocris, inferne fusco-virens, superne laete virens, vel olivaceo-virens, flaccida, caespitosa. Caulis ad 5 cm. longus, debilis, irregulariter bipinnatus, ramulis interdum flagelliferis. Folia caulina valde contigua, imbricata, oblique patula, subsymmetrica (2 mm. longa, medio 2 mm. lata), valde decurva, late ovato trigona, apice rotundato-obtusa, integerrima, brevissima basi inserta, ibique subcordata, antice brevissime appendiculata, appendiculo ovato acuminato, marginibus ubique integerrimis, vel tantum margine basali antico angulato, vel 1-2 denticulato. Cellulae superae 23 μ, mediae 30 μ, basales 18-25 μ, membrana valida, trigonis minutis. Lobulus parvus, ligulatus, canaliculatus, integerrimus, breviter appendiculatus, appendiculo.

Amphigastria caule duplo latiora, semicircularia, apice valde decurva, late rotundata, integerrima, utrinque longe et late decurrentia.

Folia floralia intima caulinis subaequimagna, perianthio valde minora, integra.

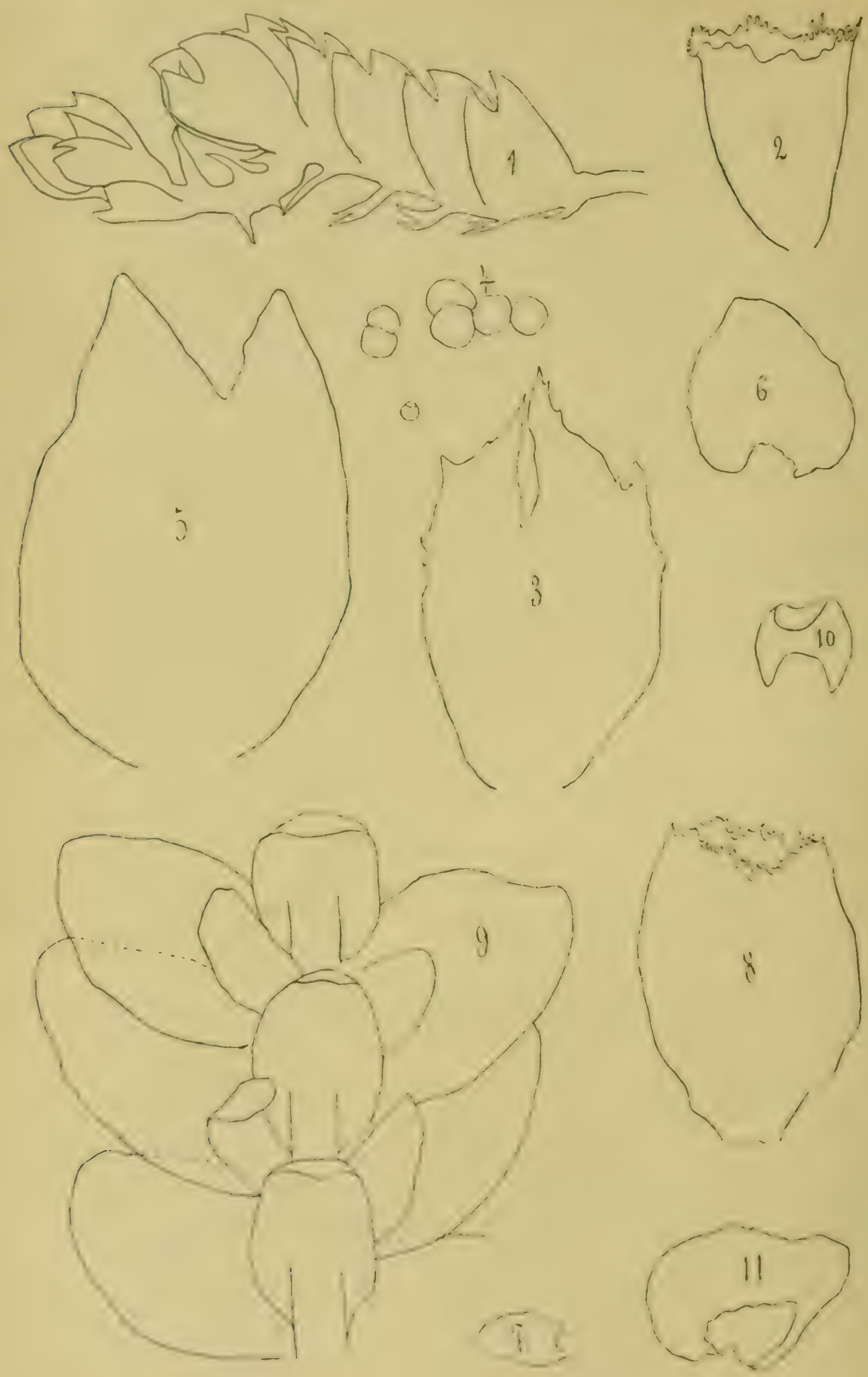
Amphigastrium florale intimum late ovatum, integerrimum, Perianthium compresso-campanulatum, ore leviter angustato, truncato-lobato, lobis ciliolatis.

Planta mascula gracilior. Androecia parva, trijuga, subglobosa.

Hab. in Kashmir in montibus Himalayae occidentalis.

Affine alla *M. decurrens St.*, ma ne differisce per la posizione delle foglie caulinari, oblique e non patenti, per le dimensioni delle cellule delle foglie, per la forma del lobulo che non è appendicolato; differisce pure dalla *M. ovalis Gott.* per la forma delle foglie, del lobulo, per le foglie florali assai diverse, nella forma e dentatura del margine. Anche la *M. densiramea St.* ne è ben distinta specialmente per la posizione delle foglie.

Kashmir: Valle Sind, prima catena a partire da Srinagar: Gunderbardl-Mummer. 19 V 1913 m. 1700-2000 sm. (N° 1); id. Gund-Sonamarg 21 V 1913 m. 2100-2600 sm. (N° 3); id. Versante S W della catena del Nun-Kun: Valle Brahma, 4 IX 1913 m. 1900-2800 sm. (N° 39); id. 5 IX 1913 m. 2800-3300 sm. (N° 40).


1
2
5
3
6
10
9
8
11

Id. Id. f. umbrosa, a tallo più flaccido e più verde.

Kashmir: versante S W della catena del Nun-Kun: Valle Kiar. 2 IX 1913 m. 2200-1900 sm. (N° 36).

Madotheca angusta St.

Kashmir: versante S W della Catena del Nun-Kun: Valle Kiar, 2 IX 1913 m. 2200-1900 sm. (N° 37).

Torino, R. Orto Botanico, aprile 1914.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Lophozia Piacenzai n. sp. Fig. 1: porzione di pianta fertile (14/1); fig. 2: perianzio (15/1); fig. 3: un amfigastrio fiorale (42/1); fig. 4: gonidii (272/1); fig. 5: una foglia fiorale (42/1).

Madotheca Borelli n. sp. Fig. 6: una foglia (15/1); fig. 7: un lobulo della foglia (15/1); fig. 8: perianzio (15/1); fig. 9: porzione di pianta (15/1); fig. 10: un amfigastrio (15/1); fig. 11: una foglia fiorale (15/1).

Dell'attrito nei freni e nei perni.

Nota I^a del Dott. Ing. CARLO LUIGI RICCI

La teoria del Reye per la determinazione della legge di ripartizione della pressione tra due superficie di rotazione combacianti, e striscianti l'una sull'altra, delle quali solo quella esterna sia soggetta a logoramento, fu applicata dal suo autore esclusivamente allo studio dell'attrito nei perni.

Per la prima volta nel 1908, in una sua pregevole Memoria pubblicata nel " Giornale del Genio Civile „ (1), il Chiar.^mo Prof. M. Panetti mostrò come detta teoria fosse applicabile pure allo studio dei freni a ceppi; ed all'uopo ideò alcune eleganti costruzioni grafiche e formole analitiche, le quali poi a loro volta poterono essere applicate allo studio dei perni, specialmente per la soluzione del problema dell'accostamento in direzione della risultante.

Nel presente scritto, riferendomi appunto a detta Memoria, mi propongo di esporre una costruzione geometrica abbastanza semplice della linea d'azione della risultante sia delle pressioni normali, che delle pressioni totali (§ 2); e quindi farne alcune applicazioni alla determinazione della direzione dell'accostamento data quella della risultante (§§ 3 e 4), alla soluzione del problema dell'accostamento in direzione della risultante (§§ 5 e 6), già trattato nella citata Memoria § 8, pag. 13; infine determinare il luogo dei centri di applicazione delle risultanti e l'inviluppo delle linee d'azione delle stesse forze (§ 7). Le considerazioni d'indole geometrica sono accompagnate da espressioni

(1) M. Panetti, *Contributo alla teoria dei freni ad attrito* (" Giornale del Genio Civile „, Roma, 1908).

analitiche, le quali ne permettono l'applicazione mediante il calcolo numerico.

Come già accennai, in questo studio considero soggetto a logoramento soltanto il cuscinetto, o il ceppo; mi riservo però

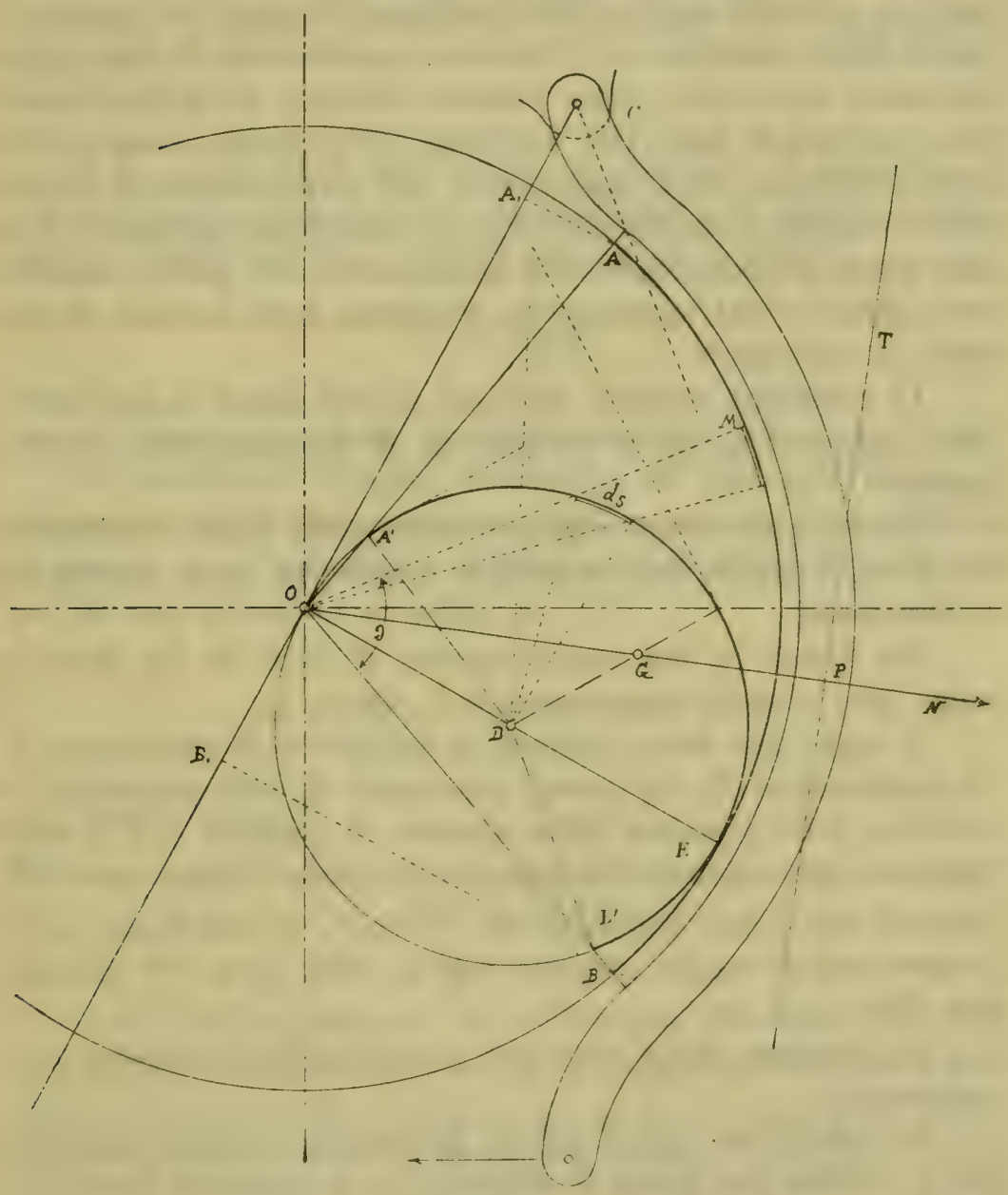


Fig. 1.

di esporre, in una successiva nota, uno studio analogo, tenendo conto anche del logoramento del perno e della puleggia del freno.

Nel seguente § 1, per maggior chiarezza e comodità, richiamerò alcune nozioni generali sulla teoria del Reye, già note, ed esposte pure nella Memoria citata.

§ 1. — Il Reye fece la nota ipotesi, che il lavoro consumato in un dato tempo dalla resistenza d'attrito su ogni elemento delle superficie di rivoluzione combacianti di due organi meccanici striscianti l'uno rispetto all'altro, sia proporzionale alla quantità di materiale logorato nello stesso tempo sullo stesso elemento. Se il logoramento del corpo interno è trascurabile rispetto a quello dell'altro, la pressione unitaria p è in ogni punto proporzionale allo spostamento nel punto considerato, prodotto dal logoramento, proiettato sulla normale di contatto in quel punto.

La pressione unitaria massima si avrà quindi in quel punto della superficie in cui la normale ha la direzione dello spostamento.

Il caso più comune che s'incontra nello studio dei freni e dei perni, è quello delle superficie cilindriche, ed a questo noi ci limiteremo.

Per fissare le idee considereremo il caso di un freno a ceppi, qual'è quello rappresentato in figura 1.

Il ceppo può rotare intorno al suo centro di sospensione C. Lo spostamento di un punto qualunque M delle superficie in contatto, nella direzione della normale di contatto OM, è notoriamente proporzionale alla distanza del punto C dalla retta OM, distanza che si può esprimere con $\overline{CO} \cos \vartheta$, se indichiamo con ϑ l'angolo che il raggio generico OM fa colla retta OE normale alla CO.

La direzione della retta OE si dice anche *direzione dell'accostamento*.

Se indichiamo quindi con p_0 la pressione unitaria massima che si verifica nel punto E, abbiamo che la pressione unitaria p nel punto M generico della superficie di contatto è espressa da:

$$p = p_0 \cos \vartheta.$$

Il diagramma polare delle pressioni unitarie p è quindi un cerchio, passante per il centro O della puleggia, il cui diametro

giacente sulla OE (in figura uguale al segmento OE), rappresenta in grandezza e direzione la pressione massima p_0. — Su ogni elemento della superficie di contatto, definito da un angolo al centro $d\vartheta$, avremo una pressione elementare $prd\vartheta$, indicando con r il raggio della puleggia; questa pressione provoca una resistenza d'attrito misurata da $fprd\vartheta$, ove f è il coefficiente d'attrito.

§ 2. — Si potrà determinare la pressione N normale, risultante delle $prd\vartheta$, che concorrono tutte nel punto O, sommando *geometricamente* i vettori $\bar{p}d\vartheta$, ossia si avrà:

$$\bar{N} = r \int \bar{p} d\vartheta$$

esteso l'integrale a tutto l'arco di contatto.

Si osservi che l'angolo elementare $d\vartheta$ stacca sul cerchio di diametro $\delta = OE$ (diagramma delle p) un archetto elementare ds, il quale è visto dal centro di detto cerchio sotto un angolo, che per le note proprietà è uguale a:

$$2d\vartheta = \frac{ds}{\delta/2} \qquad \text{da cui} \qquad d\vartheta = \frac{ds}{\delta}.$$

Quindi avremo:

$$\bar{N} = \frac{r}{\delta} \int \bar{p} ds.$$

Ora l'$\int \bar{p} ds$, se leggiamo le $\bar{p}$ nella scala delle lunghezze, è un vettore che diviso per $\int ds$, ossia per la lunghezza dell'arco $\widehat{A'EB'}$, ci dà il vettore che da O va al *baricentro* dello stesso arco $\widehat{A'EB'}$. Questo baricentro G si determina facilmente colla nota costruzione, e la retta che lo proietta da O è la linea d'azione della $\bar{N}$, risultante delle pressioni normali.

La grandezza della $\bar{N}$ si troverà poi moltiplicando il segmento OG per la lunghezza dell'arco $\widehat{A'EB'}$ (uno di questi fattori deve esser letto nella scala delle lunghezze, l'altro nella scala delle forze per unità di lunghezza); inoltre moltiplicando

questo prodotto per il rapporto $\frac{r}{\delta}$ (che nel caso della figura si è fatto uguale all'unità).

Il punto d'applicazione P della pressione totale del ceppo contro la puleggia è l'intersezione della N colla risultante delle resistenze elementari d'attrito $fprd\vartheta$, agenti tangenzialmente alla puleggia. Per trovare la linea d'azione di questa risultante, la quale sarà normale alla $\overline{N}$, si può fare astrazione dal coefficiente di attrito, e poichè le forze tangenziali elementari $prd\vartheta$ hanno tutte la stessa distanza r dal punto O, il loro momento M rispetto ad O sarà uguale al prodotto di r per la loro *somma numerica* o *scalare*; cioè sarà:

$$M = r^2 \int p d\vartheta$$

ove s'intende con p il *valore numerico (modulo)* della pressione unitaria.

Ma essendo:

$$p = p_0 \cos\vartheta ,$$

si ha:

$$M = r^2 p_0 \int \cos\vartheta d\vartheta$$

esteso l'integrale a tutto l'arco di contatto; ossia:

$$M = r^2 p_0 (\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2)$$

indicando con ϑ_1 e ϑ_2 i due angoli $\widehat{AOE}$ ed $\widehat{EOB}$.

Il fattore $p_0 (\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2)$ altro non è che la proiezione A_1B_1 dell'arco AB sulla retta OC, il quale segmento deve esser letto nella scala delle forze per unità di lunghezza.

La distanza $e = OP$ della risultante di dette azioni tangenziali dal centro O, si ottiene dalla relazione:

$$e = \frac{M}{|\overline{N}|} = \frac{r^2 p_0 (\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2)}{\frac{r}{\delta} \left| \int \overline{p} ds \right|} .$$

Si può esprimere e in funzione di lunghezze misurate direttamente sulla figura:

$$e = OP = \frac{r \times \delta \times A_1 B_1}{OG \times \widehat{AB}}.$$

Il segmento OP si può quindi facilmente determinare con costruzioni di quarte proporzionali.

La risultante complessiva delle azioni tra freno e puleggia agisce quindi secondo una retta passante per P ed inclinata alla OP (risultante delle pressioni normali), dell'angolo φ d'attrito, in un senso o nell'altro secondo il verso del movimento.

§ 3. — Nello studio dei perni il Reye ammetteva che l'accostamento avvenisse nella direzione della risultante delle pressioni normali, e trascurava così l'azione delle resistenze d'attrito; di queste occorre invece tener conto, come già fece osservare il Chiar.^{mo} Prof. Panetti nella sua Memoria, per accordare i risultati della teoria con quelli delle ricerche sperimentali del Beauchamp e del Tower relative al diagramma delle pressioni.

Nel caso più generale è data la direzione della risultante totale, che deve essere uguale e contraria alla risultante delle forze esterne applicate al perno; quindi nell'applicare l'ipotesi del Reye occorre determinare la direzione dell'accostamento in modo che la risultante totale delle azioni tra perno e cuscinetto abbia la data direzione (V. fig. 2a).

Fissata questa direzione e noto l'angolo d'attrito, è pure fissata quella della risultante delle pressioni normali, la quale passa per il centro O del perno, per il baricentro G dell'arco $A'B'$, ed inoltre incontra l'arco $A'B'$ in un punto N che è determinato dalla data orientazione della risultante, essendo dati gli angoli $\widehat{A'ON}$ ed $\widehat{NOB'}$. In questo caso per trovare il punto O basterà determinare i punti N e G; la retta NG incontra il cerchio delle pressioni nel punto O, il quale deve, come sappiamo, riuscire esterno all'arco $\widehat{A'EB'}$; se riuscisse interno, saremmo nel caso del contatto parziale, che deve essere trattato a parte.

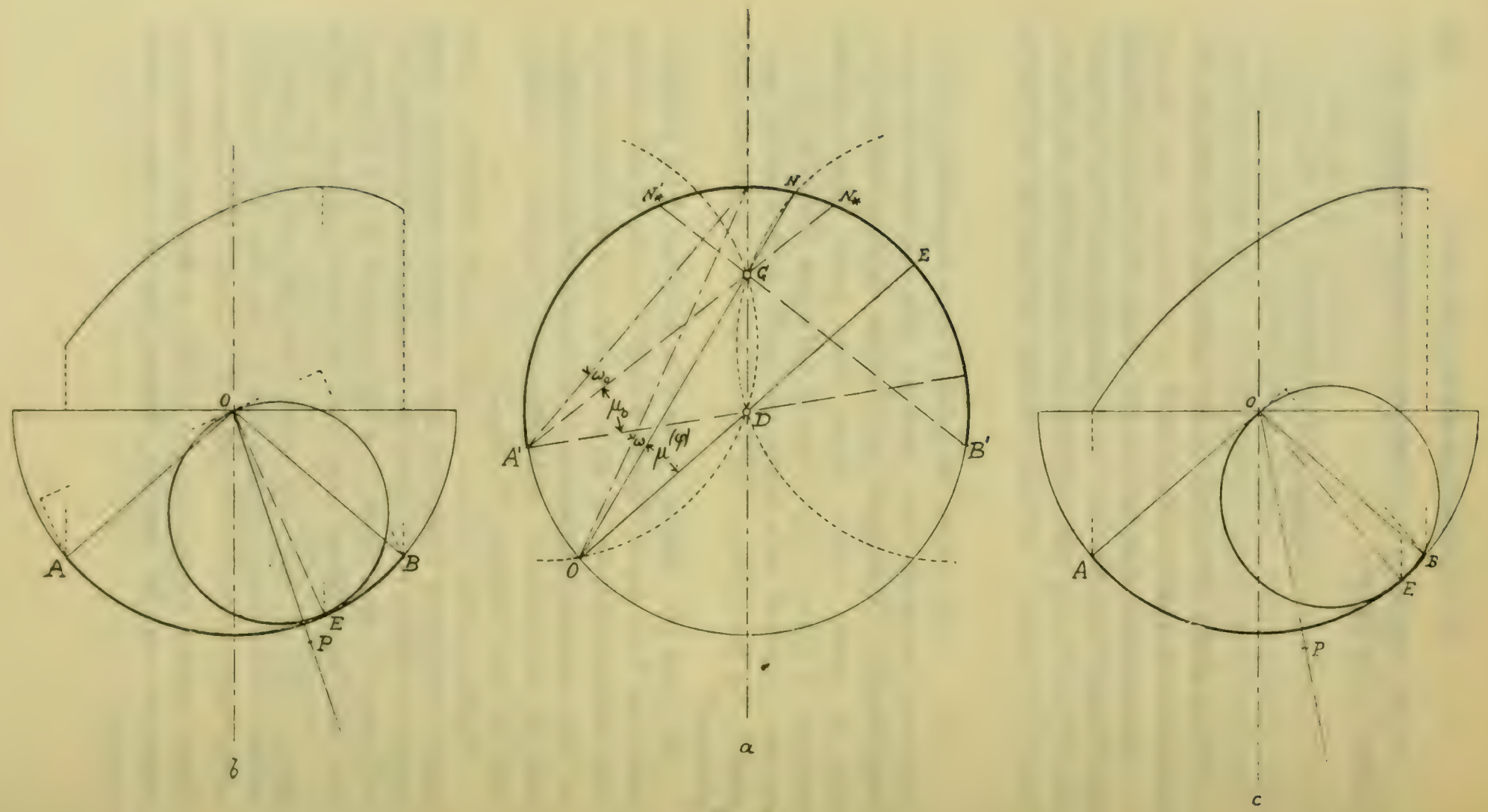


Fig. 2.

Si noti che dalla figura risulta immediatamente che la risultante delle pressioni normali è sempre compresa tra la direzione dell'accostamento e l'asse OS di simmetria del cuscinetto.

Volendo risolvere il problema per via analitica, si può assumere come dato l'angolo $\omega = SON$ che la risultante delle pressioni normali forma coll'asse di simmetria del cuscinetto; si tratta di determinare l'angolo $\alpha = SOD$ formato dalla direzione dell'accostamento col detto asse di simmetria; poniamo: $\mu = \widehat{NOD}$, ed avremo: $\alpha = \omega + \mu$.

Dal triangolo NGD $\left(\text{essendo } GD = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right)$ si ricava:

$$NG = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\vartheta^2} + 1 - 2\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\cos 2\omega},$$

inoltre:

$$\operatorname{sen}\mu = \frac{\operatorname{sen} 2\omega \operatorname{sen}\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}},$$

$$\cos\mu = \frac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta \cos 2\omega}{\sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}},$$

e quindi:

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\operatorname{sen} 2\omega \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta \cos 2\omega}.$$

Si può anche trovare direttamente un'equazione in $\operatorname{tang}\alpha$.

Dal triangolo DOG, osservando che l'angolo SDE vale 2α, si ricava:

$$\frac{DG}{OG} = \frac{\operatorname{sen}\mu}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\mu}{2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}.$$

Analogamente dal triangolo SOG si deduce:

$$\frac{SG}{OG} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Dividendo membro a membro queste due relazioni, si ottiene:

$$\frac{DG}{SG} = \frac{\operatorname{sen}\mu}{2 \operatorname{sen}\omega \cos\alpha}.$$

Ma si ha:

$$\mu = \alpha - \omega, \qquad DG = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}, \qquad SG = \frac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta},$$

quindi:

$$\frac{DG}{SG} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta},$$

e sostituendo si ricava:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\omega}{2\cos\alpha\operatorname{sen}\omega} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta},$$

ossia, trasformando:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta}\operatorname{tang}\omega.$$

Il valor limite (massimo) che può assumere l'angolo α, compatibilmente colla condizione del contatto completo, è:

$$\alpha_0 = \frac{\pi - \vartheta}{2}.$$

In questo caso l'angolo μ assume il valore μ_0, che, come si ricava dal triangolo $A'DG$, soddisfa alla relazione:

$$\operatorname{sen}\mu_0 = \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\vartheta + \vartheta^2 - 2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}},$$

ed il corrispondente valore di ω sarà:

$$\omega_0 = \alpha_0 - \mu_0 = \frac{\pi - \vartheta}{2} - \mu_0.$$

Dal triangolo $A'GS$ si ricava pure:

$$(**)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\omega_0 &= \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)}{\sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}}, \\ \cos\omega_0 &= \frac{\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}(\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)}{\sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}}. \end{aligned}\right.$$

I valori estremi assunti dall'angolo che l'accostamento fa colla risultante sono dati da $\alpha_0 \pm \varphi$, ove al solito il segno dipende dal verso del movimento.

§ 4. — Nel caso del contatto parziale, che si avrà per $\omega > \omega_0$, il contatto tra perno e cuscinetto incomincierà con pressione nulla in un punto intermedio del cuscinetto, e sul cerchio delle pressioni dovremo determinare un punto nel quale si possano ritenere coincidenti il centro O del perno e l'estremo A' dell'arco utile $A'B'$ di detto cerchio.

Se è data la direzione della risultante totale, e quindi quella della risultante delle pressioni normali, è determinato il punto N in cui questa incontra il cerchio delle pressioni, e resta fissato l'arco $B'N$, e perciò l'angolo inscritto che lo comprende $N\widehat{A'}B'$. Basta quindi, per risolvere il problema del contatto parziale, determinare il punto A' in modo che la retta $A'N$, — che deve essere la linea d'azione della risultante delle pressioni normali, — contenga il baricentro dell'arco $A'NB'$.

Siamo quindi condotti a risolvere il problema: determinare un arco $\widehat{A'B'}$ di un dato cerchio, tale che la retta che da uno degli estremi dell'arco, per esempio da A', proietta il baricentro G dell'arco stesso, formi colla corda $\overline{A'B'}$ dell'arco un angolo fissato.

Chiamato ψ quest'angolo, che è la metà dell'angolo al centro del dato arco NB', avremo:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\text{distanza del baricentro dalla corda}}{\text{semicorda}}.$$

Indichiamo ora con ϑ' la semi-ampiezza angolare dell'arco $\widehat{A'B'}$ incognito, che sarà pure l'ampiezza dell'arco di contatto.

Se r è il raggio del cerchio, la distanza del baricentro dell'arco dalla corda è notoriamente $= r\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta'}{\vartheta'} - \cos\vartheta'\right)$, e la semicorda è espressa da $r \operatorname{sen}\vartheta'$; quindi sostituendo si ha:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1}{\vartheta'} - \operatorname{cotg}\vartheta'.$$

Questa equazione si può risolvere facilmente rispetto a ϑ', per approssimazioni successive; e con pochi tentativi si può determinare ϑ' con l'esattezza richiesta. Trovato così il punto $A' \equiv O$, risulta pure determinato l'accostamento nella direzione OD, e quindi è individuato il diagramma delle pressioni.

L'angolo ϑ' si può pure determinare agevolmente per via grafica, con un metodo di falsa posizione, mediante il tracciamento di una curva di errore.

Ci riferiamo alla figura 3, nella quale si eseguì la costruzione per un cuscinetto abbracciante il perno secondo una mezza circonferenza, supponendo la risultante diretta secondo l'asse di simmetria del cuscinetto, ed il coefficiente d'attrito $f = \operatorname{tang} \varphi = 0{,}30$. In questo caso risulta: $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ e quindi: $\operatorname{tang} \psi = \operatorname{cotg} \varphi = 3{,}33$.

Immaginiamo di far variare l'arco $A'B'$ in modo che il suo punto di mezzo si trovi sempre in S; sulla tangente in S si sviluppa il semicerchio SS', e si segnano sul cerchio e sulla tangente alcuni punti corrispondenti. Considerato ciascuno dei punti A'_i con cui è diviso il cerchio, come estremo di un arco simmetrico rispetto al punto S, si determina il relativo baricentro situato sul diametro SS', e condotta per il punto A'_i una retta inclinata dell'angolo ψ sulla corda $A'_iB'_i$, si trova la sua distanza da detto baricentro; questa distanza si porta poi, col dovuto segno come ordinata, normalmente alla tangente su cui si è sviluppato l'arco, in corrispondenza del punto A''_i.

Si costruisce così per punti una curva di errore, la quale incontra la tangente SS'' in un punto il cui corrispondente sul cerchio è il punto $O \equiv A'$ cercato: infatti per esso risulta nulla la distanza tra il corrispondente baricentro e la retta inclinata di ψ sulla corda.

Analiticamente, risolvendo per successive approssimazioni l'equazione:

$$\frac{1}{\vartheta'} - \operatorname{cotg} \vartheta' = 3{,}333$$

si ottenne per ϑ' il valore in gradi $161°{,}25' \sim$, il cui supplemento ($18°{,}35'$) differisce poco dall'angolo d'attrito ($16°{,}40' \sim$); questo valore di ϑ' concorda perfettamente con quello ottenuto per via grafica. In questo caso la direzione dell'accostamento e

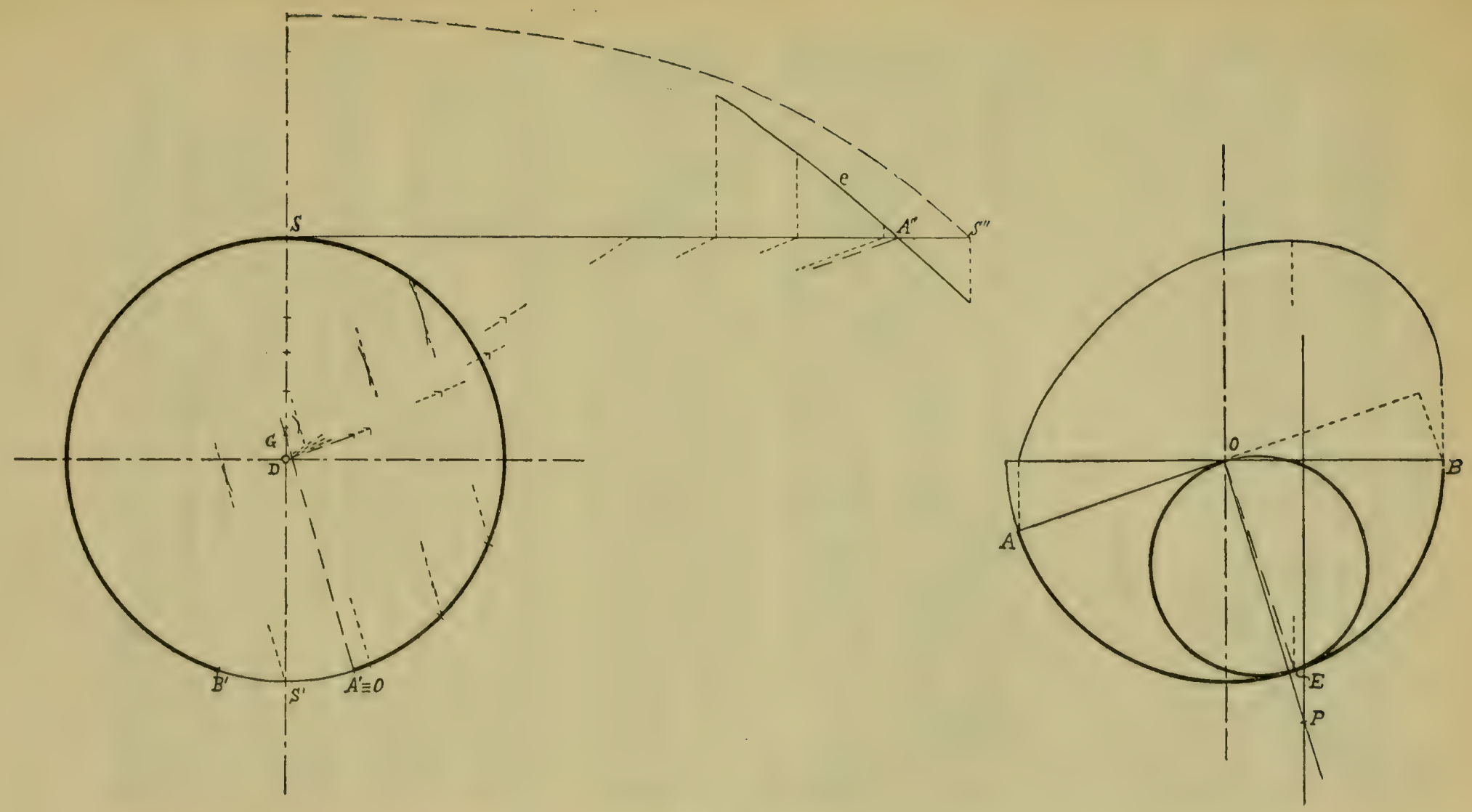


Fig. 3.

la risultante delle pressioni normali si scostano pochissimo ($1^{\circ}.55'$) e l'angolo μ_0 ch'esse formano si può pure dedurre dalla formola ricavata nel precedente paragrafo.

Nella figura 3 è pure segnata (a tratti) la curva che rappresenta la legge di variazione di $\cos\psi$ in funzione di ϑ' secondo la precedente equazione (assunto uguale ad uno il raggio del cerchio):

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\vartheta'} - \operatorname{cotg}\vartheta'\right)^2}} .$$

Questa curva permette di risolvere assai speditamente e direttamente il problema.

Può interessare il caso in cui il contatto sia completo su una mezza circonferenza, e l'accostamento avvenga secondo l'asse di simmetria di questa, e coincida quindi colla risultante delle pressioni normali; in questo caso la risultante complessiva è inclinata dell'angolo d'attrito rispetto all'asse di simmetria.

Tale caso si verifica per una bronzina estesa per un semicerchio, quando la risultante delle forze esterne abbia la direzione conveniente, ed anche, qualunque sia la direzione di questa risultante, quando si tratti di un perno infilato in una bronzina di un sol pezzo, esattamente calibrata sul perno.

§ **5.** — Veniamo ora a trattare il problema dell'accostamento in direzione della risultante.

Abbiamo visto che in generale, data la direzione della risultante, quella dell'accostamento risulta determinata, ed è in generale distinta da quella della risultante.

Vogliamo ora determinare la direzione della risultante in modo ch'essa coincida con quella del corrispondente accostamento.

Bisogna a tal uopo orientare il cerchio di diametro $\delta = OE$, diagramma delle pressioni unitarie, — in modo che il diametro OE formi l'angolo φ d'attrito col raggio OG che dal centro O della puleggia, o del perno, proietta il baricentro G dell'arco $\overline{A'EB'}$.

Si noti che, finchè dura il contatto completo, variando l'orientazione di detto cerchio, non varia la lunghezza dell'arco $A'EB'$, diagramma utile. Quindi, trovato il baricentro G per una posizione qualunque del cerchio, basterà determinare sul cerchio stesso un punto O, dal quale il raggio vettore DG sia visto sotto l'angolo φ d'attrito (Fig. 2 *a*).

Basta quindi descrivere sul segmento DG come corda un arco di cerchio capace dell'angolo φ; questo cerchio incontra il diagramma circolare delle pressioni in due punti, uno dei quali, e precisamente quello più vicino alla mezzeria S dell'arco $A'B'$, dovrà essere escluso, giacchè esso risulta interno all'arco $A'SB'$, mentre il punto O che noi cerchiamo deve essere esterno all'arco stesso; l'altro punto d'intersezione sarà la posizione cercata del punto O; se entrambi i punti d'intersezione risultassero interni all'arco $A'SB'$, si cadrebbe nel caso del contatto parziale, che sarà trattato a parte.

Poichè gli archi capaci dell'angolo φ descritti su DG sono due, otterremo due punti come O, dei quali si dovrà assumere l'uno o l'altro, secondo il senso della rotazione.

Determinato il punto O nel modo indicato, le rette OA' ed OB' rappresentano i raggi che dal centro del perno proiettano gli estremi dell'arco di contatto col cuscinetto.

Dalla figura si può quindi ricavare la orientazione del diagramma delle pressioni, e della risultante, rispetto al cuscinetto.

Analiticamente questo problema, per il contatto completo, si può trattare osservando che dal triangolo ODG, ponendo $\mu = \varphi$, si ottiene:

$$\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} 2\alpha = (\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta \cos 2\alpha) \operatorname{tang}\varphi ,$$

da cui, operando le sostituzioni:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} , \qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} ,$$

ed ordinando i termini, si ricava l'equazione:

$$(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}^2\alpha - 2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{tang}\alpha + (\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta) \operatorname{tang}\varphi = 0 ,$$

e risolvendo:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)\operatorname{tang}\varphi}\left[\operatorname{sen}\vartheta - \sqrt{\operatorname{sen}^2\vartheta(1+\operatorname{tang}^2\varphi) - \vartheta^2\operatorname{tang}^2\varphi}\right].$$

Il segno + al radicale è da escludersi per ragioni ovvie.

Questa formola coincide, come deve essere, con quella ottenuta per altra via dal Chiar.^{mo} Prof. Panetti nella citata Memoria, pag. 14, § 8.

§ 6. — Nel caso del contatto parziale, accennato più sopra, bisogna determinare l'arco $A'EB'$ in modo che il segmento GD sia visto dal punto A' sotto l'angolo φ d'attrito.

Per determinare l'ampiezza ϑ' dell'arco di contatto, si può ricorrere all'equazione che ci ha servito or ora per il contatto completo, considerando che per il contatto parziale si deve porre, come risulta anche immediatamente dalla figura: $2\alpha = \pi - \vartheta'$, e quindi: $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}\vartheta'$; $\cos 2\alpha = -\cos\vartheta'$.

Perciò si ottiene: $\operatorname{sen}^2\vartheta = (\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta'\cos\vartheta')\operatorname{tang}\varphi$.

Questa equazione si può risolvere facilmente per approssimazioni successive. Anche in questo caso l'angolo ϑ' si può pure determinare con metodo di falsa posizione, costruendo una curva di errore (V. fig. 4).

Possiamo, come più sopra, far variare l'arco $A'B'$, in modo che resti fisso il suo punto di mezzo S; si sviluppa l'arco $SA'S'$ sulla tangente in S (SS''), e si segnano sull'arco alcune posizioni di tentativo del punto A_i', e sullo sviluppo i punti corrispondenti A''_i. Di ciascuno degli archi $A_i'B_i'$ si determina il baricentro, e tirata per A_i' una retta inclinata dell'angolo d'attrito rispetto al raggio DA' (e quindi tangente al circolo d'attrito), si determina la distanza di questa retta dal baricentro, distanza che si porta come ordinata normalmente ad SS'', nel punto A_i''. La curva ottenuta con tali ordinate (curva di errore), taglia la tangente SS'' nel punto A'', corrispondente dell'estremo A' dell'arco $A'B'$ che risolve il problema.

Nella figura 4 si segnarono pure le curve rappresentanti, in funzione di ϑ', le quantità: $\operatorname{sen}\varphi$ (a tratti) e $\operatorname{tang}\varphi = f$ (a punti).

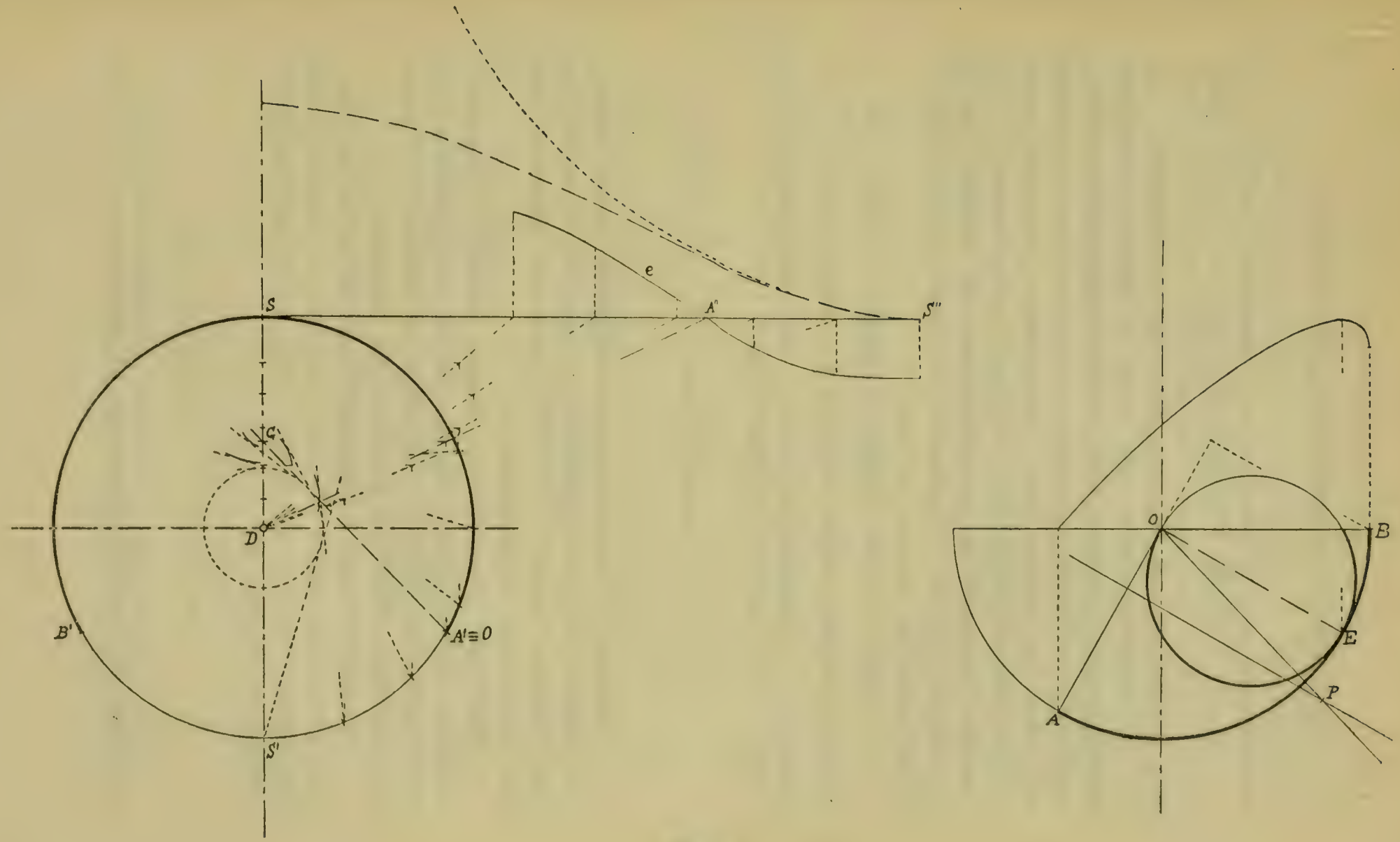


Fig. 4.

Queste linee sono rappresentate dalle equazioni:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta'}{\sqrt{\operatorname{sen}^4\vartheta' + (\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta'\cos\vartheta')^2}}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta'}{\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta'\cos\vartheta'},$$

e si prestano ad una soluzione immediata del problema.

La soluzione grafica colla curva di errore è abbastanza spedita, e dà un'esattezza sufficiente nelle applicazioni pratiche; se si vuole poi un'approssimazione maggiore si può ricorrere alla soluzione analitica; però il procedimento grafico può ancora essere utile per determinare con larga approssimazione il valore di ϑ', evitando così un certo numero di tentativi che si dovrebbero fare se si partisse da un valore scelto a caso, e quindi molto più lontano dal vero.

Il contatto risulta parziale se l'angolo α calcolato per il contatto completo risulta maggiore del valore $\alpha_0 = \frac{\pi - \vartheta}{2}$ od anche se ϑ è maggiore del valore ϑ' dato dall'equazione precedente. Se il contatto è parziale si ha:

$$\alpha = \frac{\pi + \vartheta}{2} - \vartheta'.$$

Calcolando ϑ' numericamente coll'equazione sopra esposta, per $\operatorname{tang}\varphi = 0{,}3$, valore adottato per eseguire la costruzione della figura, si trovò $\vartheta' = 119°{,}30'$, valore che s'accorda bene con quello ottenuto graficamente.

Nelle figure 2*b* e *c*, 3 e 4, furono costruiti i diagrammi cartesiani delle pressioni unitarie, riferite alle proiezioni dei varii punti della superficie di contatto sul diametro del perno perpendicolare all'asse di simmetria del cuscinetto.

Se indichiamo con ξ l'angolo formato da un raggio generico, uscente dal centro del perno, coll'asse di simmetria del cuscinetto, avremo le coordinate x ed y di un punto del detto diagramma espresse da:

$$x = r \operatorname{sen}\xi, \qquad y = p_0 \cos(\xi - \alpha)$$

che sono le equazioni parametriche di un'ellisse.

§ 7. — Può interessare la determinazione del luogo dei punti P, centri di applicazione delle risultanti totali, e così pure l'inviluppo di dette risultanti. Basterà immaginare di far variare la direzione della risultante delle pressioni normali, e conseguentemente la direzione dell'accostamento, e si dovrà al solito distinguere il caso del contatto completo e quello del contatto parziale (V. fig. 5).

Consideriamo anzitutto il caso del contatto completo, il quale, come abbiamo visto, si verifica per valori di ω minori di $\omega_0 = \frac{\pi - \vartheta}{2} - \mu_0$ (V. § 3). Le coordinate polari di un punto del luogo cercato saranno l'angolo ω e la distanza OP che indicheremo con ρ e che è data da:

$$\rho = \frac{r^2 \times \overline{A_1 B_1}}{\overline{OG} \times \widehat{AB}} .$$

Colle convenzioni fatte più sopra si ha:

$$r = 2 , \qquad A_1 B_1 = 4 \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} \cos \alpha , \qquad AB = 2\vartheta .$$

Inoltre possiamo porre:

$$OG = ON - NG$$

e si ha (V. anche § 3):

$$ON = 2 \cos \mu = \frac{2 (\vartheta - \operatorname{sen} \vartheta \cos 2\omega)}{\sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta \operatorname{sen} \vartheta \cos 2\omega + \operatorname{sen}^2 \vartheta}} ,$$

$$NG = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta \operatorname{sen} \vartheta \cos 2\omega + \operatorname{sen}^2 \vartheta} ,$$

e quindi:

$$OG = \frac{\vartheta^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta}{\vartheta \sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta \operatorname{sen} \vartheta \cos 2\omega + \operatorname{sen}^2 \vartheta}} .$$

Inoltre, ricordando che: $\alpha = \omega + \mu$, dalla formola del coseno della somma, ricorrendo alle espressioni di $\cos \mu$ e $\operatorname{sen} \mu$

trovate al § 3, ed esprimendo al numeratore $\cos 2\omega$ e $\operatorname{sen} 2\omega$ in funzione del solo $\cos\omega$, si ottiene:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\omega(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)}{\sqrt{\vartheta^2 - 2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cos 2\omega + \operatorname{sen}^2\vartheta}}.$$

Sostituendo questi varii valori nell'espressione di ρ, si ottiene:

$$\rho = \frac{8\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}{\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta}\cos\omega.$$

Il che dimostra che il luogo cercato del punto P è un cerchio passante per O, di diametro $\rho_0 = \frac{8\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}{\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta}$, col centro sull'asse di simmetria del cuscinetto.

Naturalmente questo cerchio ha significato per il caso qui trattato del contatto completo solo tra i punti corrispondenti ad $\omega = \pm\omega_0$ (V. più sopra).

Per un dato valore dell'angolo d'attrito φ le risultanti totali passano per i punti P e sono inclinate rispetto ai relativi raggi vettori dell'angolo costante φ; esse quindi, finchè beninteso dura il contatto completo, passano tutte per uno stesso punto R del cerchio di diametro $\rho_0 = OP_0$; il punto R soddisfa alla condizione: $\widehat{OP_0R} = \varphi$.

È ovvio che cambiando il senso del moto, il punto R viene sostituito dal suo simmetrico R'.

Il punto R rappresenta così l'inviluppo delle risultanti totali per il contatto completo e per il dato angolo di attrito.

Nel caso del contatto parziale varia l'ampiezza dell'arco di contatto effettivo tra perno e cuscinetto, e sia ϑ' quest'ampiezza; avremo quindi:

$$r = 2, \qquad A_1B_1 = 2(1 - \cos\vartheta'), \qquad \widehat{AB} = 2\vartheta'.$$

Si ricava poi dalla figura in modo ovvio:

$$OG = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta'}{\vartheta'} - \cos\vartheta'\right)^2 + \operatorname{sen}^2\vartheta'} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta'}{\vartheta'^2} + 1 - 2\frac{\operatorname{sen}\vartheta'}{\vartheta'}\cos\vartheta'}.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione di ρ, e riducendo, si ottiene:

$$\rho = \frac{4(1 - \cos \vartheta')}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \vartheta' + \vartheta'^2 - 2\vartheta' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \vartheta'}}.$$

In questo caso già sappiamo che la risultante delle pressioni normali fa colla corda dell'arco circolare diagramma delle pressioni un angolo ψ dato dalla relazione:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1}{\vartheta'} - \operatorname{cotg} \vartheta',$$

e quindi il raggio vettore ρ, diretto secondo detta risultante, forma coll'asse di simmetria del cuscinetto l'angolo:

$$\omega = \frac{\vartheta}{2} - \psi,$$

e quindi avremo:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\vartheta}{2} - \omega\right) = \frac{1}{\vartheta'} - \operatorname{cotg} \vartheta'.$$

Quest'ultima relazione e l'espressione di ρ sono le equazioni polari parametriche del luogo cercato (parametro ϑ').

Per studiare alcune proprietà di questo luogo possiamo far variare l'angolo ϑ' in modo che un suo lato coincida sempre col raggio OB', e per ogni valore di quest'angolo, consideriamo disteso sulla sua bisettrice quel raggio vettore ρ_0' il quale sarebbe diametro del cerchio luogo dei punti P, per il contatto completo, su un cuscinetto di ampiezza ϑ'; esso è dato da:

$$\rho_0' = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{\vartheta'}{2}}{\vartheta' + \operatorname{sen} \vartheta'}.$$

L'estremo P_0' di detto raggio vettore ha per coordinate polari ρ_0' e $\frac{\vartheta'}{2}$. La tangente al luogo descritto da P_0' fa col raggio vettore un angolo ϵ dato dalla relazione:

$$\operatorname{tang} \epsilon = \frac{\rho_0' \, d\vartheta'}{2 \, d\rho_0'};$$

eseguendo la derivazione e semplificando si ottiene:

$$\operatorname{tang} \epsilon = \operatorname{tang} \frac{\vartheta'}{2} \cdot \frac{\vartheta' + \operatorname{sen} \vartheta'}{\vartheta' - \operatorname{sen} \vartheta'} .$$

Se ora indichiamo con ω_0' il valore dell'angolo limite per il contatto completo ω_0, corrispondente all'ampiezza di contatto ϑ', dalle formole (**) del § 3 risulta:

$$\operatorname{tang} \epsilon = \operatorname{cotg} \omega_0'.$$

Ciò significa che la tangente al luogo del punto P_0' è perpendicolare alla risultante delle pressioni normali relativa al contatto completo limite per l'arco ϑ'; essa tangente incontra quindi questa risultante nel punto P relativo, poichè questo appartiene al cerchio di diametro OP_0'.

Si noti che si può porre:

$$\rho = \rho_0' \cos \omega_0'$$

e sostituendo in questa relazione il valore di $\cos \omega'_0$ esposto nel § 3, si ritrova l'espressione di ρ più sopra ricavata, come deve essere.

Se immaginiamo ora di spostare di un angolo infinitesimo $d\omega_0'$ il raggio vettore OP, per avere su di esso il punto del cerchio di diametro OP_0', bisogna proiettare su esso normalmente il punto P_0'; mentre per ottenere il corrispondente $P_{(\omega_0'+d\omega_0')}$ occorre proiettare sullo stesso raggio, pure normalmente, il punto P_0' relativo a quel valore di ϑ' che corrisponde all'angolo $\omega_0' + d\omega_0'$: tale punto sarà infinitamente vicino alla posizione di P_0' prima considerata; e si noti che $d\vartheta'$ e $d\omega'_0$ sono sempre infinitesimi dello stesso ordine.

Ma poichè la tangente in P_0' al luogo di questo punto è normale al raggio OP, le due proiezioni ora indicate su questo raggio, a meno di infinitesimi di ordine non inferiore al secondo, coincidono nel punto $P_{(\omega_0'+d\omega_0')}$; il che vuol dire che il cerchio di diametro OP_0' è tangente in P al luogo di questo punto.

Questa proprietà si può pure ricavare per via puramente

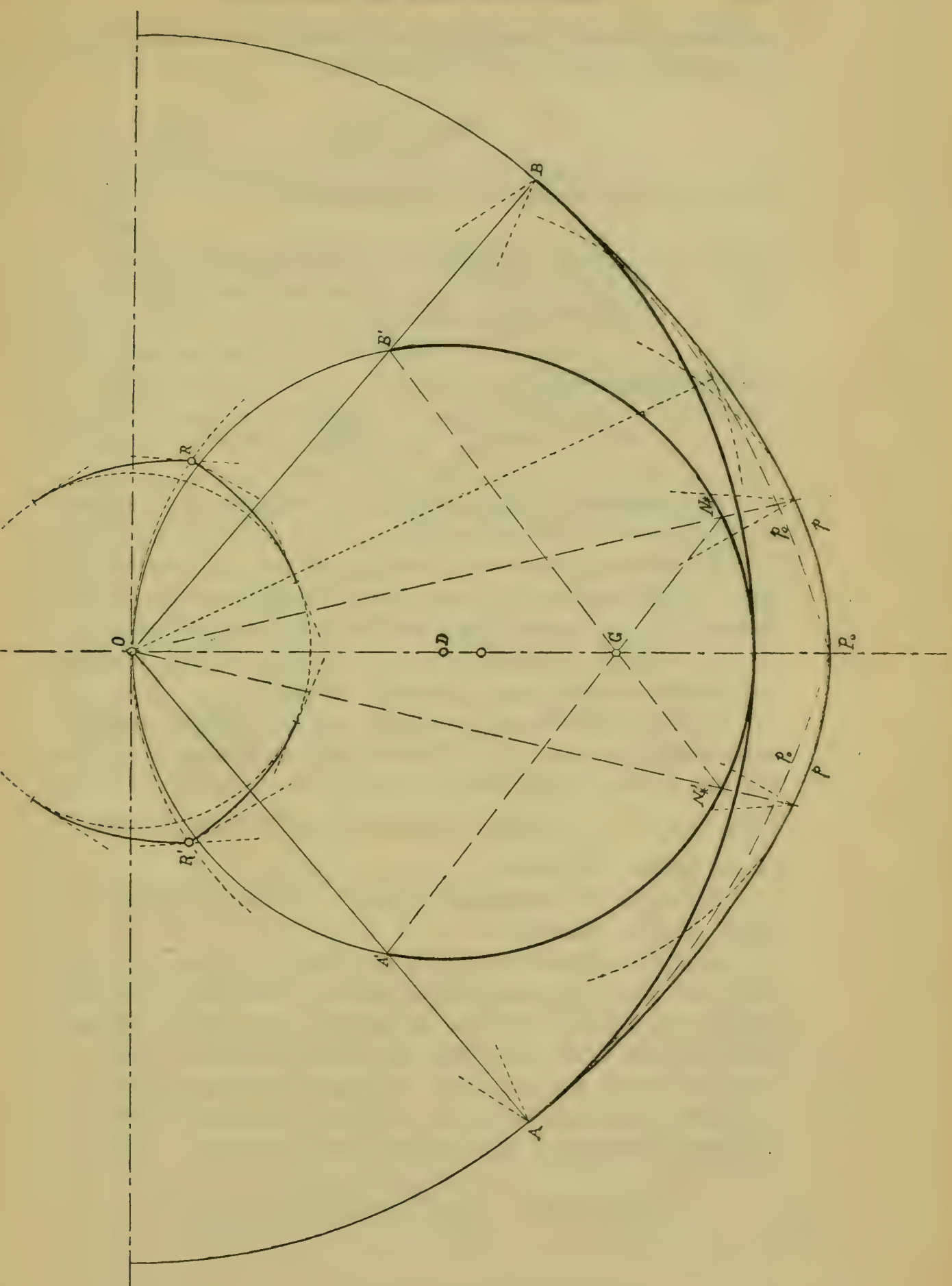


Fig. 5.

analitica, cercando l'angolo λ che la tangente al luogo di P fa col raggio vettore, dato dalla relazione:

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\rho\, d\psi}{d\rho} \qquad (d\psi = -d\omega).$$

A tal uopo si ricavano le espressioni:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta'} = \frac{4 \operatorname{sen} \vartheta' (\vartheta' - \operatorname{sen} \vartheta')^2}{(\operatorname{sen}^2 \vartheta' + \vartheta'^2 - 2\vartheta' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \vartheta')^{3/2}};$$

$$\frac{d\psi}{d\vartheta'} = \frac{\vartheta'^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta'}{\operatorname{sen}^2 \vartheta' + \vartheta'^2 - 2\vartheta' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \vartheta'},$$

e sostituendo si ottiene:

$$\operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang} \frac{\vartheta'}{2} \cdot \frac{\vartheta' + \operatorname{sen} \vartheta'}{\vartheta' - \operatorname{sen} \vartheta'} = \operatorname{cotg} \omega_0'.$$

Ciò dimostra appunto che il luogo considerato è tangente in P al cerchio di diametro OP_0'.

Ne risulta quindi che il luogo di P, per il contatto parziale, è l'inviluppo delle diverse posizioni del cerchio di diametro OP_0', ove questo diametro varii nel modo indicato.

Per $\vartheta' = \vartheta$ e quindi $\omega_0' = \omega_0$, il luogo di P si raccorda col cerchio che vale per il contatto completo.

Per $\vartheta' = 0$ si ha $\omega_0' = 0$ e $\rho_0' = 2$, com'è facile verificare applicando il teorema di L'Hôpital all'espressione di ρ_0' che per tale valore assume forma indeterminata. Quindi la nostra linea, per $\omega = \frac{\vartheta}{2}$ viene a raccordarsi col cerchio di raggio 2 (circonferenza del perno).

Nella fig. 5 è tracciato il luogo di P_0' (p_0 a tratti), ed il luogo di P (p, continuo).

Le risultanti totali nel caso del contatto parziale inviluppano una curva la quale si distacca dal punto R, e va a raccordarsi col *cerchio di attrito* del perno, nei punti di contatto delle tangenti tirate a questo, nel verso opportuno, secondo il senso del moto, dai punti A e B estremi del luogo di P.

Come coordinate polari di una retta generica dell'inviluppo possiamo assumere la sua distanza δ dal centro O:

$$\delta = \rho \operatorname{sen} \varphi = \frac{4(1 - \cos \vartheta') \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \vartheta' + \vartheta'^2 - 2\vartheta' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \vartheta'}},$$

e l'angolo ν ch'essa forma coll'asse di simmetria del cuscinetto:

$$\nu = \alpha \pm \varphi$$

ove α è data dalla relazione trovata più sopra.

(Dei due segni vale l'uno o l'altro a seconda del senso della rotazione).

La linea inviluppo che consideriamo contiene i punti R ed R', i quali sono per essa punti angolosi, ed anzi tale linea si può considerare come il luogo del punto R relativo al contatto completo sull'arco variabile ϑ'.

Si potrebbe pensare di far funzionare il perno come una cerniera, e cercare a quali forze applicate al perno il cuscinetto sia capace di fare equilibrio.

In questo studio l'inviluppo ora considerato viene a sostituire il cerchio d'attrito delle cerniere che ordinariamente si considerano nella Statica grafica.

Infatti, escludendo anzitutto quelle forze che non incontrano la superficie d'appoggio tra perno e cuscinetto (le quali sono incompatibili colla chiusura della coppia cinematica), il cuscinetto fa equilibrio a quelle forze le cui linee d'azione tagliano, od al limite toccano detta linea inviluppo.

Si ha invece rotazione del perno rispetto al cuscinetto per l'azione di forze che riescono esterne al detto inviluppo.

Torino, Aprile 1914.

Definizione proiettivo-differenziale di una superficie.

Nota di GUIDO FUBINI

È classico il teorema che una superficie S si determina con due forme differenziali quadratiche (di Gauss), quando si prescinda dalla posizione di S nello spazio, così che le due superficie sono uguali, se ad esse corrispondono forme rispettivamente uguali. Se (con notazione che conserveremo quasi sempre) con x, y, z si indicano le coordinate cartesiane ortogonali di un punto della superficie, e con u, v coordinate curvilinee, tali forme sono

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ove

$$\Delta = EG - F^2.$$

Con $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ $(i, k, l = 1, 2)$ indichiamo i simboli di Christoffel di 2ª specie relativi alla prima forma (elemento lineare).

Si può chiedere: Esiste qualche metodo analogo per lo studio di una superficie nel gruppo proiettivo? come si individua cioè una superficie dal punto di vista della geometria differenziale, così che superficie trasformate l'una dell'altra mediante una collineazione riescano definite in modo identico? Questo problema sembra ora di qualche interesse, mentre rapidamente progredisce lo studio delle proprietà differenziali-proiettive di una superficie. Ad esso è dedicato il seguente lavoro; esso dimostra che in questo studio si presenta nel modo più

spontaneo una forma differenziale del Pascal (*), che noi esaminiamo per brevità in un caso specialmente importante, confermando poi per altra via i risultati ottenuti.

§ 1. — Sezioni piane di una superficie.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una corrispondenza tra i punti di due superficie S, Σ *sia una corrispondenza proiettiva è che alle sezioni piane di* S *corrispondano le sezioni piane di* Σ.

Che la condizione sia necessaria è ben evidente. E per le superficie algebriche è anche ben chiaro che la condizione è sufficiente. Infatti, se r è una retta qualsiasi, alle sezioni di S coi piani passanti per r corrisponderanno le sezioni fatte su Σ coi piani passanti per quella retta ρ, che incontra Σ nei punti B corrispondenti ai punti A, ove r incontra S (i quali punti B devono necessariamente essere collineari). Vale a dire la nostra corrispondenza individua una corrispondenza tra piani tale che ai piani passanti per una retta r corrispondono piani passanti per una retta ρ: la nostra corrispondenza è dunque una collineazione.

Per dimostrare, anche nel caso generale, che la condizione è sufficiente, si procede nel seguente modo. Pensiamo le superficie S, Σ come immerse in spazii distinti; e, se $ABCD$ è un tetraedro inscritto in S, ed $A'B'C'D'$ il corrispondente inscritto in Σ (cioè se A', B', ecc. sono i punti di Σ corrispondenti ai punti A, B, ecc. di S), scegliamo nei due spazii i piani BCD e $B'C'D'$ a piani all'infinito, i piani ABC ed $A'B'C'$ a piani $x = 0$, ACD ed $A'C'D'$ a piani $y = 0$, i piani ADB ed $A'D'B'$ a piani $z = 0$ (essendo x, y, z coordinate cartesiane ortogonali o no). Indicheremo con lettere maiuscole le coordinate di un punto di Σ. Ai piani del fascio BC corrispondono piani del fascio $B'C'$; cioè a piani $x =$ cost. corrispondono piani $X =$ cost. Ossia X si può considerare (su S) come funzione della sola x, e analogamente Y della y, Z della z. In simboli $X = \varphi(x)$, $Y = f(y)$, $Z = F(z)$. Ai piani del fascio AC corrispondono i piani del fascio $A'C'$; cioè ai piani $\frac{x}{y} =$ cost. corrispondono i

(*) Cfr. E. Pascal, *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.* " Mem. della R. Acc. dei Lincei ", ser. 5ª, vol. 8 (1910).

piani $\frac{X}{Y} = \text{cost}$. Dunque $\frac{X}{Y}$ si può considerare (su S) funzione di $\frac{x}{y}$, e similmente $\frac{Y}{Z}$ di $\frac{y}{z}$, ecc.

Due delle tre variabili x, y, z si possono considerare (su S) indipendenti. Si deduce subito (annullando p. es. lo Iacobiano delle $\frac{x}{y}, \frac{X}{Y}$) che sarà:

$$(1) \qquad X = c_1 x^k, \qquad Y = c_2 y^k, \qquad Z = c_3 z^k,$$
$$(c_1, c_2, c_3, k \text{ costanti}).$$

Consideriamo due piani $x = \alpha$, $y = \beta$, dove α, β sono così piccoli che la retta r loro intersezione incontri S in più punti distinti $H, K, \ldots$ Ad essi corrisponderanno i piani $X = c_1 \alpha^k$, $Y = c_2 \beta^k$ incontranti Σ nei punti $H', K', \ldots$ immagine dei punti $H, K, \ldots$ Ai piani del fascio per r, cioè ai piani $\frac{x-\alpha}{y-\beta} = \text{cost.}$ corrisponderanno i piani del fascio $H'K'$ cioè i piani $\frac{X - c_1\alpha^k}{Y - c_2\beta^k} = \text{cost.}$ Quindi $\frac{X - c_1\alpha^k}{Y - c_2\beta^k} = \frac{c_1}{c_2} \frac{x^k - \alpha^k}{y^k - \beta^k}$ deve essere (per α, β abbastanza piccoli) funzione di $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$. E ciò può evidentemente avvenire soltanto se $k = 1$ (come si riconosce, p. es., annullando lo Iacobiano delle $\frac{x^k - \alpha^k}{y^k - \beta^k}$ e $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$).

Le (1) per $k = 1$ ci dicono appunto che S, Σ sono collineari.

§ 2. — Il problema fondamentale.

Acquista dunque senso preciso il problema:

Data la equazione $v = \varphi(u, a, b, c)$ *delle* ∞^3 *sezioni piane di una superficie* S (dipendenti dai tre parametri indipendenti a, b, c), *si deducano le equazioni parametriche della superficie* S. Noi vedremo che tale determinazione richiede (quando è possibile) SOLTANTO *delle quadrature.*

Dai risultati del § 1 sappiamo già che questo problema ammette una unica soluzione, se consideriamo identiche due superficie collineari.

Per risolverlo noi ricorderemo che le sezioni passanti per un punto A e per le quali il valore in A di $\frac{dv}{du}$ è una costante k

determinano un fascio di piani, la cui retta sostegno descrive, al variare di k, un fascio di rette, per il quale k si può considerare come coordinata.

Partendo da questa osservazione, indichiamo con m una funzione generica Φ delle a, b, c e scriviamo le equazioni:

$$(1)_1 \qquad v = \varphi(u, a, b, c)$$
$$(1)_2 \qquad v_1 = \varphi(u_1, a, b, c)$$
$$(1)_3 \qquad k = \varphi'_u(u_1, a, b, c)$$
$$(1)_4 \qquad m = \Phi(a, b, c).$$

La $(1)_2$ e la $(1)_3$ ci dicono che la sezione piana $(1)_1$ passa per il punto u_1, v_1 e che in questo punto $\frac{dv}{du}$ calcolato su tale sezione ha il valore k. Eliminando a, b, c dalle (1) noi troveremo un'equazione:

$$(2) \qquad m = F(u, v, u_1, v_1, k).$$

Teniamo fisso il punto u_1, v_1. Al variare di m la (2) ci definisce tutte le sezioni passanti per il punto (u_1, v_1) e per una retta tangente ad S uscente da questo punto. Per il fascio di queste rette tangenti la k sarà poi una coordinata proiettiva (non omogenea). Se scegliamo il piano tangente in (u_1, v_1) ad S come piano all'infinito, e il punto u_1, v_1 come punto all'infinito dell'asse delle z, noi potremo ancora fissare le x, y (*) in guisa che la (1) equivalga su S, per ogni valore di k, ad una equazione $x + ky = \text{cost}$. Dunque x ed y saranno su S tali funzioni $x(u, v)$ ed $y(u, v)$ delle u, v che $F(u, v, k)$ sia per ogni valore di k funzione di $x(u, v) + ky(u, v)$. Notiamo che qui abbiamo *sottinteso* le u_1, v_1 tenute fisse; altrimenti avremmo dovuto considerare anche x ed y come funzioni $x(u, v, u_1, v_1)$ e $y(u, v, u_1, v_1)$ delle u, v, u_1, v_1 e dire che F è per ogni sistema di valori delle u_1, v_1, k funzione di $x + ky$. Noi scriveremo dunque che $F(u, v, k)$ è funzione di k e di $x + ky$ [che $F(u, v, u_1, v_1, k)$ è funzione di u_1, v_1, k, $x(u, v) + ky(u, v)$], cosicchè

$$\frac{F_u'(u, v, k)}{F_v'(u, v, k)} = \frac{x_u' + ky_u'}{x_v' + ky_v'}$$

sarà una funzione lineare $\frac{\xi_1(u, v) + k\eta_1(u, v)}{\xi_2(u, v) + k\eta_2(u, v)}$ di k.

(*) Le x, y, z essendo coordinate cartesiane ortogonali od oblique.

Le x'_u, x'_v, y'_u, y'_v saranno dunque proporzionali ai coefficienti ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 di tale funzione lineare: coefficienti noti (a meno naturalmente di un fattore) quando sia data la F, cioè la φ. E quindi potremo scrivere:

$$dx = M(\xi_1\, du + \xi_2\, dv) \tag{3}$$

$$dy = M(\eta_1\, du + \eta_2\, dv), \tag{4}$$

dove le ξ, η sono note, il fattore integrante M è incognito. Poichè le x, y si devono poter assumere a variabili indipendenti, $\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1 \neq 0$. Scrivendo che M è fattore integrante delle (3), (4) potremo perciò ricavarne i valori di $\frac{\partial \log M}{\partial u}$, $\frac{\partial \log M}{\partial v}$, e quindi con quadrature il valore di M (determinato a meno di un fattore costante). Integrando poi le (3), (4), se ne trarranno le x, y (a meno di costanti additive). Tutte queste costanti indeterminate non corrispondono affatto a una indeterminazione del problema, perchè si possono eliminare con una conveniente collineazione.

Noi indicheremo con x_1, y_1 i valori così ottenuti per le x, y, per ricordare che esse in realtà dipendono anche dal punto (u_1, v_1) considerato. Corrispondentemente a un'altra coppia di valori (u_2, v_2) troveremo altre funzioni x_2, y_2 tali che un'equazione $x_2 + k_2\, y_2 = h_2$ (dove h_2, k_2 sono costanti) rappresentano una sezione piana di S passante per il punto (u_2, v_2), così come le equazioni $x_1 + k_1\, y_1 = h_1$ (h_1, k_1 costanti) rappresentano sezioni passanti per il punto u_1, v_1. E poichè tra tutte queste sezioni ve ne sono ∞^1 passanti contemporaneamente per i punti (u_1, v_1) ed (u_2, v_2), esisteranno ∞^1 sistemi di valori per le h_1, h_2, k_1, k_2 tali che le equazioni $x_i + k_i\, y_i = h_i$ per $i = 1, 2$ rappresentino le stesse sezioni. Anzi i valori corrispondenti di k_1, k_2 sono in corrispondenza lineare, perchè le ∞^1 sezioni ora considerate determinano sui piani tangenti in (u_1, v_1) ed in (u_2, v_2) due fasci proiettivi. E noi potremo fare una tale trasformazione lineare intera p. es. sulle x_2, y_2 in guisa che sia $k_1 = k_2$, cioè che gli ∞^1 piani $x_1 + ky_1 = h_1$ coincidano con infiniti piani $x_2 + ky_2 = h_2$. I valori di h_1 e quello di h_2 si determinano osservando che questi piani passano per i punti (u_1, v_1) e (u_2, v_2).

Perciò i piani:

$$[x_1(u, v) - x_1(u_2, v_2)] + k[y_1(u, v) - y_1(u_2, v_2)] = 0$$

coincidono coi piani:

$$[x_2(u, v) - x_2(u_1, v_1)] + k[y_2(u, v) - y_2(u_1, v_1)] = 0.$$

Ora sia z_1 la terza coordinata cartesiana di un punto di S (quando x_1, y_1 sono le altre due); anche x_2, y_2 si possono in unione a una terza variabile z_2 pensare come altre coordinate cartesiane di S (quando però siano cambiati tanto gli assi coordinati, che il piano all'infinito). Perciò x_2, y_2, z_2 saranno funzioni lineari fratte di x_1, y_1, z_1.

Ricordando quanto abbiamo detto per i piani passanti per i punti (u_1, v_1) e (u_2, v_2) avremo che sarà in particolare

$$x_2 - x_2(u_1, v_1) = \frac{x_1 - x_1(u_2, v_2)}{px_1 + qy_1 + rz_1 + s}$$

$$y_2 - y_2(u_1, v_1) = \frac{y_1 - y_1(u_2, v_2)}{px_1 + qy_1 + rz_1 + s}$$

dove p, q, r, s sono costanti. Se il punto (u_2, v_2) è scelto in modo *generico* in guisa che il piano π tangente nel punto (u_2, v_2) non passi per (u_1, v_1) sarà $r \neq 0$; perchè $px_1 + qy_1 + rz_1 + s = 0$ è l'equazione di π nel sistema di coordinate x_1, y_1, z_1. E, se fosse $r = 0$, il piano π sarebbe un piano $x_1 + ky_1 = h$ ($k, h =$ cost.), e passerebbe per u_1, v_1. Noi potremo dunque, cambiando ancora una volta coordinate, assumere a coordinate cartesiane le

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = px_1 + qy_1 + rz_1 + s.$$

Così dunque le equazioni parametriche della superficie sono date da:

$$x = x_1(u, v), \qquad y = y_1(u, v), \qquad z = \frac{x_1 - x_1(u_2, v_2)}{x_2 - x_2(u_1, v_1)}$$

che risolvono il nostro problema.

Riassumendo brevemente, quando sieno trovate le funzioni $x(u, v; u_1, v_1)$ e $y(u, v; u_1, v_1)$ (ciò che si sa fare con *sole qua-*

drature) si possono assumere ad equazioni parametriche della superficie le

$$(5)\quad \begin{cases} x = x(u, v; u_1, v_1), \qquad y = y(u, v; u_1, v_1), \\ z = \dfrac{x(u, v; u_1, v_1) - x(u_2, v_2; u_1, v_1)}{\alpha[x(u, v; u_2, v_2) - x(u_1, v_1; u_2, v_2)] + \beta[y(u, v; u_2, v_2) - y(u_1, v_1; u_2, v_2)]} \end{cases}$$

dove i punti (u_1, v_1) e (u_2, v_2) sono punti fissi generici, e le costanti α, β sono scelte (com'è possibile certamente) in modo che coincidano le sezioni rappresentate dalle equazioni

$$x(u, v; u_1, v_1) - x(u_2, v_2; u_1, v_1) = 0$$

$$\alpha[x(u, v; u_2, v_2) - x(u_1, v_1; u_2, v_2)] + \\ + \beta[y(u, v; u_2, v_2) - y(u_1, v_1; u_2, u_2)] = 0.$$

Il problema da noi posto non è sempre possibile; perchè *non ogni equazione* $v = \varphi(u, a, b, c)$ *può rappresentare le* ∞^3 *sezioni piane di una superficie*; lo studio precedente ci insegna a trovare *le condizioni necessarie e sufficienti* affinchè questo avvenga. Come abbiamo già visto, è intanto necessario che l'equazione di una sezione piana si possa, con certe eliminazioni eseguite sulle (1), ridurre alla forma:

$$m = F[k; \bar{u}, \bar{v}; x(u, v; \bar{u}, \bar{v}) + ky(u, v; \bar{u}, \bar{v})],$$

dove con $\bar{u}$, $\bar{v}$ indico le variabili, a cui nelle pagine precedenti abbiamo dato successivamente i valori u_1, v_1 ed u_2, v_2. La $\bar{v}$ e la k sono i valori di v e di v' per $u = \bar{u}$ (i valori iniziali di v e di v'); come costante m si potrebbe, volendo, scegliere il valore iniziale di v''. Sarà poi ulteriormente necessario e sufficiente che le $x(u, v; \bar{u}, \bar{v})$ e $y(u, v; \bar{u}, \bar{v})$ siano funzioni lineari fratte (a denominatore comune) a coefficienti funzioni delle sole $\bar{u}$, $\bar{v}$ delle variabili definite dalla (5). Non sarebbe certo difficile scrivere più esplicitamente queste condizioni; ma di ciò non ci occuperemo.

§ 3. — Equazione differenziale delle sezioni piane.

Ma sembra più conveniente, per caratterizzare una superficie, di dare l'equazione differenziale delle sezioni piane, piuttosto che darne l'equazione in termini finiti $v = \varphi(u, a, b, c)$, perchè i parametri a, b, c si possono scegliere in modo troppo molteplice. Comincieremo dal caso che le $u =$ cost., $v =$ cost. sieno sezioni piane, cosicchè l'equazione di una sezione piana generica vale $v + au + b + c\varphi(u, v) = 0$, ove φ è funzione delle u, v ed a, b, c sono i parametri, che si tratta di eliminare. Si trova $\left(\text{indicando con } v' \text{ la } \frac{dv}{du}, \text{ con } v'' \text{ la } \frac{d^2v}{du^2}, \text{ ecc.}\right)$:

$$v' = -\frac{a + c\varphi'_u}{1 + c\varphi'_v}$$

$$v'' = -\frac{c}{1 + c\varphi'_v}\left\{\varphi''_{uu} + 2v'\varphi''_{uv} + v'^2\varphi''_{vv}\right\}$$

$$v''' = -\frac{c}{1 + c\varphi'_v}\left\{\varphi'''_{uuu} + 3v'\varphi'''_{uuv} + 3v'^2\varphi'''_{uvv} + v'^3\varphi'''_{vvv}\right\} +$$
$$+ 3\frac{c^2}{(1 + c\varphi'_v)^2}(\varphi''_{uv} + \varphi''_{vv}v')(\varphi''_{uu} + 2v'\varphi''_{uv} + v'^2\varphi''_{vv}),$$

donde:

$$-v'''(\varphi''_{uu} + 2v'\varphi''_{uv} + v'^2\varphi''_{vv}) +$$
$$+ v''(\varphi'''_{uuu} + 3v'\varphi'''_{uuv} + 3v'^2\varphi'''_{uvv} + v'^3\varphi'''_{vvv}) + 3v''^2(\varphi''_{uv} + \varphi''_{vv}v') = 0.$$

Ecco la forma canonica di tale equazione. Se, come possiamo supporre, $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(u, v)$ sono coordinate cartesiane ortogonali dei punti della nostra superficie, il primo termine della nostra equazione vale (moltiplicato per du^2)

$$-v'''\begin{vmatrix} 0 & 0 & d^2z \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -v'''\sqrt{\Delta}\,(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2).$$

Da cui già deduciamo un primo risultato, che sarà confermato anche dai calcoli dei seguenti §§ per le più generali coordinate curvilinee.

Le linee asintotiche sono linee singolari per l'equazione delle sezioni piane (e quindi, come è ben noto, si conservano per collineazioni).

Noi ora scriveremo la nostra equazione in coordinate generali, e ne troveremo il primo membro sotto forma differenziale.

§ 4. — La forma fondamentale A.

Indichiamo con x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ coordinate proiettive omogenee: e siano $x_i = x_i(u, v)$ le equazioni parametriche di una superficie. Le x_i sono determinate a meno di un fattore comune. Le sezioni piane sono quelle, che rendono nulla la forma differenziale

$$(1) \qquad A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \\ d^3x_1 & d^3x_2 & d^3x_3 & d^3x_4 \end{vmatrix}$$

o, come scriveremo brevemente:

$$(1)^{bis} \qquad A = (x_i, dx_i, d^2x_i, d^3x_i).$$

Gli elementi di ciascuna colonna si ottengono da quelli scritti nella $(1)^{bis}$, ponendovi $i = 1, 2, 3, 4$.

È ben evidente che:

Se si moltiplicano le x_i *per uno stesso fattore* $\rho(u, v)$, *la forma* A *resta moltiplicata per* ρ^4. *Se si fa subire alle* x_i *una trasformazione lineare intera omogenea a coefficienti costanti* (collineazione), *la forma* A *resta moltiplicata per il determinante della trasformazione; tale forma* individua le sezioni piane e quindi, per quanto abbiamo già visto, *individua proiettivamente la superficie corrispondente.*

Tale forma costituisce dunque l'invariante che noi cercavamo. Se si pone p. es. $d^2u = d^3u = 0$, e si divide per du^6 *dalla forma* A *si deduce in coordinate curvilinee generali l'equazione differenziale delle sezioni piane.*

Per trovare nel modo più semplice le relazioni tra A e le forme di Gauss si ponga p. es. $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$.

Si otterrà:

$$A = (dx,\ d^2x,\ d^3x)$$

dove gli elementi scritti sono quelli della prima colonna, e quelli delle altre colonne se ne deducono sostituendo la y e la z alla x. Sviluppando si trova:

$$\begin{aligned} A = &- (d^3v\,du - d^3u\,dv)\sqrt{\Delta}\,(D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2) + \\ &+ 3\,(d^2v\,du - d^2u\,dv)\sqrt{\Delta}\,[D\,du\,d^2u + D'(du\,d^2v + dv\,d^2u) + \\ &+ D''dv\,d^2v] + \\ &+ (d^2v\,du - d^2u\,dv)\,\{\,d\,(\sqrt{\Delta}\,D)\,du^2 + \\ &+ 2d\,(\sqrt{\Delta}\,D')\,du\,dv + d\,(\sqrt{\Delta}\,D'')\,dv^2 + 4P_3\sqrt{\Delta}\,\} + P_6 \end{aligned}$$

ove

$$P_3 = \begin{vmatrix} du & dv & 0 \\ \left\{ {11 \atop 1} \right\} du + \left\{ {12 \atop 1} \right\} dv & \left\{ {11 \atop 2} \right\} du + \left\{ {12 \atop 2} \right\} dv & D\,du + D'\,dv \\ \left\{ {12 \atop 1} \right\} du + \left\{ {22 \atop 1} \right\} dv & \left\{ {12 \atop 2} \right\} du + \left\{ {22 \atop 2} \right\} dv & D'du + D''dv \end{vmatrix}$$

è un polinomio (*) di terzo grado in du, dv e P_6 è un polinomio di 6° grado in du, dv.

La forma A *resta invariante, sia al mutare delle linee coordinate, sia quando si effettui una collineazione unimodulare.*

I suoi coefficienti sono perciò invarianti per collineazioni (ma non per cambiamento di coordinate). Un tale coefficiente è p. es. P_6; un altro, più semplice, di cui ci occuperemo più avanti, è, p. es.:

$$4P_3\sqrt{\Delta} + d\,(\sqrt{\Delta}\,D)\,du^2 + 2d\,(\sqrt{\Delta}\,D')\,du\,dv + d\,(\sqrt{\Delta}\,D'')\,dv^2.$$

(*) Per il calcolo si ricordino le $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ {11 \atop 1} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + DX$ e analoghe, dove con X, Y, Z si indicano i coseni direttori della normale; e si ricordi che $(x_u',\ x_v',\ X) = \sqrt{\Delta}$.

§ 5. — Significato geometrico e calcolo della forma A.

Ponendo in A nulli i d^2u, d^3u, e dividendo per du^6, ed uguagliando a zero, si trova l'equazione differenziale (del terzo ordine) delle sezioni piane delle superficie. In altro modo questa equazione si può trovare, osservando che le sezioni piane sono le curve a torsione nulla. Indicando con s, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$, $\frac{1}{T_g}$, σ l'arco, la curvatura, la torsione, la torsione geodetica di una curva, e l'angolo che la normale principale forma con la normale alla superficie, si trova $\left(\text{posto } v' = \frac{dv}{du},\ v'' = \frac{d^2v}{du^2},\ \text{ecc.}\right)$:

$$\text{curvatura normale} = \frac{\cos\sigma}{R} = \frac{D + 2D'v' + D''v'^2}{E + 2Fv' + Gv'^2},$$

$$\text{curvatura geodetica} = \pm\frac{\operatorname{sen}\sigma}{R} = \frac{\sqrt{\Delta}}{(E + 2Fv' + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}(v'' + \alpha v'^3 + \beta v'^2 + \gamma v' + \epsilon)$$

$$\left[\alpha = -\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\};\ \beta = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\};\ \gamma = 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\};\ \epsilon = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right]$$

$$\sigma = \pm\operatorname{artg}\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}\ \frac{v'' + \alpha v'^3 + \beta v'^2 + \gamma v' + \epsilon}{D + 2D'v' + D''v'^2}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_g} \pm \frac{d\sigma}{ds}; \qquad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}\ \frac{d}{du}$$

(ove $\frac{d}{du}$ indica la derivata rispetto ad u, quando si tenga conto che v, v', v'' sono funzioni della u).

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ \frac{(FD - ED') + (GD - ED'')v' + (GD' - FD'')v'^2}{E + 2Fv' + Gv'^2}$$

che noi scriveremo anche nella forma:

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{-(D' + D''v') + (F + Gv')\frac{D + 2D'v' + D''v''}{E + 2Fv' + Gv'^2}\right\}.$$

Abbiamo una indeterminazione di segno (che si toglie su-

bito, come vedremo) nella formola che dà $\frac{1}{T}$. Ponendo $\frac{1}{T}=0$, e moltiplicando per:

$$\Delta(v''+\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)^2+$$
$$+(E+2Fv'+Gv'^2)(D+2D'v'+D''v'^2)^2=\frac{1}{R^2}\frac{ds^6}{du^6}$$

si trova che per le sezioni piane è nullo:

$$\frac{1}{T}\frac{1}{R^2}\frac{ds^6}{du^6}=-\frac{D'+D''v'}{\sqrt{\Delta}}\{\Delta(v''+\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)^2+$$
$$+(E+2Fv'+Gv'^2)(D+2D'v'+D''v'^2)^2\}+$$
$$+\frac{F+Gv'}{\sqrt{\Delta}}(D+2D'v'+D''v'^2)^3+$$
$$+\frac{\sqrt{\Delta}(D+2D'v'+D''v'^2)(v''+\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)}{E+2Fv'+Gv'^2}\times$$
$$\times\left\{(F+Gv')(v''+\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)\mp\frac{d}{2du}(E+2Fv'+Gv'^2)\right\}\pm$$
$$\pm(D+2D'v'+D''v'^2)\frac{d}{du}\{\sqrt{\Delta}(v''+\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)\}\mp$$
$$\mp\sqrt{\Delta}(v''+\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)\frac{d}{du}(D+2D'v'+D''v'^2).$$

Si debbono scegliere i segni superiori, come si vede confrontando i termini in v''' e v''^2 con quelli dell'equazione calcolata col metodo indicato al principio del paragrafo. Dallo stesso confronto si deduce che nella formola non devono comparire denominatori che in apparenza (*).

Ponendo in questa formola $v''=v'''=0$ e ricordando l'identità citata in nota, il secondo membro si riduce al valore di P_6, che è dato così dalla:

$$-\frac{P_6}{du^6}=-(D'+D''v')(\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)^2\sqrt{\Delta}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(D+2D'v'+D''v'^2)^2\}(FD-ED')+(GD-ED'')v'+$$

(*) Per verificarlo basta osservare la seguente identità:

$$(v''+\alpha v'^3+\beta v'^2+\gamma v'+\epsilon)(F+Gv')-\frac{1}{2}\frac{d}{du}(E+2Fv'+Gv'^2)=$$
$$=-(E+2Fv'+Gv'^2)\left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}+2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}v'+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}v'^2\right).$$

$$+ (GD' - FD'')\, v'^2 \} -$$
$$- \sqrt{\Delta}\,(D + 2D'v' + D''v'^2) \times$$
$$\times (\alpha v'^3 + \beta v'^2 + \gamma v' + \epsilon) \left(\left\{ {11 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {12 \atop 1} \right\} v' + \left\{ {22 \atop 1} \right\} v'^2 \right) +$$
$$+ (D + 2D'v' + D''v'^2) \frac{\delta}{\delta u} \} \sqrt{\Delta}\,(\alpha v'^3 + \beta v'^2 + \gamma v' + \epsilon) \{ -$$
$$- \sqrt{\Delta}\,(\alpha v'^3 + \beta v'^2 + \gamma v' + \epsilon) \frac{\delta}{\delta u} (D + 2D'v' + D''v'^2)$$

ove

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v}\,.$$

Non scrivo P_6 nella forma più semplice, sia per facilitare il calcolo al lettore evitando soverchie trasformazioni, sia perchè inutile al nostro scopo.

Concludendo dunque, abbiamo che *la nostra forma* A *vale* $-\frac{1}{T}\frac{1}{R^2}\,ds^6$; è dunque trovato il significato *metrico* di tale forma (*).

§ 6. — Applicazioni e verifiche.

Si potrebbe ora approfondire lo studio della forma A. Noi, per brevità, lo faremo nel solo caso che le linee u, v siano asintotiche. Questo è infatti il caso più importante, perchè le asintotiche si conservano per trasformazioni proiettive.

L'espressione $4P_3\sqrt{\Delta} + d(\sqrt{\Delta}D)du^2 + 2d(\sqrt{\Delta}D')\,du\,dv + d(\sqrt{\Delta}D'')\,dv^2$ si riduce nella nostra ipotesi ($D = D'' = 0$) in virtù delle equazioni di Codazzi a $4\sqrt{\Delta}\,D' \left[\left\{ {22 \atop 1} \right\} dv^3 + \left\{ {11 \atop 2} \right\} du^3 \right]$. Ne deduciamo quindi: *Una collineazione non muta i valori di* $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$ *per l'elemento lineare riferito alle assintotiche.*

Per completare la ricerca, dovremmo ora studiare il polinomio P_6; preferiamo però ritrovare per altra via il precedente risultato, completandolo poi senz'altro con questo secondo metodo.

(*) Che i coefficienti E, F, G comparissero in forma non semplice nella nostra A, era prevedibile *a priori*, perchè tali coefficienti hanno un significato puramente metrico, e non proiettivo.

Osserviamo che per l'illimitata integrabilità del sistema di equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \gamma \dfrac{\partial x}{\partial u} + \epsilon \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases} \quad (*)$$

devono essere soddisfatte tre equazioni, che a noi è comodo scrivere nella forma seguente:

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha'_v = \epsilon'_u \\[1ex] \dfrac{1}{2} A'_v = \beta''_{vv} - \beta\gamma'_u - (\beta\gamma)'_u \\[2ex] \dfrac{1}{2} B'_u = \gamma''_{uu} - \gamma\beta'_v - (\beta\gamma)'_v, \end{cases}$$

ove si è posto:

$$(3)\qquad A = 2\alpha'_u - \alpha^2 - 2\beta\epsilon, \qquad B = 2\epsilon'_v - \epsilon^2 - 2\alpha\gamma.$$

Esiste dunque una r tale che $(\log r)'_u = \frac{1}{2}\alpha$ e $(\log r)'_v = \frac{1}{2}\epsilon$. Si trova che:

$$(3)^{bis}\qquad \begin{cases} A = \dfrac{4}{r}\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial u^2} - \alpha \dfrac{\partial r}{\partial u} - \beta \dfrac{\partial r}{\partial v}\right) \\[2ex] B = \dfrac{4}{r}\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial v^2} - \gamma \dfrac{\partial r}{\partial u} - \epsilon \dfrac{\partial r}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Ora le (1) sono equazioni soddisfatte dalle quattro coordinate $1, x, y, z$ (omogenee) di una superficie S riferita alle assintotiche u, v; purchè sia

$$(4)\qquad \alpha = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad \beta = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}; \qquad \gamma = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad \epsilon = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Come si sa, se K è la curvatura della superficie, deve essere:

$$(5)\qquad \frac{\partial \log K}{\partial u} = -4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}; \qquad \frac{\partial \log K}{\partial v} = -4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

(*) Le α, β, γ, ϵ hanno ora un significato affatto distinto che nei precedenti paragrafi. Per il contenuto di questo § cfr. WILCZYNSKI, *Transactions of the American Mathematical Society* (tomi 8, 9, 10),. Memorie sulla *Proiective differential geometry of curved surfaces.*

È facile (ma un po' lungo) riconoscere che le (2) sono conseguenza delle (4), (5).

Se noi indichiamo con una lineetta gli elementi analoghi relativi ad un'altra superficie $\bar{S}$, la condizione necessaria e sufficiente, affinchè S, $\bar{S}$ siano collineari, è che si passi dalle (1) al sistema analogo per $\bar{S}$ con una trasformazione $x = \lambda\bar{x}$.

Le (1), ove si ponga $x = \lambda\bar{x}$, diventano:

$$\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial u^2} = \left(\alpha - 2\frac{\lambda'_u}{\lambda}\right)x'_u + \beta x'_v - \frac{1}{\lambda}(\lambda''_{uu} - \alpha\lambda'_u - \beta\lambda'_v)\,\bar{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial v^2} = \gamma x'_u + \left(\epsilon - 2\frac{\lambda'_v}{\lambda}\right)x'_v - \frac{1}{\lambda}(\lambda''_{vv} - \gamma\lambda'_u - \epsilon\lambda'_v)\,\bar{x} = 0\,.$$

Dovrà dunque essere:

$$(6)\qquad \beta = \bar{\beta}, \quad \gamma = \bar{\gamma}, \quad 2\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} = \alpha - \bar{\alpha}, \quad 2\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} = \epsilon - \bar{\epsilon},$$

$$(7)\qquad \lambda''_{uu} - \alpha\lambda'_u - \beta\lambda'_v = \lambda''_{vv} - \gamma\lambda'_u - \epsilon\lambda'_v = 0\,.$$

Le (6) danno:

$$(6)^{bis}\qquad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}, \qquad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}, \qquad \lambda = \frac{r}{\bar{r}}\,.$$

E le (7) diventano:

$$(7)^{bis}\qquad A = \bar{A}, \qquad B = \bar{B}.$$

Le $(6)^{bis}$ e le $(7)^{bis}$ ci dicono dunque:

Gli invarianti proiettivi di una superficie riferita alle assintotiche sono $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}$, $A = 2\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}^2 - 2\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}$, $B = 2\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}^2 - 2\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}$.

I primi due ci erano noti dallo studio di P_3; gli altri due si sarebbero potuti ottenere studiando P_6.

Notiamo in più che i due nuovi invarianti ottenuti A e B non sono indipendenti dai precedenti.

Le (2) dicono infatti che A'_v e B'_u si esprimono in funzione dei precedenti due; cosicchè per l'identità proiettiva delle nostre

due superficie *è necessario e basta che siano uguali in punti corrispondenti le* $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ *e che in punti corrispondenti p. es. delle* $v = 0$ *le* A *abbiano valori uguali, in punti corrispondenti p. es. delle* $u = 0$ *le* B *abbiano uguali valori.*

L'identità ora enunciata per A o per B lungo la $v = 0$, o la $u = 0$ equivale ad ammettere che le asintotiche $u = 0$ e $v = 0$ di una superficie sieno proiettivamente identiche alle asintotiche dell'altra. Ciò che si può enunciare anche dicendo:

Se due superficie in corrispondenza biunivoca che conserva le assintotiche $u = \text{cost.}$ *e* $v = \text{cost.}$ *si intersecano lungo due assintotiche, p. es.* $u = 0$ *e* $v = 0$, *le superficie coincidono se i simboli* $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ *hanno lo stesso valore per le due superficie.*

Basta dimostrare che A ha valori uguali per le due superficie lungo la $v = 0$, e che altrettanto avviene per B lungo la $u = 0$.

Basta evidentemente provare che $\left\{ {11 \atop 1} \right\}$ e $\left\{ {22 \atop 2} \right\}$ hanno gli stessi valori sulle due superficie lungo la $u = 0$ e la $v = 0$. E ciò si dimostra facilmente. Se è data la *assintotica* $u = 0$, sono noti per $u = 0$ i valori di G e di G'_v. La curvatura della $u = 0$ coincide con la curvatura geodetica $\frac{\sqrt{\Delta}}{G\sqrt{G}} \left\{ {22 \atop 1} \right\}$. Poichè G e $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ sono noti, anche $\sqrt{\Delta}$ e quindi anche $(\sqrt{\Delta})'_v = \left\{ {22 \atop 2} \right\} + \left\{ {12 \atop 1} \right\}$ sono noti per $u = 0$. Essendo nota la torsione della $u = 0$, è nota la curvatura K della superficie, e quindi anche $\frac{\partial \log K}{\partial v} = -4 \left\{ {12 \atop 1} \right\}$ per $u = 0$. Cioè per $u = 0$ sono noti anche $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {22 \atop 2} \right\}$, $\sqrt{\Delta}$, K, $(\sqrt{\Delta})'_v$, K'_v. Poichè $G'_v = 2\left[G \left\{ {22 \atop 2} \right\} + F \left\{ {22 \atop 1} \right\}\right]$, se ne deduce che anche F resta determinato per $u = 0$. Essendo così noti G, F, $\Delta = EG - F^2$ per $u = 0$, anche E è noto per $u = 0$. Per $u = 0$ sono dunque noti E, F, G, e quindi anche E'_v, F'_v, G'_v; sono pure noti per $u = 0$ il simbolo $\left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{1}{2\Delta}(GE'_v - FG'_u)$ e quindi anche G'_u. Poichè per $u = 0$ è noto:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{G} \left\{ {22 \atop 1} \right\}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{G} \left\{ {12 \atop 1} \right\}\right) \right\},$$

sarà per $u = 0$ noto anche $\Delta'_u = E'_u G + E G'_u - 2 F F'_u$ e quindi sarà noto anche $E'_u G - 2 F F'_u$ e perciò anche infine $\left\{ {11 \atop 1} \right\} = \frac{1}{2\Delta} (F E'_u + G E'_u - 2 F F'_u)$. Dunque $\left\{ {11 \atop 1} \right\}$ e $\left\{ {22 \atop 2} \right\}$ risultano determinati per $u = 0$ (e, per simmetria, anche per $v = 0$). c. v. d.

§ 7. — Cenno di alcuni problemi analoghi.

Accanto alla forma A si potrebbe studiare la forma duale $A' = (\xi_i, d\xi_i, d^2\xi_i, d^3\xi_i)$, dove con $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ si indicano coordinate omogenee del piano tangente, trovando anche le relazioni che passano tra A ed A', e quindi tra le superficie duali di una superficie data.

Anche il metodo del § 6 si potrebbe applicare alla superficie, pensata come inviluppo dei suoi piani tangenti. In tal caso l'elemento lineare dell'immagine sferica avrebbe l'ufficio, che nel § 6 ha l'elemento lineare della superficie stessa.

Infine, servendosi della trasformazione di S. Lie che trasforma rette in sfere, si potrebbe fare uno studio analogo, nel quale le linee di curvatura avrebbero l'ufficio, che nel presente lavoro hanno le assintotiche.

Si potrebbero applicare i principii di questa memoria a problemi speciali (*). Ma non vogliamo qui studiare casi particolari.

(*) Naturalmente di indole proiettiva.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 19 Aprile 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Manno, Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Carle.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 29 marzo 1914.

Il Presidente presenta le pubblicazioni di cui fa omaggio all'Accademia il Socio nazionale non residente Fedele Savio, cioè il volume su *L'apparizione della Croce e la conversione di Costantino Magno*, 2ª edizione a cura del Comitato romano delle feste Costantiniane, Roma, tip. Befani, 1913, e quattro opuscoli di storia ecclesiastica.

È pure presentata dal Presidente la parte III del vol. VII della *Storia dell'arte italiana* del Socio corrispondente Adolfo Venturi, Milano, Hoepli, 1914. — Su proposta del Socio Segretario Renier la Classe unanime delibera che al prof. Venturi siano inviate, coi ringraziamenti, le congratulazioni per la vista ricuperata mediante un atto operativo ed i migliori auguri pel proseguimento dell'opera sua, che è decoro all'Italia e agli studi sulla nostra arte gloriosa.

Il Socio D'Ercole presenta un proprio opuscolo dal titolo: *L'antico Egitto e la Caldea come precursori dell'ebraismo e del cristianesimo in morale e religione*, Bologna, 1913, di cui riferisce alcuni dati.

Con particolari chiarimenti il Socio Einaudi offre: 1°, *La Riforma sociale, rivista critica di economia e finanza*, serie 3ª, anno XX, vol. XXIV, 1913, Torino, Società tipografico-editrice nazionale, 1914; 2°, Riccardo Bachi, *L'Italia economica nel 1912*, Torino, 1913; 3°, Luigi Einaudi, *Corso di scienza della finanza*, 2ª ediz. curata da Achille Necco, Torino, 1914. — Il Presidente si rallegra col Socio offerente per le sue benemerite pubblicazioni nella scienza della finanza, notando quale incremento e quanta sicurezza e precisione scientifica quella disciplina abbia conseguito mercè i suoi lavori.

Per l'inserzione negli *Atti* il Segretario Renier presenta la Nota del Socio Carlo Cipolla, *Sulle tradizioni anti-bonifaciane rispetto a Giulio da Montefeltro e alla guerra dei Colonna*.

LETTURE

Sulle tradizioni anti-bonifaciane rispetto a Guido da Montefeltro e alla guerra dei Colonna.

Nota del Socio CARLO CIPOLLA.

Negli ultimi anni la questione del " consiglio frodolente „ di Guido da Montefeltro a Bonifacio VIII fu trattata e ritrattata più volte. Ultimi a discorrere furono il prof. Giacomo Parodi nel *Bollettino della Società dantesca*, dicembre 1911 (XVIII, 262), che sottopose ad esame le pubblicazioni meno lontane, e il padre Girolamo Golubovich *Biblioteca bio-bibliografica della Terra Santa e dell'Oriente Francescano*, Firenze, 1912, p. 483 nel capitolo *Una pagina dantesca, notizie inedite su frate Guido conte di Montefeltro* [*a. 1222-1298*], *edizione ampliata e corretta.* Il p. Golubovich scoperse, anni sono, in un manoscritto della Nazionale di Parigi quella cronaca di frate Elemosine, che conserva la narrazione francescana sul colloquio di Guido.

Alla narrazione dei partigiani di Colonna, degli autori dell'attentato di Anagni, si aggiunse un'altra pagina per merito di A. Messeri *Il consiglio frodolento di Guido da Montefeltro*, Rimini, 1911.

Nella nota al II volume del mio Ferreto ritornerò presto sulla questione, ma in forma laconica, fermandomi piuttosto su frate Elemosina, che non sulle altre fonti. Qui al contrario. A me pare che sia necessario allargare la questione, non isolare la questione di Guido; una vera e completa illustrazione della questione si avrà soltanto in una trattazione generale sulla leggenda avversa a Bonifacio VIII, condotta secondo le traccie segnate dal Finke nel suo mirabile libro *Aus den Tagen Bonifaz VIII*, Münster i/w 1904. Ma a tanto non è ancora preparato il terreno, e mi accontenterò di cenni.

Qui voglio cercare di ordinare alcuni elementi, senza soverchie pretese, per vedere se si può tentare una cronologia della diffusione della leggenda anti-bonifaciana in riguardo alla rovina dei Colonna.

Primieramente richiamiamo alla memoria la condizione degli animi eccitatissimi. La lotta dei Colonna contro Bonifacio VIII non avea solo carattere personale, ma traeva seco anche una più vasta controversia politico-religiosa, che si collegava colle tendenze " spiritualistiche ".

La distruzione di Palestrina e delle altre terre dei Colonnesi fece profonda impressione, nè i Caetani la attenuavano. Nella risposta che il card. Francesco Caetani (1) diede alle accuse dei Colonna non si impugnava nè il fatto, nè la sua gravità, ma si diceva soltanto che era la conseguenza della sentenza.

" Ad id vero quod dicunt, quod ipse dominus B. rupta fide destruxit et dirui fecit civitatem Penestin. et quod castra et alias terras ipsorum Colunpnen. distribuit et dedit inimicis ipsorum, respondetur, licet sic ex predictis responsum, quod exigentibus culpis et excessibus eorum, quos ipsi recognoverunt, ut supradictum est, iuste dirui fecit predictam civitatem et alia castra et terras dare iuste potuit, cum iam essent eorum bonis per sententiam iuste privati ".

Invece si nega che avesse pensato di " occidere omnes Columpnenses ".

Dall'altra parte i Colonna si preparavano al fatto di Anagni. L'avversione la più arrabbiata contro Bonifacio VIII era diffusa presso i Gioachimiti e gli Spirituali, che arrivava fino a impugnare la validità della rinuncia di Celestino V e della elezione del suo successore. La tensione degli animi è rappresentata da Ubertino da Casale, che in questi ultimi anni richiamò sopra di sè l'attenzione di molti e pur testè del p. Adolfo Martini (2), che esaminando ampiamente l'*Arbor vite crucifixe* nelle sue fonti e nel suo contenuto, espone ciò che dice per impugnare la legittimità di Bonifacio VIII. Gli attacchi violenti contro papa Caetani, uomo senza dubbio caldo ed a scatti,

(1) P. Petrini, *Memorie prenestine*, Roma, 1795, p. 434.
(2) *Martino da Casale alla Verna*, in " La Verna ", 1913, XI, 273.

fanno vedere fino a quale frenesia molti si lasciavano portare. Ubertino difende i due cardinali Pietro e Giacomo Colonna, e afferma che Bonifacio VIII avea relazione cogli spiriti infernali, del cui aiuto, a suo credere, si servì per opprimere i due cardinali, la qual cosa, dice con asseveranza, " usque ad me heresissimorum suorum revelatione verum esse pervenit „. Il Martini opina che tutte queste narrazioni, come la " pessima mors et finis eius „, e che Ubertino accettava senz'ombra di esame, provengano probabilmente dal card. Napoleone Orsini, del quale Ubertino nel 1307 divenne cappellano e familiare. Ubertino era entusiasta di Filippo il Bello, e in ciò si stacca da Dante, mentre è concorde con lui nell'avversione contro Bonifacio VIII e nell'impugnarne la elezione. Dante accenna, ma alla sfuggita, a Ubertino, mentre Jacopone da Todi è da lui trascurato.

Le parole di Ubertino possono indicarci con quali disposizioni d'animo si parlasse e si scrivesse, del che devesi tener conto a proposito della credibilità storica delle varie narrazioni.

I.

Sul testo di G. Villani.

L'episodio di Guido da Montefeltro nel c. XXVII dell'*Inferno* ha il suo punto culminante nel colloquio con Bonifacio VIII. Che quel colloquio non sia stato inventato da Dante a me parve sempre cosa non solo probabile, ma anche sicura, per quanto in queste questioni ci possa essere cosa provata; e ciò anche indipendentemente dalle fonti prosaiche. Dante ha per abitudine di raccogliere la base della sua narrazione dalla storia, o almeno da ciò che potea riguardarsi per storia; e mettervi attorno le sue concezioni artistiche. Prima che il Parodi, che di tutto questo parlò con tanta competenza, non lo negasse, io era davvero propenso a credere che anche l'assoluzione data da Bonifacio VIII avanti al peccato si dovesse riguardare come una diceria suggerita a Dante da qualche testimonianza, scritta od orale, qualunque fosse il suo valore; dico il vero, per quanto Dante fosse avversissimo a Bonifacio VIII mi sarebbe sembrato, non supponendo ciò, di aver dimenticato *la reverenza delle somme*

chiavi che egli professava. Vero è che Dante riteneva Bonifacio VIII come illegittimamente eletto. Ma le considerazioni del Parodi mi dànno a pensare, per quanto basate soltanto su ragioni estetiche; accenno anche all'argomento negativo che nessuno parla di ciò di coloro che accennano al colloquio. Vi allude, è vero, il Ferreto (I, 74), ma egli è posteriore a Dante, ed usò la *Divina Commedia*. È piuttosto a notare che G. Villani (VIII, 21 e 23) nel fondo della narrazione che egli fa della guerra fra Bonifacio VIII e i Colonna non inserisce alcun cenno al colloquio di Guido, e solo vi fa allusione in un passo evidentemente aggiunto: un passo che vi sta dentro a disagio. Queste parole non significano mica che io pensi trattarsi di una interpolazione da altre mani, no davvero, ma io dubito invece trattarsi di un ritocco dovuto al cronista medesimo. Ma considerando il passo nella sua forma più piana, devesi da ciò riconoscere che dell'assoluzione non si parla.

Parlando del colloquio ha il solo 'consiglio frodolente', e tutto il resto è omesso, il che fa pensare che il Villani o abbia fatto anch'egli l'acuta argomentazione del Parodi, o che leggesse il racconto su una fonte simile a Ricobaldo o a Pipino.

Presso G. Villani la lotta fra Bonifacio VIII ed i Colonnesi si partisce in due capitoli, 21 e 23 del libro VIII; nel cap. 21 si accenna alla condanna dei due cardinali Colonna, 1297, si ricordano le rocche di Palestrina, Nepi e Colonna, accennandosi all'assedio o alla presa di Nepi, e agli aiuti dati da Firenze al papa. Nel cap. 23, settembre 1298, si afferma un accordo fatto a Rieti, colle mancate promesse di Bonifacio VIII per il che " innanzi si compiesse l'anno si ribellarono „ perchè il papa indarno promise di restituire loro Palestrina, donde la nuova condanna e il disperdersi. Tra l'accordo e la nuova rivolta, alcuni testi collocano il discorso di Guido da Montefeltro.

Gli aiuti mandati da Firenze al papa rimasero in campo contro i Colonnesi dal luglio 1297 all'aprile 1298, secondo i documenti riferiti dal Davidsohn (1) il quale colloca la tratta-

(1) *Geschichte von Florenz*, III, 42. Presso il Tartini, *Rer. Ital. Script.*, II, 53, citansi documenti del 1298 in cui Michele q. Orlando del Popolo di

zione per la cessione di Palestrina all'agosto 1298 quando realmente il papa trovavasi a Rieti; egli poi richiama l'attenzione nostra sopra un documento vaticano sulle trattative o sulla cessione di Palestrina; cioè la risposta che il card. Francesco Caetani, nipote di Bonifacio VIII, di cui dicemmo, diede alle lagnanze dei Colonnesi.

Presso il Villani, il testo non è sicuro, poichè in alcuni codici il passo sul *consiglio fraudolente* c'è e in alcuni manca.

Esaminai i cinque manoscritti che di Giovanni Villani si conservano nella Laurenziana, e ve lo trovai in due. In uno del sec. XIV-XV (Pluteo, 62, 1) il passo è in questa forma: " e tutto questo trattato falso e frodolento fece il papa per lo consiglio del conte da Montefeltro allora fra Minore, ove gli disse la mala parola: lunga promessa coll'attender corto et cetera ". Similmente c'è nel cod. Pluteo 94, 4, del sec. XVI. Manca nei seguenti Pl. 62, 3 (sec. XIV-XV) (1), Pl. 62, 5 (sec. XV), Pl. 62, 2 (fine del sec. XIV). E il passo di fra Guido da Montefeltro manca anche nel Villani della Capitolare Veronese CCCCXLVI, f. 119 (sec. XV).

Il passo inserto nel testo del Villani ha relazione stretta col c. XXVII dell' *Inferno* dantesco; il che fu riconosciuto da F. Neri (2), il quale ritiene che il Villani dipendeva appunto dalla *Divina Commedia*. Il resto della testimonianza del Villani sul fatto dei Colonna non ha invece relazione diretta con Dante, appena l'ha indiretta, poichè dice che i Colonnesi rimasero " ingannati di ciò ch'era stato loro promesso ". Ma non dice che cosa fosse stato ad essi promesso.

Accanto al Villani può citarsi Paolino Pieri (3), che sotto il 1298 scrive: " Su questo tempo e mese di settembre essendo Bonifazio papa colla corte in Rieti, una terra della Marca,

---

S. Pietro in Gattolino (Firenze) si obbligò ad andare a Roma per recarsi all'esercito ' contra illos perfidos de Colupna et contra quoscunque alios Ecclesie et summi pontificis inimicos atque rebelles ' per sei mesi, e ciò dal 15 maggio.

(1) Il codice è di varie mani, ma tengo nota soltanto della parte che a noi interessa.

(2) *Dante e il primo Villani*, " Giorn. dantesco ", 1912, XX, 8.

(3) Tartini, II, 53; Adami, *Cronica di P. Pieri*, Roma, 1758, p. 61.

messer Jacopo e m. Pietro figliuoli di un Gianni dalla Colonna, con gli altri Colonnesi, vennero alla misericordia, ai quali il papa graziosamente e di buon'aria perdonò ed assolvetteli dalla scomunicazione e disfecesi allora Palestrina; avvegnachè poco passò meno d'un anno, che si partiro dall'ubbidienza ed il papa da capo li scomunicò „. Qui non c'è alcuna allusione al tradimento che la voce diffusa dai Colonna accreditò.

La spiegazione delle testimonianze del Pieri e del Villani sta nel documento edito da P. Petrini (1) opportunamente citato dal Davidsohn, che ne dichiara l'alto valore. È la risposta che il card. Francesco Caetani fa all'accusa mossa dai Colonna a Bonifacio VIII. Lo sunteggio: " essi dicono di non aver rico-
" nosciuto la propria colpa. Ma la cosa andò così. Essendo il
" papa a Rieti in concistoro, in presenza di cardinali e prelati
" e del principe di Taranto 'qui nunc hic extat' e di altri
" chierici e laici in gran numero, i Colonna si presentarono so-
" lennemente a Bonifacio, riconoscendolo come legittimo papa, e
" confessando i loro eccessi. I Colonna dicono che furono segnati
" patti fra essi ed il papa, asserendo di tener bolla del papa e di
" aver diritto a custodire la città di Preneste, pur ponendovi
" il papa le sue armi. Ma ciò non è vero, e cotali patti sono
" bene inverosimili, non essendo ammissibile che dopo avere
" confessati i loro eccessi, venissero a patti. Prima di presen-
" tarsi al cospetto del papa, aveangli già consegnato tanto Pre-
" neste, quanto le altre castella; nè è possibile credere che il
" papa si accontentasse soltanto di questo che essi alzassero le
" sue armi. Smentisce che Bonifacio VIII avesse tentato di far
" morire Stefano Colonna. All'accusa che il papa solo 'corrupta
" fide' distrusse le castella dei Colonna, si risponde che questi
" erano già stati privati, per sentenza, dei loro beni: sicchè
" quanto egli fece fu per loro colpa „. Il resto del documento ha minore interesse per noi.

Il passo del Pieri contiene un cenno alla *misericordia*, il che fa pensare alle seguenti parole del presente documento (p. 433): " nec ipsi Columpnenses, nec prefati per eos vocata petebant pacta aliqua sed ut solum eis *misericordia* fieri insistebant „.

(1) *Memorie prenestine*, Roma, 1795, doc. n. 35, p. 432.

Il Petrini (pp. 148-9) illustra molto laconicamente il documento, e fa desiderare maggiori notizie là dove dice che il cardinale Giovanni Boccamazio ed altri, che si interposero come mediatori, ingarbugliarono l'affare.

Il Davidsohn (III, 46) riguarda come perfettamente chiaro il documento di Francesco Caetani, nè contro di esso propone alcun motivo di dubbio (1).

Delle carte che riguardano il processo contro la memoria di Bonifacio VIII si occupa R. Scholz (2), e dà l'elenco del materiale da lui trovato nell'archivio Vaticano; ma delle carte da lui trovate, nessuna riguarda la questione nostra; anzi egli non ricorda neppure il documento riferito dal Petrini. Egli dice che abbiamo quasi solo i documenti avversi a Bonifacio VIII, così che quasi non si può neppure in qualche modo applicare l'adagio *Audiatur et altera pars.*

II.

Ricobaldo da Ferrara.

Di Ricobaldo da Ferrara abbiamo due testimonianze intorno alla guerra di Bonifacio VIII contro i Colonna e intorno a Guido da Montefeltro. Ricobaldo nacque verso il 1244-45, dacchè egli era fanciullo settenne quando udì predicare Innocenzo IV il 4 ottobre 1251. Qualche documento del 1290 lo denomina " Ricobaldus condam Bonmercati notarius „; nel 1293 trovavasi a Padova. Contava 73 anni quando scrisse la *Historia Romana*, la quale infatti giunge fino al 1318 (3). Della *Hist. Rom.* esiste la versione italiana nel cod. Marciano, Zanetti 38

---

(1) Il cardinale Francesco era nipote *ex fratre* di Bonificio VIII. Cfr. Eubel², *Hist*,, I. 12.

(2) *Zur Beurteilung Bonifaz VIII und seines sittlich-religiösen Charakters.* " Hist. Vierteljahrschr. „, 1906, IX, 470 sgg., 484 sgg.

(3) Le notizie biografiche sono raccolte dal compianto O. Holder Egger, *Der Schlussteil Ricobalds von Ferrara Hist. Romana,* " Neues Archiv „, 1911, XXXVI, 448-450, 453, e da A. F. Massera, *Intorno alla Hist. Romana di Ricobaldo da Ferrara,* " Arch. Murat. „, n¹ 11-2 (a. 1913), p. 609.

" (nuova numerazione 4774) „, sec. XV, che C. Frati (1) ha illustrato; la *Historia* è chiusa da questa nota: " Qui finisce questo autore la sua opera, lo quale vide queste cose, le quali esso scrive qui ultime (pare dunque, alluda alla guerra di Cangrande contro i Padovani nel detto anno 1318); ed infine a questo tempo esso visse „. Ignoto è l'anno della morte di Ricobaldo.

Dunque la *Historia Romana* fu terminata nel 1318, forse alla vigilia della morte del suo autore?

Anteriori alla *Hist. Rom.* sono varie compilazioni storiche di Ricobaldo, in parte edite dall'Eccard e dal Muratori, e nel 1886 elencate da Holder Egger (2). Fra queste opere la più notevole è naturalmente il *Pomarium Ravennatis Historie*, dedicato a Michele arcidiacono di Ravenna; da esso fu tolta in gran parte la *Historia Romana*. Il *Pomarium* fu pubblicato dal Muratori nel t. IX degli *Scriptores*, e giunge fino al 1304 cioè fino alla rivolta di Modena e di Reggio contro Azzone d'Este. Secondo A. F. Masera il *Pomarium* fu sostanzialmente scritto a Padova nel 1300.

Holder Egger elenca ancora: " Chronica extracta de archivo Ecclesie Ravennate — Chronica de septem etatibus mundi — Compilatio chronologica „. Della *Chronica parva Feraríensis* parla il Masera (*Archivio Muratoriano*, fasc. 10, p. 549, dell'anno 1911).

P. Gribaudi (3), dopo aver ricordato due monografie di M. Longhena (1905, 1907) sulle scritture geografiche di Ricobaldo, estrae dal Cod. Ottoboniano 2073 (sec. XIV) e dal Parmense Palat. 331 l'aneddoto ' de partibus Italie et de laudibus eius '.

Nel *Pomarium* e nella *Historia Romana* si parla dei Colonna e di Guido da Montefeltro; ma in modo diverso. Da una

(1) *Volgarizzamento di un'opera storica inedita di Ricobaldo Ferrarese*, " Miscellanea A. Hortis „, Trieste, 1910, p. 847 sgg.

(2) *Berichte über eine Reise nach Italien 1885*, " Neues Archiv „, 1886, XI, 277-86.

(3) *Una descrizione inedita dell'Italia di Riccobaldo da Ferrara*, nel volume miscellaneo *Scritti di geografia e di storia della geografia concernenti l'Italia pubblicati in onore di G. Dalla Vedova*, Firenze, 1908, p. 179 sgg. cita anche il Cod. Marc. 313 coll'opuscolo dal titolo " de origine urbium Italie „.

comunicazione che il Masera fece al Prof. Parodi (1) viene il dubbio che anche in altre opere parli il Ricobaldo dell'episodio di Guido, ma finora non è molto chiara la cosa.

Il passo del *Pomarium* riguardante il conte Guido fu scritto dopochè questi si fece francescano, e prima che morisse, o almeno che Ricobaldo sapesse della sua morte. Di quest'ultimo periodo della vita di Guido così parlano gli *Annales Cesenates* (Murat. XIV, 1114) evidentemente bene informati: ' de religione comitis Guidonis et de morte. Millesimo CCLXXXVI die XVII novembris Guido comes Montis Feretri, dux bellorum, Fratrum Minorum religionem ingressus, currente millesimo CCXCVIII die dedicationis beati Michaelis [29 settembre] in civitate Ancooae est viam universe carnis ingressus et ibi sepultus ' (2).

E poco appresso questi *Annales* (c. 1125) sotto al 1297 parlano della lotta di Bonifacio VIII contro i Colonna, senza collegare questo con Guido; donde appare che il loro autore nulla sapeva dell'aneddoto del *consiglio frodolente.*

Scrisse dunque Ricobaldo ' Hoc tempore Guido comes de Montefeltro dux bellorum, strenuus quondam contra Bononienses Forolivensibus ductor belli et Pisanorum post clades reparator depositis honoribus seculi, Minorum Ordinem ingressus est, ubi hodie militat in castris Francisci '.

' Anno Domini MCCXCVII magna Rome seditio inter Bonifacium papam et duos cardinales de Columna, quibus mandavit, ut pileos deponerent, cardinalatus insignia. Eos quoque, cum non parerent ac ceteros illius generis usque ad quartam generationem privavit ecclesiasticis beneficiis et honore; palatia eorum dirui fecit in orbe; castella eorum dirui fecit et que vinci non potueront, perpessa sunt populationem agrorum, hinc cedes in

---

(1) " Boll. Soc. dantesca ", fasc. del dic. 1911, p. 271.

(2) Altre testimonianze sulla fine di Guido veggansi allegate dal P. Golubovich, nella sua pregevolissima *Biblioteca Bio-bibliografica della Terra Santa*, Quaracchi, 1913, II, 486, nota 5.

Per mia comodità studiai la *Historia Romana*, oltre che nei saggi a stampa, nel manoscritto cartaceo 1287 (sec. XVI) della biblioteca Universitaria di Bologna. I passi che ne riferii furono da me riveduti nel cod. Vat. Ottob. lat. 2073, sec. XIV ex., mostratomi dalla cortesia di monsignor Marco Vattasso, al quale presento i miei ringraziamenti.

Urbe et prelia, Nepam et Columnam postea obsidione subacta duces belli in deditionem receperunt'. Questo brano ricomparisce nella *Historia Romana* del medesimo Ricobaldo, ma con varianti.

Anzitutto manca la testimonianza su Guido da Montefeltro, che entrò nell'ordine francescano, e la data 1297 viene riferita senz'altro alla lotta fra Bonifacio VIII e i Colonna. Nel seguito abbiamo le seguenti varianti:

Pomarium	*Hist. Rom.*
duos cardinalium	duos cardinales
quibus	Jacobum ac Petrum, quibus
pileos deponerent card. ins.	pil. ins. card. dep.
illius generis usque in quartam generationem	illius familie
propalatia quoque eorum diruit fecit in Urbe; castella eorum —	eorum palacia in Urbe sita dirui fecit, castella —

Il *Pomarium* chiude con *permessa sunt populationes agrorum*, mentre la *Historia* si accosta tosto al racconto del Villani c. 21 scrivendo: 'hinc cedes in Urbe et prelia, Nepam et Columnam postea in obsidione subactas duces belli in deditionem receperunt'.

Quindi la *Hist. Rom.* riprende il brano del *Pomarium*, ch'era stato soppresso intorno a Guido, e ne usufruisce per proseguire a dire della rovina dei Colonnesi, così:

'Erat eo tempore in Ordine beati Francisci Guido, qui comes olim de Montefeltro dux fuerat bellorum pro Gibillinis, hunc ad se vocavit papa Bonifacius, persuadet, orat ut dux belli sit contra cardinales adversos. Cum omnino talia abnueret constanter, tum ait: 'saltem me instruas quonam modo eos subigere valeam'; tum ille: 'multa promittite, pauca servate de promissis'. Porro papa mediatores invenit, afferit se illis pie parsurum, dummodo agant id quid deceat magnitudinem sui status, ad cardinales res refertur, ex hac re gaudio affluunt. Itaque sumpta veste pulla, miserabili vultu et habitu, supplices ad pedes eius prosternuntur, culpam suam fatentur, orant atque implorant veniam, castigati verbis admittuntur; venia datur, plura

promittuntur, spe plurima implentur; offertur deinde alimonia cotidiane decenter; tandem ad id quod conceperat, satagit. Nobilem et prepotentem virum Çanem de Çacano propinquum cardinalium captum in compedibus nexuit, tum aliquo clam repente ad cardinales mittente ad fugam accelerent, aufugiunt illi et per aliquos annos latitarunt apud eorum amicos ut omnino nesciretur utrum viverent, ceteri de familia Colunnensium dispersi sunt per regiones diversas '.

La parentela fra questo racconto e quello del Villani non si può negare, ma con alcune varianti. Presso Ricobaldo si nomina Giovanni Zacano; invece quello che riguarda il diffondersi degli esuli, nel Villani è più esteso. Questo accordo fra le due narrazioni dà rilievo alla forma del discorso di Guido, specie nella frase: *Ric.*: multa promittite, pauca servate de promissis. — *Vill.*: lunga promessa coll'attender corto.

Le scritte dei Colonna contro Bonifacio VIII furono pubblicate dal compianto H. Denifle, *Die Denkschriften der Colonna gegen Bonifaz VIII und die Kardinäle der Colonna*, nell' " Archiv für Litteratur- und Kirchengeschichte des Mittelalters ", annata 1889, p. 493.

Le scritture (p. 509) dei Colonna sono datate da Longhezza 10 maggio, Palestrina 16 maggio, 16 giugno dell'anno 1297, in esse essi parlano di Celestino V dichiarando illegittima la rinuncia, e quindi illegittimo papa Bonifacio VIII, che accusano di aver carcerato Celestino, che " detentum miserabiliter expirare coegit, licet a pluribus asseratur, non absque truculente iniquitatis studio, vita functum ". Asseriscono ancora che Bonifacio VIII agì contro di essi perchè essi vedendo " ritum antiquum et consuetudinem immutari et per ipsum omnino confringi ", resistettero almeno a parole; si appellano al futuro Concilio.

In documento senza data risposero gli altri cardinali compreso Giovanni [Boccacamati] Toscolani sostenendo la legittimità di Bonifacio, e ancora: " Nos igitur ipsos Jacobum et Petrum reputamus non tam scismaticos, quam insanos... ".

Questi documenti Giacomo e Pietro Colonna opponevano alla bolla di scomunica che contro di essi Bonifacio VIII aveva pubblicato il 10 maggio 1297 (Baronio, 1297, § 27-33 — Potthaft, 24513).

Ancora una questione. È proprio certo che il capitolo su Guido da Montefeltro sia stato scritto nel 1318? La prefazione in cui Ricobaldo dice d'essere in età di 73 anni accenna appunto a quell'anno. Gli ultimi capitoli riferiti nel testo del codice di Poppi riguardano appunto quell'epoca, giacchè il fatto d'armi nel sobborgo di S. Pietro a Vicenza (1) avvenne il 22 maggio 1317 (2). Nel Codice Ottoboniano lat. 2073 la narrazione fissa molto più presto al 1306.

Ma i capi finali della *Historia*, nei diversi codici possono essere stati fatti e finiti in più volte. È curioso che nel codice Ottoboniano la prefazione sia non quella che conviene al testo della *Historia Romana*, ma quella che si riferisce al *Pomarium*. Quando il Masseira, che della sua preparazione diede prova così bella, avrà finite le sue indagini su Ricobaldo, potremo dir qualche cosa. Qui possiamo dire questo solo, che nel passo riflettente Guido, la frase " multa promittite, pauca servate de promissis „ sembra scritta, almeno rivista, da chi lesse il c. XXVII dell'*Inferno*.

Non voglio entrare nelle questioni che E. Gorra e tanti altri vanno facendo sull'epoca della pubblicazione degli ultimi canti dell'*Inferno*.

III.

Francesco Pipino.

Di Francesco Pipino, domenicano, si occupò L. Manzoni (3), raccogliendone molte notizie biografiche. Probabilmente nacque avanti al 1247 e morì verso il 1325. Segnalò e descrisse il bellissimo codice della Estense CCCCLXV (VI, II. 9). Quanto all'epoca del manoscritto, io non lo ho ancor veduto direttamente, ma per mezzo altrui. L'altra volta in cui ebbi occasione di parlare del-

(1) Holder Egger, " N. Archiv „, XXXVI, 462-3.

(2) Spangenberg, *Cangrande della Scala*, Berlin, 1892, I, p. 126.

(3) *Fra Francesco Pipino da Bologna dei Padri Predicatori, geografo, storico e viaggiatore*, " Mem. Deput. storia patria d. prov. d. Romagna „, 1896, 3ª ser., 257 sgg.

l'aneddoto di Guido da Montefeltro, mi giovai della cortesia del prof. Giulio Bertoni; adesso mi procurai il parere del Prof. Luigi Simeoni, il quale cortesissimamente mi fece una minuta descrizione paleografica del manoscritto. È icomposto in quel gotico quadrato della cui età è difficile giudicare, perchè dura nell'uso per lunghissimo tempo. Comincia nel sec. XIV e continua addentro nel sec. XV " Tuttavia — mi scrive il Simeoni — non mancano elementi, che accennano a epoca più tarda: il carattere è angoloso e spinoso, e mi pare che questa qualità si trovi sopratutto nei grossi codici giuridici della prima metà del sec. XV. Ma l'elemento che più fa pensare al XV è l'uso assoluto dei numeri arabici, con i quali è formata la tavola fino al 208 per certi libri. Si potrà obbiettare che la tavola è d'altra mano (e questo è vero) e quindi posteriore, ma si può rispondere che una mano che usa numeri arabici, con la stessa forma, ha postillato il codice in rosso fin dal principio, mettendo in margine le rubriche. Questa mano deve essere di poco posteriore alla copiatura del codice, perchè mentre nelle prime due pagine abbiamo segnati dalla prima mano del copista i numeri dei capitoli in romano e in rosso, poi questa segnatura viene omessa e continua solo l'altra, che è rossa fino al f. 22 e poi vien fatta in nero. Coeva e forse dell'istessa mano è la segnatura, che vien fatta in altra pagina... Devo però osservare che queste cifre arabiche hanno una forma assai antiquata, che a me par di aver visto piuttosto negli ultimi anni del XIV o al più all'inizio del XV... Concludendo io non saprei dare un giudizio reciso..., ma come impressione personale crederei che il codice fosse degli ultimi anni del XIV con le note marginali, mentre la tavola la porrei un po' più tardi: ma si deve essere lì a cavallo dei due secoli, per cui è difficile decidere nettamente „.

Quattro volte Pipino ripete l'aneddoto dei Colonna e di Guido da Montefeltro e in diversa maniera, in due casi Guido è collegato coi Colonna, e in due casi ne è staccato.

Nel primo caso si parla solo dei Colonna. Fol. 183 (= Murat. IX, 737), cap. 8: " duos cardinales romanos Jacobum et Petrum de Columpna decappellavit ac deposuit, privans eos omni cardinalatus titulo, commodo et honore... Hos tamen successor eius Benedictus XI reconciliavit ad Ecclesiae unitatem... Durissime illos prosequntus fuit Bonifacius ipse et sine ulla mi-

sericordia eos exulare coegit dum vixit, fuitque tamen (tantum?) severa persequutio, ut vix reperirent latibulum, quo effugerent manus eius, castra eorum et edes diripuit, nonnulla tradidit Ursinis, ut eos faceret hostes et multa alia gravamina irrogavit. Venientes ad eius misericordiam supplices, nigris vestibus, nudo scilicet capite et pedibus, et cingulum ad collum ferentes, ac de se ostentationem populo facientes, spretis lachrymosis eorum confessionibus atque precibus, velut aspis surda, non est misertus eorum, ut et ipse postmodum, non dormitantibus Columnensibus, immisericordem et miserabilem habuit finem, ut infra dicetur „.

Qui per lo svolgimento della narrazione non è necessario l'episodio di Guido, anzi al contrario: qui c'è l'accusa, non di inganno, ma di durezza d'animo.

Le prime frasi ' decapellavit et deposuit ' dipendono dal brano sulla *magna seditio*, che sta nel *Pomarium* e nella *Hist. Romana* di Ricobaldo.

Nel secondo caso, abbiamo unicamente l'aneddoto di Guido, e dei Colonna appena quel rapido cenno che è necessario per intendere ciò che riguarda il conte Guido. Fol. 184 (= Mur. IX, 741 *c*).

Cap. 16. Hic est qui Guidonem de Monte Feltro strenuum ducem bellorum, quum abdicatis seculi pompis Ordinem Minorum fuisset ingressus solicitavit, ut deposito habitu dux belli esset contra Columnenses et sollicitus fuit ei plurima, allegans ei quod multum meretur obedientia sui, maxime [quia] contra hereticos ageret. Qui cum constantissime recusaret, id se facturum, dicens se mundo renunciasse et iam esse grandevum, papa respondit: ' doce me saltem hostes illos subigere, qui talium es peritus '. Tunc ille ait: ' plurima eis pollicemini: pauca observate ' quid et fecit.

Evidentemente il tratto ha stretta relazione col racconto della *Hist. Rom.* di Ricobaldo, nella sua prima parte, omesso tutto quanto riguarda la guerra dei Colonna.

Il terzo racconto ha in apparenza, oltre al ricordo di Guido, anche i fatti dei Colonna, ma è chiaro che le poche parole riguardanti questi ultimi sono un'aggiunta, un semplice richiamo.

Fol. 184 (Murat. 743 *e*).

Cap. 21. Qualiter Guido comes de Monte Feltro se seculo abdicavit.

Guido comes de Monte Feltro anno Domini MCCXCVI strenuus dux bellorum olim adversus Bononienses Forliviensis conductor belli et post Pisanorum clades rerum reparator eorum, depositis honoribus seculi Ordinem beati Francisci ingressus est, in quo terminem vite dedit. Hunc cum instantia solicitavit papa Bonifacius ut deposito habitu, dux belli esset contra Columpnenses romanos, ut, dictum est in gestis eiusdem pape „. Omettendo queste ultime parole, resta il brano su Guido che è tolto dal *Pomarium*, ma con questa variante, che dove il *Pomarium* dice che Guido " hodie militat in castris Francisci „ qui si sostituisce la notizia della sua morte.

Il quarto racconto consta di due parti. La prima dipende dalla *Hist. Romana* nel paragrafo ' anno MCCXCVIJ magna Rome seditio — populationem agrorum sunt passa '. Dove è aggiunto l'aneddoto di Guido ' Erat eo tempore ', qui invece si fa parola di fatti anteriori sulla origine della lotta fra Benedetto Caetani, poi Bonifacio VIII, e i Colonna e si accenna alla abdicazione di Celestino V, ma senza porre in dubbio la legittimità di Bonifacio VIII.

La conclusione alla quale tutti questi passi conducono è questa, che sugli avvenimenti in discorso correvano vari racconti.

1) Guido si fa frate. Fonti. Il *Pomarium* di Ricobaldo — *Pipino*. Nessuna relazione col racconto sulla guerra dei Colonna.

2) Fatti dei Colonna, e la loro *magna seditio*. Fonti. Nel *Pomarium* c'è il brano, fino a *perpessa sunt populationes agrorum*, che si ripete nella *Hist. Rom.* Ci sono corrispondenze con Villani c. 21 e c. 23.

3) Al passo ora citato, altro ne segue nella *Hist. Romana*, ed è quello che espone il colloquio del papa con Guido, il quale è rappresentato da questa cronaca, e da un passo di Pipino.

Sono dunque tre diversi racconti di origine fra loro differenti. Si tratta, in altra parola, di una folla di voci, che andavano crescendo dal poco al molto, e si sviluppavano sotto l'impressione e seguendo la direzione di quei filoni, che provenivano dai Celestini.

Ma sottoponendo a nuova riflessione il colloquio nella *Historia Romana*, esso appare messo insieme da due fonti, e questi — secondo il consueto — mal d'accordo fra loro. Il colloquio può spezzarsi così.

Guido da Montefeltro era *dux bellorum*, e quindi Bonifacio VIII gli offerse di essere *dux belli* contro i Colonna, e di riprendere le armi, presso a poco come avea fatto *Waltarius* nel *Chronicon Novaliciense*.

Egli si trovava dunque in quella condizione in cui stava quando *depositis honoribus seculi* entrò nell'Ordine francescano, secondo che c'insegna il *Pomarium*.

E appunto in armonia a ciò egli vuol *abnuere* l'offerta.

Pipino ha qualche cosa di più e qualche cosa di meno in confronto di Ricobaldo. Caratteristiche in Pipino sono le parole ' maxime [quia] contra hereticos ageret '. E anche più caratteristiche sono le altre: ' cum costantissime recusaret id se facturum, dicens se mundo renunciasse et iam esse grandevum '. Tutto ciò sta benissimo per un fatto d'armi.

Poi di colpo la scena si cambia, e Guido non dà un suggerimento di carattere militare, ma un consiglio di furberia, che a lui non era stato chiesto. Come è facile rilevare, tale colloquio, che è in contraddizione coi precedenti, non si sarebbe potuto neppur conoscere: nè Bonifacio VIII nè Guido ne avrebbero parlato. È uno di quei passi che un galantuomo non fa, e un birbante per lo meno non riferisce. È proprio il caso del sogno dell'Innominato, che il Manzoni descrive con tanta verità; leggendo quelle mirabili pagine, bisogna pur dire: ma chi narrò quel sogno al Manzoni o al famoso anonimo secentista?

Che Ricobaldo e Pipino per quanto riguarda il colloquio abbiano una qualche relazione fra loro è chiaro, ma che Pipino dipenda da Ricobaldo non mi pare finora dimostrato.

Uomo d'armi, di lui disse Salimbene che " peritiam habuit artis pugne '. Egli era ' homo nobilis et sensatus et discretus et morigeratus, liberalis et umilis et largus, strenuus miles et probus in armis et doctus ad bellum ' (1). La lettera ghibellina

(1) Ed. Holder Egger nei *Mon. Germ. Hist.*, Scriptores, XXXII, p. 527. L'editore confronta con Guglielmo Ventura (*Mon. Hist. Patriae*, SS. III, 731 : ' sapientissimus fuit, fortis, largos et cordialissimus '.

di Cristoforo priore a Siena, del 21 giugno (1280), dice che forse Guido ed i suoi seguaci " cotidie suos nuntios habent in Curia, ut statum partis nostre suis fallaciis suisque blandimentis salvare ' (KERN, *Acta imperii Angliae et Franciae* [1263-1313], Tubinga 1911, p. 8, n. 14); ma mi pare troppo ardita ipotesi il vedervi un riscontro con Dante, che rappresenta Guido diverso dal tipo tradizionale. Questo era un uomo d'armi, l'altro non era un leone, ma una volpe, che avea pienamente conosciuti " gli accorgimenti e le coperte vie ".

Risulta adunque che il racconto sulla guerra dei Colonna si fondeva con quello del colloquio di Guido: la credibilità delle varie dicerie che correvano sull'una si intralciavano con quelle che giravano sull'altro. E tutto ciò si andava dicendo entro un medesimo circolo di persone e di aspirazioni. Ricobaldo e Pipino, che dapprima aveano ignorato il racconto, l'accolgono più tardi, senza amalgamarlo col racconto precedentemente raccolto. Dante e Villani si aggirano fra i medesimi confini. C'è peraltro una questione riflettente il Villani, presso del quale se quanto riguarda i Colonna è accolto da tutti i codici, quello che si riferisce al colloquio soltanto da alcuni codici è ricevuto.

Presso Ricobaldo le parole messe in bocca a Guido non sono un po' vaghe come presso Pipino; non determinate così, da doverle dire la tradizione del verso di Dante. Vi corrispondono, così come quelle che di Cangrande scrisse Rinaldo da Villafranca, traducendo il verso 78 del c. XVII del *Paradiso*, nell'epitafio inciso appunto sul monumento di Cangrande.

Di un colloquio intervenuto tra Bonifacio VIII e Guido possiamo avere una certa probabilità anche solo seguendo i racconti di Ricobaldo e di Pipino. Ed in fondo è il punto principale che risulta anche dalla cronaca di frate Elemosina, di questa cronaca nulla voglio dir qui, toccandone nel commento a Ferreto.

Conchiudo ritornando ancora a Dante. Osservammo che in Ricobaldo e in Pipino si hanno diverse sovrapposizioni nei racconti esaminati. Lo stesso possiamo avvertire in Dante, il quale conosce nel *Convivio* (IV, c. 28) soltanto la narrazione dell'ingresso di Guido nell'Ordine francescano: " certo il cavaliere Lancilotto non volle entrare colle vele alte, nè il nobilissimo nostro latino Guido Montefeltrano. Bene questi nobili calaron

le vele delle mondane operazioni, chè nella lunga età a religione si rendero, ogni mondano diletto e opera diponendo „. Scrivendo il c. XXVII dell'*Inferno* Dante si ricorda di quanto avea detto nel *Convivio*, e lo richiama apertamente col verso 81 " calar le vele e raccoglier le sarte „, ma muta il colorito trattando la sua prima narrazione come avean fatto i cronisti rispetto alle proprie scritture. Si può dunque seguire racconto per racconto, come avvenne di ciascuno di essi come si formò e si diffuse.

Leggendo nella *Hist. Rom.* di Ricobaldo la frase " multa promittite, pauca servate de promissis „ restiamo meravigliati della sua identità col v. 110 " Lunga promessa con l'attender corto „, mentre pare provato che il passo di Ricobaldo sia stato scritto nel 1318 al più tardi.

Ma non vedo assolutamente esclusa la possibilità che Ricobaldo sia tornato sopra se stesso, e, fosse pure lavorando intorno ad un risarcimento anteriore, siasi accostato a Dante quando ebbe fra mano l'*Inferno*. Ritocco più, ritocco meno, nella condizione attuale degli studi non è facile tagliar corto in queste delicate questioni testuali; nè so se la data del 1318 si deva assumere come le colonne d'Ercole in tutto e per tutto (1).

---

(1) I capitoli che costituiscono la fine della *Historia* edita da Holder Egger, si susseguono in questo ordine cronologico: 1312, 1313, 1313-14, 1314, 1314-1316, 1314, 1314, 1315, 1316, 1314, 1317, 1317, 1315-7, 1318, il che vuol dire che non furono iscritti di volta in volta che accadevano i fatti. — Il Masera, " Arch. Murat. „, n. 10 (1911), promise di ritornare sulla cronologia della vita di Ricobaldo.

L'Accademico Segretario
R. Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Aprile 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, e Segre Segretario.

Vien letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente ricorda il lutto che ha colpito il Socio Grassi, colla perdita del figlio Ing. Marco. La Classe unanime delibera d'inviare all'amato Collega le proprie vivissime condoglianze.

Si dà comunicazione del R. Decreto 12 marzo 1914 con cui è approvata la elezione del Socio D'Ovidio a Direttore della Classe per un triennio, a decorrere dal 9 febbraio 1914.

Il Socio corrispondente E. von Meyer ha inviato in omaggio una sua *Geschichte der Chemie von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart.* Il Socio Guareschi rileva i notevoli pregi di questa opera.

Il Socio Segre, a nome del Prof. G. Boccardi, presenta in omaggio gli *Annuari Astronomici* pel 1914 e 1915 del R. Osservatorio di Pino Torinese, ed altre pubblicazioni astronomiche dello stesso Istituto, dovute al Prof. Boccardi e ai D^ri^ Chelli, Favaro e Roggero.

Viene inoltre rilevato, fra i doni giunti all'Accademia, l'opuscolo del Prof. G. Cossavella: *L'astronomo Giovanni Schiaparelli.*

Il Socio Guidi offre in omaggio alcune sue pagine *Sul calcolo della lastra rettangolare* e *Prove di resistenza sulla ghisa.*

Il Presidente legge una Commemorazione del Socio corrispondente Alberto Günther, morto a Londra il 1° febbraio scorso, e appartenente alla nostra Accademia dal 3 dicembre 1893. Sarà stampata negli *Atti.*

Pure per gli *Atti* sono presentate le seguenti Note:

I. Guareschi, *Nuove ricerche sui bromuri metallici*, Nota VIII;

R. Torelli, *Un criterio di equivalenza per le curve di una superficie algebrica*, dal Socio Segre.

C. Foà, *Nuove ricerche sulla funzione della ghiandola pineale*, dal Socio Fusari;

Il Socio Mattirolo, anche in nome del collega Parona, legge le Relazioni sulle due Memorie, dei Dottori Mussa e Gola, presentate nell'ultima adunanza. Con due votazioni unanimi la Classe accoglie le conclusioni di quelle Relazioni, favorevoli alla stampa delle Memorie.

Infine il Socio Foà presenta, per i volumi accademici, uno scritto del Dott. M. Sapegno, *Contributo all'istologia normale e patologica del fegato.* Si dà incarico di riferire su di esso ai Soci Foà e Fusari.

LETTURE

ALBERTO GÜNTHER

Commemorazione del Socio LORENZO CAMERANO.

Il dottore Alberto Günther, socio corrispondente della nostra Accademia, moriva a Londra, nel suo ottantaquattresimo anno di età, il 1° febbraio di quest'anno. Egli appartiene alla più eletta schiera dei zoologi che nella seconda metà del secolo scorso diedero la parte precipua della loro attività allo studio della sistematica degli animali. L'opera compiuta da questi zoologi fu di grande importanza per la scienza.

Dopo la riforma Linneana e dopo il susseguente grande impulso dato dal Cuvier, lo studio degli animali procedette, nella prima metà del passato secolo, con attività febbrile in tutte le nazioni incivilite. Le numerose esplorazioni delle terre lontane portavano senza tregua ai Musei d'Europa ingenti collezioni di animali non ancora conosciuti e in breve volger d'anni cresceva in modo meraviglioso il numero delle specie descritte e catalogate.

Le divisioni tassonomiche, stabilite da Linneo nel suo *Systema naturae*, o in quelli posteriori del Cuvier e degli altri classificatori, divenivano insufficienti per accogliere tanta copia di nuove forme che continuamente e con grande rapidità si andavano aggiungendo alle già conosciute. Fervevano intanto in ogni parte le ricerche intorno alla struttura degli animali e si andavano iniziando le ricerche embriologiche, fisiologiche ed istologiche, che in breve tempo si affermavano con metodi rigorosi, e rendevano sempre più indispensabile la precisa identificazione delle specie animali. Questa, per le ragioni sopradette,

diveniva assai difficile e talora quasi impossibile, col pericolo grave di far ricadere lo studio degli animali nella confusione caratteristica del periodo prelinneano.

Nella prima metà del secolo scorso, si iniziò in Francia col sussidio delle collezioni del Museo di Parigi, allora il più ricco, un lavoro intenso ed esteso di revisione dei varî gruppi di animali colla pubblicazione di cataloghi sistematici e descrittivi. A questo lavoro prese parte, in breve, anche il Museo Britannico nel quale rapidamente si andavano riunendo ingenti collezioni di animali di tutte le regioni terrestri.

Nel 1843 il Museo Britannico incominciò la serie dei suoi importanti Cataloghi, elementi anche oggi indispensabili per lo studio sistematico degli animali, colla " List of Mammalia di John Edward Gray ", nella quale sono le descrizioni dei generi e delle specie di mammiferi allora conosciute.

Seguirono rapidamente i cataloghi dei Chelonii, dei Sauri, degli Ofidi, degli Anfibi urodeli e si iniziarono quello degli Uccelli per opera di G. Robert Gray e per opera di Edward Gray quello dei Pesci, fra i Vertebrati. Quasi contemporaneamente, lo stesso Edward Gray, il Daubleday, il Walker, lo Stephens, lo Smith, Thomas Desvignes, il Dallas, il Walton, il Boheman, il Newport, il Baird, il Pfeiffer, il Deshages, il Busk pubblicavano i cataloghi descrittivi di molti gruppi di Insetti, Molluschi, Raggiati, ecc.

Alberto Günther prese parte a questo grande lavoro del Museo Britannico colla pubblicazione, fatta nel 1858, del " Catalogue of the Batrachia Salientia " col " Catalogue of the Fishes in the collection of the British Museum ", in otto volumi dal 1859 al 1870; col " Catalogue of Colubrinae Snakes " e col lavoro intitolato: " Gigantic Land Tortoise (living and extinct) in the Collection of the British Museum ", nel 1877.

A dare un'idea dell'importanza di tali lavori, saranno utili alcuni dati numerici.

Nel 1802, lo Shaw elencava 51 specie di Batraci anuri, nel 1838 lo Tschudi 110. — Duméril e Bibron nella loro classica opera " Erpétologie générale ou Histoire naturelle complète des Reptiles ", nel 1854, ne descrivevano 164. Il Günther nel suo catalogo descrittivo del 1858 illustrava 280 specie, con diagnosi dei varî gruppi tassonomici, con opportune tavole

dicotome dei caratteri e con bellissime figure delle forme più importanti, magistralmente disegnate dal Ford.

Nel catalogo dei serpenti colubriniformi il Günther studiò 3100 esemplari, chè a tanto ammontava allora la collezione del Museo Britannico.

Il catalogo dei Pesci del Günther è lavoro di lunga lena, che occupò l'Autore dal 1859 al 1870. Negli otto grossi volumi di cui è costituito, il Günther studiò ben 6843 specie col sussidio dei 29275 esemplari della collezione del Museo Britannico. Indubbiamente il Catalogo del Günther è, come lavoro generale intorno alla sistematica dei Pesci, il più importante che la scienza abbia dopo l' " Histoire naturelle des Poissons ", di Cuvier e Valenciennes, che, incominciata nel 1828, venne ultimata nel 1849.

Alberto Günther iniziò le sue pubblicazioni nel 1853 con un lavoro di elmintologia " Ueber den Puppenzustand eines Distoma " (Würtemberg, Jahresheft IX); ma nello stesso anno passò allo studio dei pesci col lavoro dei pesci del Neckars (idem) e proseguì col pubblicare nel 1855 un lavoro intitolato " Beiträge zur Kenntniss unserer Süsswasserfische " nell'Archivio di Wiegmann (XXI). Queste pubblicazioni e quella del 1858 che ha per titolo: " On the systematic arrangement of the tailles Batrachians and the structure of Rhinophrynus dorsalis " (Proc. Zool. Soc., Londra, XXVI), sono le prime di una lunga serie di lavori, parecchie centinaia, intorno ai Pesci, ai Rettili e agli Anfibi, che il Günther pubblicò durante tutta la sua vita laboriosissima, portando con esse un cospicuo contributo alla conoscenza dei sopradetti gruppi di vertebrati, non solo dal punto di vista della loro descrizione, ma eziandio per ciò che riguarda la loro struttura e la loro corologia.

Non devono essere dimenticate, per il loro speciale interesse, le sue ricerche intorno alla *Hatteria* (Phil. Trans. CLVII, 1867) e intorno al *Ceratodus* dell'Australia (idem, CLXI, 1871): le descrizioni di nuove specie di Serpenti delle collezioni del Museo Britannico del 1872 (Ann. Mag. N. H., IX): il suo lavoro: " Die Fische der Sudsee " (Mus. Godeffroy, Amburgo, 1909, con 20 tavole), l'importante studio illustrativo delle raccolte del Challenger " The zoology of the voyage of H. M. S. Challenger. Report on the Shore Fishes e Report on the deep-Sea Fishes.

Report on the Pelagic Fishes „ (1880 con 32 tavole, 1887 con 73 tavole e 1889 con 6 tavole): le sue numerose contribuzioni alla conoscenza della fauna erpetologica di Madagascar (Ann. Mag. N. H.): le sue pubblicazioni sui Rettili, Batraci e Pesci raccolti da Potanin e Berezowski in Cina, e da Miss Kingsley nell'Ogowe e nel Calabar, dal Donaldson Smith nella spedizione al Lago Rodolfo, da Walker nella Costa d'Oro; i Rettili e gli Anfibi della " Biologia Centrale Americana „, di Godman e Salvin, grosso volume di 326 pag. con 76 tav. (1885-1902), ecc.

Speciale menzione si deve fare del trattato di Ittiologia che il Günther intitolò: " An Introduction to the Study of Fishes „ (Edimburgo, 1880, volume di 720 pagine), opera di grande utilità, che ebbe meritato successo e venne anche tradotta in tedesco dal Hayek nel 1886.

Con una ventina di pubblicazioni il Günther illustrò pure numerose specie di mammiferi di Madagascar, dell'Asia Centrale, di Borneo, del Giappone, delle Filippine, ecc. e in qualche nota si occupò di argomenti ornitologici.

Il dottore Alberto Günther passò al servizio del Museo Britannico nel 1857; in seguito, fu nominato aiuto capo del dipartimento zoologico e nel 1875 capo del dipartimento stesso. Sotto la sua direzione, dice R. Bowdler Sharpe (1), " a new era in the administration was about to commence „. Il Günther si adoprò con grande energia perchè la grande opera dei cataloghi del Museo venisse proseguita a colmare le lacune che ancora esistevano per vari gruppi di animali e venissero rifatti quei cataloghi che per il continuo accrescersi delle collezioni del Museo e per il numero delle specie nuove che venivano ad essere conosciute, apparivano al tutto insufficienti.

Il primo volume del catalogo degli Uccelli, redatto da R. B. Sharpe, era stato pubblicato sotto la direzione di J. E. Gray. Nel 1875, sotto la direzione del Günther, uscì il secondo volume, pure dello Sharpe. Quando nel 1895, il Günther, giunto all'età di 65 anni, si ritirò dalla direzione, i 27 volumi del catalogo erano compiuti. Egli aveva saputo assicurarsi la coope-

(1) *The History of the Collections contained in the Natural History departments of the British Museum. Birds*, 1906, pag. 85.

razione dei più celebrati ornitologi di tutte le nazioni, lo Sharpe, il Gadow, lo Sclater, l'Hartert, Ogilvie Grant, E. Hargitt, G. E. Shelley, Osbert Salvin e il nostro collega Conte Tommaso Salvadori, al quale si devono tre volumi del catalogo stesso (1).

Il catalogo degli Uccelli, dice il Flower, il quale succedette al Günther nella direzione del dipartimento zoologico del Museo Britannico (2), " is based, not only upon the immense collection of birds in the Museum (3), but also upon all other available material contained in public or private collections, or described in zoological literature. It therefore professes to be a complete list of every bird known at the time of the publication of the volume treating of the group to which it belongs. Under the heading of each species is 1° a copious synonymy: references being given to every mention of it which occurs in standard books or journals. This has been a work of prodigious labour, but it is hoped that, being fairly exhaustive, it has been done once for all, as far as existing literature is concerned. 2° A full description of the external characters of both sexes, and,

---

(1) I collaboratori del *Catalogo degli Uccelli* vennero ricordati dallo Sclater (" Bull. of the British Ornithologists-Club ", vol. IX) nei versi seguenti:

" De Catalogi Avium Magni Scriptoribus undecim "
Sharpius incepit scripsitque volumina multa;
Seebohmus sequitur, promptus ad auxilium.
Teutonicus, zelo plenus, venit inde Gadovus,
Salvinusque bonam praebet amicus opem.
Jam Sclaterus adest, tria longa volumina complens
Americanarum notus amans avium.
Expers Hargittus nunc Picos ordinat omnes,
Hartetusque sagax Cypselidas numerat,
Multum etiam pensae Shelleyi profuit ardor
Multum Saundersi mens operosa dedit.
Clarus ab Italia jam Salvadorius adstat,
Et tandem Grantus fine coronat opus.

(2) *Catalogue of Birds*, vol. XXVI (1898), pag. VI.

(3) La collezione del Museo Britannico che servì per la formazione del catalogo constava di 400.000 pelli e di 100.000 uova.

as far as possible, all stages of plumage. 3° A general account of the habitat of the species. 4° A list of every individual specimen in the Museum collection, with a statement as to the source from whence it was obtained and its original locality, ecc. „.

Mentre il Günther dava le sue cure alla pubblicazione del catalogo degli Uccelli, provvedeva pure alla pubblicazione dei cataloghi di numerosi altri gruppi di animali. Ricorderò fra tutti quelli degli Anfibi e dei Rettili redatti da G. A. Boulenger; di essi dal 1882 al 1894 uscivano otto volumi. L'ultimo venne pubblicato nel 1896, sotto la successiva direzione del Flower. A dare una idea dell'importanza di questa opera basterà ricordare che in essa sono descritte 5170 specie, in gran parte col sussidio dei 38086 esemplari delle collezioni del Museo Britannico.

Se la serie dei cataloghi del Museo Britannico è oggi un'opera grandiosa e fondamentale per lo studio sistematico degli animali, in special modo dei vertebrati, lo si deve in gran parte all'azione esercitata dal Günther sia direttamente coi lavori da lui stesso eseguiti, e colla sua direzione amministrativa, sia coll'aver saputo assicurare ad essa la cooperazione dei più insigni cultori della sistematica.

" Gli organi della scienza futura saranno gli indici „, ha detto Gladstone. Di ciò era così intimamente persuaso il Günther che rivolse una parte notevole della sua attività a provvedere ad un altro bisogno impellente degli studi scientifici in genere e in particolar modo degli studi intorno agli animali.

Mentre, nella prima metà del secolo scorso, il numero delle specie conosciute di animali andava crescendo con rapidità grandissima, si facevano pure ogni giorno più numerose le pubblicazioni relative, poichè gli studiosi degli animali lavoravano attivamente in tutte le nazioni incivilite. D'altra parte, l'applicazione rigorosa delle leggi linneane, condizione essenziale al progresso della scienza, rendeva indispensabile ai lavoratori di conoscere tutto ciò che si veniva pubblicando intorno alle specie degli animali, considerate da tutti i punti di vista. Era necessario e urgente redigere elenchi bibliografici completi di tutte le pubblicazioni relative agli animali state fatte nel tempo passato ed era pure necessario che speciali pubblicazioni

bibliografiche dessero rapidamente e in modo completo notizie ai ricercatori dei lavori a mano a mano che essi si venivano pubblicando.

Nel 1846, l'Engelmann pubblicava la diligentissima sua " Bibliotheca Historico-naturalis ", riguardante il periodo di tempo che va dal 1700 al 1846. Carus ed Engelmann in due grossi volumi la continuavano dal 1846 al 1861. H. A. Hagen pubblicava nel 1862 la sua " Bibliotheca entomologica ", lavoro diligentissimo: varie pubblicazioni periodiche davano conto dei lavori più importanti che uscivano per le stampe nei varî rami della zoologia; ma il crescere si può dire vertiginoso del numero delle pubblicazioni rendeva tutto ciò insufficiente. Spetta al Günther l'iniziativa della pubblicazione del " Record of zoological literature ", il quale in volumi annuali comprendeva l'enumerazione sistematica di tutti i lavori riguardanti gli animali pubblicati in ciascun anno, con esatte indicazioni bibliografiche, colla precisa enumerazione delle specie, generi, famiglie descritte, ecc. La relazione della bibliografia riguardante i varî gruppi di animali era affidata agli specialisti più competenti nello studio dei gruppi stessi.

Il primo volume uscì nel 1864, sotto la direzione del Günther, il quale vi redigette i capitoli riguardanti i Mammiferi, i Batraci, i Rettili ed i Pesci. Dal 1864 ad oggi la pubblicazione non subì alcuna interruzione e i suoi 50 volumi sono la più preziosa miniera di indicazioni bibliografiche che possegga lo studio degli animali. Il Günther ne tenne la direzione fino al 1870 in cui subentrò il Newton: ma dal 1864 al 1873 ogni anno vi stampò la bibliografia dei Mammiferi, dei Rettili, dei Batraci e dei Pesci.

Con questa iniziativa e coll'opera personale Alberto Günther si è acquistato la riconoscenza imperitura di tutti gli zoologi.

Alberto Günther nacque a Esslingen, nel Würtemberg, il 3 ottobre 1830. La sua famiglia, che lo destinava alla Chiesa Luterana, lo inviò al collegio teologico di Tubinga. Il giovane non aveva nessuna vocazione per gli studi teologici; egli si sentiva attratto invece dalla medicina e dalle scienze naturali. Gli insegnamenti di Giovanni Müller gli segnarono la via. Dopo aver studiato a Berlino e a Bonn, divenne dottore in Medicina e in Filosofia.

Per qualche tempo si occupò di medicina e pubblicò un manuale di zoologia medica e, come sopra ho accennato, anche qualche ricerca sopra un Distoma; ma la zoologia lo traeva a sè, e, ben presto, iniziò le sue ricerche sui pesci. Nel 1856, visitò Londra dove per poco tempo frequentò l'Ospedale di S. Bartolomeo.

Una visita, che poco dopo fece a Riccardo Owen, capo del Museo Britannico, lo spinse a lasciare la medicina per dedicarsi intieramente agli studi zoologici. Riccardo Owen, che aveva giudicato molto favorevolmente le qualità e le attitudini del giovane naturalista, lo accolse fra gli addetti al Museo Britannico e gli assegnò la sezione dei Pesci, dei Rettili e degli Anfibi, nel 1857.

La grande attività che subito dimostrò il Günther, il suo ingegno, la sua speciale capacità amministrativa gli valsero nel 1875 la nomina a capo del dipartimento zoologico, carica che tenne fino al 1895, nel quale anno egli si ritirò a vita privata nelle vicinanze del giardino di Kew, dove, pur continuando nelle ricerche di zoologia sistematica, diede una parte notevole della sua attività alla avicoltura. In questo campo della zoologia applicata ottenne, coll'allevamento di specie difficili, larghi e meritati successi, che espose in numerosi scritti nell'" Avicultural Magazine ". La società di Avicultura gli decretò una speciale medaglia d'onore.

Il Museo Britannico deve a lui il trasporto delle collezioni zoologiche dalla primitiva sede all'attuale bellissima e il loro ordinamento, la formazione di una biblioteca zoologica completissima, aiuto di incomparabile utilità per lo studio delle collezioni; alla sua personale influenza presso numerose e facoltose persone d'Inghilterra e delle sue colonie i doni di ricchissime serie di animali che accrebbero l'importanza delle collezioni del Museo; e gli deve pure una oculata e saggia amministrazione.

Le sue speciali qualità di amministratore il Günther esplicò in altre mansioni.

Per trent'anni, fu l'editore e il direttore degli " Annals of Natural History ", membro del Consiglio direttivo della " Zoological Society " dal 1868 al 1905 e suo vice-presidente dal 1874 al 1905.

Membro della Società Reale di Londra dal 1867, ne fu vice-presidente nel 1875-76 e la Società stessa gli conferì la medaglia Reale d'oro di benemerenza. Fu presidente della sezione Biologica dell'Associazione Britannica per le Scienze nel 1880, e Presidente della Società Linneana dal 1898 al 1901.

Molte Accademie e Società scientifiche, Europee ed Americane inscrissero il Günther fra i loro soci. La nostra Accademia lo nominò socio corrispondente il 3 dicembre 1893.

Alberto Günther fu uno dei più attivi ed efficaci ricercatori nel campo della zoologia sistematica e tutti gli zoologi gli devono ammirazione e riconoscenza per l'opera compiuta, illuminata e feconda di pratici risultamenti.

La Nazione Inglese non dimenticherà che fu Alberto Günther che, in breve volger d'anni, seppe portare la sezione zoologica del Museo Britannico ad essere la prima fra i Musei zoologici, facendola strumento potente per il progresso della scienza.

Nuove ricerche sui bromuri metallici.

Nota VIII del Socio I. GUARESCHI.

Nelle mie due Note IV e V: *Ricerche sui bromuri* (1) io ho esposto gli studi che ho fatto sui bromuri della forma MeBr e $MeBr^2$ e particolarmente quelli di calcio, di bario, di stronzio e di cobalto, ed ho fatto vedere in qual maniera si comportano per l'azione del calore e del jodo, ed in quali condizioni si elimina l'acqua di cristallizzazione di questi sali. Ho continuato queste ricerche su molti altri bromuri ed ora espongo una parte dei risultati. Dei bromuri della forma $MeBr^2$ ho esaminato i seguenti:

Bromuro di manganese . . .	$MnBr^2.4H^2O$.
" di glucinio	$GlBr^2$.
" di magnesio	$MgBr^2.6H^2O$.
" di cadmio	$CdBr^2.4H^2O$.
" di nickel	$NiBr^2$.
" di mercurio	$HgBr^2$.

I.

Bromuro di manganese $MnBr^2.4H^2O$.

Il bromuro di manganese *anidro* $MnBr^2$ per riscaldamento si decompone e sviluppa del bromo. Il sale in cristalli è in

(1) " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1913, vol. 48, p. 735 e p. 929.

tavole monocline o prismi $MnBr^2.4H^2O$ di color rosa isomorfi col cloruro manganoso (Marignac). Questi cristalli scaldati perdono acqua e vapori acidi; il sale anidro è quasi bianco, e scaldato a temperatura più alta fonde di nuovo e si decompone sviluppando molto bromo. Precisamente come aveva descritto Berthemot.

Bromuro $MnBr.4H^2O$. Secondo Kusnetzoff (1) questo sale fonde a 64°.3. Ma io non ho potuto confermare questo dato. I bei cristalli che io ho esaminato si rammolliscono a 70°-80° ma non fondono in liquido trasparente nemmeno a 110°. Bisogna badare che questo bromuro è molto deliquescente, più del cloruro corrispondente.

Secondo Lescœur (2) il sale monoidrato $MnBr^2.H^2O$ si ottiene lasciando sfiorire il sale con $4H^2O$ alla temperatura ordinaria. In queste condizioni si eliminerebbero dunque $3H^2O$.

Io ho esaminato il bromuro purissimo in bei cristalli rosei, ed ho visto che perde bensì tre molecole d'acqua ma stando in un disseccatore ad acido solforico. Ne perde invece solamente *due* stando in termostato a 49°-50° ed anche a 40°.

Gr. 0.5591 di sale lasciati in termostato a 49°-50° per sei ore perdettero 0.0681; a 60° e anche a 70° non perde più di peso.

Dunque:

	trovata	calcolata per eliminazione di $2H^2O$
H^2O %	12.15	12.5

Alla temperatura di 80° lo stesso sale perdette ancora 0,0375 e a 90° non perdeva più di peso. Dunque si è eliminata una terza molecola d'acqua:

	trovata	per eliminazione di $3H^2O$
H^2O %	18.8	18.8

(1) " Chem. Zentralb. „, 1897, II, p. 329.
(2) " A. Ch. „ (7), 1894, t. 2, p. 103.

Anche a 100° il sale $MnBr^2.1H^2O$ non perde più di peso, ma a 120° in stufa Bunsen perdette ancora 0.0358 cioè la quarta molecola:

	trovata	calcolata per $MnBr^2.H^2O$
H^2O %	7.7	7.8

Cioè in totale 25.45 %, mentre per $4H^2O$ si calcola 25.06 %.

Anche a 40° in termostato perde $2H^2O$ ed infatti gr. 1.0159 di $MnBr^2.4H^2O$ dopo sei giorni perdettero 0.1184, cioè:

	trovata	calcolata per $2H^2O$
H^2O %	11.65	12.5

In disseccatore ad acido solforico il bromuro $MnBr^2.4H^2O$ perde invece $3H^2O$, ma molto più rapidamente le prime *due* molecole, e più lentamente la *terza* molecola:

Gr. 1.0213 di sale con $4H^2O$ dopo 48 ore perdettero 0.1089 cioè circa 40.6 %, il che corrisponde a poco più di $1^1/_2$ H^2O (si calcola 9.4 %); dopo un altro giorno perdettero 0.0205, in totale 12.6 % e per $2H^2O$ si calcola 12.5 %. Solamente dopo altri 12 giorni perdettero ancora 0.0628 cioè in totale 18.81 % e per $3H^2O$ si calcola 18.8 %.

Invece stando in un disseccatore a cloruro di calcio perde solamente $2H^2O$ come per il riscaldamento in termostato a 40°. Ed invero gr. 0.7296 di bromuro di manganese cristallizzato, dopo 10 giorni a 22° in disseccatore a cloruro di calcio perdettero gr. 0.0471 cioè 6.42 % corrispondenti all'eliminazione di $1H^2O$ per la quale si calcola 6.28 %. Dopo altri 10 giorni perdettero ancora gr. 0.0404 cioè in totale 0.0875 cioè corrispondenti a 12.0 % mentre per $2H^2O$ si calcola 12.5 %. Dopo altri 3 giorni il peso non variò. Allora posto il sale a $2H^2O$ in disseccatore ad acido solforico perdette lentamente la terza molecola d'acqua e dopo 12-13 giorni perdettero ancora gr. 0.0485 e in totale 0.1360 cioè 18.63 % mentre per $3H^2O$ si calcola 18.8.

Dunque le *due prime* molecole si eliminarono stando sul cloruro di calcio e la *terza* sull'acido solforico. Andamento perfettamente regolare.

Così pure, ma molto più presto, come è facile prevedere, si comporta sull'acido solforico e alla pressione di 40 mm. Rapidamente perde le due prime molecole: gr. 1.7229 del sale $MnBr^2.4H^2O$ lasciati in macchina pneumatica sull'acido solforico alla pressione di 40 mm. e temp. 23°, dopo 24 ore perdettero 0.2065 cioè 11.97 % e per $2H^2O$ si calcola 12.5; dopo altre 24 ore perdettero ancora 0.0576 in totale 0.2641 cioè 15.33 % e dopo molti giorni (dall'8 al 21 luglio) 0.0341 cioè in totale 17.3 %, un po' meno di $3H^2O$.

In un'altra esperienza alla pressione di 20 mm. e sull'acido solforico gr. 1.0085 di bromuro di manganese cristallizzato perdettero in 48 ore gr. 0.1869 cioè 18.55 % e dopo ancora 24 ore pochi milligrammi cioè in totale 0.1921, cioè 19.0 %; e per $3H^2O$ si calcola 18.88 %.

Come si vede, anche in queste condizioni vi è tendenza ad eliminarsi le prime due molecole, poi più lentamente la terza, e la quarta rimane.

Il *bromuro monoidrato* $MnBr^2.H^2O$ scaldato in stufa a vapore d'acqua (99°) non perde di peso, ma in istufa a vapore di acido acetico (116°) perde l'ultima molecola di acqua. Gr. 0.5936 perdettero 0.0472 ancora cioè 7.9 % mentre per $MnBr^2.H^2O$ si calcola 7.8 %.

Il bromuro di manganese scaldato in corrente di aria secca dà risultati analoghi, ma la disidratazione completa ha luogo a temperatura molto più bassa.

Gr. 1.0412 di sale crist. con $4H^2O$ scaldati in stufa a vapore di metilale (41°) e corrente di aria secca, dopo *12 ore* perdettero 0.1300 cioè 12.5 % corrispondenti a $2H^2O$ per le quali si calcola 12.5 % e dopo *20 ore* ancora a 41° perdettero 0.0650 cioè in totale 0.1950 cioè 18.73 % corrispondente a $3H^2O$ (calcolato 18.8 %). Dopo 6-7 ore di riscaldamento a 80° (vapore di cloruro di etilene) e anche a 91°-92° (vapore di eptano) non perdettero che pochi milligrammi; a circa 99° (vapore d'acqua) in 17 ore perdettero ancora 0.0725 e in totale 0.2675 cioè 25.65 % corrispondenti a $4H^2O$ per le quali si calcola 25.06 %.

Come si vede, in queste condizioni il sale si disidrata completamente a 99° mentre nel modo ordinario in istufa non perde tutta l'acqua che a 120°.

Gr. 1.0165 di bromuro $MnBr^2.4H^2O$ in termostato a 40°,

ma entro un disseccatore ad acido solforico perdettero già a 40° le prime $3H^2O$, ma la quarta non si eliminò che a 98°-99°. In questi casi l'uso del disseccatore ad acido solforico non è da raccomandarsi.

Riassumendo, il bromuro di manganese a 40° e meglio a 50°, in termostato, perde $2H^2O$ e a 80° perde $3H^2O$; la *quarta* molecola in istufa Bunsen a 120°. In disseccatore ad acido solforico perde $3H^2O$, ma *rapidamente* le due prime e *molto lentamente* la terza; in disseccatore a cloruro di calcio perde solamente $2H^2O$ e messo il sale con $2H^2O$ in disseccatore ad acido solforico perde ancora $1H^2O$ e rimane $MnBr^2.1H^2O$. Alla pressione di 40 o di 20 mm. e sull'acido solforico perde solamente $3H^2O$ e rimane $MnBr^2 1H^2O$; questo diventa anidro a 116° in stufa a vapore di acido acetico.

In corrente di aria secca e a 41° il bromuro $MnBr^2.4H^2O$ perde $2H^2O$ assai *rapidamente*, più lentamente la terza e solamente a 99° perde la quarta. Si hanno quindi i tre idrati:

$$MnBr^2.4H^2O$$
$$\text{„} \quad 2H^2O$$
$$\text{„} \quad 1H^2O.$$

Non sono ancora riuscito ed ottenere l'idrato $MnBr^2.3H^2O$ cioè ad eliminare solamente la prima molecola d'acqua. Riguardo dunque la *temperatura di disidratazione completa* si avrebbe:

	Temperatura di disidratazione
In corrente di aria secca	99°
In istufa a vapore d'acido acetico .	116°-117°

II.

Bromuro di magnesio $MgBr^2.6H^2O$.

Il bromuro di magnesio idrato si ha in bei cristalli prismatici incolori. Scaldato fonde, poi perde l'acqua insieme ad acido bromidrico, e appena il residuo è disseccato, conti-

nuando a scaldare sviluppa abbondantemente dei vapori di bromo.

Già si sapeva che il bromuro di magnesio cristallizzato non perde l'acqua di cristallizzazione senza scomporsi e che scaldato fonde, poi si decompone in MgO e acido bromidrico; la soluzione acquosa pure per riscaldamento dà acido bromidrico (Rammelsberg, Lœwig, ecc.).

Se invece si fa bollire una soluzione concentratissima del bromuro con del jodo non si osserva sviluppo di bromo.

Sino ad ora non si è riusciti a dosare direttamente l'acqua perchè insieme a questa si elimina dell' acido bromidrico. Lerch (1) trovò 37.20 % (calcol. 37.04 %) ma la dosò per differenza dopo determinati il magnesio ed il bromo.

Io ho voluto tentare in quali condizioni questo sale perdeva tutta l' acqua in modo da averlo anidro senza scomporlo.

In una esperienza, posi in un disseccatore a cloruro di calcio gr. 1.4162 di bromuro di magnesio (che è molto igroscopico) e dopo molti giorni non perdette che gr. 0.0144 cioè 1.1 % e dopo tre ore a 100° in stufa ad aria perdette appena 0.0018; il sale così disseccato (1.4000) scaldato a 125°-130°, dopo 2 ore perdette 0.0377 e dopo altre 2 ore e $^1/_2$ solamente 0.0043; continuando a scaldare non perde più di peso, cioè perdette 3 % mentre per $^1/_2$ H^2O si calcola 3.06 %. Si ha, come si vede, un punto di arresto; allora si scalda a 138°140° e la perdita sale a 0.1270 cioè in totale gr. 0.1690 pari a 12.07 % e per $2H^2O$ si calcola 12.3 %. Poi, dopo altre 3 ore anche a 140°-141° non perde che 0.0169. A 150° si ha una perdita di 36.8 % e per l'eliminazione di $6H^2O$ si calcola 36.8, ma continuando a scaldare a 150° la perdita ascende a 49.0 %. In tutto questo periodo del riscaldamento si era sviluppato insieme all'acqua anche dell'*acido bromidrico*.

Gr. 0.4909 di bromuro di magnesio $MgBr^2.6H^2O$ nel vuoto a 40 mm. sull'acido solforico dopo 30 ore perdettero gr. 0.0079 e dopo ancora 10 giorni non perdettero più nulla.

(1) " J. pr. Chem. ", 1883, t. 28, p. 345.

Gr. 1.0376 in disseccatore su cloruro di calcio perdettero solamente 2.38 %, cioè quasi $^1/_2$ H^2O.

Gr. 0.4718 in corrente di aria secca, a 42° dopo 2 ore non perdettero di peso. A 99° dopo 2 ore perdettero 0.74 %; dopo 1 ora a 113°-114° perdettero 0.0157 ma la poca acqua sviluppata era acida per acido bromidrico.

Non si riesce dunque a determinare direttamente l'acqua in questo sale senza scomporlo. Non si conosce una *temperatura di disidratazione.*

III.

Bromuro di berillio o di glucinio $BeBr^2$.

Il bromuro di berillio manda lumi dell'aria; quando è ben secco e lo si scaldi sviluppa del bromo in grande quantità.

Secondo Berthemot il bromuro di berillio per l'azione del calore si decompone in acido bromidrico e ossido di berillio. Ciò è esatto solamente in parte perchè si elimina anche una grande quantità di bromo. Scaldato all'aria e in presenza di umidità possono aver luogo le seguenti reazioni:

$$BeBr^2 + O = BeO + Br^2$$
$$BeBr^2 + H^2O = 2HBr + BeO.$$

IV.

Bromuro di zinco $ZnBr^2$.

Il bromuro di zinco era perfettamente anidro. Scaldato fonde (a 695°-699° secondo Carnelley e Williams) (1) poi entra in ebollizione, ma non ho potuto svelare la minima traccia di bromo. Bolle dunque inalterato. Secondo V. Meyer e Freyer (2) bolle a 642°-652°.4, ma non dicono se si scompone o no al punto di ebollizione.

(1) " Jahresb. f. Chem. ", 1878, p. 36 e 1879, p. 58.
(2) " Berichte ", 1892, t. 25, p. 628.

Invece mescolando del jodo al bromuro di zinco anidro e scaldando si osserva nettamente lo sviluppo abbondante di bromo. La reazione ha luogo nel senso:

$$ZnBr^2 + I^2 \longrightarrow ZnI^2 + Br^2.$$

V.

Bromuro di cadmio $CdBr^2$ e $CdBr^2.4H^2O$.

$CdBr^2$. Il bromuro di cadmio anidro quando è scaldato vicino al punto di ebollizione sublima e sviluppa nettamente del bromo e meglio poi, in grande quantità, quando lo si scalda rapidamente con del jodo.

Berthelot (1) aveva già notato che il bromuro di cadmio scaldato in una atmosfera di azoto perde del bromo.

Secondo Carnelley (1878) il bromuro di cadmio fonde a 577° e bolle a 806°-812° (Carnelley e Williams) (2). Secondo Weber bolle a 863° e sublima in lamelle splendenti. C. e V. Meyer (3) hanno determinato la densità di vapore del bromuro di cadmio a 923° e 914° circa, ma non accennano alla sua decomposizione con sviluppo di bromo. Trovarono 9.22-9.28 invece di 9.40.

Bromuro di cadmio cristallizzato.

$CdBr^2.4H^2O$. Intorno all'acqua di cristallizzazione del bromuro di cadmio vi sono dei dati molto discordanti. Secondo Rammelsberg (4) il bromuro $CdBr^2.4H^2O$ perde la metà dell'acqua di cristallizzazione a 100° e l'altra metà a 200°, senza fondere, poi a temperatura più alta fonde.

Secondo Berthemot, per rapido riscaldamento il bromuro fonde, perde l'acqua di cristallizzazione e diventa anidro.

(1) " C. R „, t. 91, p. 1028.
(2) " Jahresb. f. Chem. „, 1880, p. 38.
(3) " Berichte „, 1879, p. 1284.
(4) " Pogg. Ann. „, 1842, t. 55, p. 241.

Invece, secondo Croft (1), questo sale con $4H^2O$ perde tutta l'acqua per efflorescenza in aria secca.

Il Dietz poi trovò (2) che a 100° il sale cristallizzato perde lentamente e a 145° più facilmente e totalmente l'acqua di cristallizzazione.

Croft aveva trovato 20.95 % di acqua e Rammelsberg solamente 19.5 %. Per $4H^2O$ si calcola 20.98 %.

Queste differenze si spiegano ora col fatto da me osservato che questo sale perde facilmente dell'acqua stando all'aria nelle condizioni ordinarie; perciò anche il sale puro ma troppo asciutto all'aria ha già perduto un poco dell'acqua di cristallizzazione.

Ecco i risultati da me ottenuti:

Gr. 0.6945 di bromuro, stato un poco all'aria, in cristalli asciutti, lasciati per 24 ore sull'acido solforico a temperatura di circa 20° perdettero 0.0927; cioè:

	trovato	calcolato per $2\frac{1}{2}\ H^2O$
H^2O %	13.3	13.1

poi stando ancora 48 ore sull'acido solforico perdettero 0.0459 cioè in totale 0.1380; cioè:

	trovato	calcolato per $4H^2O$
H^2O %	19.9	20.98

Gr. 1.2322 di un altro campione, dopo 2 ore in termostato a 50° perdettero 0.2496; cioè:

	trovato	calcolato per $4H^2O$
H^2O %	20.25	20.98

Anche a temperatura più alta non perdette più di peso. Come si vede, erano due campioni che avevano già perduto un

(1) " Phil. Mag. ", 1842 (3), t. XXI, p. 355.
(2) " Zeits. f. anorg. Chem. ", 1899, t. 20, p. 260.

poco di acqua. Infatti io ho osservato che il bromuro di cadmio già alla temp. di 17°-18° stando all'aria perde dell'acqua di cristallizzazione:

Gr. 2.2370 di un campione di bromuro di cadmio recentemente da me ricristallizzato, ed ancora lievemente umido, furono lasciati all'aria alla temperatura di 16°-18°. Dopo 24 o 48 ore perdettero 3.8 % del proprio peso e dopo ancora 24 ore in totale perdettero 0.1300 cioè 5.8 % e per la perdita di $1H^2O$ si calcola 5.25 % e dopo ancora 24 ore 0.1775 cioè 7.9 % mentre per $1\,^1/_2\,H^2O$ si calcola 7.8 %. Lasciato ancora all'aria continuò a perdere del proprio peso e dopo 3 giorni perdette in totale 0.2875 cioè 12.8 % e per $2\,^1/_2\,H^2O$ si calcola 13.08 %. Dopo ancora 48 ore arrivò a perdere sino 14.1 % cioè quasi $3H^2O$ per le quali si calcola 15.6 %; per $2\,^3/_4\,H^2O$ si calcola 14.4 %.

Gr. 1.5515 di bromuro di cadmio recentemente cristallizzato come sopra furono tenuti in termostato a 30°: dopo 5 ore perdettero 4.25 % del proprio peso, dopo altre 4 ore, in totale, 7.6 %, dopo ancora 5 ore la perdita totale fu di 13.8 % ed infine dopo ancora 13 ore sino a peso costante perdettero in totale 0.3280 cioè 21.1 % mentre per $4H^2O$ si calcola 20.98 %.

Dunque il bromuro di cadmio, anche cristallizzato di recente, perde l'acqua colla più grande facilità: in termostato a 30° perde $4H^2O$ e già all'aria alla temperatura di 16°-18°, perde quasi $3H^2O$.

Le mie esperienze concordano con quelle di Croft, e non concordano affatto con quelle di Rammelsberg, di Berthemot e di Dietz.

Concludendo:

	Temperatura di disidratazione completa
In termostato	30°
In disseccatore ad acido solforico	18°-20°

VI.

Bromuro mercurico $HgBr^2$.

Questo bromuro è anidro. Scaldato anche rapidamente sublima ma non dà bromo. Invece se rapidamente lo si scalda con eccesso di jodo dà nettamente la reazione del bromo libero.

Il bromuro mercurico scaldato con soluzione anche al 50 % di acido cromico non sviluppa bromo; bisogna adoperare l'anidride cromica con appena qualche goccia d'acqua od anche la soluzione satura di anidride cromica e scaldare, allora il bromo si elimina rapidamente. Se si agita il bromuro mercurico con soluzione di joduro potassico poi si scalda con soluzione al 50 % di acido cromico, allora si sviluppa il bromo riconoscibile facilmente.

VII.

Bromuro rameico.

Il bromuro rameico anidro $CuBr^2$ in bei cristalli, appena lo si scalda direttamente in tubo d'assaggio sviluppa torrenti di bromo.

C. G. Jackson (1) ha determinata la tensione di dissociazione del bromuro rameico ad una serie di temperature.

Il bromuro $CuBr^2.4H^2O$ perde l'acqua nell'aria secca. Fu esaminato bene dal Sabatier (2) ed io non me ne sono occupato più oltre.

Intorno ad alcuni altri bromuri e a derivati bromurati organici riferirò in un altro lavoro.

Torino. Laboratorio chimico-farm. e tossic.
della R. Università, 19 aprile 1914.

(1) " J. Chem. Soc. ", 1911, t. 99, p. 1066; " Bull. ", 1912, t. XII, p. 7.
(2) " Bull. Soc. Chim. " (3), 1894, XI, p. 676.

Un criterio d'equivalenza per le curve di una superficie algebrica.

Nota di RUGGIERO TORELLI.

§ 1. — Generalità.

1. — Nella geometria sopra una superficie o una varietà algebrica sono stati utilissimi i criteri, dati dal SEVERI, per decidere della equivalenza (lineare) di curve tracciate sopra una superficie. Tali criteri, ben noti ai cultori di geometria algebrica, sono espressi dai seguenti tre enunciati:

I. *Se le curve di un sistema continuo segano gruppi equivalenti su una curva appartenente a un sistema continuo che non sia un fascio irrazionale, esse sono equivalenti.*

II. *Se due curve segano gruppi equivalenti sulle curve di un fascio, esse sono equivalenti o differiscono per curve fondamentali del fascio.*

III. *Se due curve* A, B *segano gruppi equivalenti sulle curve di un sistema* ∞^1 (*irriducibile*) Σ, *di indice* ν, *allora le curve* νA, νB *sono equivalenti ovvero differiscono per curve fondamentali di* Σ (1).

2. — Relativamente a quest'ultimo criterio III è da notare che, come si riscontra facilmente su esempi, le due curve A, B di cui esso parla possono benissimo non essere equivalenti nè differire per curve fondamentali di Σ. Indicherò fra poco un modo di costruire esempi siffatti.

Mi è parso perciò opportuno ricercare un quarto criterio analogo al III, e nel quale, sia pure aggiungendo (come è d'al-

(1) Cfr. SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza...* [" Atti del R. Ist. Veneto ", t. LXX (1910-11)], ove si trovano anche le citazioni relative ai criteri I e II; e anche SEVERI, *Notizie sulle mie pubblicazioni scientifiche dal 1900 al 1913* (Padova, 1913), n^i 32, 35, 36, 55.

tronde necessario) qualche ulteriore limitazione al sistema Σ, si ottenga un risultato più preciso relativamente alle curve A, B. Il teorema da me ottenuto, che costituisce lo scopo principale di questa Nota, è il seguente:

IV. *Se due curve* A, B *segano gruppi equivalenti sulle curve di un sistema* ∞^1 (*irriducibile*) Σ, PRIVO DI PUNTI MULTIPLI VARIABILI, *esse sono equivalenti ovvero differiscono per curve fondamentali di* Σ.

3. — Ciò che entra in modo essenziale nella dimostrazione del criterio IV è una proprietà da me recentemente dimostrata per le corrispondenze unirazionali fra due curve (1); proprietà che si estende facilmente alle superficie e varietà superiori. Spiego brevemente di che si tratta, pel caso delle superficie.

Fra due superficie F, Φ abbiasi una corrispondenza Θ, di indici 1, ν: ai punti di F corrisponderanno dunque su Φ i gruppi di un' involuzione I; supporremo per semplicità che Θ sia priva di elementi fondamentali. Siano poi A e B due curve di F; A', B' le loro omologhe su Φ. Se le curve A, B sono equivalenti, saranno anche equivalenti, per un notissimo teorema di SEVERI, le curve A', B'; e anzi noi diremo, con denominazione analoga a quella da me adoperata per le curve, che A', B' sono equivalenti *identicamente* (*rispetto ad* I).

Ma se viceversa noi supponiamo che siano equivalenti le curve A', B', potremo solo, per lo stesso teorema di SEVERI usato poco fa, dedurre l'equivalenza delle curve νA, νB: giacchè sono queste le curve omologhe di A', B' nella corrispondenza Θ. Ed effettivamente può benissimo darsi, come si riscontra su esempi, che sia $A' \equiv B'$ e non $A \equiv B$: ossia che le curve A', B' siano equivalenti non identicamente.

Tuttavia l'esistenza di curve equivalenti non identicamente va riguardata come *un caso d'eccezione*. Infatti nel § 2 io dimostro che, analogamente a quanto vale per le curve (M, n° 30), *se l'involuzione* I *non è composta, esisteranno curve equivalenti non identicamente allora e solo allora che la* I *sia ciclica e priva di*

(1) *Sulle serie algebriche...* [" Rend. Palermo ", t. XXXVII (1914)], § VII. Designerò in seguito questa mia Memoria con M.

coincidenze: sia cioè generata da una trasformazione birazionale ciclica, priva di coincidenze, della superficie F in sè (1).

Propriamente ciò che serve per dimostrare il criterio IV non è il risultato ora enunciato, ma un'altra proprietà un po' più generale: il LEMMA III del n° 9.

4. — Quanto ho or ora esposto permette di costruire subito esempi di curve che segano gruppi equivalenti sulle curve di un sistema, senza tuttavia essere equivalenti nè differire per curve fondamentali del sistema.

Si prendano perciò due superficie F, Φ, in corrispondenza Θ (1v) fra loro, e tali che su Φ esistano coppie di curve equivalenti non identicamente rispetto all'involuzione I indotta da Θ su Φ; siano A', B' due di tali curve; A, B le curve di F che hanno per omologhe le A', B'. Si scelga ora su Φ un sistema ∞^1, Σ', d'indice > 1, di curve C', la generica delle quali non contenga infinite coppie di punti coniugati nella I; ad esso per la Θ corrisponderà su F un sistema ∞^1, Σ, di indice > 1, di curve C: ogni C' è bir. identica alla sua omologa. Ora, come le A', B' sulle C', così le A, B sulle C segheranno gruppi equivalenti: eppure le A, B non sono equivalenti, e neppure differiscono per curve fondamentali di Σ: poichè, dette E, F due tali curve, ed E', F' le loro omologhe per la Θ, se fosse $A + E \equiv B + F$, seguirebbe $A' + E' \equiv B' + F'$, e quindi, essendo $A' \equiv B'$, ne verrebbe $E' \equiv F'$; ciò che è assurdo, poichè le curve E', F', fondamentali per Σ', sono curve isolate.

Si noterà peraltro che, com'è facile mostrare (cfr. n° 11), la generica C possiede singolarità variabili. Ciò si vede immediatamente se la I è ciclica e priva di coincidenze: poichè allora una C' variabile, dovendo incontrare in punti variabili la sua curva *coniugata* nella I, possiede necessariamente coppie variabili di punti (distinti) coniugati nella I.

OSSERVAZIONE. — Dalla dimostrazione, che daremo nel § 3, del criterio IV si possono facilmente ricavare *le restrizioni minime* da aggiungere all'ipotesi del criterio III per dedurne la

(1) Ricordo che, per un recente teorema di GODEAUX [" Rend. Lincei ", vol. XXIII, marzo 1914], una involuzione non composta, priva di coincidenze, è necessariamente ciclica.

tesi del criterio IV: con che potrebbe aversi un criterio più generale del IV (1), però meno maneggevole.

§ 2. — Sulle involuzioni nelle superficie algebriche.

5. — Cominciamo dal trattare la questione accennata al n° 2. Fra due superficie algebriche F, Φ abbiasi una corrispondenza $\Theta(1\nu)$, che supporremo priva, su entrambe le superficie, di elementi fondamentali. Questa condizione (messa per evitare inutili complicazioni di forma) non lede la generalità: essa può sempre ritenersi soddisfatta sostituendo, se occorre, alle F, Φ due loro opportune trasformate birazionali. I gruppi di punti di Φ omologhi dei punti di F formeranno una involuzione I di ordine ν; i punti di coincidenza della I su Φ (di diramazione per la Θ su F) si distribuiranno in un numero finito (≥ 0) di *curve* (2).

(1) In quanto la restrizione che il sistema Σ sia privo di singolarità variabili è sovrabbondante. Cfr. il n° 15.

(2) Non possono esistere punti di coincidenza (di diramazione) *isolati*; come si vede con un ragionamento analogo a quello fatto da Enriques-Severi per il caso $\nu = 2$. Cfr. Severi, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo...* [" Atti del R. Ist. Veneto ", t. LXVII (1907-08)], n° 2.

Espongo in breve la dimostrazione, per comodità del lettore. Diciamo K l'eventuale curva di diramazione su F; D la curva di coincidenza per l'involuzione I su Φ. Prendiamo poi su F, in modo affatto generale, un sistema lineare $|X|$, e diciamo $|X'|$ il suo trasformato su Φ. La generica X' contiene una involuzione i, di ordine ν, birazionalmente identica alla corrispondente X, e le cui coincidenze sono le intersezioni di X' con D. Se π, p sono i generi di $|X|$, $|X'|$, e u è il numero delle intersezioni di una X' con D (o di una X con K), si ha per la formula di Zeuthen:

$$u = 2(p-1) - 2\nu(\pi - 1).$$

Sia ora, se possibile, P un punto di diramazione isolato su F, e P'_1, P'_2..... le corrispondenti coincidenze isolate dell'involuzione I su Φ. Quando una X viene a passare genericamente per P, la i esistente sulla corrispondente X' non può acquistare nuove coincidenze, perchè il genere della X resta eguale a π, e non può crescere quello della X': quest'ultima dunque deve venire a passare per ciascuno dei punti P'_1, P'_2... con due o più rami coniugati nell'involuzione I; e ciò è assurdo, perchè allora diminuirebbe il suo genere mentre rimarrebbe invariato il numero delle coincidenze della i.

Cominciamo col dimostrare il seguente

LEMMA I. — *Sia* R *una rete di curve* X *su* F; R′ *la rete delle curve omologhe* X′ *su* Φ; *sulla generica* X′ *la* I *subordinerà dunque una involuzione* i. *Se l'involuzione* i *sulla generica* X′ *è composta con una involuzione di ordine* ϵ, *anche la* I *risulta composta con una involuzione di ordine* ϵ.

La cosa è evidente se sulla generica X' la i è composta con *una sola* involuzione j di ordine ϵ: giacchè allora, se X' descrive un fascio della rete R', la j descrive una involuzione J con cui la I risulta composta.

Nel caso poi in cui la i della generica X' è composta simultaneamente con più involuzioni j, j', j''... di ordine ϵ, basterà, per dimostrare l'asserto, far vedere come, preso un generico fascio di R', su ciascuna sua curva si possa determinare razionalmente una delle dette involuzioni.

Ed infatti, si fissi una generica X', e su questa un generico gruppo G della i; G si decompone in $\frac{\nu}{\epsilon}$ gruppi G_1, G_2... della j; in $\frac{\nu}{\epsilon}$ gruppi G'_1, G'_2... della j'; etc.; e i gruppi G_1, G_2... G'_1, G'_2... son tutti distinti fra loro. Considerando allora il fascio delle X' passanti per G, ciascuna delle dette decomposizioni di G in $\frac{\nu}{\epsilon}$ gruppi fissa razionalmente su una curva variabile di tal fascio una delle involuzioni j, j', j'' .... c. v. d.

6. — Orbene adesso faremo vedere che

TEOREMA I. — *Se esistono su* Φ *due curve* A′, B′ *equivalenti non identicamente, e la involuzione* I *non è composta, essa è ciclica e priva di coincidenze.*

Si dicano infatti A, B le curve di F aventi per omologhe le A', B'; e si scelga su F una rete R priva di ∞^1 curve spezzate. Un generico fascio S di tale rete sarà dotato di punti base e privo di curve spezzate (e non avrà come fondamentale alcuna componente della A, nè della B, nè della eventuale curva di diramazione di Θ). A una curva variabile X di S corrisponde su Φ una curva X', variabile in un fascio S' e in corrispondenza θ (v1) con X: e mentre i gruppi segati su X da A, B non sono equivalenti (altrimenti sarebbe $A \equiv B$). i loro gruppi

omologhi nella θ, essendo segati su X' dalle curve A', B', sono equivalenti. D'altronde essendo, per ipotesi, la involuzione I non composta, tale risulta anche, pel Lemma I, l'involuzione i subordinata su X' dalla I: la i allora, per un mio teorema già ricordato, sarà ciclica e priva di coincidenze; e tale quindi risulterà anche la I (1); c. v. d.

7. — La precedente proprietà si inverte facilmente nel seguente modo:

Teorema II. — *Se l'involuzione* I *è ciclica e priva di coincidenze (anche composta), esistono su* Φ *coppie di curve equivalenti non identicamente.*

Si può infatti prendere su F un sistema lineare completo $|A|$ il cui sistema trasformato $|A'|$ non sia completo (2). Detto allora $|\overline{A'}|$ il sistema completo cui appartiene $|A'|$, il sistema $|\overline{A'}|$ sarà mutato in sè da ogni trasformazione generatrice di I: precisamente una tal trasformazione, dicasi T, induce in $|\overline{A'}|$ una omografia ciclica non identica. Quindi in $|\overline{A'}|$ dovrà esistere, oltre $|A'|$,

(1) Poichè, con argomentazione analoga a quella fatta in fine del n° 5, si può fissare razionalmente, su una X' variabile di S', una trasformazione generatrice della i.

(2) Si prenda su F un sistema lineare completo $|M|$, tale che i suoi multipli, almeno da un certo punto in poi, sieno regolari: ad es., secondo Severi, l'aggiunto ad una curva atta ad individuare un sistema continuo diverso da un fascio irrazionale. Detti allora n_λ, π_λ il grado e il genere del sistema (completo) $|\lambda M|$, la dimensione r_λ di $|\lambda M|$, per λ abbastanza alto, sarà data da

$$r_\lambda = n_\lambda - \pi_\lambda + P_a + 1,$$

essendo P_a il genere aritmetico di F. Il sistema trasformato $|\lambda M'|$ di $|\lambda M|$ avrà il grado $n_\lambda' = \nu n_\lambda$, e il genere $\pi_\lambda' = \nu\pi_\lambda - \nu + 1$ (poichè la sua curva generica possiede una involuzione d'ordine ν e genere π_λ, priva di coincidenze); per la dimensione r_λ' del sistema completo cui esso appartiene avremo

$$r_\lambda' \geqq n_\lambda' - \pi'_\lambda + P_a' + 1 = \nu(n_\lambda - \pi_\lambda) + \nu + P_a',$$

essendo P'_a il genere aritmetico di Φ. Poichè, crescendo λ, la differenza $n_\lambda - \pi_\lambda$ cresce all'infinito, finirà certo coll'essere $r_\lambda' > r_\lambda$: si può dunque prendere come sistema $|A|$ del testo il sistema $|\lambda M|$ con λ sufficientemente grande.

almeno un altro sistema lineare di curve mutate in sè dalla T: una qualunque di queste ultime curve e una qualunque curva di $|A'|$ risultano allora equivalenti non identicamente; c. v. d.

8. — Dal teorema I risulta subito una condizione necessaria (ma non sufficiente) perchè esistano su Φ curve equivalenti non identicamente, nel caso in cui l'involuzione I sia composta. Ed infatti in tal caso si potrà prendere un certo numero di superficie $F_1, F_2, \ldots, F_k$, in guisa che la corrispondenza $\Theta(1\text{v})$ intercedente fra F, Φ risulti prodotto di $k+1$ corrispondenze unirazionali $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}$ (prive sempre di elementi fondamentali), intercedenti rispettivamente fra le coppie di superficie $(F F_1), (F_1 F_2) \ldots, (F_{k-1} F_k), (F_k \Phi)$, e che l'involuzione I_s indotta dalla θ_s $(s = 1, 2, \ldots, k+1)$ su F_s (su Φ, se $s = k+1$) sia non composta (1). Queste ultime involuzioni anzi le chiameremo le involuzioni *componenti* della data involuzione I.

Orbene si vede immediatamente che:

Lemma II. — *Se su Φ esistono coppie di curve equivalenti non identicamente rispetto a* I, *una almeno delle involuzioni componenti di* I *dovrà essere ciclica e priva di coincidenze.*

Questa proposizione vale anche per le curve; il fatto ch'essa non è invertibile risulta, per le curve, dalle considerazioni fatte nel n° 32 della mia memoria M, e potrebbe facilmente stabilirsi, con argomentazioni analoghe, per le superficie.

9. — È essenziale pel seguito quest'altra proprietà.

Si decomponga, come al n° 8, la corrispondenza Θ tra F, Φ nel prodotto delle $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1}$, intercedenti risp. tra le coppie di superficie $(F F_1), (F_1 F_2), \ldots, (F_k \Phi)$ [se I non è composta, sarà $k = 1$ e $F_1 = \Phi$].

Si prenda poi su F una curva X_0 variabile in una rete R_0; a essa, per la θ_1, corrisponderà su F_1 una curva X_1 variabile in una rete R_1; alla X_1, per la θ_2, una curva X_2 variabile in

(1) Tal decomposizione può anche essere effettuabile in più modi *diversi* (rispetto alle trasf. birazionali). In tal caso intendiamo riferirci a una, fissata ad arbitrio, di tali decomposizioni.

una rete R_2 su F_2; ...; alla X_k, per la θ_{k+1}, una curva X_{k+1} variabile in una rete R_{k+1} su Φ.

Orbene, si vede facilmente che

Lemma III. — *Se rispetto all'involuzione* i *subordinata dalla* I *sulla generica* X_{k+1} *esistono gruppi equivalenti non identicamente, qualcuna* I_s *dalle involuzioni* $I_1, I_2, \ldots, I_{k+1}$ *componenti della* I *deve esser ciclica, e avere come curva di coincidenza una curva fondamentale per la rete* R_s.

Infatti, pel Lemma I, le involuzioni $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$, subordinate dalle $I_1, I_2, \ldots, I_{k+1}$ risp. sulle curve $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}$ sono non composte, talchè esse sono le *componenti* della i; e poichè su X_{k+1} esistono, per ipotesi, gruppi equivalenti non identicamente rispetto a i, qualcuna delle involuzioni $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$, e sia p. es. la i_s, deve essere ciclica e priva di coincidenze. Facendo variare la X_s nella rete R_s, si vede che I_s è ciclica, e la sua (eventuale) curva di coincidenza non può incontrare X_s in punti variabili, poichè questi sarebbero coincidenze della involuzione i_s; c. v. d.

Osservazioni. — 1) Applicando a una curva fondamentale della rete R_h la θ_{h+1} $(h = 0, 1, \ldots, k)$, ovvero la θ_h $(h = 1, 2, \ldots, k+1)$, si ha una curva fondamentale della R_{h+1}, ovvero della R_{h-1}.

2) Il Lemma III può considerarsi come un'estensione del Lemma II. Basta osservare che se esistono curve equivalenti non identicamente rispetto a I, scelta la R_0 priva di ∞^1 curve spezzate (talchè, per l'osserv. precedente, ne saran prive anche le $R_1, R_2, \ldots, R_{k+1}$), sulla generica X_{k+1} esistono gruppi equivalenti non identicamente rispetto a i (per una considerazione fatta al n° 6); si deduce allora che qualcuna delle $I_1, I_2, \ldots, I_{k+1}$ deve essere ciclica e *priva* di coincidenze.

§ 3. — Dimostrazione del criterio IV.

10. — Passiamo adesso alla dimostrazione del criterio IV.

Sopra una superficie F abbiasi un sistema ∞^1 (irriducibile) Σ, di curve C (generalmente irriducibili); sia $\nu\,(>1)$ il suo indice.

Rappresentando le curve di Σ coi punti di una curva Γ, tra F e Γ resta stabilita una corrispondenza tale che a ogni punto di Γ corrisponde su F una curva C, mentre al generico punto di F corrisponde su Γ un gruppo di ν punti, imagini delle ν curve C passanti per quel punto.

Se consideriamo allora la superficie Φ che rappresenta, senza eccezione, le coppie di punti omologhi di F, Γ, vediamo che fra F, Φ intercede una corrispondenza $\Theta(1\nu)$: tal corrispondenza indurrà su Φ una involuzione I di ordine ν. Si notino ora queste due proprietà:

a) Mentre un punto di F descrive una curva C, *uno* dei suoi omologhi in Θ descrive una curva C' bir. identica a quella C: le curve C' così ottenute su Φ formano un fascio Σ' bir. identico a Σ.

b) I coniugati in I di un punto variabile sulla generica C' descrivono una curva che non contiene altre curve C' (altrimenti a Σ' la Θ farebbe corrispondere un sistema di indice $< \nu$).

Supporremo al solito di avere (occorrendo) trasformate le F, Φ in guisa che la corrispondenza Θ sia priva, su entrambe le superficie, di elementi fondamentali (e quindi Σ sarà privo di punti base). È chiaro che dalla validità del criterio IV dimostrato in questa ipotesi, si ricava subito la validità in generale del criterio stesso.

11. — Decomponiamo, come al n° 8, la corrispondenza Θ tra F, Φ nel prodotto delle corrispondenze $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k+1}$, intercedenti risp. fra le coppie di superficie $(F F_1)$, $(F_1 F_2)$, ..., $(F_k \Phi)$ [se I non è composta, sarà $k = 1$ e $F_1 = \Phi$].

Sia poi E l'insieme delle eventuali curve fondamentali irriducibili del sistema Σ; ad E corrisponderà, per la θ_1, una curva E_1 di F_1; a questa, per la θ_2, una curva E_2 di F_2; ...; a E_k, per la θ_{k+1}, una curva E_{k+1} di Φ.

Alle curve C' del fascio Σ' corrispondono, per la θ_{k+1}, curve C_k di F_k; a queste, per la θ_k, curve C_{k-1} di F_{k-1}; ...; alle C_1, per la θ_1, le curve C del sistema Σ su F.

Si potrebbero facilmente calcolare gli indici dei sistemi costituiti dalle $C_k, C_{k-1}, \ldots, C_1$; a noi basta osservare che, per la proprietà *b)* del n° 10, tali indici sono superiori a 1.

Orbene, si vede facilmente che

Lemma IV. — *Se per qualcuna delle involuzioni* $I_1, I_2, \ldots, I_{k+1}$ *componenti della* I, *e sia p. es. la* I_r, *avviene che la curva di coincidenza manca, ovvero le sue componenti irriducibili sono contenute in* E_r, *le curve* C *posseggono punti multipli variabili.*

Infatti (convenendo per un momento di scrivere F_{k+1}, C_{k+1} invece di Φ, C') su F_r la generica C_r non contiene infinite coppie di punti coniugati in I_r (per la proprietà *a)* del n° 10), e non incontra in punti variabili la curva E_r. Essa d'altronde deve incontrare in un gruppo di punti variabili la sua curva coniugata in I_r; giacchè, se ciò non fosse, le C_r formerebbero un fascio, il che accade, come s'è dianzi detto, solo per $r = k + 1$; e le loro coniugate sarebbero fondamentali per tal fascio: ciò che è escluso dalla proprietà *b)* del n° 10.

Adunque una C_r variabile possiede coppie variabili di punti distinti coniugati in I_r; ne segue subito che una C variabile su F possiede singolarità variabili.

12. — Dal Lemma ora dimostrato e dal III segue questa proprietà, fondamentale per la dimostrazione del criterio IV:

Lemma V. — *Se le* C *sono prive di punti multipli variabili, presa su* F *una rete di curve* X *le cui eventuali curve fondamentali siano fondamentali per* Σ, *la curva* X' *omologa in* Θ *della generica* X *non contiene gruppi equivalenti non identicamente rispetto all'involuzione su essa subordinata dalla* I. *In particolare su* Φ *non esistono curve equivalenti non identicamente rispetto a* I.

Osservazioni. — 1) Avverto che per la dimostrazione del criterio IV si potrebbero omettere i Teor. I, II e il Lemma II.

2) Dalle considerazioni che servono a dimostrare il Lemma III risulta anche che:

Allorquando l'involuzione I *non è composta, si può nel* Lemma V, *all'ipotesi che le* C *non abbiano punti multipli variabili sostituire l'altra, più larga, che su* F *esista una curva di diramazione per la* Θ *che non sia fondamentale per* Σ.

13. — Supponiamo ora che esistano su F due curve A, B, seganti gruppi equivalenti sulla generica C. Allora sulla generica C resta individuata, a meno di un fattore di proporzionalità, una funzione razionale $y(x)$ avente come zeri e poli risp.

i punti dei gruppi (AC), (BC). Possiamo, con SEVERI (1), determinare razionalmente su ogni C il detto fattore, prendendo una curva D su F, e considerando su ogni C la funzione

$$Y(x) = \frac{y(x)}{y(x_1) + y(x_2) + \ldots + y(x_n)},$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono i punti comuni a D e alla considerata C.

Con ciò adunque veniamo a fissare su ogni C una funzione razionale $Y(x)$ di cui (AC), (BC) sono risp. i gruppi degli zeri e dei poli.

E per conseguenza resterà fissata su ogni C' una funzione razionale $Y(x')$, di cui i gruppi di zeri e di poli sono rispettivamente i gruppi $(A'C')$, $(B'C')$; essendo A', B' le omologhe delle curve A, B nella corrispondenza Θ (2).

Le $Y(x')$ saranno subordinate sulle C' da una funzione razionale φ del punto scorrente su Φ; e le curve A', B' saranno curve di zeri, risp. di poli, per φ.

Mediante la corrispondenza Θ che trasforma Φ in F, la funzione φ si muta in una funzione algebrica f a ν (eventualmente meno (3)) valori del punto scorrente su F. Le curve A, B sono curve luogo di zeri, risp. di poli, per f, e le eventuali ulteriori curve luogo di zeri e poli per f dovranno essere fondamentali per Σ. Perciò se indichiamo con E', F' le ulteriori curve di zeri, risp. di poli, della funzione razionale φ, esse sa-

(1) *Alcune relazioni d'equivalenza...* (citata), n° 4. Ivi sono anche considerate le funzioni φ, f, di cui tra poco si parlerà nel testo.

(2) Ciò anche se qualche componente di A o B *tocca* una C variabile in punti variabili. Basta osservare che tal componente è curva di diramazione per Θ (cfr. n° 15), quindi la sua omologa possiede una componente doppia (almeno).

(3) Precisamente: se la curva di livello di φ uscente da un generico punto P di Φ passa per $\epsilon - 1$ dei coniugati di P in I, sarà $\frac{\nu}{\epsilon}$ l'indice di polidromia di f.

In realtà, come risulta dal n° 14, la f è razionale (supposte, beninteso, le C prive di singolarità variabili).

ranno le omologhe in Θ (o *parti* delle omologhe in Θ (1)) di curve E, F, fondamentali per Σ.

14. — Noi dimostreremo adesso che, *se le* C *sono prive di singolarità variabili*, il fascio delle curve di livello della φ, fascio che contiene totalmente le curve $A' + E'$, $B' + F'$, è composto coll'involuzione I; ossia è il trasformato in Θ di un fascio di F; e da ciò, com'è chiaro, risulterà senz'altro il criterio IV (2).

Prendiamo perciò su F una rete R di curve X per la quale le curve fondamentali di Σ, e solo esse, siano fondamentali, e anzi abbiamo zero intersezioni colla C generica: tale è p. es. una generica rete del sistema lineare individuato da un gruppo di curve C (poichè Σ è privo di punti base: cfr. n° 10, fine). Alla rete R corrisponderà su Φ una rete R' di curve X': e pel Lemma V non esistono sulla generica X' coppie di gruppi equivalenti non identicamente rispetto all'involuzione i subordinata da I su essa X'.

Consideriamo allora sulla generica X' (che non incontra le curve E', F') i gruppi $(A' X')$, $(B' X')$: essi saranno equivalenti identicamente rispetto a i; epperò la g^1 che li *congiunge*, la quale è segata su X' dal fascio delle curve di livello della φ, è composta colla involuzione i.

Ne segue, facendo variare la X' entro R', che le curve di livello della φ sono composte colla involuzione I: c. v. d.

Risulta così completamente dimostrato il nostro criterio IV.

15. — Osservazione. — Nel caso in cui la generica C possegga r punti doppi variabili (o singolarità equivalenti) il gruppo delle intersezioni di una C e della sua infinitamente vicina (gruppo caratteristico) consta delle r coppie di punti costituite dai detti punti doppi, e di un certo gruppo k (che, se $r > 0$,

(1) Questa eventualità, ammissibile *a priori*, viene esclusa dalle considerazioni del n° 14, quando Σ è privo di singolarità variabili.

(2) Se Σ è privo di curve fondamentali, talchè non esistono le E', F', dalla relazione $A' \equiv B'$ si può subito dedurre $A \equiv B$ quando le C siano prive di punti multipli variabili: poichè allora non esistono curve equivalenti non identicamente rispetto a I (Lemma V).

potrebbe anche mancare (1)). La curva K descritta da quest'ultimo gruppo è curva di diramazione per la corrispondenza Θ (2).

Orbene: *se l'involuzione* I *non è composta* (*p. es. se* ν *è primo*) *l'esistenza di* K *è sufficiente ad assicurare che il fascio delle curve di livello di* φ *è composto colla* I. Basta, per veder ciò, ripetere la dimostrazione del n° 14; applicando, invece che il Lemma V, l'Osserv. 2) del n° 12, e tenendo presente che K non è certo fondamentale per Σ.

Segue che: *Supposto* ν *primo, quand'anche le* C *posseggano singolarità variabili, l'esistenza di* K *basta per affermare che le* A, B *sono equivalenti o differiscono per curve fondamentali di* Σ.

Quest'ultima affermazione si controlla direttamente, in modo semplicissimo, nel caso $\nu = 2$. In tal caso infatti, supposto dapprima (oltre il fatto dell'esistenza di K) che qualcuna delle componenti irriducibili di K non faccia parte nè di A nè di B, si osservi che la funzione f non può essere a due valori: giacchè, se fosse, subordinerebbe sulla generica C una funzione spezzata in due funzioni razionali aventi, com'è facile vedere, lo stesso ordine (3); ma tali funzioni avrebbero lo stesso gruppo (AC) di zeri, lo stesso gruppo (BC) di poli, e inoltre in qualche punto (semplice per C) del gruppo caratteristico assumerebbero uno stesso valore non nullo nè infinito: esse dunque coinciderebbero. Ne viene la razionalità di f, e quindi per le A, B la tesi del criterio IV. Se poi ogni componente irriducibile di K è contenuta in A o in B, presa una curva M in guisa che i sistemi lineari $|A + M|$, $|B + M|$ siano privi di parti fisse, si stabilirebbe dapprima il risultato per due curve estratte generica-

(1) Si pensi p. es. al sistema delle sezioni di una superficie del 4° ordine dello spazio ordinario coi suoi piani bitangenti.

(2) La curva K, la curva luogo dei punti doppi delle C (contata due volte), ed eventualmente altre curve contenute parzialmente o totalmente in Σ, costituiscono l'*inviluppo* di Σ.

(3) Basta osservare che su Φ le funzioni razionali subordinate da φ sulla generica C' e sulla curva $\overline{C'}$ coniugata di C' nell'involuzione (di ordine 2) I, hanno lo stesso ordine: i loro gruppi di zeri sono infatti rispettivamente $(A'C')$, $(A'\overline{C'})$, epperò son formati da egual numero di punti.

mente dai due detti sistemi; e ne seguirebbe subito il risultato per le curve date (1).

Pisa, Aprile 1914.

---

(1) Colgo l'occasione per fare due avvertenze relative a due miei recenti lavori.

1) Il teorema dimostrato nella Nota *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie regolari* (" Rend. Lincei ", vol. XXII, novembre 1913) discende *immediatamente* dai n^i 12 e 13 della Memoria di Severi (anteriore alla mia detta Nota): *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare...* (" Math. Ann. ", Bd. 74); Memoria che io non conoscevo quando scrissi quella Nota.

2) La dimostrazione del criterio I (n° 1) della mia Nota II *Sulle varietà di* Jacobi (" Rend. Acc. Lincei ", vol. XXII, novembre 1913) è troppo succinta: non risultando ben chiara l'esistenza delle varietà V_i di cui si parla in fine della detta dimostrazione. Espongo perciò qui dettagliatamente la parte sostanziale di quel ragionamento.

In una varietà Picardiana ∞^p, V_p, si consideri una curva $\overline{C}$ ad essa *appartenente*, e si applichino a $\overline{C}$ tutte le ∞^1 trasformazioni di 1ª specie di V_p che portano un punto di $\overline{C}$ in un punto fisso P di V_p. Si avranno così ∞^1 curve C uscenti da P: e si tratta di far vedere che il cono K delle tangenti in P a tali curve *appartiene* all'S_p tangente in P a V_p. Dicansi infatti $u_i(X)$ $[i = 1, 2, ..., p]$ i valori dei p integrali di prima specie di V_p nel suo punto X (*coordinate* di X entro V_p): e, preso un punto Y di $\overline{C}$, si consideri la trasformazione T di 1ª specie che porta il punto Y in P. Tal trasformazione, definita dalle formule

$$u_i(X') - u_i(X) \equiv u_i(P) - u_i(Y) \qquad \text{(modd. periodi)},$$

al punto infinitamente vicino ad Y su $\overline{C}$, punto che ha le coordinate $u_i(Y) + du_i$ (i differenziali essendo presi lungo $\overline{C}$), farà corrispondere il punto $u_i(P) + du_i$: le du_i saran dunque coordinate proiettive omogenee (nella stella che ha per sostegni P e l'S_p tangente in P a V_p) della tangente in P alla curva C che si ottiene applicando la T a $\overline{C}$. Se ora il cono K appartenesse a uno spazio di dimensione $< p$, le du_i dovrebbero, al variare di Y su $\overline{C}$, restar legate da una (almeno) relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, e quindi gli u_i non fornirebbero p integrali indipendenti di $\overline{C}$: contrariamente all'ipotesi che $\overline{C}$ appartenga a V_p.

Nuove ricerche sulla funzione della ghiandola pineale.

Nota del Dott. CARLO FOÀ
Libero docente e aiuto di fisiologia nella R. Università di Torino.

Dopo le ricerche che pubblicai nel 1912 (1) sugli effetti della estirpazione della ghiandola pineale nel gallo, controllai e confermai i risultati fino allora ottenuti, con nuove esperienze sul gallo e sul ratto completandole con l'esame istologico delle ghiandole sessuali e di quelle a secrezione interna.

Nel frattempo, oltre ad alcuni casi di lesioni della pineale nell'uomo, vennero pubblicati alcuni lavori di indole morfologica e sperimentale che riassumerò brevemente.

Ott e Scott (2) ammettono che le iniezioni di estratto di gh. pineale producono vasodilatazione dei genitali del gatto maschio, diminuiscono dapprima, poi accrescono la pressione arteriosa, stimolano i movimenti dell'intestino e dell'utero, producono vasodilatazione renale, diuresi e glicosuria fugace.

F. Polvani (3), in base allo studio istologico della gh. pineale umana in diversi periodi dello sviluppo, esclude che tale organo sia di natura nervosa o linfatica, ammette l'esistenza di tessuto di nevroglia ma gli attribuisce un'importanza secondaria, rispetto alle cellule principali alle quali l'A. riconosce il carattere ghiandolare. Lungi dall'essere un organo in via di regressione, la gh. pineale è secondo il Polvani filogeneticamente in via di sviluppo, essendo essa omologa non già all'occhio parietale dei rettili ma al diverticolo epifisario nei pesci.

---

(1) Carlo Foà, *Ipertrofia dei testicoli e della cresta dopo l'asportazione della ghiandola pineale nel gallo.* " Pathologica ", 1912, n. 90 e " Archives Italiennes de Biologie ", LVII, p. 233.

(2) *Ott's Contributions to Physiology*, Part XIX, 1912.

(3) F. Polvani, *Studio anatomico della ghiandola pineale umana.* " Folìa Neuro biologica ", VII, 1913, 655-695.

Ch. L. Dana e W. Berkeley (1) trovarono che le iniezioni endovenose di nucleoproteidi ricavati dalla pineale del vitello, non hanno azione apprezzabile sulla pressione arteriosa del cane. Iniezioni intraperitoneali di tali nucleoproteidi praticate in giovani cavie durante 4 settimane provocarono un aumento di peso superiore a quello dei controlli, e lo stesso effetto gli AA. ottennero alimentando con pineale di vitello giovani cavie e conigli. L'alimentazione con pineale produsse per contro nei fanciulli un minore sviluppo fisico rispetto a quello dei bambini di controllo, mentre accrebbe lo sviluppo intellettuale. È evidente che tali risultati abbisognano, come gli AA. stessi ammettono, di ulteriori estesi controlli. Berkeley parla pure di esperimenti nei quali gli sarebbe riuscito di distruggere la gh. pineale in giovani conigli, ma nessuno di essi sopravvisse oltre due settimane; quanto occorre per osservare il resultato dell'operazione.

Una importante conferma dei miei resultati venne data in questo ultimo anno dal Sarteschi (2) che invano prima di essi aveva tentato l'asportazione della gh. pineale. Seguendo la stessa tecnica che io avevo adottato sul pulcino, cioè praticando la legatura del seno longitudinale secondo Lo Monaco, Sarteschi riuscì ad asportare la pineale ad alcuni conigli e cani giovanissimi, ottenendo nei maschi sopravissuti all'operazione una notevole ipertrofia dei testicoli rispetto ai controlli. Quanto all'effetto dell'operazione sulle femmine, che io non avevo potuto apprezzare sulle galline, nessuna conclusione possiamo trarre dalle esperienze finora pubblicate dal Sarteschi, non essendo sufficiente l'osservazione isolata dell'A. sopra una coniglia che, operata presumibilmente all'età di 45 giorni circa, partorì all'età di circa 5 mesi e mezzo.

Mancano tutt'ora i reperti istologici riguardanti gli esperimenti del Sarteschi. Degni di nota sono i due cani della 3ª serie di Sarteschi nei quali oltre il maggiore sviluppo dei testicoli l'A. osservò un notevole accrescimento somatico in confronto ai controlli, ed una tendenza a spiccata adiposità. Seb-

(1) Ch. L. Dana e W. Berkeley, *Die functions of the pineal gand.* " Medical Record ", 1913, p. 835.

(2) U. Sarteschi, *La sindrome epifisaria " Macrogenitosomia precoce ", ottenuta sperimentalmente nei mammiferi.* " Pathologica ", 1913, n. 122.

bene non si comprenda come tale risultato sia mancato sempre nelle mie esperienze, ed anche in tutte le altre del Sarteschi su conigli e cani, esso non perde tuttavia di importanza perchè trova riscontro nei sintomi che caratterizzano la macrogenitosomia precoce che Pelizzi descrisse nell'uomo.

Questa importante conferma delle mie prime esperienze non potè per la data della pubblicazione esser conosciuta dal Polvani, il quale fra le conclusioni delle sue ricerche, esclusivamente morfologiche, commenta poco favorevolmente i resultati delle ricerche sperimentali. Egli infatti così si esprime: " Le esperienze eseguite sull'influenza della estirpazione della " epifisi invece di portare della luce hanno portato dell'oscurità: " negative quelle di Exner e Boese, isolata quella del Sarteschi, " le uniche di una certa attendibilità sono quelle di Foà, ma " credo che abbiano bisogno di essere controllate. Il metodo " proposto ed eseguito da Foà per estirpare la epifisi mi sembra " — per averlo provato — più brillante che pratico, e sopra- " tutto è discutibile che si riesca anche in quel modo ad estir- " pare tutta la pineale e solamente la pineale; in ogni modo " io sono il primo a riconoscere che esso rappresenta un note- " vole passo nella tecnica ".

Non è dubbio che le mie esperienze sull'asportazione della pineale, appunto perchè furono le prime coronate da successo, abbisognavano di un serio controllo da parte di altri sperimentatori, ed io sono ben lieto che le ricerche posteriori del Sarteschi le abbiano confermate. E sarò anche molto lieto se altri vorrà sperimentalmente controllarle, mentre non mi pare scientificamente giusta una critica superficiale come quella del Polvani, il quale ha potuto portare soltanto un contributo negativo alla risoluzione del problema: quello cioè di non essere riuscito ad eseguire, col metodo da me adottato, l'estirpazione della pineale; con che non è detto, ed il successo delle esperienze di Sarteschi lo dimostra, che altri o l'autore stesso, usando di maggior pazienza e non scoraggiandosi di fronte ai primi insuccessi, non possa riuscire ad eseguire l'operazione.

Conoscendo l'anatomia della pineale nel pulcino e nel coniglio è assurdo pensare che col metodo da me adottato si possa estirpare, senza volerlo, altro che la pineale, se si eccettua qualche lembetto di plessi coroidei; quanto alla possibilità di

asportarla completamente ho detto nel mio primo lavoro quali siano le difficoltà e come esse si possano superare. Nè mi pare che il Polvani abbia ragione di ritenere che dalla contraddizione fra i miei esperimenti e quelli negativi di Exner e Boese venga oscurità piuttosto che luce sul problema, perchè tra questi due ordini di esperienze esiste una differenza sostanziale: quella del metodo operatorio, che mentre a me permise l'allontanamento dell'organo, non lo poteva certamente permettere nelle esperienze di Exner e Boese. Non ripeterò quanto dissi nella mia prima nota sul metodo adottato da questi ultimi Autori, la cui insufficienza ammetterà certamente anche il Polvani, se vorrà rileggere la mia nota e sopratutto se vorrà tentare l'operazione secondo quel metodo.

Ma io credo che il Polvani sia senz'altro disposto ad ammettere i resultati delle mie esperienze, poichè egli li cita in ciò che hanno di essenziale quando se ne vale per provare le sue conclusioni sulla funzione della gh. pineale (pp. 690 691 del suo lavoro citato). Sulle quali conclusioni del Polvani, che differiscono dall'interpretazione accettata dalla maggioranza degli Autori, debbo fare alcune osservazioni. Il punto essenziale di questa divergenza è il seguente: altri ammise che la gh. pineale funzioni fin dalla nascita dell'individuo inibendo lo sviluppo degli organi genitali e dei caratteri sessuali secondari fino alla pubertà, epoca nella quale diminuendo la sua funzione avverrebbe lo sviluppo sessuale. Il Polvani così si esprime: " io in-
" vece ritengo che chi risveglia l'attività della gh. pineale sia
" la secrezione interna delle ghiandole sessuali delle quali poi
" non come organo di riproduzione, ma come ghiandole a se-
" crezione interna essa diventa regolatrice, e solo quando i ca-
" ratteri sessuali secondari si sono impiantati in modo organi-
" camente euritmico, la epifisi va incontro a regressioni, il che
" vuol dire dopo la pubertà " (p. 691). La gh. pineale non eserciterebbe adunque la sua azione moderatrice dello sviluppo sessuale se non in quanto le stesse ghiandole sessuali ne risvegliano la funzione. Non vedo su quali fatti poggi questa ipotesi, che non mi pare nè provata nè utile per la interpretazione dei resultati. Così l'ipertrofia dei testicoli e *quindi* dei caratteri sessuali secondari negli animali privati della pineale in giovane età, come il normale sviluppo sessuale nella pubertà

che coincide con la regressione anatomica e funzionale della pineale, inducono a ritenere che questa eserciti un'azione moderatrice sullo sviluppo sessuale, senza ricorrere all'ipotesi che tale azione venga risvegliata dalla secrezione interna delle ghiandole sessuali. Se questa fosse necessaria, la castrazione in età giovanile dovrebbe avere per resultato l'atrofia della pineale, ed è strano come il Polvani non si stupisca che invece la castrazione non porti alterazioni nella pineale e si esprima anzi dicendo che tali alterazioni non si hanno perchè con la castrazione " alla pineale sono mancati gli elementi stimolanti, gli ormoni della gh. interstiziale del testicolo e dell'ovaio ".

Oggi possiamo tutt'al contrario affermare che la castrazione induce un'ipertrofia della gh. pineale (Pellegrini (1)), e questo sempre più ci allontana dal credere che il suo sviluppo abbia per condizione l'azione stimolante degli ormoni sessuali.

Il Polvani stesso ha del resto morfologicamente confermato per l'uomo che " la funzionalità specifica di questa ghiandola " è attiva nella prima infanzia (circa 5 anni) e che essa dimi- " nuisce perchè va incontro ad involuzione all'iniziarsi della " pubertà " (p. 691). La sua funzione si esplica adunque come altri ed io stesso abbiamo affermato quando gli ormoni sessuali non hanno ancora cominciato ad agire, per cessare quando questi esplicano la loro massima azione.

Nuove ricerche sull'estirpazione della gh. pineale nel gallo.

Seguendo la stessa tecnica che descrissi nel mio primo lavoro ho eseguito nel 1912 una nuova serie di esperimenti sul pulcino ottenendo risultati operatori migliori della prima volta. Su 10 animali operati 7 sono sopravissuti all'estirpazione totale della ghiandola pineale. Di questi 5 erano femmine. Tutti i pulcini provenivano da uova di razza Padovana incubate artificialmente. I risultati di questi esperimenti non sono che la

(1) R. Pellegrini, *Gli effetti della castrazione sulla ghiandola pineale* " Arch. per le scienze mediche ", XXXVIII, n. 6, 1914.

conferma di quelli che avevo reso noti in antecedenza. Dopo una diminuzione iniziale di peso gli animali operati raggiunsero a capo di una settimana il peso dei pulcini di controllo, e poi il peso degli uni e degli altri procedeva di pari passo con minime differenze talora in più, talora in meno, non eccedenti i cinque grammi. Nessun effetto apprezzabile produsse adunque l'operazione sulla crescita dell'animale. Le galline furono sacrificate in tempi diversi dopo l'operazione: due di esse dopo 5 mesi, due dopo 7 mesi e una dopo 9 mesi. Contemporaneamente veniva sacrificata una gallina della stessa età non operata. L'esame degli organi genitali, la quantità e la grossezza delle uova emesse (dalla gallina sacrificata dopo 9 mesi dall'operazione), il peso del corpo, lo stato dello scheletro, non dimostrarono alcuna differenza fra le galline operate e quelle della stessa età non operate. Molto apprezzabili invece furono le differenze riscontrate nei maschi. Dei due galli operati uno fu sacrificato dopo 5 mesi e mezzo dall'operazione, l'altro dopo 10 mesi assieme al rispettivo controllo della stessa età.

Riferirò con qualche particolare ciò che riguarda questi due maschi, che appartenevano alla medesima covata.

Operati il 30 aprile del 1912 all'età di 32 giorni, i primi dieci-quindici giorni dopo l'operazione rimanevano quasi di continuo fermi in piedi con le penne arruffate e la testa infossata tra le penne e con gli occhi chiusi. Scossi da un rumore alzavano la testa, facevano qualche passo e poi ripiombavano immobili.

Non si nutrivano spontaneamente, ma deglutivano frammenti di lombrici e grani di riso e di mais che venivano loro introdotti nel becco. Poi poco a poco ripresero a muoversi spontaneamente, a beccare nel terreno ed a cibarsi da soli. Le penne crebbero e non erano più arruffate. Il peso che durante i primi 10 giorni era rimasto quasi stazionario ricominciò poi a crescere e un mese dopo l'operazione divenne uguale a quello di tre galletti non operati appartenenti alla stessa covata. In quest'epoca difficilmente si riconoscevano i galletti operati dai controlli. A capo di 3 mesi nessuna differenza apprezzabile. Non li rividi durante i mesi di agosto e settembre. Il 10 ottobre le differenze fra i due galletti operati e i tre non operati erano evidenti: La cresta dei primi era notevolmente più

grossa di quella dei controlli, il portamento più maestoso, nessuna differenza nelle penne e nello sperone.

Il 15 ottobre sacrificai per dissanguamento uno dei galletti operati e uno dei controlli. Erano trascorsi 168 giorni dall'operazione e l'età dei galletti era di 200 giorni. Il peso del corpo era per l'operato di gr. 1671, per il controllo di gr. 1652. La cresta pesava rispettivamente gr. 35 e gr. 23. Un testicolo gr. 8 e gr. 5,2. Nelle figg. 3 e 4 sono riprodotte le fotografie delle creste e di un testicolo di questi due galli, ridotte esattamente a un quarto della grandezza reale degli organi. Trattenni l'altro testicolo, l'ipofisi, le gh. surrenali, il timo e la tiroide per l'esame istologico, fissandone parte in liquido di Zenker, e parte nella miscela formol-cromica di Ciaccio. Nessuna differenza apprezzabile nello scheletro. Malgrado l'esame più accurato di sezioni delle diverse ghiandole a secrezione interna, colorate con l'ematossilina ferrica, col metodo di Ciaccio per i lipoidi e con ematossilina Delafield ed eosina, non mi riuscì di poter stabilire la menoma alterazione consecutiva all'operazione.

La differenza era invece notevole fra i testicoli, ma era, se così posso esprimermi, una differenza quantitativa, non riguardante il numero degli strati delle cellule spermiogeniche nè il loro rispettivo stato di maturità, nè l'aspetto degli spermatozoi abbondantissimi nel lume dei canalicoli testicolari in entrambi i casi, nè la ricchezza *relativa* di tessuto interstiziale. La differenza consisteva unicamente nell'ampiezza dei canalicoli che, misurata in quelli sezionati normalmente all'asse longitudinale e che presentavano quindi una sezione circolare, era di $^1/_4$ maggiore nel testicolo dell'animale operato rispetto a quello del controllo. Si può affermare che i due testicoli, raggiunta entrambi la maturità sessuale, si trovavano tuttavia in uno stadio differente di sviluppo ed era avvenuta una crescita maggiore del volume di ogni canalicolo e quindi dell'organo nell'animale operato che non nell'altro. Vedremo più innanzi come questo resultato sia identico a quello ottenuto sui ratti.

Il secondo galletto operato anch'esso il 30 aprile del 1912 all'età di 32 giorni presentò durante i primi 15 giorni dopo l'operazione gli stessi sintomi che ho descritto per il primo, e anch'esso dopo circa un mese raggiunse il peso dei controlli non operati. I primi giorni di ottobre la cresta era uguale a

quella dell'altro galletto operato e quindi considerevolmente più grossa di quella dei controlli. Essa crebbe poi ancora notevolmente fino al 27 febbraio 1913, giorno in cui sacrificai ad un tempo il gallo operato e i due galli di controllo della stessa età. Erano trascorsi 303 giorni dall'operazione e l'età dei galli è di giorni 335.

Le figg. 5 e 6 riproducono la fotografia delle creste e di un testicolo del gallo operato e di uno dei controlli, ridotti esattamente ad un qnarto della grandezza reale degli organi.

	peso dell'animale	peso della cresta	peso di un testicolo
Gallo operato	gr. 2076	gr. 85	gr. 18
1° controllo	„ 2082	„ 63	„ 12
2° „	„ 2065	„ 62	„ 12

Dalla tabella dei pesi e dalle fotografie appare evidente quale maggiore sviluppo abbiano assunto i testicoli e la cresta del gallo operato. Quanto dissi dell'esame istologico del testicolo per il caso precedente posso ora ripetere per questo caso. Non sviluppo maggiore del tessuto interstiziale a danno dei canalicoli, nè viceversa, ma proporzionale maggiore sviluppo di entrambi i tessuti caratterizzato da una maggiore ampiezza del diametro e del lume dei canalicoli, e da un maggiore distanziamento di essi per opera del tessuto interstiziale. Il testicolo dell'animale operato è uniformemente più sviluppato di quello dei controlli, sebbene gli uni e gli altri siano attivi e secernenti. La differenza è simile a quella che si riscontra esaminando due galli di età differente ma entrambi sessualmente maturi, *cosicchè mentre lo sviluppo somatico non viene influenzato dall'operazione viene invece notevolmente anticipato lo sviluppo degli organi genitali e di quelli che costituiscono i caratteri sessuali secondari.* Non è impossibile che lasciando vivere più a lungo i galli essi avrebbero raggiunto un'età nella quale tali differenze sarebbero scomparse; questo fatto se fosse accertato significherebbe che l'asportazione della ghiandola pineale non produce una ipertrofia dei testicoli, ma soltanto ne anticipa lo sviluppo. Vedremo come le esperienze sui ratti confermino questa interpretazione. *L'esame istologico dei testicoli conduce inoltre alla conclusione che l'iper-*

trofia della cresta cioè l'anticipato sviluppo di un carattere sessuale secondario, va di pari passo con l'anticipato sviluppo del testicolo, senza che si possa attribuirlo più alle cellule interstiziali che al tessuto canalicolare. Con questo non si può nè affermare nè negare che i caratteri sessuali secondari dipendano dalle cellule interstiziali del tessuto, come oggi si ritiene.

Esperimenti sull'estirpazione della ghiandola pineale nel ratto.

La tecnica di questo esperimento è identica a quella da me adoperata sul pulcino; le maggiori difficoltà consistono nella maggiore vulnerabilità dei giovani ratti, nella maggior durezza delle ossa craniche, e nella facilità all'infezione che esige tutte le cautele asettiche, punto necessarie invece operando sul pulcino. Avendo operato 8 giovani ratti del peso fra gr. 60 e gr. 85 ne sopravissero 4, dei quali tre maschi. Quando gli animali non erano morti entro le prime 24 ore, sempre si salvarono. Restavano da principio raggomitolati con respiro affannoso senza nutrirsi e poi dopo un giorno cominciavano a correre per la gabbia e a cibarsi spontaneamente. Gli animali operati dovevano essere tenuti isolati, perchè attratti forse dall'aspetto insolito della ferita cranica avevano la tendenza di morderla o di graffiarla a vicenda. L'alimentazione così per i ratti operati come per i controlli era mista di pane, frumento, riso e mais. Il formaggio ha una influenza notevolissima sullo sviluppo dei ratti, tanto che questo procede lento se manca il formaggio, e pochi grammi di esso bastano ad aumentare in pochi giorni notevolmente il peso dei ratti. Poichè una differenza nella somministrazione del formaggio poteva dunque portare a notevoli errori nel giudicare il peso degli animali, lo esclusi dal regime dei miei ratti. Ho seguito con discreta frequenza il peso degli animali e il tracciato riprodotto nella fig. 1 dimostra l'andamento del peso di due ratti operati e di quello di un ratto di controllo appartenente alla stessa nidiata dei primi. Gli animali operati, che pesavano inizialmente uno 5 e l'altro 2 gr. e mezzo meno del controllo, rimasero più leggeri di quest'ultimo durante i primi

8 giorni, ne raggiunsero il peso verso il 10° giorno e dall'undicesimo fino al quarantaseiesimo crebbero più rapidamente. Il massimo della differenza di peso si notò dopo 26 giorni, poi la differenza andò decrescendo e dopo 48 giorni uno dei ratti ope-

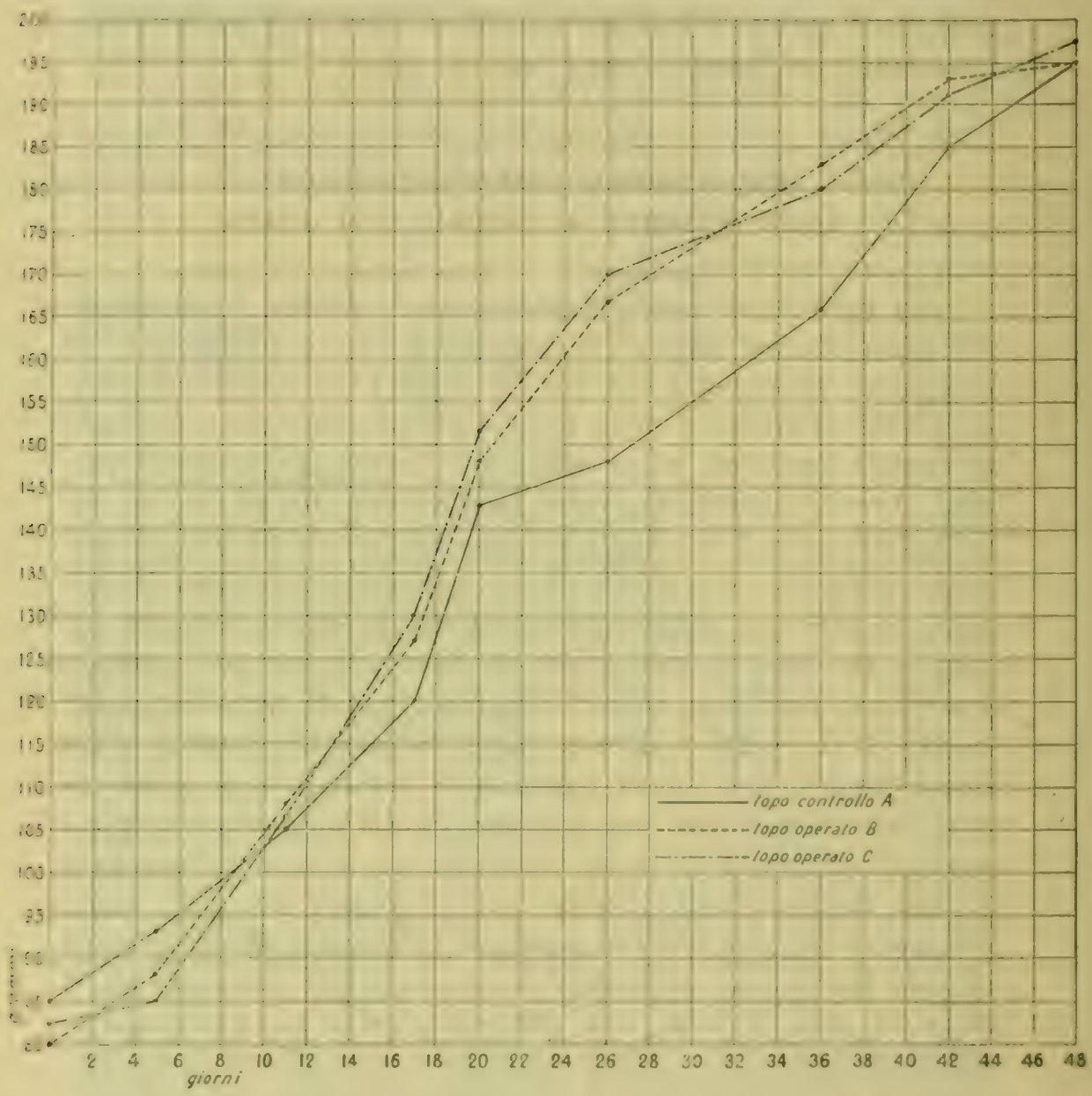


Fig. 1.

rati (B) pesava come il controllo, l'altro (C) pesava soltanto 2 gr. di più. I tre ratti furono sacrificati 48 giorni dopo l'operazione.

All'autopsia non potei riscontrare differenza alcuna nell'aspetto nel peso e nel volume dei testicoli, del pene, delle

vescichette spermatiche, e di tutte le ghiandole a secrezione interna.

L'esame istologico dei testicoli fissati in liquido di Zenker o nella miscela formol-cromica di Ciaccio, per mettere in evidenza i lipoidi non permise di distinguere per differenza alcuna quelli pel controllo da quelli dell'animale operato, nè per il

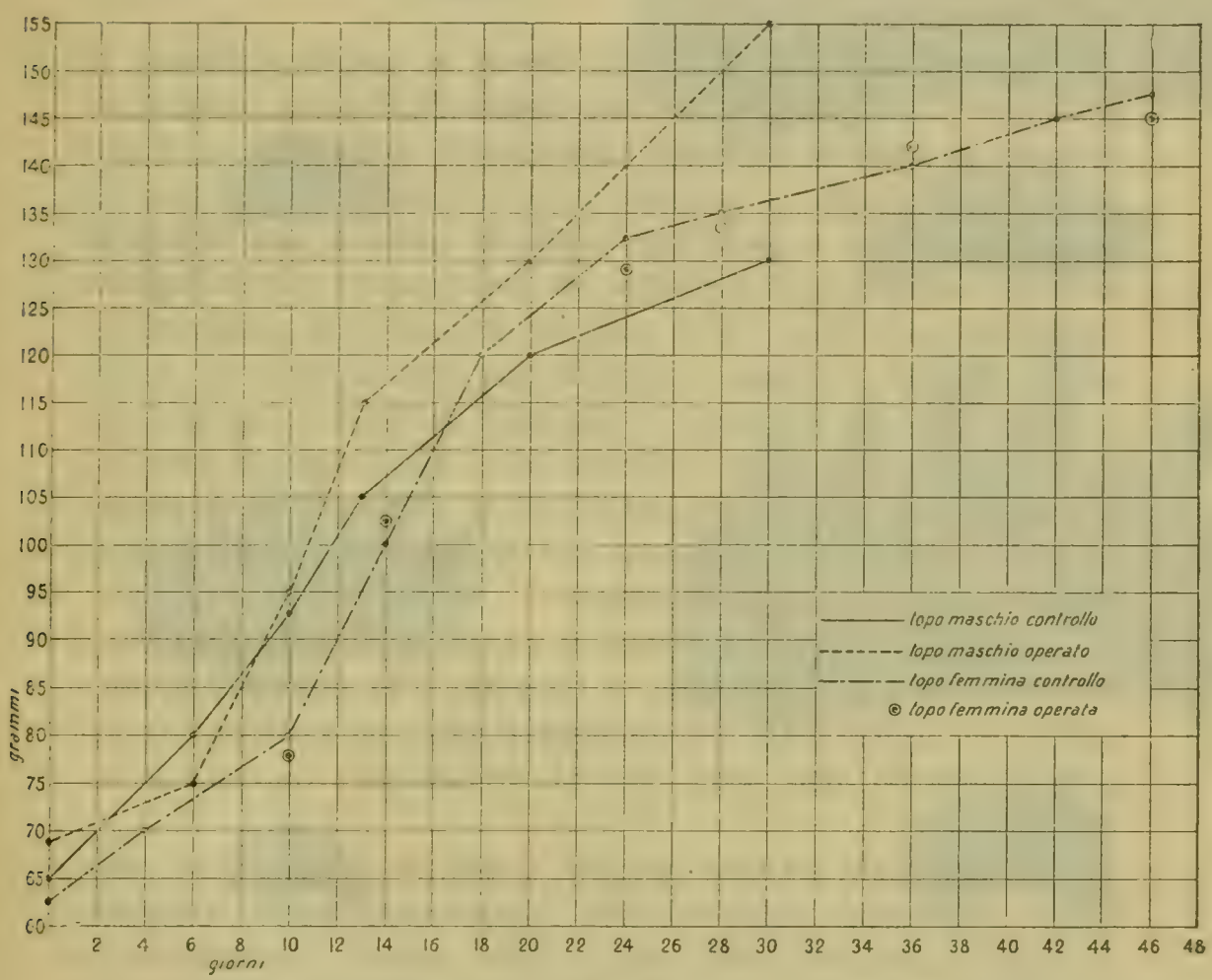


Fig. 2.

tessuto spermiogenico nè per il tessuto e per le cellule interstiziali.

Pensando che forse una differenza si sarebbe potuta notare nel periodo di massima differenza di peso degli animali, sacrificai un altro ratto operato ed il relativo controllo della stessa covata dopo 30 giorni dall'operazione. La fig. 2 dimostra che il peso del ratto operato, inizialmente di 4 gr. più elevato di quello del controllo, rimase invece durante i primi 8 giorni dopo l'operazione inferiore, per raggiungerlo nel nono giorno e

superarlo poi progressivamente, fino a toccare al trentesimo una differenza di 25 grammi. Sacrificati gli animali in questa epoca, l'autopsia dimostrò che i testicoli del ratto operato erano più voluminosi di quelli del controllo, mentre il pene e le vescichette spermatiche non presentavano alcuna differenza. Il peso di un testicolo del ratto operato era di gr. 1,6, un testicolo del controllo pesava gr. 1,2.

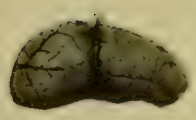
L'esame istologico dei pezzi fissati in liquido di Zenker, di Hermann e nella miscela formol-cromica di Ciaccio, mentre non permise di scoprire differenze apprezzabili nell'ipofisi, nelle surrenali, nella tiroide e nel timo, rese evidente che fra i testicoli del ratto operato e quelli del controllo esisteva una differenza notevole nel grado di sviluppo. Si osservino le microfotografie riprodotte nelle figg. 7 e 8 eseguite entrambe da preparati fissati in liquido di Zenker, colorati con ematossilina ed eosina e fotografati con obiettivo 4 Koritzka mediante l'apparecchio di Edinger. La differenza evidente fra i due preparati concerne il diametro ed il lume dei canalicoli, la distanza che li separa la quale lascia anche supporre uno sviluppo proporzionalmente maggiore del tessuto interstiziale.

Ma una ipertrofia assoluta di quest'ultimo a danno del tessuto canalicolare non esiste, e l'aspetto e la quantità apprezzabile dei lipoidi delle cellule interstiziali resi evidenti col metodo di Ciaccio non sono diversi nell'animale operato e nel controllo.

Nel testicolo del ratto operato, al maggior diametro del canalicolo corrisponde pure un lume proporzionalmente maggiore, cosicchè lo spessore degli strati delle cellule spermiogeniche non differisce molto nei due testicoli. Non si può affermare che il processo di spermiogenesi sia diverso nei due testicoli, se non per una maggiore abbondanza di spermatozoi contenuti nel lume più ampio dei canalicoli del ratto operato. La linea a tratti inframezzata da punti nella fig. 2 indica la crescita di peso di un ratto femmina normale, ed i punti isolati contornati da un cerchio corrispondono ai pesi di un ratto femmina della stessa covata, operato di asportazione della pineale.

Si vede che la crescita avviene ugualmente nei due ratti, e questa osservazione così come la nessuna differenza macro e microscopica nelle ovaie e nelle mammelle della femmina ope-

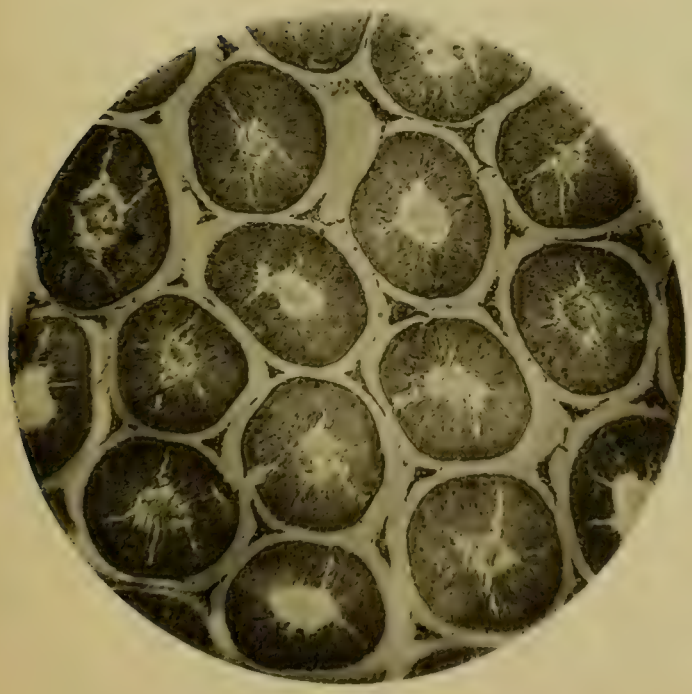
3



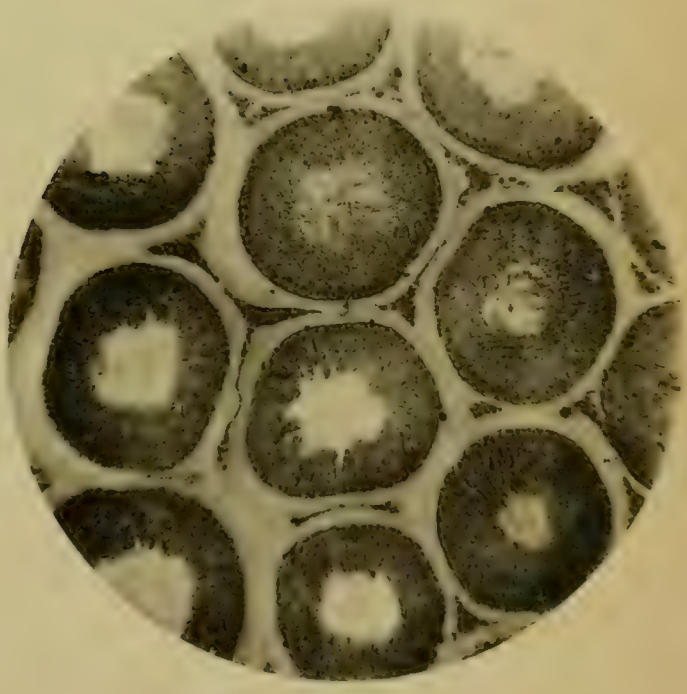
5

4

6



7



8

Officina Fototecnica Ing. Molfese. Torino

rata e del controllo, confermano il resultato negativo ottenuto sulle galline con l'asportazione della pineale.

Conclusioni.

1° Dalle nuove esperienze sull'asportazione della ghiandola pineale nei pulcini maschi in giovane età viene confermato il resultato da me precedentemente ottenuto, che cioè all'operazione consegue uno sviluppo dei testicoli e della cresta più rigoglioso che nei galli di controllo non operati.

La differenza comincia a rendersi manifesta cinque mesi dopo l'operazione e diviene sempre più accentuata fino al nono mese. Nessun effetto produce l'operazione sullo sviluppo generale del corpo — nessun effetto sulle galline.

2° L'asportazione della pineale in ratti giovanissimi mentre non produce effetti apprezzabili sulle femmine, provoca nei maschi un più rapido sviluppo somatico, e la differenza massima fra il peso degli animali operati e quello dei controlli si osserva 26-30 giorni dopo l'operazione. Poi gradatamente il peso dell'animale operato raggiunge quello del controllo.

3° Nel momento in cui è massima la differenza di peso si osserva pure uno sviluppo notevolmente maggiore dei testicoli nell'animale operato. La differenza dei testicoli scompare quando si uguaglia il peso del corpo.

4° L'esame istologico dei testicoli così dei galli come dei ratti nel momento delle massime differenze di volume e di peso, rivela uno sviluppo uniformemente più avanzato di tutti i tessuti della ghiandola. Più elevato il diametro dei canalicoli, più ampio il lume di essi, maggiore la massa di spermatozoi che riempie il lume canalicolare, più distanziati fra di loro i canalicoli e quindi maggiore lo sviluppo del tessuto interstiziale. Nessuna differenza nel processo spermiogenico se non per la quantità degli spermatozoi che occupa il maggior lume del canalicolo.

5° Essendo uniformemente più sviluppati il tessuto canalicolare e le cellule interstiziali negli animali operati, non è

possibile dire a quale di questi due tessuti sia dovuto il maggior sviluppo somatico nel ratto.

6° Le esperienze sui ratti hanno dimostrato che l'asportazione della ghiandola pineale non produce una ipertrofia assoluta dei testicoli, bensì un anticipato sviluppo di essi. Passati circa 48 giorni dall'operazione il ratto operato non si distingue più in nulla dal controllo. Questa osservazione conduce a confermare la dottrina che attribuisce alla ghiandola pineale una funzione inibitrice sullo sviluppo sessuale, onde si comprende che con l'iniziarsi della pubertà coincida una involuzione della ghiandola pineale.

Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. Giuseppe Gola dal titolo: *Epatiche della Regione del Kenia* (Africa orientale).

La Memoria del Dott. Gola è un contributo alla conoscenza della Flora epaticologica della regione situata intorno al M. Kenia (Africa orientale) a S. e a SW. di tale monte. Le conoscenze su tale argomento sono finora pressochè nulle, e l'A. ha potuto valersi di due collezioni raccolte dai Missionarii di N. S. della Consolata di Torino residenti in quella regione.

Si è potuto così stabilire l'esistenza di 33 specie, delle quali 19 nuove, con tre nuove varietà, le quali costituiscono un contributo notevole alla conoscenza epaticologica dell'Africa equatoriale.

L'A. ha corredato di illustrazioni le diagnosi delle specie nuove, ha potuto completare la descrizione di specie finora incompletamente conosciute. Ha infine aggiunto qualche considerazione sulle affinità che la regione studiata presenta con quelle circostanti, in parte già considerate in altri lavori dell'A. (Spedizione di S. A. il Duca degli Abruzzi — Etiopia).

Sotto il punto di vista distributivo si conferma per questa regione quanto è già stato osservato per altri gruppi montuosi dell'Africa centro-orientale, e cioè l'affinità della flora epaticologica della zona montuosa inferiore con quella dei paesi situati più a Sud e a Est (Madagascar, Mascarene, Usambara, ecc.). Nella zona montuosa elevata, salvo qualche scarso elemento del sistema alpino europeo, sono pure i tipi del Sud quelli che prevalgono, sia per affinità sistematiche, sia per portamenti e caratteri biologici; vi si trovano infatti tipi affini (*Plagiochila Aloysii Sabaudiae*, *Sphenolobus Savioi*) a quelli che si osservano nella Nuova Zelanda, nel Sud della Catena Andina, e che, lungo la Catena Andina, come in Africa seguendo le vette montane, raggiungono la regione equatoriale.

La breve Memoria che il Prof. Gola ha presentato all'Accademia sarà indubbiamente cara ai biologi, perocchè essa rivela un notevole gruppo di interessanti forme nuove, il cui numero speriamo abbia ad aumentare coi nuovi contributi che seguiranno questa prima illustrazione delle Epatiche proprie alla regione montuosa dell'Africa centrale, se si potrà presto intraprendere lo studio di nuovo materiale, che, come annunzia l'A. è già stato raccolto e potrà quanto pr,ma essere inviato in Europa.

Siamo lieti che queste osservazioni, le quali portano nuova luce alla Epaticologia di una regione sulla quale sinora pareva dovesse imperare il monopolio scientifico esclusivamente inglese, partano da un laboratorio italiano e sieno condotte su materiali esclusivamente raccolti da italiani.

Il lavoro è inspirato a concetto scientifico accurato, e criticamente ci è sembrato bene impostato, così che siamo lieti di proporne l'accettazione per i volumi Accademici.

Torino, 22 Aprile 1914.

C. F. Parona.
Oreste Mattirolo, *Relatore*.

Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. Enrico Mussa dal titolo: *La Flora dell'Agro Torinese dopo i lavori di J. B. Balbis e di G. F. Re e considerazioni sull'indigenato di talune specie.*

Il Dottore Enrico Mussa Direttore della Biblioteca Civica di Torino, distinto e appassionato cultore delle Scienze Naturali, ha presentato una Memoria sulla *Flora dell'Agro Torinese dopo i lavori di J. B. Balbis e di G. F. Re*, sulla quale la R. Accademia ci ha dato l'onorevole incarico di riferire, ciò che oggi facciamo, lieti di segnalare ai suffragi dell'Accademia un lavoro di merito non comune, attentamente e faticosamente messo insieme, collo studio di ingente quantità di materiale da lui raccolto, e coll'esame delle collezioni conservate nel Museo dell'Orto botanico Torinese, che egli ha integrato con osservazioni originali numerosissime, e colla consultazione di tutte le opere che hanno riguardo alla vegetazione dell'Agro di Torino.

In questo lavoro l'autore ricorda che, dopo le classiche flore dei botanici Torinesi J. B. Balbis e G. F. Re, più non comparvero studi complessivi sulla vegetazione di tutto l'Agro, epperò richiama l'attenzione sulla opportunità che ora, a distanza di circa un secolo, si proceda ad una revisione integrale della vegetazione locale per addivenire alla compilazione d'una nuova *Flora* delle nostre regioni.

Egli rileva come, durante il secolo scorso, l'Agro Torinese, specialmente là dove più si è intensificato il fenomeno dell'urbanesimo, abbia profondamente modificato la propria fisionomia e come, correlativamente, l'azione invadente della città sul ter-

ritorio rurale abbia pure disturbato energicamente la vegetazione locale.

Ricorda come nel frattempo anche le erborizzazioni — che furono attivissime specialmente per merito del personale dell'Orto botanico di Torino — abbiano rivelato la presenza di molte forme vegetali non avvertite dai primi floristi dianzi citati, per esempio: *Corynephorus canescens*, *Gladiolus imbricatus*, *Hesperis matronalis*, *Isoëtes malinvernianum*, *Nardosmia fragrans*, *Poa serotina*, *Trisetum myrianthum*, *Tulipa praecox*, *Wolffia arrhiza*, ecc.; e come certe specie esotiche, originariamente avventizie, siansi talmente adattate al nostro ambiente da assumere vera sembianza di piante indigene, esempi: *Acer Negundo*, *Amorpha fruticosa*, *Polygonum cuspidatum*, *Solidago glabra*, ecc.

Ciò premesso, egli ritiene che la ricompilazione della *Flora dell'Agro Torinese* sarebbe giustificata da varie considerazioni.

Le flore del Balbis e del Re, ottime per i tempi in cui furono pubblicate, evidentemente non possono più corrispondere alle esigenze della Botanica moderna, la quale omai richiede in questi lavori, oltre ad una esatta ed esauriente descrizione sistematica, anche l'adozione d'un sistema di classificazione rispecchiante le acquisizioni attuali della scienza; una documentazione critica per ogni specie, quando occorra, per dirimere certe intricate complicazioni di sinonimia, e per stabilire la vera posizione sistematica d'ogni entità tassonomica; crede inoltre che omai una flora moderna completa voglia essere integrata da un buon corredo di elementi biologici illustrativi delle specie registrate, quali i fenomeni periodici vegetativi (fioritura, fruttificazione, ecc.), la posizione dell'*habitat*, la natura mineralogica e geologica del suolo, le considerazioni ecografiche e le associazioni, ecc.

Certe specie coltivate sono ora generalmente ammesse nelle trattazioni floristiche, non così in passato, come quelle che indubbiamente conferiscono, e spesso in modo notevole, alla formazione del paesaggio botanico della regione; le così dette piante da frutta: peschi, peri, meli, ecc. in aprile imprimono un carattere del tutto peculiare alla vegetazione.

L'importanza dello studio delle piante avventizie, che in

questi ultimi tempi ha preso sì largo sviluppo, esige che in una flora locale si tenga il massimo conto di tali forme, delle quali almeno alcune possono considerarsi quali future specie virtualmente locali, esempi: *Amorpha fruticosa, Ailanthus glandulosa, Aesculus Hippocastanum, Aster Novi Belgii, Bignonia Catalpa, Brussonetia papyrifera, Chenopodium ambrosioides, Commelina vulgaris, Cyssus hederacea, Erigeron canadensis, Fragaria indica, Hesperis matronalis, Lepidium virginicum, Oenothera biennis, Robinia Pseudoacacia, Solidago glabra, Xanthium spinosum*, ecc.

La topografia stessa — come già venne avvertito — ha subìto enormi cambiamenti, tanto che i nomi di certi siti sono omai persino cancellati dalla memoria della popolazione attuale, per esempio: la località dell'*Idraulica* così frequentemente citata dal Balbis, quelle del *Pilonetto* e del *Po morto*, ecc.

L'autore prospetta quindi i limiti che, a suo avviso, sarebbero da assegnarsi all'Agro Torinese, agli effetti della ricompilazione d'una nuova flora, ampliando di qualche poco la circoscrizione fissata dal Balbis e già alquanto allargata dal Re, dandone le ragioni.

Presenta un *Saggio di Bibliografia della letteratura floristica torinese*, accennando in modo particolare ai recenti lavori che sono bensì contributi di notevole valore, e di cui si dovrà tenere il massimo conto dal futuro Florista; ma che, essendo limitati a singole regioni dell'Agro, fanno anche maggiormente desiderare un'opera complessiva, fondamentale e completa della vegetazione del nostro territorio.

Nella seconda parte del suo lavoro poi l'Autore enumera sistematicamente le specie esotiche comparse nella nostra flora locale, avventizie o naturalizzate, coltivate o spontanee, e quelle indigene scoperte nel tempo, citando dati storici, che riguardano le specie che gli venne fatto di raccogliere.

Tale enumerazione comprende circa 300 forme e cioè una cinquantina di indigene spontanee o coltivate, un duecento circa di esotiche coltivate o naturalizzate, ed una cinquantina di avventizie.

Il lavoro del Mussa, eseguito in gran parte sotto i nostri occhi, raccolto in lunghi anni di ricerche, ci è sembrato accurato, completo e ben condotto. Esso riassume una raccolta preziosa di dati illustranti la *Flora Torinese* tali che riesciranno

di grande utilità per lo studioso della nostra Flora locale. Per questi motivi, elogiando l'Autore, proponiamo che il lavoro presentato dal Mussa venga favorevolmente accolto dall'Accademia e pubblicato nei volumi delle sue Memorie.

Torino, 19 Aprile 1914.

C. F. Parona
Oreste Mattirolo, *Relatore.*

Relazione sulla Memoria del Dott. Ernesto LAURA: *Sul problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi.*

Il Dott. Laura tratta in questa Memoria uno dei più importanti problemi della Dinamica dei mezzi isotropi, quello cioè della propagazione delle onde generate in un mezzo ambiente indefinito da una perturbazione continuata, da un certo istante in poi, sulla superficie di un corpo limitato.

Come possano essere distribuite le onde longitudinali e trasversali in un tal mezzo, non può dedursi dalle ordinarie equazioni del moto senza ricorrere ad ipotesi che specifichino il problema analitico. Il Dott. Laura però, invece di ricorrere ad ipotesi speciali, costruisce senz'altro *a priori* un modello di movimento, quale l'intuizione più ovviamente può suggerire, con condizioni ai limiti che sembrano le più semplici possibili e riesce a dimostrare che in tal modo il problema analitico risulta univocamente determinato.

Il concetto fondamentale di una tale rappresentazione è che il moto si propaghi entro le due superficie d'onda longitudinale e trasversale, corrispondenti alla superficie generatrice del moto al tempo t, in modo che dappertutto regni la continuità per quanto riguarda le vibrazioni, e che sulle due fronti d'onda ciascuno dei due moti ad esse corrispondenti si annulli.

Il contenuto ipotetico non potrebbe quindi essere più semplice e naturale. Il Laura ne trova poi una notevole giustificazione facendo vedere che anche il moto elementare prodotto in un mezzo indefinito da un centro di forza può essere interpretato come conforme al suo modo di concepire la propagazione. Siccome è noto che in generale i moti vibratori possono considerarsi come rappresentabili per via integrale mediante quei

moti elementari, trovati da Stockes, tale risultato si presenta effettivamente come una giustificazione attendibile.

La importanza dei risultati, la possibilità della loro applicazione a problemi speciali concreti, la correttezza della trattazione raccomandano l'accettazione del lavoro del Dott. Laura nelle Memorie Accademiche.

A. Naccari
C. Somigliana, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 3 Maggio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Carle, Pizzi, De Sanctis, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Brondi.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 19 aprile 1914.

Il Presidente partecipa la morte del Presidente della Imperiale Accademia delle Scienze di Vienna Edoardo Suess, geologo illustre, che era anche Socio straniero dell'Accademia nostra nella Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

D'ufficio è presentato il volume inviato in omaggio dal Socio corrispondente Giuseppe Dalla Vedova, che contiene i suoi *Scritti geografici* scelti e coordinati a cura di un Comitato di geografia per festeggiare l'ottantesimo genetliaco dell'autore, che cadeva il 29 gennaio 1814 (Novara-Roma, Istit. geogr. De Agostini, 1914).

Con molte e notabili informazioni e con parole di vivissimo elogio il Socio Pizzi offre i volumi 2°, 3° e 4° del *Diction-*

naire persan-français del barone Jean-Jacques-Pierre Desmaison, pubblicato dai nipoti (Roma, Tipografia Vaticana poliglotta, 1910-1914). Donatrice di questi volumi, come già del primo, è la contessa Margherita Buffa di Perrero nata Reymond.

Per l'inserzione negli *Atti* vengono presentate le seguenti Note:

1° da parte del Socio De Sanctis, *Ζεὺς Ἄφριος e il nome Ἀφροδιτη* del prof. Vincenzo Costanzi;

2° da parte del Socio Ruffini, *Un memoriale inedito di Prospero Balbo nel dicembre del 1799*, per cura di Eugenio Passamonti.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata, elegge, salvo l'approvazione Sovrana, il prof. cav. Federico Patett Socio nazionale residente.

Da sostituire a pag. 882.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata, elegge, salvo l'approvazione Sovrana, il prof. cav. Federico Patetta a Socio nazionale residente.

LETTURE

Note di fonetica italiana meridionale.

Nota di CLEMENTE MERLO.

(I. *-u̯-* da *-L-* intervocalico preceduto da vocal velare in alcuni dialetti di tipo pugliese settentrionale. — II. *u* da *ə dietro *l* nel dialetto pugliese di Ostuni).

I.

Nei vernacoli di una piccola parte della Puglia settentrionale (Bitonto, Bari, Modugno), il *-L-* intervocalico, dietro vocal velare (ŏ, ō ŭ) di sillaba debolmente accentata, volse nella semivocale *u̯* e fu facilmente assorbito (A); si mantenne dietro vocal tonica in genere e dietro vocale di sillaba debolmente accentata che non fosse ŏ od ō ŭ (B):

BITONTO (1) ⟨A: *-ue* -ŭLU ⟨ [*avetàq.* " inquilino, casigliano „ (v. andr. *avətakₙu̯ələ*)] (2), [*capit.* ' capitolo '], *cord.* (da CHŎRDU) " serotino, tardivo (di frutta) „, *crìst.* (v. class. CRĬSTŬLA) " cresta, bargiglio „, *cùr.* " cilindro, curro, rullo „ (v. nap. *cúrrulə*), *cùunz.* " castello del frantoio (3); lenza (4) „, *cùunz.* " de-

(1) I materiali sono tolti dal piccolo ' *Lessico dialettale bitontino-italiano* ' del S.r Giacomo Saracino (Molfetta, 1901). Con ' *Note fonet.* ' rimando alla prima parte del saggio ' *Note fonetiche sul parlare di Bitonto (Bari)* ', pubblicato negli ' *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* ', vol. XLVII, pp. 907/932; v., in particolare, i §§ 22 *c* e 17 *c*.

(2) *Cànue* " gola dei pozzi „, se è maschile.

(3) A Molfetta, *cuenze*; entrambi da ' conciare ' ⟨ *COMPTIARE. La voce ital. lett., tosc. è uno dei molti esempi dello scambio tra CJ e TJ di cui ragionai nel vol. LVIII (1908) delle ' Memorie ' di questa R. Accademia, a p. 162, n. 7.

(4) Cfr. il molf. *cuenzele*; entrambi da ' conciare ' (v. qua sopra). Nel tarant., *cuenzo* ' concio ' " cordellina che si ravvolge intorno alla trottòla „; " palamiti per la pesca „ (De Vinc.).

sinare che si fa alla morte di alcuno (1) „, *cùuzz.* " baccello, ecc. „ (v. molf. *cuezzele*, mater. *kuzzələ*, ecc.) (2), *dàtt.* DACTYLUS " frutto di mare e di terra „ (v. molf. *dattele*), [*diàv.*], *frišk.* " arnese di giunchi per mettervi dentro il pastone delle ulive o la vinaccia, quando si posano sotto il torchio o strettoio „ (v. tar. *fiškolo*, nap. *fisc.*, *friscole* s. m. pl., ecc. (3)), *gràng.* *GRANCŬLU " contrazione dolorosa dei muscoli „ (v. molf. *grénghele*, ecc.), [*manìp.* " manovale „ (4), manipolo (de' sacerdoti)], [*màsq.* (p. 39) maschio], [*mót.* " mòdano, misura o modello, ecc. „], *mùr.* **munn-* **mun.* (da MŬNDARE) " fruciandolo „ (v. irp. *munulə*, abr. *mónnələ*, castell. (rom.) *munnuru*, ecc. (5)), *pisci.* " goccia, gocciola „ (v. irp. *pisciolo*, ecc.) (6), *pizz.* " becco, beccata „ (v. molf. *pízzele*, irp. *pìzzolo*, ecc.), *ràs.* " raso, colmo (agg.), rasiera (s. m.) (7) „, *ressìq.* "acciarino (della sala dei veicoli a a ruote) „ (v. molf. *rezzichele*, sor. *arzíkələ*, ecc.), *rùut.* " strumento che adoperano i muratori a far la calcina, *marra* „ (v. irp. *ruòtolo* " battiburro „, ecc.), *rùuzz.* (deverb. di *rezzuèue*; v. più sotto) " frullino per la cioccolata „, [*scàmb.* ' scampolo '], *sceddùv.* (deverb. di *scedduvuèue*; v. più sotto) " lo sdrucciolare; sorta di giochi fanciulleschi „, *škàcque* (deverb. di *škacquèue*) " papavero, rosolaccio „, *spìq.* (deverb. di SPĪCULARE) " ribrúscola, il ricercare sulle viti o su altri alberi i frutti che per avventura vi possano essere rimasti, dopo la raccolta „ (v. molf. *spichele*, ecc.), *strìpp.* ' sterpolo ' " torso, torsolo; favule „ (v. molf.

(1) V. Salvioni in '*Oss. varie*', 162. La voce andriese è *kuénzə*. Notevole il palen. (abr.) *cunźəjə* (Fin.).

(2) Al *COCIA da COCHLEA, accolto dal Meyer-Lübke in *REW.* 2011, mi pare di gran lunga preferibile un *COCIA da (co)COCEA " testa, zucca e sim. „ (v. il mio '*Grillotalpa vulgaris*' in '*St. Rom.*' IV, p. 154, n. 1).

(3) A Molfetta, *fischele* (*-sk-*?); nel teram., e in vari luoghi del chiet., *frísculə* s. f. (v. *R. de Dial. Rom.*, I, p. 259, n. 3).

(4) V. molf. *ménipele*.

(5) Nel teram., *múnnələ* s. m. " grande sozzura, sozzura personificata „ (Sav.); nel calabr., *munnula* s. f. (e *munnarèlla*, sic. *munnalora*) " bruciata „. Qui anche l'abr. *munnələ* s. m. pl. " sambuco selvatico „? in quelle contrade i fruciandoli si farebbero mai, o si sarebbero fatti un tempo, con frasche di sambuco? — Il bel deverbale manca al *REW.*

(6) Deverb. di ' pisciolare ' (v. sotto).

(7) Deverb. di un **rasuèue* " rasare „.

stripele s. pl.), *tendìn.* " battaglio (della campana); ànsola (del battaglio) „ (cfr. i lat. TINTINNUM e TINTINNABULUM (1)), *verrùq.* " cavalletta „ (v. tarant. *virruculo*, ecc.; ' *Sdrucc. nel dl. di Molf.* ', a p. 166, n. 9), *vic.* VĪCŬLU; ancora, *checìv.* (v. tar. *cucivule*, ecc.; ' *Sdrucc. nel dl. di Molf.* ', a p. 166, n. 3) e con suffisso, o presunto suffisso, scambiato, *iàbb.* APALU (v. sic. *apulu*, ecc.; *REW.* 512) e *cìci.* CYCINOS *REW.* 2435 (2), *-ùuzzue* ' òzzolo ' ⟨*carr.* " sorta di carro, lungo, basso, stretto, a quattro ruote; cassino „, *canar.* " sorta di pasta „ (v. molf. *chénéruezzele*), ecc.; - *pizzuafremmòiche* s. m. " rampichino (ucc.) „ (v., più sotto, *pizzuèue* (3)); *-ue* -ŬLA ⟨*ardiq.* " ortica „ (v. ' *Note fon.* ', § 1 *b)*, n. 3), [*brišk.* ' briscola '], *brušk.* *BRUSC(ŭ)LA *REW* 1341 + -ŬLA " spazzola con la quale si ravversa il pelo ai cavalli, dopo strigliati, *brusca* „, *bur.* *BŪRULA *REW.* 1418, *chellùq.* " lucciola „ (4), [*ciòt.* ' ciòtola '], *dònn.* ' dònnola ', *facèt.* FICĒDŬLA (v. ' *Note fon.* ', § 2, I *b*), *fèr.* FĔRŬLA " pianta della famiglia delle ombrellifere „ (v. calabr. *fièrula*, ecc.) (5), *ghiàn.* " ghianda „, *macèn.* MACHĬNULA (v. Salvioni in ' *App. mer.* ' 45), *magnàtt.* ' magnattola ' (6) " sanguisuga „, *pàs.* *PASSŬLA (v., più sotto, a p. 896, n. 4), *pètt.* " frittella (7) „; " lembo della camicia che esce dietro dai calzoncini spaccati dei bimbi (8) „, *pin.* " pillola „

---

(1) Il molf. *tendidde* dev'essere una riestrazione da un assimilato o dissimilato **tintillulu*.

(2) Da contaminazione tra -ĪLE ed -ŬLU, verisimilmente, la serie *mbèsue* " di soppeso „ (v. nap. *pèsole*, irp. *pésolo*, ecc., scambio di *pis-*), *iàbbue* HABĬLE, *mbèrtue* (' fertile ' con prostesi di IN-), *sfèrtue* " sterile „ (' fertile ' con prost. di EX-), *uèrdue* " trivella „ (v. a. pugl. *guerdile*, sor. *uẹrdələ*, abr. *vẹrdələ*, nap. *vẹrdənə* *-*ələ*, ecc.).

(3) Nell' ' *Avifauna* ' del Giglioli, a p. 158, un pugl. *pizzola menua* (propriam. *pizzua men.*? barese?) " becca mandorle „ Parus cæruleus e, a p. 162, un catan. (sic.) *pizzulazucchi* " becca ciocchi „ Sitta cæsia, picchio muratore.

(4) Deverbale di un **colluquèue* ⟨ COLLŪCARE " espandere viva luce, risplendere „?

(5) Il molf. *fèrghe* " ferula „ sarà FĔRŬLA + VĬRGA? e il nap. *fèrcola* " ramo di pianta infruttifera troncato a forza, forcina, forca „ sarà FĔRŬLA + FŬRCA?

(6) V. MINIATULUS in Cicerone (' *Att.* ', XVI, 11).

(7) V. molf. *pètele*, mater. *pettələ*, irp. *péttola*, ecc.

(8) V. molf. *pètele*, cerign. *pettələ* (§ 79), irp. *péttola*, campb. *pẹttula*

(v. molf. *pinele* e qua sotto a p. 892), *preppèt.* " pipita (dei polli) „ (v. nap. *pepitola*, ecc.), [*radiq.* " graticola „], *scèsci.* " giuggiola „ (1), *sèm.* ' semola ' (v. molf. *sèmele*), *sès.* *SĔSSŬLA (v. molf. *sesele* e Schuchardt in *Ztschr. Gröb.* XXX, p. 657), *sèt.* SĒTŬLA (v. molf. *sètele*), *spìng.* " spillo; informicolamento „ (v. molf. *spinghele*, irp., tar. *spìngola*, agn., cal., sic. *spìngula*, abr. *-ulə*, ecc.), *spìn.* SPĪNŬLA " succhiello; spillo (delle botti) „ (v. abr., molf. *spinele*, irp., tar. *spìnola*, ecc.), [*tàv.* ' tavola '], *terròzz.* " carrucola; girella „ (v. molf. *trozzele*, nap. *teròcc-*, *tròcciola*, ecc.), *trezzèt.* " alzávola „ (v. bar. (?) *terzedola*; Giglioli in '*Avifauna*', p. 312), *vòcq.* " chioccia „ (v. molf. *vochele.* irp., nap. *vòccola*, ecc.); ancora, *amìn.* " mandorla „ (v. molf. *eminele*, irp. (*a*)*mènnola*, e *REW.* 436), *pìst.* ' pisside ' ⟨ bar. *pisde*, abr. *pìsete*, irp., napol. *pìseta* + -ŬLA; *-ue* -ŬLAE ⟨ *mìcq.* s. pl. " lenti „ (v. campb., agnon. *miccula*, irp. *nemiccola*, ecc. (2)), *ròs.* " geloni „ (v. '*Note fon.*', § 7 I *b*) (3); ≈≈ *cuèue* CŌLARE, *vuèue* VŎLARE (v. *vùule* in '*Note fon.*', § 8 II *a*), *-uèune* -ŬLANU ⟨ *urt.* ' ortolano ', *-uèure* -ŬL-ARIU ⟨ *greff.* " grifo del porco „ (v., più sotto, *greffuèue*), *-uèuue* -ŬL-ARE ⟨ *aggrang.* " aggranchire „ (v. molf. *aggrénghelá* e, qui sopra, *gràngue*), *appas.* " appassire „ (v. irp.

(p. 152), castr. (rom.) *pettəla*, *-ula*, ecc. Notevole l'irp. *pettolanculə* ' pett. in c. ' " fanciullone „.

(1) Come il bar. *scesciue* (v. più sotto) e il tar. *scèsciola*, da una base *JEJJŬLA con E da gr. *υ*, di contro al nap. *jójela* (e *jójema*, *jójma*).

(2) A Molfetta, *micche* " piselli freschi „.

(3) *Pèrue* " pergola; pergamo „ va certo col molf. *pèrghe* (v. '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', a p. 158, n. 4) (*). Anche *mòrue* continuerà un *AMŬRGA (v. il tar. *moria* e le mie '*Note it. centro-merid.*', a p. 251). Il lessico bitontino ci dà pur *taràndc* ⟨ molf. *taréndc*, ecc. (Salvioni in '*App. mer.*' 31) e un bel *pannevèndc* " rivendúgliolo „ (**). — Ha *-l-* semivocalizzato anche *dammìue* " dámmelo „; e qui la vocal velare seguirebbe. È cotesto un duro problema e io non ne tenterò la soluzione prima d'aver quei dati che ancora mi mancano. Non è improbabile che si tratti di esiti nati in protonia, da mandar con le forme dell'articolo di cui si ragiona più sotto.

(*) E così il bar. *pèrrue* in cui non occorre leggere col Salvioni (v. '*Oss. varie*', a p. 770) un **pèruvula* (cfr. *sorrue* **sorero* SORRU, *surrue* **surero* **surero* SŪMERU, ecc.).

(**) V., pel costrutto, Salvioni in '*Wörter und Sachen*', III, p. 134.

appassolá, molf. *-elá*, ecc.), *car.* " tarlare „ (v. vicent. *carolare*, molf. *carlá*, ecc.), *casc.* " dimagrare; affloscire (forse da CASCU; *REW.* 1734), *chet.* " tentennare; smuovere „ (v. molf. *chetelá*, nap. *cotolá*, ecc.), *frecc.* 'forbiciolare', *frucc.* (?) " tagliar con le forbici „, *greff.* " russare „ (v. molf. *grefelá*, irp. *gruoffolá*, ecc.), *lucq.* " bociare „ (v. mater. *ləkkəlá*, tar. *lucculá*, ecc., donde tar. *lùcculo*, molf. *lùchele*, ecc.) (1), *narv.* *'inarbolare' " acculare (di barroccio e sim.) „ (v. irp., nap. *árvolo*, ecc.), *nzemm.* (da SŬMMA) " raggruzzolare „ (v. molf. *nzemelá*), *pisc.* *'pisciolare' " gocciolare „ (v. ven., pad., vic. *pissolare*, friul. *pisclá*, vegl. *pesla* 3ª sng. e irp., nap. *pesciolejá* '-oleggiare'), *pizz.* " beccare; bezziccare; mangiucchiare „ (v. molf. *pezzelá*, irp. *pizzolá*, tar., cal. *-ulare*, sic. *-ari*), *resceng.* " avvincidire „, *rezz.* „ agitare; rimenare „ (2) (v. molf. *rezzelá*, irp. *rozzolá*, ecc.), *sbend.* (da 'spinta') " spingere, sbatter via „, *scap.* " uscire di scuola; smettere un lavoro „ (v. abr., molf. *scapelá*, irp. *scapolá*, cal. *-ilari*, ecc. e *REW.* 2955), *scarz.* " sbaccellare (fave, piselli e sim.) „ (3), *škacq.* " l'aprirsi dei fiori, sbocciare „ (v. molf. *škachelá*), *scedduv.* " sdrucciolare „, *scheff.* " demolire, abbattere „ (v. tar. *scuffulá* " rovinare, crollare (di muri) „, irp. *scoffolá* " sgranare; smallare; dirocciare „), *schet.* " scuotere, spolverare „ (v. molf. *schelelá*, mater. *skətəlá*, irp. *scotolá*, ecc. e più sotto a p. 898), *sfrenz.* (da *sfronze* FRONDIA) " sfrondare „, *spen.* (da SPĪNULA, v. sopra) " spillare (il vino) „ (v. molf. *spenelá*, irp. *spinolá*, ecc.), *speq.* SPĪCŬLARE (4) " spigolare, racimolare „ (v. molf. *spechelá*, irp. *speculá*, ecc.) (5), *spezz.* " sbocconcellare, spilluzzicare; guadagnar poco „ (v. molf. *spezzelá*) (6), *tezz.* " cozzare „ (v. molf.

---

(1) Negli Abruzzi, nel Napoletano, nell'Irpinia, ecc., *alluccá* " bociare, strillare „, donde *allucco* s. m. (nap., irp.) " strido, strillo forte ed acuto „. Son tutte voci da aggiungere al § 4224 del *REW.*; per l'Italia basterebbe *ŭccare. Degno di nota il nap. *lùccalə*, *-arə* Strix Bubo, il quale mi ricorda i bellissimi bar. *lagnə*, andr. *lańə*, nomi dell'allocco, del cuculo. '*Lagno*', un deverbale di '*lagnare*' ch'è quanto dire " lamento „, " strazio „!

(2) Nella 2ª sng. dell'Imper. Pres., *rùuzzue!*

(3) Verisimilmente, da CARDIOLUM (*REW* 1683).

(4) Manca al '*Lat. rom. Wörterb.*'[3] del *Körting*.

(5) Nel calabr. e sicil. vive il deriv. *spiculiare*, *-ari* '-oleggiare'.

(6) Verisimilmente, non con 'pèzzo', ma con 'pizzolo' " becco „ e 'pizzolare' " bezzicare „; v. napol. *pezzoliarə* " beccare; piluccare „, irp.

tezzelá, nap., irp. *tozzolá*, ecc.), *vrezz.* (1) " far girare la trottola „ ; — *-uèute* -ŭL-ATU ⟨ *amin.* " mandorleto „, (v., qua sopra, *amìnue*), *arv.* (da ERVUM) " pisello „, *casc.* " magro, sparuto, ecc. „ (v., qua sopra, *cascuèue*), [*ndiav.* ' indiavolato '], *tav.* " palco, soffitto, solaio „ (v. molf. *tavelate*, tar. *-ulato*, ecc.); *-uèute* -ŭL-ATA ⟨ [*cecq.* ' cioccolata ' (v. irp. *ceccolata*, ecc.), donde *cecquatèire* (v. irp. *ceccolatèra*)], *fress.* " padellata „ (v. irp. *fressolata*) (2), *schet.* " bastonatura; scrollatina di spalle „ (v. irp. *scotolata*, ecc.), *sem.* (da *sèmue*; v. sopra) " pulenda „ (v. molf. *semelate*); *-uatìure* -ŭL-ATŌRIU ⟨ *scap.* " cestino „ (l'arnese fatto di vimini dentro al quale si pongono i bambini perchè imparino a camminare) (3), *tezz.* " battente, picchiotto „ (v., qua sopra, *tezzuèue*); *-uatàure* -ŭL-ATŌRIA ⟨ *speq.* " spigolatura, racimolatura; pagliuolo (4) „ (cfr. il molf. *spechelatouere* SPĪCŬLATŌRE); *-uatìidde* -UL-ATELLU ⟨ *tav.* " palco morto „ ; *-uàune* -ŭL-ŌNE ⟨ *sping.* " spillone „ (v. irp. *spengolone*), *tav.* ' tavolone '; riparo di legno o altro sulle porte delle botteghe o delle finestre per ripararle dalla pioggia „ ; *mariungìille* ' mariuolo ' + ' -oncello ' " ladroncello „ ; *-uìuse* -ŭL-ōSU ⟨ *mbraq.* ' miracoloso ' (v. ' *Note fon.* ', § 17 *b*); — *aduèsce* ADŎLESCERE; *-uèire* -ŭL-ĔRIA ⟨ *zanz.* " cenciosa (di donna) „ (cfr. nap., irp. *zènzola*, molf. *zènzele*, ecc. " cencio, brandello „); *-uòite* -ŭL-ĒTU ⟨ *frug.* " bolliciattola pruriginosa; sudamina „ (v. molf. *freghelajete*); *-uicchie* -ŭL-ĬCŬLU ⟨ *diav.* " peperoncino „ (v. tar. *diavulicchio*, cal. *-icchiu*), *fes.* " tarallo (?) „ (5), *-uècchie* -ŭL-ĬCULA

-olejá " bezzicare; sbocconcellare, ecc. „, cal. *pizzuliare*, sic. *-uliari* " bezzicare; butterare „; irp. *pezzolejato* " beccato; butterato „; Castelb. (sic.) *pizzulia zucchi* " bezzica ciocchi „ picchio muratore; — nap. *spezzoleare*, irp. *-olejá*, tar. *spizzulisciare*, cal. *-uliare* " spilluzzicare, piluccare „.

(1) *Vezzuèue* nel lessichetto, ma l'ordine delle voci richiede *vrezz-*.

(2) E bitont. *fressàulə*, irp. *-òla*, bar. *fresolə*, tar. *frizzòla* " padella „, forme dissimilate da aggiungere al § 3524 del *REW*.

(3) V. l'irp. *a la scapula* " in balìa; senza duce „.

(4) V. per lo scambio del suffisso, ' *Sdrucc. nel dl. di Molfetta* ', a p. 163, n. 1.

(5) A p. 111 si parla di " taralli „ che si mettono nella *spasaràule* (v. sotto) con gesso e altro per informarli. Io cerco invano la voce nei lessici italiani. Di che si tratterà mai? *Fesuìcchie* sembra un derivato di FŪSU, da mandare col tosc. *fusaiuòlo*, col nap. *fəsillə* " libellula „, col molf. *fəsiddə* " capezzolo „, con l'irp. *fusiddi* s. pl. " una specie di pasta „, i quali potevano figurare nel § 3620 del *REW*.

⟨ *amin.* " mandorla tenera „ (cfr. cal. *mienn.*, sic. *minnulicchia* dimin.), *cresci.* (da *crescìule* correggiolo) " vilucchio „, *pet.* " pettegola „ (cfr. molf. *petelèdde*), *vequ.* (da BŬCCULA ⟨ cal. *vúccula*, ecc.) " maglietta dov'entra il gangheretto „ ; *-uìinde* -ŬL-ĔNTU ⟨ *chiangi.* " piagnucolone „ (v. molf. *chiéngeliende*, ecc., lomb. *pianġorent*, ecc.), *mazz.* (da *màzze* " magro „ (1)) " macilente, sparuto „ ; *-uidde* -ŬL-ĬLLU ⟨ *am.* (2) (da HAMŬLA ⟨ molf. *émele*, mater. *ámələ*, ecc.) " ampolla dell'olio; utèllo „, *credd.* (da CHŎRDA) " cordellina „ ; *-uètte* -ŬL-ĬTTA (o -ĔTTA) ⟨ *man.* " manovella „, *scref.* " dado (delle viti) „ (cfr. nap. *scròfola*, *-olella* e v. Barbier in ' *Bull. de Dial. Rom.* ' IV, 17); *-uizze* -ŬL-ITIU ⟨ *fum.* (da FŪMU) " vapori che dallo stomaco salgono al capo „ (v. molf. *femelizze*), *trem.* (da TRĔMULU) " parlètico „ (v. molf. *tremelizze*, cal. *trem.*, tar. *trimul.* " parlètico „, abr. *trem.*, sic. *trim.* " tremito „, ecc.); *-uuscèue* ' -oleggiare ' ⟨ *men.* (3) (da MŬNDU ; v. il bar. *menuisciá* " spolverare „ (4)), *mest.* ' invest. ' " avvoltolare „, *vind.* " far vento, sventolare; scompannare „ (v. nap. *ventoleare*, molf. *vendlesciá*, ecc.), *strequescèue* **-uusc.* " strofinare „ (v. irp. *strecolá*, molf. *strechelá*, ecc.); *-uoìne* -ŬL-ĪNU, -A ⟨ *masc.* ' mascolino ', " malescio „, *vert.* " bastonatura „ (v. nap. irp. *vertolina* s. f. (5)), *muòine* ' mulino (?) ' " trambusto, baraonda „, *-uòie* -ŬL-ĪRE ⟨ *abbrest.* " tostare „, ecc. (6).

-L- intatto in *addelerèute* ' addol. ', *chelàure* ' colore ', *scolatèure*, *semelìne* ' semolino ', voci recenti, e in *nghelòisce* " desiderio, voglia „ (7) (su GŬLA?), *fasulìne* ' fagiolini ' (su **fasule*?) (8), in *canelicchie* (da CANNULU) Solen siliqua (v. nap. *kannəlikkiə*, tar. *ca-*

---

(1) V. Salvioni in ' *Fonet. e morfol. delle parlate merid. d'Italia* ', a p. 16.

(2) Se di genere maschile; altrimenti, -ĪLLA.

(3) In *scuple de* — " pennacchio „ (sic).

(4) Più sotto, a p. 899 e cfr. irp. *munulà* " spazzare il forno „.

(5) Da *vèrtola* " bisaccia „.

(6) Nota anche le forme, semplici e composte, dell'articolo maschile : *u* **uu* ' lo ', *au* ' al ', *du* del, *cu* col, le quali sono, è vero, ben altrimenti diffuse nel mezzogiorno, e in cui la vocal velare segue, non precede, ma che avranno in fondo dappertutto la stessa ragione, una pronunzia velare del L.

(7) V. ' *Note fon.* ', § 3, II *a*.

(8) Manca al lessichetto, ma v. bar. *fasule*.

nilicchio, ecc.)(1), *chelumme* " fico fiore „, *prevelàune* ' provolone ' (v. nap. *pròvola*, ecc.), *spingolètte* " sorta di chiodi „, *tavelìire* (v. molf. *-eliere*, irp., nap. *-olièrə*, ecc.), non indigeni? — Assimilazione, anteriore al semivocalizzarsi del *-l-*, in *tùmene* TŬMŬLU che è anche cerign. (*túmənə*; Zingarelli in ' *AGlIt.* ', XV, § 48), tarant. (*túmmino*), lecc. (*túmmenu*; Morosi in ' *AGlIt.* ' IV, 134), cal. (*túminu*), sic. (*túmminu*).

⟨ B: *sòule* ' suòla ' " suolo (della scarpa) „ ; " cuoio „ *-òule* *-(I)ŏLA ⟨ *castagn.* (da CASTANEA) " schiocco fatto con le dita (2); nacchera (3) „ (v. molf. *castégnouele*, nap. *castagnola* (4), ecc.), *var.* *VĬRIOLA " ghièra „, *vener.* (da VENDERE) " rivendugliola „, ecc.; *scòlabrǫ'ute* (v. ' *Note fon.* ', § 7 I *e*); *vòule* ' vuole ' ; *stùule* STŎLU, *-ùule* *-(I)ŏLU ⟨ *magghi.* ' magliuolo ', *chiumazz.* piumacciuolo (pezzetta ecc. la quale si mette sull'apertura della vena onde si leva sangue), *mestazz.* mostacciuolo, *pedezz.* pedagnuolo (il fusto dell'albero ancor giovane), ecc., *vùule* s. m. (5) (v. molf. *vuele* e ' *Note fon.* ', § 8 II *a*); *gàule* GŬLA, *-aule* *-ǫLA ⟨ *tagghi*, tagliuola, *mazz.* mazzuolo (degli scalpellini), *tragn.* " allodola „ (6); *cazzar.* casseruola, *grattar.* " grattugia; graticola de' confessionari „, *pendar.* (da ' punta) " cappelletto „ (delle calze), *spasar.* (7) " specie di canestro per seccarvi fichi, ecc.; arnese di ferro, in

(1) Fa eccezione anche a Bari (*canelicchie*; v. più sotto). A un incrocio con CANALE vieta di pensare l'*e* protonico (v. ' *Note fon.* ', § 16).

(2) Dal rumore caratteristico che fan le castagne, messe a cuocere tra la brace, scoppiando. V. anche il tosc. *castagnòla* " involto di cartoncino pieno di polvere e legato a più doppi con spago impeciato che, incendiato, produce un forte scoppio „.

(3) Che si suole anche dire *castagnétta.*

(4) All. a *castagnélla.* Tra i derivati di -(I)ŏLU da CASTANEU che mancano al § 1742 del *REW.*, si notino ancora i seguenti: it. *castagnuolo* " castagno giovane e piccolo „, sic. *castagnolu* " di color castagno (agg.); travicello di legno di castagno (s. m.) „, nap. *castagnola* Echinus miliaris, genov. *castagnêua* Psammechinus microtuberculatus.

(5) In *pegghièue a* — (p. 82), *sparèue a* — (p. 110).

(6) V. Salvioni in ' *Post.* ' e agg.: umbro *tarragnola*, nap. *terr-*, tar. *tirr-*; ostun. *tranola* " allodola „ ; agn. *terragnuole* " trave di albero reciso a fior di terra „.

(7) V. il nap., irp. *spasa* " cesta, sporta „ col der. *spasella,* il molf. *spase* " cesta piena e larga per riporvi abiti di gala; vassoio „, i velletr. *spasetta, spasino* " cestello di forma allungata „, ecc. e *REW.* 3030.

cui si mettono taralli (?) (1), gesso, ecc. per informarli „, *spenar.* (da SPĪNA) " dente canino (v. bar. *diente spinarole* s. pl.: Zonno, 56) „; " sponderuola „; *cammes.* camiciuola, ecc.; *-ìule -ọLU* ⟨ *cresc.* (da CORRĬGIA) " correggia (delle scarpe); codetta (della frusta) „ (2); *carvenar.* " carbonaio „ (v. molf. *carvenéraule*, ecc.), *erar.* (da AREA) (3) " colui che nella trebbiatura dei grani accosta le bestie all'aia dove son distesi i covoni, accostatore „, *ervar.* (da HĔRBA) erbaiuolo, *fafar.* (da FABA) " tonchio „ (v. tar. *favarulo*, lecc. *faraulu* e *falauru*, ecc.); " lima sorda (di chi opera copertamente) „ (4), *grattar.* (da 'grattare') (5), *pagghiar.* (da 'paglia') " capanna „ (6); " chi vende paglia „ (v. molf. *pagghiarauele*, irp. *pagliarulə*, ecc.), *papar.* " peperone „ (v. irp. *pep-*, *peparuolo*, abr. *peparólə*, molfett. *paparuele*, rom. (castr.) *pəparuọlə*, ecc.), *pedar.* (7), *pendar.* (da 'punta') " punteruolo (ferro, ecc.); spillo (delle botti); orzaiuolo „ (v. molf. *pendarauele* " stiletto „, irpin. *pontarulə*, ecc.), *renar.* (da ARENA) " polverino (vasetto, ecc.) „ (v. nap., irp. *arenarulə*, cerign. *rənarůlə*, tarant. *-arulə*, cal. *rina-*

---

(1) V. qua sopra a p. 888, n. 5.

(2) V. *REW.* 2253 e agg.: molf. *cresciauele*, tar. *crusciulo*, irp. *correjulo* (pl. *-ola*), agn. *crjuole*, ter. *currejulə*, rmgn. *curzôl*, cremon. *courezzool*, ecc. " striscia di cuoio „; napol. *corriulo*, *-ejulo* " viticcio „, *correjola* s. f. Convolvulus sepium, vast. *crijéule* s. f. vilucchio (*), metaur. *co-*, *curiòl* vilucchio, piac. *côrzöla* Polygonum aviculare, ecc. Può essere che il mezzogiorno muova da una fase con -RR- scempiato, d'accordo con la voce toscana.

(3) V. *ere* AREA in *Ere de Léie* n. loc.

(4) Altri derivati di FABA che mancano al *REW.*: tosc. *fa(v)ule* " campo dove sono state seminate fave, e poscia svelte; gambo delle fave svelto e seccato „, lucch *favaccio*, paves. *favass*, mod. *favàz*, piac., parm. *-àzz*, ecc. " colombaccio „ (-ACEU; -ATIU); irp., tar. *favalə*, ven. *-àle*, faent. *-êl*, friul. *-àl*, ecc. " campo seminato di fave „ (-ALE); mil. *favèe* (in *colomb f.*), nap. *favarə* " colombaccio „, abr. *favarə*, vast. *faf-*, bol., parm. *favar*, piac. *-âr*, mod. *-èr*, ecc. " campo, ecc. „ (-ARIU); parm. *favaræul* Motacilla œnanthus; agn. *fafeáta* s. f. " vivanda fatta con le fave „; piem. *favot* " baccello pieno di fave fresche „ (-ŎTTU), piem. *favuss* " gambo delle fave „ (-ŪCEU), ecc.

(5) In *cardàune* — " cardoncello „.

(6) Cfr. il cal. *pajjalora* s. f. " stalla „.

(7) Del fuoco; *focolare* (?).

(*) Anche l'abr. *crijóle* è femm. in questo senso.

lùoru, sic. *-aloru* (1), ecc.); *cinar*. **cinerar*. " cenerácciolo (v. molf. *ceneraule*, rom., march. *cenerolo*) „; " cenerone „ (2); ecc.; *nghìule* 'in culo', *-ìule* -ŪLE; *pèule* 'pala', *schèule* 'scala'. *sèule* SALE, *-èule* -ALE ⟨ *cann*. (da CANNA " gola „) " collare (de' cani „ (v. molf. *chénnéle*, nap. *cannale*, ecc.), *dent*. DĔNTALE (v. *REW*. 2559 e agg.: abr. *dendale*, vast. *dind*., irp., tar. *dentale*, andr. *dəntaḷə*, ecc., piem., friul. *dental*, ecc. (3)), *discet*. DĬGĬTALE (v. molf. *descetale*, tar. *discit-*, irp. *iditalo* **dijit-*, **jidit-*, cal. (cas.-aprigl.) *jiritale* s. m., ecc.), *gangh*. " dente molare (v. irp. *jancalə*, nap. *gangalə*, tar. *vangale*, ecc. (4)) „, *garz*. " guanciata; gonfiore delle guance per mal di denti o per altro „ (v. *gàrze* " guancia; branchia „ (5));

(1) Nel sicil. dice anche " chi porta rena „ (v. tosc. *renaiuolo*). Mancano coteste voci al *REW*.

(2) Derivati di CĬNIS che potrebbero figurare nel *REW*.: nap. *cenneraćć*ə " lisciva „, cal. *cinnerazzu*, sic. *cinnirazzu*, rmgn. *zindrazz*. ecc. " cenerone „ (-ACEU, -ATIU); tosc. *cenerácciolo* " panno che copre la conca del bucato „, parm., ecc. *zendrar* " chi compra o porta la cenere „, abr. *cenerał*ə **-ar*ə, vast. *cinnirir*ə s. m. " ripostiglio della cenere „, nap. *cennerał*ə **-ar*ə " cenerone; ceneracciolo „, metaur. *cnerèr* " ceneracciolo „ (-ARIU); molf. *cenérédd*ə **-erar-*, abr. *hatta cenerèll*ə (vast. *h. cinnirèll*ə) " cenerentola „; berg. *sendraröl*, bol. *zindrarol*, ecc. " chi compra cenere „ (-ARŎLU); it. *cenerata* " cenere che resta nella conca dopo che vi è passata sopra l'acqua bollente „, cal. *cinner-*, tar. *cinirata*, abr. (vast.) *cinnirat*ə, met *énerèta*, rmng. *zindrê* s. f., bol. *zindrá* s. f., mod. *-éda*, berg. *sendrada*, ecc. (-ATA); rom., march. *cenerato* s. m. " cenerata „, sic. *cinniratu* s. m. " ceneracciolo „; sic. *cinniraturi*, tar. *ciniratur*ə, irp. *ceneratur*ə, ostun. *čənəlatur*ə " ceneracciolo „ (-ATORIU); sic. *cinniredda* s. f. " cinigia „; irp. *cenerił*ə " fornello del camino „, ecc. ecc. — Tra gli esiti di CINIS non erano da dimenticare il reat., aquil. *éene* e gli abr. *cin*ə (di S. Euf.), *ciàin*ə (di Pal. e Rocc.).

(3) Il tar. *dendal*ə (*REW*. 2561) va corretto in *-at*ə.

(4) Altrove, negli Abruzzi, *gangóne* che nel sic. dice " dente lungo che nasce ai giumenti nella vecchiaia (*ganguni*) „ e nel cal. " mangione; avaro; prepotente „. Ma più diffuso nello stesso senso è il primitivo 'ganga': v. molf. *ghénghe*, mater. *jañ*ə, cal. *ganga*, sic. *anga*, *agna*, *aña*, ecc.

(5) Un derivato della radice onomatopeica GARG- di cui in *REW*. 3685, un **GARGIA*. È di tutto il mezzogiorno (v. abr. *garź*ə s. pl., irp. *garza*, molf. tar. *-*ə, ost. *jarźa*; nap., sicil. *gargia*, cal. *gargie* s. pl.); dice per lo più " branchia „, ma anche " mascella „ (abr., irp.), " guancia „ (bit., molf., ost.), " faccia „ (sic.), " gola, laringe „ (nap., cal.). *Gargia* " branchia „ è nella Crusca; *garźa* " mascella del cavallo „ è in altri lessici. V. ancora i molf. *sgarzá* " pulire i pesci dalle 'garze' „, sic. *sgargiari* " id. e sgolarsi „, l'abr. *garźamell*ə, *harzamill*ə " ugola „ (di c. all'agn. *garzumiell*ə), ecc).

marǵ. " manico (della zappa, ecc.) (1) „, *sen.* (da SĬNU) " grembiale „ (v. calabr. *sinale*, mater., irp., napol. *sənalə*, agn., abr. *zenalə*, sen. *zinalə*, ecc.); *mertèule* " mortaio „ (2); *fèile* ' fiele ', *cìile* CAELU; *pòile* PĬLU, *tàile* TĒLA, ecc.; *pòile* PĪLA, *-òile* -ĪLE ⟨ *canar.* (da CANNA " gola „) " trachea; esofago (v. molf. *chénérajele*, mat. *kannarülə*, vell. *-arile*, ecc.); leccornia „, *mann.* " asciugamano „ (v. *REW.* 5325), *varr.* barile (v. sic. *varrili*. cal. *-ile*, mat. *-ülə*, ecc.), *fòile* ' filo ', ecc.; *ngulazzèue* (da CŪLU) " acculare (di carri) „, *mulecìidde* (da MŪLU) " trovatello „ (cfr. tar., nap., abr. *mulə*, tar. *mulacchiiddə*, *-acchione*, abr. *mulettə*, *-acchiə*, *-acchionə*) (3); *alòice* ' alice ', *ualèue* HALARE " sbadigliare „ (v. molf. *alá* e *REW.* 3998), *ualòisce* s. m. " sbadiglio „ (4); *calèue* ' calare ', *palèute* " sogliola „ (5), *paledde* (da PALA) " scapola (v. molf. *palèdde* " clavicola) „; " lippa „, *palomme* PALUMBA " colomba; farfalla; lunetta (term. d'archit.) „, *palumme* PALUMBU, *paluscene* ' peluggine '? " muffa „ (v. molf. *-uscene*, andr. *-öšənə*, irp. *palùjəna* (6), ecc.), *salèire* ' saliera ', *salèute* ' salata ',

(1) Vedine Ribezzo in '*Il dl. ap.-salent. di Francavilla Fontana*', § 1. I sinonimi sic. *marruggiu*, cal. *maruce* rendono probabile una connessione con ' marra ', ma il MAR(RI)CIALE immaginato dall'egregio autore è un mostricino morfologico. Semmai, da un *MARREX, -ĭCIS passato ai femm. di 1ª, con espunzione della postonica e conseguente sonorizzarsi della sorda, come nei pugl. *sorǵe* SOR'CE, *spirdə*, *-u* SPIR'TU, *mardá* MAR'TARE, e sim. — Del composto *cacamargèulə* " stiaccino „, v. più sotto a p. 902.

(2) Dissimilazione ben diffusa, non solo abruzzese (*REW.* 5693), ma arpin., sor. (*mərtalə*), agn. (*murtealə*), campb. (*murtalə*), irp. (*mərtalə*), andr. (*-aelə*), tar. (*murtalə*), ecc.; di c. al nap. *mortarə*, cal., sic. *murtaru*.

(3) Come nella campagna romana (v. *l'una i̯una* LŪNA, *l'inə i̯inə* LĪNU, di contro a *lummə* LŬMBU), l'ū va con l'ī, anzichè con l'ŭ ō; e ciò mi rafforza viepiù nell'idea ch'esso fosse un *u* tinto di *i*, di contro all'ŭ ch'era un *u* verso *o*. Ne parlerò di proposito altrove.

(4) Deverb. di uno **ualescèue* " sbadigliare „; verisimilm., formazione analogica su *scattòisce* " schiocco „ (v. *scattescèue* " schioccare) „, *stambòisce* " orma, pedata „ (v. *stambescèue* " calpestare, pestare „) e sim.

(5) Lo manderei col gr. *παλάθη* " pastone di frutti (fichi, noci) compressi „, se non gli stesse a lato il diffuso sibillino '*palaia*' ⟨ abr. *palajə* (*), nap., tar. *palaia*, cal. *-aja*, sic. *-ai* (plur.?) (**).

(6) Donde *palunejàrese* " ammuffire „; a Taranto dice " fuliggine „

(*) Più comunemente *sfòjje*.
(**) Nel sic. anche *linguata*.

salìume ' salume ', *salìute* ' salute ', *ualèune* " mandriano, ecc.; uomo rozzo, maleducato „ (v. irp., nap. *gualanə* " bifolco „, ecc.), *accialèue* " acciarpare, abboracciare „, *calandràune* " calandro (ucc.) „ (v. irp., nap. *calandrone,* friul. *-andron*, ecc. (1)), *calandredde* " mattolina (v. sic. *calandredda* (2)) „, " canicola (v. nap. *calandrella*) „, *malalèngue* e sim., *ammalagnèue* " stazzonare, sciupare „ (v. molf. *emmélégné* " id. „, tar. *malagnare* " andar male (di salute) „), ecc., *alòie* ' olive '; *pelèue* PĬLARE " scottare „ (v. abr. *pelá* (3)), *spelèue* " ' spelare ', spellare; ecc. „, *spelèute* " nudo (di ramo); calvo „, *mbelèue* ' impelare ' " mettere i peli, le penne „, *pelàcce* (da PĬLU) " peluria, lanuggine; la polverina argentea che riveste la buccia delle susine „, *pelàuse* ' pelosa ' " grancevola „ (v. molf. *pelouese*, bar. *pəlǫsə* (4)), *ndelèute* ' intelata ' " muro finto (di tela, legno, ecc.) „ (cfr. l'it. l. *intelare*), *melèdde* -ĬLLA " mela „, *melidde* " zìgomi „ (v. molf. *-idde*, nap. *melillə*, pl. *-éllə*, ecc. e cfr. it. l. *meluzze, pomelli*, lomb. *pomĭt*, ecc.), *melaune* ' melone ' (5), [*canelìire* ' candeliere '], *celamèdde* (cfr. it. *cennomella*; *R E W*. 1484).; *felèute* ' filato ' (6), *felatíidde* " capellini (sp. di pasta) (v. molf. *-atiedde* e cfr. sic. *filatu*), *felèire* ' filiera ' " filare (d'alberi, ecc.) „, *varelècchie* -ĬCŬLA " bariletto „, ecc. Qui ancora le forme composte dell'artic. femm. *a la* alla, *de la* della, *che la* colla (v. quel che ne scrissi in *Zeitschr. Gröb.* XXX, p. 17, n. 1). Assimilazione regressiva in *chembessienòine* **-òile* " confessionario „; dissimilazione nel diffusissimo *pinue* **pinula* (v. chiet. *pínele*, ort., ter. *pínnələ*, vast. *pènn.*, pal. *pìnərə*, campb. *pinnula*, molf. *pinele*, cal., sic. *pinnula*; — nap..

(*piluscina*). — Al § 6415 del *R E W*. agg.: nap. *pərire* " muffire „, donde *perimma* s. f. -ĪME(N) " muffa; secrezione di materia cenerognola alle narici dei moribondi „.

(1) Nel sic., la " lodola „ (mess. *calandruni*, caltag. *calannuruni*); più spesso la " calandra „ (lomb., ven., ver. *calandron*, rom., bar. *-one*, palerm. *-uni*, girg. *calanniruni*). V. Giglioli in ' *Avif. Ital.* ' 67, 57.

(2) E molf. *caléndrédde*, nap. *calandrella* " calandra „.

(3) " Di liquido o vivanda caldissima dicesi che *péle* (sbuccia) *la léngue* „; Finam.

(4) A Ostuni, *pəlǫsəna* s. f.

(5) In *mel. d'acque* " cocomero „, *m. de pèune* " popone „; anche " testa rasa; zuccone „.

(6) In *fíirre f.* " fil di ferro „.

irp. *pin(n)olo* s. m., tar. *pìnilo*, cal. *pinnulu*, bar. *pinnue* (v. qua sotto); — andr. *pelnə* **pen(n)*-).

BARI (1) ⟨ A: *-uə* -ŭLU ⟨ [*calc.* A. 70], *datt.* 67,76, [*dia.* 88], [*discib.* 8 (*dəscibb.* A. 22, 143) ' discepolo '], *grím.* 89 " ladroncello „, [*manib.* 54 " operaio „; v. qua sopra], *mier.* 71 MĔRULU, *mign.* 33 " foro (?) „, [*miragg.* 89 ' miracolo '], *pàpp.* (2) 73 Numenius tenuirostris " chiurlotello „, *pir.* 9 (3) " piuolo „, *recc.* 8 (*rècc.* A 152) ' broccolo ' " torsolo „ (v. tar. *ruèccolo*, ecc.), [*sèg.* A. 50, *seĝĝəu̯ə* N. 38 SAECŬLU], [*scab.* 91 ' scapolo '], *scarciòff.* A. 104 " carciofo „, *scatt.* 65 " papavero „ (v. molf. *škattələ* ' *Note it. centro-merid.* ' 259, n. 7 e qua sopra a p. 884). *spraggh.* 91 " sprazzo „ (v. molf. *sprachele* " sprazzo, barlume „), *sprecc.* 91 " sprocco „ (v. molf. *spruechele*, irp. *spruòccolo* e *spuòrcolo* e *spuòrco*, nap. *spruoccolo*, pl. *-occola*, agnon. *spruocchele*, ecc.), *strifinz.* 14 **strifr.*? " frinzèllo „, *tentin.* 22 " battaglio „ (v. qua sopra a p. 885), *terc.* 52 TŎRCULU, *verrug.* 74 (*vərr.* A. 44, 68) " bruco „ (v. qua sopra a p. 885), *vic.* 20 ' vicolo ', *vinn.* 54 ' guindolo ' (v. molf. *uinele*, irp., nap. *(v)innolo*, ecc.), *verruzz.* 47 " tròttola „; ancora, *ćiəffuə* A. 13 CEPHALU, *garòff.* A. 54, 68 ' garòfolo ', *zimm.* 93 " cembalo „, [*Annibb.* A. 68], *pès.* A. 96, 107 (v. irp. *pésolo*, ecc.), *i̯angi.* A. p. 49 ' angiolo ', *Arcangi.* A. 1, e *pin.* 90 (*pinn.* s. m. A. 21, ecc.) " pillola „ (v. qua sopra); ancora, *checci.* 32 " cottoio „ (v. a p. 902, n. 2); *-uə* -ŭLī ⟨ *màsc.* A. 47; — *rodua-rodua* 80 (*ròdua-ròduə* A. 68 avv. " rotolando „); *-uə* (*-ua*) -ŭLA ⟨ *amin.* 66 " mandorla „, *ardic.* 65 (*ard.*, *radiĝĝeu̯ə* N. 16) " ortica „ (v. qua sopra a p. 885), *brusch.* 34 " brusca „, *carrozz.* 54 " fusaiuolo „, *cogh.* 47 " palla „ (v. andr. *kokkələ*, molf. *cocle*, tar. *cocla*, ecc.), *copp.* 8 (*còpp.* A. 68) " berretto „

---

(1) Attingo dalla " *Nomenclatura barese italiana* „ di G. Zonno (Bari, 1892) senza trascurare la " *Fonologia del dialetto barese* „ dello Abbatescianni (Bari, 1896) e il " *Vocalismo del dialetto di Bari* „ del Nitti di Vito (Milano, 1896). Alle parole che ho dallo Zonno, segue il numero della pagina senz'altra indicazione; a quelle che ho dall'Abbatescianni e dal Nitti segue il numero del paragrafo, preceduto da un A. oppur da un N. Scrivo *-ə* l'*-e* mutola finale.

(2) Da PAPPA *REW.* 6213?

(3) Da *PĪREU ⟨ aret. *pio*, roman. *piro*, abr. *pirə*, arcev. *piro*, carr. *piri* s. pl., ecc. + ŭLU (cfr. *giúgnolo* da JŪNIU e sim.). Nota il teram. *mbirissə* " irrigidirsi „, *mbiritə* " morto di freddo; ritto, ritto „ (come un piuolo).

(v. irp., nap. *còppola*, ecc.), *cor(r)*. 34, 42, 51, ecc. (*kǫrrəu̯ə* N. 28 *CORNULA) " carruba „ (v. tar. *còrnola*, ecc.), *faced.* 71 (*facèdd.* A. 118, *faċeddəu̯ə* N. 52) FICĒDULA, *faren.* 74 (da FARĪNA) " farfalla „, *fer.* 89 'ferula', *frascat.* 38 " sp. di polenta di semolino „ (v. cal., sic. *frascàtula* " sp. di farinata „ e cfr. agn. *frascariellə* " polenta piuttosto sciolta „, abr. *frascarillə* s. pl. " bonifàtali. sorta di minestra „), *fritt.* 41 " frittella „ (v. molf. *frìttele* " id. „; irp. *frìttola*, cal., sic. *frìttula* " cicciolo, lardello „ (1)), *ghiann.* 89, A. 74 " ghianda „, [*gran.* 61 ghiandola], *macen.* 54 (*macènn.* A. 27) " arcolaio „, *magnatt.* 74 (*mañattəu̯ə* N. 52) " blatta „, *mosc.* 74 " mosca „ (v. molf. *moscle*, tar. *-a*), 54 " còccola del fuso „ (v. cal., sic. *muscula*, tar. *moscla*, molf. *-e*, irp. *moscola*, agn. *muscra*, abr. *móschələ* e *músch.* s. f., sor. *múskəra*, rom. (cl., ecc.) *mọskula* (2)), *pappamoscue* 71 " cutrettola „ (3), *parpet.* 55 (*pərpèd.* A. 153) " palpebra „ (v. irp., nap. *parpetola*, ecc.; *REW.* 6176, 2), *pass.* 67 *PASSŬLA " uva passa „ (v. molf. *pàssele*, cal., sic. *-ula*, tosc. *pàssola*, ecc. (4)), *pett.* 16 " lembo della camicia „ (v. a p. 885), [*radig.* 31, A. 115], *ranogn.* 70 " ranocchia „ (cfr. irp. ecc. *ranogna* RANŬNCLA), [*rəsìbb.* A. 68, 143 'resìpola'], *rugh.* 63 (5) " ruca, ruchetta „ (all. a

(1) E la mia monografia '*Die roman. Benennungen des Faschings*', a p. 105, n. 6.

(2) Altrove, il deriv. in '*-one*': nap. *moscolónə*, abr. *muscul.*, *muschelónə*, rom. (amas.) *muskulọno*, ecc.

(3) V. bar., nap. *pappamosca* Budytes flavus " cuttí, cutrettola gialla „ (Gigl. '*Avif.*', p. 75), nap. *pap.* Budytes cinereicapillus " strisciarola „ (ibid. 76), nap. *pap.* Calobates melanope " cutrettola „ (ib. 84). girg. (sic.) *pappamoschi* '-e' Muscicapa atricapilla " balia nera „ (ib. 180); Capri *pappamosche*, sic. (mess., ecc.) *appappamuschi* Butalis grisola " pigliamosche „ (ib. 182). L'"uccello delle mosche" è propriamente il Butalis grisola: v. 'pigliamosche' (lomb. *piamosch*, mod *pijamosch*, ecc.; lomb. *ciappamosch*, palerm. *acchiappamuschi*); 'ingoiamosche' (catan. *ammuccamuschi* IMBUCC-); 'moschino' (lomb. *moschí*), 'moscaiola' (bar. *moscarola*, lecc., otr. *muscarola*, *-alora*), 'moscardo' (nap.); ecc.

(4) V. ancora: irp. *passalo*, *-olo* s. m.; tar. *pàssili* s. pl. " uve disseccate al sole, indi infornate „; — nap. *passolonə* s. m. " grosso granello d'uva passa; uomo vecchio, pingue, ecc. „, cal. *-ulune* " grosso granello ecc.; agg. di fico molto maturo „, sic. *-uluni* " uliva passa; susina moscia; fico secco non a piccia „ (donde *a passuluni* " penzolone „, come le frutte messe a seccare".

(5) Se di genere femminile, come nel tarant. (*ar.*, *rùcola*). È ma-

un *ruccasci.* (?) ib.), [*scat.* 15 ' scatola '], *scesc.* 66 (v. qua sopra a p. 884), *sciosci.* 92 " sciatta „ (cfr. molf. *sciuscele* " sciatto „), *scopp.* 91 " scapaccione „ (v. irp., nap. *scòppola*, abr. *scòppele*, cal., sic. *scòppula*), *sem.* (1) 38, 64, *spign.* 13, A. 26 " spillo „ (v. qua sopra a p. 886), *spin.* 50 " succhiello „ (v. qua sopra a p. 886), " spigola, pesce ragno „ (v. nap. *spinola*, cal., sic. *-ula*) (2), *strefenz.* 92 **strefr.*? " stracciona „ (v. qua sopra), *terroz.* 32 (v. a p. 886), *terzed.* 72 (v. a p. 886), *vocc.* 72 (v. a p. 886), *zocc.* 69 " ratto „ (v. cal. *zòccula*, tar., irp., nap. *-ola*, agnon. *zoccla*, abr. *zòcchele* (3)); [*melz.* 57 " milza „ (v. ' *Note ital. c. mer.* ', a p. 246, n. 5)] (4); *-uə* -ŭLī ⟨ *mugn.* 89 " moine „ (5), ecc.; *-uə* ⟨ -ŭLAE ⟨ *amin.* 44, 45, *pett.* 41 " frittelle „ (v. qua sopra a p. 885), *ross.* (sic) 61 " geloni „ (v. a p. 886), *set.* 51 ' setole ', *spign.* 13 " spilli „, *ta.* **tau̯.* 28 ' tavole ' " assicelle „, *zepp.* 41 " frittelle dolci, galletti „ (v. irp., nap. *zeppola* s. f. col deriv. *zeppolarə* " friggitore „, abruzz. *zéppələ* s. f. pl. " specie di fritto che si mangia, come cibo di rito, nel dì di S. Giuseppe „, cal. (6), sic. *zìppula* " frittella „ (7)); ecc.; — *díuə* 79 dillo,

---

schile nel nap. (*arùcolo*, dim. *-olillo*), irp. (*rùcolo*), cal. (*arùculu*); su ' cavolo '? Nel sic., *aruca*, *aruchedda*. Sono esiti da aggiungere a quelli registrati nel § 2907, *2* del *REW*.

(1) *sèmənə* in A. 25.

(2) Degno di nota il nap. *spinole* s. pl. " denti canini „.

(3) Dice, per traslato, anche " furbo, scaltro „ (abr. *z. vécchie*, *zuccu-lone*; epperò sarà da **zocchele* anche il molf. *zocchene* " furbaccio, ecc.) „.

(4) Lo Zonno, purtroppo, non segna mai il genere; può essere che taluno degli *-uə* registrati qua sopra sia un -ŭLA scambio di -ŭLU e viceversa. Col bit. *rùutue*, e però, verisimilmente, maschile, il *reduə̯* " marra, arnese da muratore „ di p. 49; incerto *trimue* (*-i-*?) 75 " torpedine „ (v. nap. *tremmola*, tar. *trè mola*, sic. *-ula*). Tra i deverb. di ' tremolare ', notevoli, oltre all'irp. *triemolo* (*), molf. *triemele* " tremito „, il sic. *trèmula* s. f. " terreno molle e fangoso; mòta; frana „ col deriv. *trimulina* s. f. " scolopendra „ (la " paurosa „).

(5) A Molfetta, *mignele* (sic) " vezzi „, *megnelesciá* " vezzeggiare, far moine, svènie „; a Taranto, *tené li mugnili* (*) " essere schifiltoso „, *mugniluse*, *-osa* " schifiltoso, -a „.

(6) Cibo di rito del Natale.

(7) Verisimilm., con l'abr. *zéppələ*, sic. *zèppula* " zeppa „ e con l'abr. *zéppələ* " fascetta per ferite „, molf. *zèppele* " toppe „; tutti da ' zeppa '.

(*) E *trémmola* s. f., donde *tremmolejá* ' -eggiare ' " tremare „.

(*) Dice propriamente " broccoli „: ostun. *mugnulu* " cavolo novellino „, molf. *mugnele* " costoli (sic) „.

spiènnatiuə N. 52 spenditelo (1); ≈≈ *scuá* 33 'scolare' " colare „ (v. molfett. *schelá*, ecc.), *caturə* (2) 33 'colatoio' (3), *scuarə* 8 'scolare' s. m. (di c. a *scolə*); *-uanə* -ŭLANU ⟨ *ert.* 63 (4) 'ortolano', *ort.* 72 Emberiza hortulana (v. nap. *ortolanə*, sic. *-ulanu*, ecc.), *-uarə* -ŭLARIU ⟨ *copp.* 52 (da '*còppola*'; v. qua sopra) " berrettinaio „, *-uá* -ŭLARE ⟨ *allecq.* 9 " gridare „ (v. a p. 887), *amm.* A. 68 " arrotare „ (v. molf. *emmelá*, irp., nap. *ammelá*, tar. *-ulá*, cal. *-ulare*, sic. *-ulari*), *car.* 74 (v. a p. 887), *chədd.* N. 63 " scuotere „ (v. *REW.* 3000 e agg.: molf. *chetelá* " dondolarsi „, irp., nap. *cotolá* " dimenare; barcollare „, *-arese* " sculettare „, tar. *cutulare* " tentennare „ col deriv. *-ulata*, sic. *cutulari* " abbacchiare, ecc. „, (5), *chənz.* A. 57 'consolare', *greff.* 84 (v. a p. 887), *rezze.* 84 " agitare „ (6) (v. a p. 887), *scab.* 8 " uscire di scuola „ (v. a p. 887), *schiff.* 85 " diroccare „ (v. a p. 887), *sci.* 85 'scivolare', *sfrinz.* 85 (*sfrənz.* A. 68) " sfrondare „ (v. a p. 887), *speq.* A. 68 (v. a p. 887), *spezz.* A. 68 (v. a p. 887), *tezz.* 85 " bussare, picchiare „ (v. a p. 887), *trimm.* 85 " tremare „ (v. molf. *tremelá*, ecc.), *-uatə* -ŭLATA ⟨ *friss.* 41 (v. a p. 888), *pign.* 45 " pinocchiata „ (v. irp. *pignolata*, cal., sic. *-ulata*) (7), *-uatórə* -ŭLATŌRE ⟨ *scəg.* A. 65 JOCULATORE, *-uaturə* -ŭLATŌRIU ⟨ bar. *tezz.* 24 (*təzz.* N. 24) " martello (delle porte), picchio „ (v., qua sopra, *təzzuá*), *-uatiedde* -ŭLATĔLLU ⟨ *picci.* 37, 45 " ciambella „ (v. irp. *piccilatieddə* e Salvioni in '*Wörter u.*

---

(1) V., qua sopra, la nota 6 di p. 889.

(2) Se non è un errore di stampa per *cuaturə*, si spiegherà dall'alternare tra *carvaunə* e *u cuarv.*, *du cuarv.* e sim.

(3) Agg. al § 2035 del *REW.*: abr. *cólə* s. f. " ranno fortissimo „, cal. *cula* s. f. " qualunque strumento per colare „ (deverb.); nap. *colata*, campb., tar., cal., sic. *culata* s. f. " bucato „; sic. *culaturi* " colatoio „; it. *colatoio* " strum. per colare „, cal. *culaturu*, rmgn. *culadúr*, ecc. " id. „; chiet. *culatórə* s. f., vast. *-ataurə* s. m., friul. *coladór*, istr. *kuladúr*, ecc. " ceneracciolo „, tar. *culaturə* " sgabello ecc. „.

(4) Su *ertə* nŏRTU.

(5) E ancora: abr. *cutijá* '-eggiare' " muoversi andando qua e là senza costrutto „, vast. *cutijá* " piegarsi „, molf. *chetelejá* " dimenarsi „, irp. *cotolejá* (= *cotolá*) col der. *-olejata* " scossa „, cal. *cuotuliare* " scuotere „; Tocco (abr.) *cutulijirsə* -ĭRE- " sculettare „.

(6) *rozzuə!* (Imp.) 79.

(7) Da *PĬNEŎLU ⟨ irp., nap. *pignuolə*, abr. *-ólə*, sor. *pəñolə*, ecc., bar. *pəñélə*, cal. *pignuòlu*, sic. *-olu* (e *-ola* s. f.).

Sachen' I, p. 114 (1)); — *-uesce* -ŬLESCERE ⟨ *ngni.* 62 " svenimento „ (v. molf. *gnevelesce*, ecc.; ' *Note it. c. merid.* ', a p. 255) *-uiērə* -ŬLĔRIU ⟨ *sbənn.* N. 3 " sciupone „ (2), *-uẹrə* -A ⟨ *sbənn.* N. 3, *pətt.* N. 3 " pettegola „ (cfr. molf. *petelèdde*, bitont. *petuècchiə*, qua sopra a p. 889), *-uicchie* -ULICULU ⟨ *migni.* 39 " maccheroncini fatti a mano „ (3), *-uecchie* -ŬLĬCULA ⟨ *chian.* 50 " pialla „ (4), *-uentə* -ŬLENTA ⟨ *schisci.* (?) 92 " lorda „, *-uiddə* -ŬLILLU, -ī ⟨ *picci.* 90 " bimbo „ (v. cal. *picciulillu*), *zic.* 32 (da *zoca*) " funicella „; *dia.* s. pl. 64 " peperoncini „ (v. qua sopra a p. 888), *-ueddə* -ULILLA ⟨ *picci.* 90 (*pəcci.* A. 18) " bimba „, *-uettə* ' -oletto ' ⟨ *fazz.* 8 (e *fazzuettonə* 20), *-uizzə* -ŬLĬTIU ⟨ *chid.* 87 " scossa „ (v., qua sopra. *chedduá*), *trem.* 62 " brivido „ (v. a p. 889), *-uisciá* ' oleggiare ' ⟨ *men.* 84 " spolverare „ (v. a p. 889 e cfr. *menezzarə* " spazzaturaio „). *-uinə* -ŬLĪNA ⟨ *vert.* 93 (v. a p. 889), *-uinə* -ŬLĪNU ⟨ *kapp.* N. 58 ' coppolino '; *auí* 51, 67 ' ulivo, -a ', (A. 58), 42 ' ulive '.

-L- intatto, come nel bitontino (v. a p. 889), contro la norma in *kəlọrə* N. 22 (e *dəlọrə* N. 22, *-orə* A. 31), *ghelì* 59 ' golìo ' (5) voglia, *canelicchiə* 76 " cannelletto „, *chelummə* 67

(1) Secondo me, BUCCELLATUM + ' pizza '.

(2) Da ' spendere '? V. il pugl. *sblend-*, *sbiendorə* ' splendore ', ecc.

(3) Verisimilmente, da MENTULA (v. nap. *migno*, *minchio* " pene „). Al § 5513 del *REW.* (sarà poi vero che tutti gli esiti romanzi muovano da un prerom. MINTULA?) agg.: cerign. *menghjə*, sic. *minchia* " pene „; — nap. *minchillə* *-*i̯i*- " bellimbusto svigorito „; sic. *minchiali* " grullo, sciocco „; irp. *mignarilə*, bitont. *menghiarajələ*, mater. *-arülə*, cal. *minchiarile* -ARĪLE " baggèo, scemo „; tar. *minghiariddə* -ARĔLLU " verme di mare che serve da esca „; sic. *minghiozzu* ' -òzzo ' " grullo „, tar. *minghiuèzzələ* ' -òzzolo ' " altro verme di mare „; tar. *minghiata* " trappoleria, frode „; Scanno (abr.) *mignaccə*, Tocco *vign-* **m-* " pene del maiale „, ecc.

(4) V. rom. *pi̯ana*, chiet., ecc. *pianə*, Pal., A. *planə*, cerign. *chjänə*, mater. *kjanə*, cal. *chiana* " pialla, grossa pialla „ (deverb. di PLANARE ⟨ a. it. lett. *pianare*, sic. *chianari* " spianare, livellare, piallare „). Deriv.: tar. *chiànola* " pialla „; sor. *pi̯anọzzə* s. m., irp., nap. *chianòzza* s. f. " pialla „, agn. *chianuozzə* s. m., abr. *pianòzzə* s. m., Città s. Angelo s. f. " pialletto „, cal. *chianuòzzulu*, tar. *-uèzzolo* s. m. " pialletto „; bit. *chianettə* " pialla „; ter. *pianuccə* s. f. " pialletto „, cal. *chianuzzu*, molf. *chienuzzə* " pialla „, ecc.

(5) Nap., irp. *golìo* (donde *goliusə*, *-osa* " avido „), sor. *u̯əlíə* s. m. " voglia di mangiare „, arp. *u̯ulíə*, abr. *vulì(j)jə* (donde *vulïosə* " goloso „); aq. *culìja*, sor. *u̯əlía* s. f., agn. *guloja*; campb. *(g)ulə̯jusə* " ghiotto „, ecc. I lessici registrano un letter. *goliare* " appetire „ e un *golioso* " avido „.

(*k'lummə* N. 36), *tavelìərə* 31 (*-əl-* A. 5), *-oline* 27 (*taulinə* A. p. 56), *-olettə* 27, *provelə* 42, *-ola* 43, e in *chəlòstrə* A. 57 **cl-*?, *velé* 12 ' volere ' (e *vəliëvə* N. 6 ' -evi ' (1)), *cìchelə* s. pl. 44 **-cl-*? " siccioli „ (2), *fraule* 64 ' fragola ' (e *fraulonə* 66 " corbezzolo „), *rèulə* A. 16, *tèulə* (*tèu.*) A. 6, 126, *trozzolə* 24 " raganella „ (v. molf. *trozzele* " raganella „ e " girella „ (3)), *vongolə* 76 (**-ngl-*? o dal nap.?) " arsella „, oltre a *chelonnə* s. pl. 22 (*chəlòn.* A. 48), *abrestelí* 33, *abrostulature* 32 " tamburlano „, *cartolare* 11, *cecchelate* 45 (*ćəkk'latə* N. 62), *-atine* 45 (4), *solaturə* 17 " risolatura „, *pezzelanə* 77 ' pozzolana ', *Anǵelinə* A. 54.

⟨B: *stólə* A. 36, *scolə* 8, *solə* 16, 31 ' suola ', *molə* s. pl. 56 " molari „, *dólə* A. 36, *vọle* N. 25, ecc. ecc., *-ẹlə* N. (*-élə* A.) *-*(I)ŏLU* ⟨ *pə́n.*, *rənź.* N. 27, ecc., *muelə* 21, 80 (A. 68) ' mòlo ', *kọlə* N. 40 (*cólə* A. 53) " cavolo „, *sọlə* N. 22 (*-ó-* A. 31) SŌLE, SŌLA, *-ọlə* N. **-ọLA* ⟨ *škətar.* 24 " sputacchiera „, *t'rań.* 50 (v. a p. 890) (5), *-ulə* *-*ọLU* ⟨ *ras.* 35, N. 24, A. 35 (v. ' *Sdrucc. nel dl. di Molfetta* ', a p. 164, n. 3), *ras.* 61, A. 38 orzaiuolo, *z.* 32, A. 38 " orciuolo „ (v. qua sotto la n. 5), *pədəzz.*, *vərməzz.* A., p. 56, *carasci.* (sic) 21 " rigagnolo „, *-arulə* **-AROLU* ⟨ *ac.* 13 " agoraio „ (v. Salv. in ' *R. de Dial. Rom.* ' IV, p. 97), *aqu.* 72 Merops apiaster (v. nap. *acquarulə*, Capri *-aruolo*;

(1) Sulle forme rizotoniche?

(2) V. le mie ' *Bricciche Romanze* ', a p. 12, n. 1.

(3) La ' raganella ' è fatta di canne o altro con una ' girella ' a denti che, rotando sopra un pezzo mobile, fa rumore; di qui l'identità del nome. V. qua sopra a p. 886.

(4) A p. 32, *ceclatəre* ' cioccolattiera ' (*ćəkk'latẹrə* N. 62).

(5) Quanto all'o′ (e all'ɛ′) v'è disaccordo tra il Nitti e l'Abbatescianni: il primo dà *ọ* (*ẹ*) come esito normale di *ọ* (*ẹ́*) non metafonetico di sill. aperta, *ọ* (*ẹ*) come esito normale di *ŏ′* (*ĕ′*) non metafon. di sill. aperta; il secondo dà come unico esito in entrambi i casi un *o* (*e*) di pronuncia chiusa. Agg. dallo Zonno (il quale non nota che ben di rado la qualità della tonica): *rasòla* 31 " padella bucherellata „, *stiòla* (sic) 61 " vaiuolo „, *cola* 71 " taccola „, *vasenecolə* 63 (*-ó-* A. 68) basilico, *-olə* ⟨ *scar.* 63 (*škar.* A. 39, 93), *var.* 19 " ghiera „, *zzolə* 7, 32 (*zó.* A. 38) " mezzina „ (v. Salv. in ' *App. mer.* ' 100, n. 1), *castagn.* 88 castagnetta, *cames.* 18 (*-əs-* A. 39), *-arolə* ⟨ *bann.* 36 (da ' banda ' " lato, parte „) paraocchi, *cazz.* 31, *gratt.* 31, *muss.* 35 (da *mussə* muso), *nazz.* 66 lazzeruola, *pèd.* 35 pedana, ecc.; *ıəlanzolə* s. pl. " bilancini „, ecc.

Giglioli '*Avif.*' 216) (1), *cald.* 31 " calderotto ", *cen.* 38 (*ċən.* N. 24, *cin.* A. 55) " ceneracciolo " (v. a p. 892, n. 2), *fav.* 73, A. 38 (*faf.* A. p. 56) " tonchio " (v. a p. 891), *fesc.* 73 " chiurlo " (2), *figghi.* A. p. 56; *penn.* 8 " portapenne ", *pent.* 13 'punteruolo', *renar.* 10 (*rən.* N. 24), ecc., *sulə* A. 34 'solo', *vulə* s. m. A. 86, *-ulə* *-OLĪ ⟨ *cetr.* 42, 64 (3) " cetriuoli ", *fas.* 38, 64; *mulə* A. 44, *nculə* 83; *pala* 49, *cecale* 74, *sale* 44, *male* 62, *-ale* ⟨ *sacr.* (in *ache s.* " grosso ago " (4)) 13 (*sakk'ralə* N. 63); *acchi.* 18, *anem.* 10, *arn.* 7 'orin.', *buc.* 7 " boccale ", *cegn.* 39, 68, *chezz.* 54, 63 " contadino ", *discet.* 13, *gamm.* 17, *gang.* 56 (v. a p. 892, n. 4), *garz.* 89 " guanciata " (v. a p. 892, n. 5), *mess.* (sic) 31 " tovaglione " (v. *REW.* 5498 e agg.: irp. *məs.*, cal. *misale*), *pent.* 19 (da 'punta') " aghetto " (per affibbiare fascette, stivaletti, ecc.), *petter.* 35 'pettorale', *recchi.* 78 (da 'orecchia') " guanciata ", *sen.* 8, 20 (v. a p. 893), ecc., *vamban.* 22 " campanile " (5), *mert.* 31 (v. a p. 893, n. 2), *pedequ.* 57 " pollice " (6), *pegher.* 70 " pecoraio " (7); *varvazz.* 35 'barbazzale'; *cacamargiale* 72

---

(1) La voce it. mer. sembra essere **apaiuolo*, un deriv. di APIS (v. nap., irp., bar. *aparulə*, otr. *apaluru*, sic. *apaluoru*, Castelb. *apaluəri*, calabr. *lapalori*). Come per l'ornitologo così pel popolo, è soprattutto l'uccello che si ciba d'api, di vespe e sim.: v. rom. *mangia api*; fior. *lupo* (= divoratore) *d'api*, otr. *lupu de api*; sard. *apiolu*; — lomb. *vespee* 'vespaio'; ver. *vespier* 'vespière'; ven. *vesparolo*, lomb. *vespajeu*; lomb. *pia vesp* 'piglia vespe'; — mant. *asiolèr* -ARIU (v. *asiœl* vespa), ecc.

(2) Il Numenius arquata, detto *fischione* in più d'un vernacolo toscano e campano, *fischiabovi* (*) nel leccese e *pigolone*, *pivolone* (da 'pigolare') nel chianaiolo e nel chiusino.

(3) V. nap., irp. *cətrulə* (pl. *-ólə*), tar. *-ulə*, cal. *citrulu*; sic. *citrolu*. Donde il nap. *čətruələ* del *REW.* 1956? Ai deriv. di CITRUS (*REW.* 1957) agg.: abr. *cetrónə* (Pal. *-óunə*, At. *-anə*, Vasto *citráunə*) " cocomero ". Il molf. *cetraunə* s. pl. " cetrioli " dev'essere un **cetrauelə* (v. *frauenə* **frauelə* 'fragola').

(4) Propriamente " l'ago da sacchi, da cucir sacchi ": 'saccora' (v. *desctre* dita, *ossre* ossa, *casre* case, ecc.) + ALE [o anche 'saccora' + ARIU, con *r-r* dissimil. in *r-l*; Nitti, l. c.].

(5) La voce it. mer. sembra essere 'campanaio': v. arp., nap., irp. *kampanarə*, agn. *-anearə*, mat. *kuampanarə*, cal., sic. *campanaru*.

(6) V. bitonto *pedequère*, tar. *pudicarə*, ecc.

(7) V. nap., irp. *pecorarə*, cal. *pec.*, sic. *picuraru*.

(*) Pare segua da presso i buoi: v. i sic. *buvaru* (Castrog.), *vujara* (Pal.), *buvarotta* (Caltag.), *bovar.* (Sir.); Gigl. in 'Avif.' 407.

" stiaccino „ Pratincola rubetra (v. bit. *margèule*, qua sopra, a p. 893, n. 1) (1); *fẹlə* N. 8, *mélə* A. 12, *sucamelə* 65 " giusquiamo „ (sic), *ćiələ* A. 50, *nǵiələ* A. 106; *pilə* A. 22, ecc., *mẹle* N. 2 (*mélə* A. 1) ' melo '; *filə* 13 " ' filo '; frenulo „, *-ilə* ⟨ *kanar.* N. 6, n. 1, *mann.* 7, A. 131, *vac.* 7 ' bacile ', *varr.* 31, ecc.; *chenfession.* 23 " confessionario „, *cred.* 32 " di difficile cottura „ (v. bit. *credòile*) (2); — *céfalə* 75 ' cèfalo '; *còlenə* A. 37 VŎLENT, *sàlece* 68 SALĬCE, *elece* 67 élce; ≈≈ *fəliscənə* A. 21, 61; *alisce* 42, 74, *alazzə* 62 " sbadiglio „ (3), *galetta* 34 " bigonciuolo „ col der. *-ettone* 34 " bigoncio „ (v. abr. di C. fr., V., Sc. *galéttə* s. f. (4), molf. *-ettə*, cal. *-itta* e *R E W.* 3656), *palaia* 75 " sogliola „ (v. a p. 893, n. 5), *palazzə* 24, *palicchə* s. pl. 30 " stuzzicadenti „ (v. abr., nap., irp., tar. *palicchə*, cal. *-iccu* (5)), *palummə* 71 (coi der. *palemmarə* 70 " colombaia „, *palummieddə* 71 " piccione „), *salérə* A. 5, *scialá* A. 100, ecc., *valèstə* A. 27, *nzalatə* 43, *calamarə* 10, 75 (col der. *calamarieddə* 75), *calameddə* **camam-* **cal-* 65 " camomilla „, *calandronə* 72 " calandra „ (v. a p. 894, n. 1), *canalone* 24 " doccione „, *malacieddə* 71 ' malo uccello ' " bar-

(1) V. bitont. *caca margèule*, otr. *cacammargiali* (IN-?) (*); sic. *cacamarruggiu* (v. *marruggiu* " manico della zappa, pala, ecc. „), e cfr. messin. *cacapalu*, sic. *cacasipali* (v. *sipala* " siepe „ e " pala del fico d'India „). Dalle tracce manifeste che gli agricoltori trovano sui manichi dei badili, zappe, ecc. lasciati incustoditi. È uccelletto che predilige le punte, su cui si posa per pochi momenti, sbattendo rapidamente le piccole ali; da ciò i nomi di ' salta in punta ' (bient. *saltinp.* (**), fior. *saltanpunta* (**); sic. *saltinpizzu* (*); sen. *saltinvetta* (**); ' salta in palo ' (it. l., lucch., sen. *saltinpalo* (**), it. l., valsug. *saltimp.* (**), mod. *saltinpal*, ecc.); ' salta in vanghile ' (fior. *saltinv.*; v. *vanghile* " manico della vanga „); ' salta in seccia ' (sen. *saltins.*, fior. *saltanseccio*) (**), ecc.; v. Gigl. in ' Avif. ', 114 sg.

(2) Per quel che sembra, l'it. mer. ' crudevole ' (v. ' *Sdrucc. nel dl. di Molfetta* ', a p. 166, n. 3) con suffisso scambiato (-ĪLE).

(3) A Bitonto, *nalòisce* (v. qua sopra a p. 893); a Napoli e nell'Irpinia, *alizzə*. Sarebbero mai de' derivati di un **alo*, deverb. di HALARE, che s'avesse nel mezzogiorno a un dato momento? — Notevole l'agn. *alièrə* -ĔRJU " infermiccio „ (= che sbadiglia).

(4) A Palena, *nalittə* s. m.

(5) Nel sic., *palicu* (col der. *-ichera* " portastecchi „).

(*) Anche la Pratincola rubicola, e così nel barese.
(**) La Prat. rubicola.

bagianni „, *malamendə* N. 11, *salamòrə* 44, *salescinnə* 25, *ualanicchiə* 72 (da 'gualano' " bifolco „) " luí piccolo „ Phylloscopus rufus, *cecaleddə* 73 " gambecchio „ Actodromas minuta (1), *pedalinə* 13 " pedule „, *senaline* 15 " grembiulino „, ecc.; *acchialarə* 52. *cambanalierə* 22 " campanaio „, ecc.; *felá* 54, *mbəlá* A. 92 'infilare', *felatə* 54 " accia „, *sfelazzə* (*de carnə*) 59 " fibre „. *felettə* 40 " lombata „. *melognə* 69 " tasso „ (v. *R EW.* 5474), *pəlusə* N. 24, A. 35, *pəlosə* N. 22 (*-ósə* A. 35) " 'pelosa'; grosso gambero „ (v. qua sopra a p. 894), *spelàtə* 60 " calvo „, *telarə* 14, *vəlanzə* 33, A. p. 54, *affelaturə* 29 " cuoietto „ (cfr. irp. *affelatora* " cote „), *celameddə* 88 " cennamella „ (v. *R EW.* 1484), ecc. ecc.

MODUGNO (2) ⟨ A: *deuènnese* 'dolendosi' (3) — B: *la queuule* 'la quale'; — *malandròine*, *chenzelaziàune*; *vileteuude* 'viltade'; — *la*, *de la*, *da la*, *pe la*, *le*.

Quanto all'età della legge, il bitont. *alòie* 'olive' la direbbe posteriore. il bar. *auì* anteriore al volgere di o- in *a*-; anteriore la metatesi nel bitont. e bar. *lumerə* 67 **mur.* " more „ (v. Salvioni in '*App. mer.*' 42 e in '*Oss. varie*' 102 (4)).

II.

Del dialetto di Ostuni (Lecce) ebbi occasione di notare altra volta due caratteristiche di natura fonetica che parevano limitate a pochi vernacoli della Sicilia:

a) una nasale dalla vibrante dei nessi di -L + T-, TJ-, S-, -L + Ċ- (v. '*Revue de Dial. Rom.*' I, a p. 245, e agg.: *vonda*

(1) Dal radicale *CĪK- " pochezza; piccolezza „ donde il tosc. *cica* " inezia „ (*), il napol., irp. *cicolə* " briciolo, minuzzolo „, ecc. V. il nome scientifico e il ven. *biseghín*, il sic. *spirdicchiu* che vengono a dire " frugolino „; è il trampoliere esile e irrequieto fra tutti.

(2) Sola fonte la versione della novella boccaccesca in Papanti '*I parl. ital. in Certaldo*', a p. 462-3.

(3) Voce dotta, *velentière*.

(4) Dove è sol da notare che, come prova la qualità della tonica (*u*), le voci molfettese e barese non possono non essere anch'esse maschili.

(*) Altrimenti il Meyer-Lübke in *R EW.* 1899.

' volta ', [*n anta vonta* 71, less.] (1), [*ruvuntá* less. ' rivoltare '], [*canzune* less. ' calzoni '], *pèggaị m bunżə* IN PŬLSU " sollevar col polso ", *sanżizza* **sals-* " salciccia "; *fanġə* 1ª p. sng. ' falcio ', *fanġa* s. f. (pl. *li -ə*) falce, *dọnġə* (pl. *dunġə*) ' dolce ', *kanġə* s. m. calcio, s. f. ' calce '.

b) ń dal nesso di -N + G- (v. ' ibid. ', a p. 252, e agg.: [*li jagnalu* App. 2, less. ' gangali ' molari (v. qua sopra a p. 892, n. 4)], [*sagninazze* ' sanguin. ' " biroldo "], [*fagnara* 12, 29 (da ' fango ') " fanghiglia "]) (2).

Qui ne aggiungo una terza che non so ricorra altrove nel nostro mezzogiorno, il volgere in *u* dell'*ə*, sia interno (I) che finale (II) (3), cui preceda un *l*: I) *luttẹra* ' lettièra ' giaciglio, [*luzione* 65 ' lezione '], [*maluditta* 57, *maludetta* 10], *avvəlunusə* velenoso, *mulunarə* MOLINARIU, *salunarə* (da ' salina '?) venditore di sale; *maluvasia* **malər*. malvagìa; *vasəlukọrə* basilico (cfr. *REW*. 973 e agg.: irp., nap. *vasenecòla*, molf. *-necouele*, tar. *vasinikòla*, mater. *masənəkelə*, ecc.), *kanluịerə* **cannel-*, **canləị-*

(1) Ricordo tra parentesi quadre i materiali che ho da un rapido spoglio delle '*Poesie in dialetto ostunese*' del Prof. Arcangelo Lotesoriere (Canonico), 2ª ediz., Ostuni, 1885; quelli in grafia fonètica provengono da raccolte mie proprie.

(2) La legge è pur di Matera, come risulterà da un bel saggio del Dott. G. B. Festa di imminente pubblicazione. — L'ostun. *vugnulu* " baccello dei legumi " non è da ŬNGŬLU, come scrive il Ribezzo 'l. c.' § 5 (p. 6), e neppure da CŬNEU, come propose lo Ziccardi in '*Zeit. für r. Phil.*' XXXIV § 37 per l'agn. *kọńńə* " guscio ", ma da *CONCHŬLU, con -NGL- secondario da -NCL-, e però una cosa sola con l'abr. *cónghələ* s. m., ricordato dal Meyer-Lübke in *REW*. 2113, col tar. *vùncolə* " la fava fresca col suo guscio " (cfr. il tosc. *baccèllo*), col francav. *ungulu*, ecc. A Napoli, *góngola* s. f. " baccello ", donde *ngòngolə*, detto delle fave secche che si cuociono senza mondarle dai gusci (D'A.).

(3) Anche nell'ostunese la sola vocale che si regga in sillaba protonica e nella finale assoluta è l'A; in sillaba postonica anche l'A si ridusse a vocal neutra. Rari gli esempi di *u*, primario o secondario, vicino a consonante velare o labiale. Dietro a *i* secondario, ostunese, di sillaba finale, scambio di *-ə*, s'ode un *i* debolissimo, tanto da -ī, quanto da *-ọ*, *-ọ* (e, verisim., da -E): *alliịi* ' leghi ', *niịi* ' neghi ', *prịeịi* ' preghi '; *allẹịi* ' lego ', *nẹịi* ' nego ', *prẹịi* ' prego '; *nẹịi* ' neo ' (v. *REW*. 5807 e agg.: arcev. *niégo*, ort., at. (abr.) *néchə* s. f., vast. *néchə* s. m., pal. *njechə*, camp. *niẹgə* (*), ecc.), [*castii* ' castigo '], ecc.

(*) Tutte forme che richiedono una base con -Ĝ-, un *NAEGU.

' candeliere ', *fazluiętterə* **fazzəliętt-* **fazləi-* " fazzoletti „, *makšluiętterə* **maškəli-* **mašklə̯i-* (pl. (1) di *mašklętə* (2) s. m. " bietta di legno, imperniata da un capo, che serve a chiudere usci e sim.) „, ecc.; ≈ *i̯áluga* ALĬCA, [*tiolugu* 74 ' teologo '], *dolunə* DŎLĔNT, *volunə* (3) e sim., [*vulunə* 10 ' volano '], ecc. II) *malu* ' male ' (*añə mmalu* ' ogni male '), *salu* ' sale ', *-alu* ' -ale ' ⟨ [*anim.* 12, 66], [*carni.* 12, 72], *dəšət.*, [*margi.* 21, 85], *rənn.* ' orinale ', [*sin.* 11, 93], *spət.*, *pərtar.* **pərtən.*? (v. irp. *portinalə*) " portinaio „, [*pastur.* 85], ecc., [*valu* 47 ' vale ', *na mmalu* ' non vale ', *melu* ' miele ' *-ilu* ' -ile ' ⟨ [*civ.* App. 1], *fać.* **vac.* ' bacile ' " piatto grande di terra cotta „, [*abb.*, *abilu* bile 49, 76], ecc., *dolu* DŎLET, *solu* SŌLE; *dolu* *-ĔRE " dolére „, ecc.; *-ívulu* ' -évole ' ⟨ *kuć.*, *krəd.*, [*piacevulu* 9], *pesəlu* PENSILE, [*mobulu* 60 ' mobile '] ; — *scalu* 10, 84 ' scale '], [*cull'alu anzate* 50], [*cicalu* 10 " cicale '], ecc., *kannelu* ' candele ', *molu* s. pl. ' mole ', *štolu* ' stole ', *-olu* ' -ole ' ⟨ *ras.* (pl. di *rasola* " radimadia „), *traṅ.* (pl. di *traṅola* " allodola „), *sputar.* " sputacchiere „, *šəttar.* (da ' gettare ') " fogne „, *vənnər.* " venditrici „, ecc., *solu* ' sole '; [*frágulu* 15 ' fragole '], *amenulu* mandorle, *símənlu* (pl. di *símənla*), *kornulu* (pl. di *kornula* " baccello delle carrube „), [*nuvulu* 10 (pl. di *nuvula*)], ecc. (-E, -AE); ≈ *malu* ' mali ', *-alu* ' -ali ' ⟨ *akki-* ' occhiali ', *kan.*, [*li jagn.* App. 2 ' gangali ' (v. a p. 904)], [*stiv.* 9], [*duzzin.* 11], ecc., *-ilu* ' -ili ' ⟨ *varr.* barili, ecc., *spilu* desiderî [*sfilu* 90] (4), [*filu* 90 figli (5)], *sulu* ' soli ', [*-iellu* ' -èlli ' ⟨ *biat.* 53]; *filu* 2ª sng. ' fili ',

---

(1) Strani plurali, certo analogici sul modello: sng. *e*, pl. *ie* (v. *verdə*, *vermə*, ecc., pl. *vierdə*, *viermə*).

(2) V. le mie ' *Note it. c. merid.* ', a p. 243, n. 2.

(3) Che si tratti di -ĔNT, prova la tonica non metafonizzata.

(4) Irp. *sfilə* s. m., sic. *sfilu*, cal. *scilu* (*) " voglia ardente, bramosìa; ùzzolo „; deverb. di ' sfilare ' " ridurre a un filo (v. gli abr. *mə sə sfilə lu córə!* " ho una pena al cuore „, *sfilacórə* s. m. " pena intima „, *sfilaméndə* s. m. " languore di stomaco, di cuore, per causa fisica o morale „, il sic. *sfilari lu cori* " bramare „ e cfr. l'it. lett., tosc. *struggersi*); — ostun. *spelusə*, *-osa* " voglioso, -a „.

(5) [*Filuma* (**) 18 " i miei figli „], di c. a *figgə* ' figlio ', *-a* ' figlia '.

(*) Ha a lato uno *scilare* (*scilu*, *-i*, *-a*, ecc.) " sfilare, sfilarsi (contr. di *mpilare* ' infilare ') „. Entrambi accennano a una fase **sfi̯i-*, notevolissima per le conseguenze che se ne possono trarre quanto ai cal. *j*, *h* da F + L. Ne dirò quanto prima.

(**) Nel *-ma* un neutrale *-MA ⟨ MEA? Anche *li filu mei*, all. a *li filu mei femənə* " le mie figlie „.

affilu 'affili' arroti, *spilu* 'peli', *duelu* 'duoli', [*te lu cuelu* 42 'te lo coli'], ecc.; — [*angelu* 38 'angeli'], [*cueccilu* 10 nicchi], [*li nobilu* 73], [*jarvulu* 9 alberi], [*masculu* 26, 73], [*pe chidde ciefulu* 43 cefali], [*quervulu* 10 corvi], [*aggradevulu* 9 '-oli'], [*spignulu* 63 (sng. *-ulu*)], [*cundiscìpulu* 53], [*discìpulu* 41], [*li mobbulu* 79], [*jucculu* 9 grida (v. *jucculá*)], [*dò trùfulu* 45], [*dò jarufulu gintilu* 82], ecc. (-ī).

Come prova la tonica intatta, non metafonizzata, di *melu* 'miele' e di *solu* 'sóle', il fenomeno (il quale accenna a una pronunzia spiccatamente velare del *-l-*) deve essere relativamente recente, posteriore all'affievolirsi delle vocali di sillaba debolmente accentata. Dietro *l* hanno *-u*, scambio di *-ə*, pur le prime persone del verbo e i sostantivi della seconda (temi in -ŏ ⟨ cl. -ŭs): *filu* 'filo', *affilu* "arroto", *spilu* 'pelo', *i mə dolu* mi dolgo, ecc. ≈≈ *filu*, *pilu* PĬLU, ecc., *suelu* 'suolo', *uelu* 'bòlo' "terra rossastra attaccaticcia", *sulu* 'sólo', *-ulu* ⟨ *maǧǧ.* 'magliolo', *piń.* (da PĪNEA) "bica", *rəzz.* 'orc.', ecc., *-arulu* ⟨ *famm-* **faf-* **fam-* "tonchio", *fəǧǧ.* (da FOLIA) "erbivendolo", *paǧǧ.* ecc., *maškulu* "chiavistello", *niervulu* nervo, *piernulu* perno, *kueččulu*, *zueppulu* "paretaio", *anizzulu* nòcciolo, *furjulu* razzo, *múmmulu* "vaso di terra cotta per olio" (v. *REW.* 1201 e Salvioni in '*R. de Dial. Rom.*' IV, p. 211, e agg.: Tocco, Cast. Cas. (abr.) *vúmmïe*), *skúpulu* (v. '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', a p. 166, n. 7), *túmulu*, ecc. ecc. Anche cotesti *-u* saranno da anter. **ə*.

Al nesso di -L + J- risponde *-ǧǧ-* nell'ostunese: v. *ččǧǧe* CILIA, *šueǧǧ* 'giòglio', *spueǧǧ* s. m. 'la spoglia della serpe a primavera', *paǧǧarulu* "capanna di paglia", *šəǧǧarulu* (da *šueǧǧe*) 'vaglio pel grano", ecc. Anche a Matera, *fülə* s. pl. (= *filo*) "figli" di c. al sng. *fülǧǧə*. Si tratterebbe mai di un FĪLĪ da FILIĪ con assorbimento? Al vocat. FILI non mi par proprio si possa pensare.

Ζεὺς Ἄφριος E IL NOME *Ἀφροδίτη*.

Nota del Prof. VINCENZO COSTANZI.

La lettura *Διαφρίου* dell'epigrafe che si trova in IG IX 2 n. 452 (1) sembra preferibile all'altra *Λιαφρίου* (2), che ci darebbe un nome senza esempio nell'onomastica greca e di molto discutibile analisi etimologica. Infatti *Διαφρίου* fu letto dai primi ritrovatori, e si credette il nome della persona cui apparteneva il monumento sepolcrale (3): per quanto senza riscontri, il nome si potrebbe senza sforzo risolverlo in elementi schiettamente greci. Il Rutgers van der Löff (4) che col Prott legge *Λιαφρίου* dichiara questa forma *räthselhaft*, e inclina all'opinione del Giannopulo che scompone il gruppo in due parole *Δί Ἀφρίου* (5). Questa scomposizione approva il Kern (6), quantunque in forma un po' dubitativa. Il Giannopulo (7) giustifica la sua interpretazione, adducendo la forma contratta *Δί* da *Διί* nell'iscrizione dedicatoria *Δὶ Ναίῳ* (Carapanos *Dodone et ses ruines* AM XX p. 409), *Δὶ βροντῶντι* (AM XXV p. 498) e *Δὶ Μεραν̣ῷ* (BCH XV p. 6255). Rileva inoltre che *Ἀφρίου* è una forma regolare di dativo tessalico, come in *Ἀπλοῦνι Κερδοίου* (AM VII 64-69).

---

(1) *Δελτίον τῆς ἐν Ἁλμυρῷ φιλαρχαίου ἑταιρείας τῆς Ὄθρυος* V p. 24 n. 19: " *Ὁ μὲν λίθος λευκός, φέρων ἀέτωμα ἀποκεκρουσμένον, καὶ αὐτὸς ἀποκεκρουσμένος κάτωθεν...* ".

(2) I G 2 n. 452 *Διαφρίου* ceteri, cum Prottius adnotet: " *Eine Linie unter den Buchstaben. Doch ist sie nicht gar so stark wie die Hasten der Buchstaben, und es ist daher ΛΙΑΦΡΙΟΥ, wenn auch nicht ganz sicher, so doch wahrscheinlicher als ΔΙΑΦΡΙΟΥ* ".

(3) *Δελτίον* ib. *Ἡ ἐπιγραφὴ εἶναι ἐπιτύμβιος σημαίνουσα: ὅδε ὁ τύμβος ἐστὶ Διαφρίου.*

(4) AM XXIX 1904 p. 220, 1 " Der Name *Διάφριος* scheint rätselhaft und wahrscheinlich richtiger erklärt Giannopulos a. a. O. *Διΐ Ἀφρίῳ* ".

(5) *Δελτίον* ib. p. 24.

(6) I G *ib. An Δὶ Ἀφρίου*?

(7) *Δελτίον* ib. p. 47 *Παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὴ* [*ἡ ἐπιγραφὴ*] *εἶναι ἀναθηματικὴ Διὶ Ἀφρίῳ* (*Δὶ Ἀφρίου*).

Essendo stata trovata l'iscrizione a Fere, arriderebbe a prima vista l'idea che *Ζεὺς Ἄφριος* quasi dio dei flutti (*ἀφρός*) fosse un equivalente di *Ζεὺς ἐνάλιος* (1), essendo potuto provenire da Pagase, che fu sino da tempi abbastanza remoti il porto di Fere. Ma a quest'interpretazione contrasta alquanto l'esistenza di un mese *Ἄφριος*, corrispondente all'attico elafebolione (2), che si trova nel calendario di Larissa, di Farsalo, Eginio. Questa denominazione per un mese in tante città interne, rende oltremodo difficile che si riferisca a una deità marittima. D'altra parte ad Aenos, colonia di Lesbo (3), era venerata una divinità *Ἀρφεία*, forma metatetica di *Ἀφρεία*, che per la sua connessione con Enea si è identificata con Afrodite (4). Siccome Lesbo venne colonizzata dai Tessali, fu vista la relazione tra quest' *Ἀφρεία* e il mese *Ἄφριος*, intercedendo tra ambedue le forme la relazione che tra *Λύκειος* e *Λύκιος* (5). Infatti *Ἀφρεία* è senza dubbio forma d'aggettivo, rientrante in quella categoria di divinità che l'Usener ha chiamato *Sondergötter* (*Götternamen* p. 122).

Per determinare il significato dell'epiteto *Ἄφριος*, non ci dobbiamo certamente arrestare all'accezione del nome *ἀφρός* da cui è ben difficile separarlo, nella lingua greca, ma occorre risalire al valore originario della radice. Sembra che tra i glottologi regni un certo accordo nello stabilire una parentela tra il greco *ἀφρός* e il latino *imber*, avvicinando la voce al sanscrito *abhram*, allo zendico *awra*, al persiano moderno *awr* indicante la nuvola (6). Adunque se non la parola *ἀφρός*, che

(1) Vedi i luoghi citati in Preller-Robert I p. 566 n. 4 per l'esistenza di uno *Ζεὺς ἐνάλιος*.

(2) Bischoff in *Leipziger Studien* XVII 1884 p. 319, 327, 412; De Sanctis *Monumenti Antichi dei Lincei* p. 71; Rensch *De Manumissionum titulis apud Thessalos* p. 124.

(3) Vedi i luoghi raccolti dal Beloch in I[1] 1 p. 256 n. 2.

(4) AM VI p. 261 Kaibel *Hermes* XIX 1884 p. 261

Ἀρφείης· υἱῆι τετειμ(έ)νον ἱερὸ[ν ἄστυ]
ἀρχαίων ἵδρυμα.

Non mi pare necessario ricorrere col Kaibel all'ipotesi d'un errore del lapicida per spiegare la forma *Ἀρφείης*.

(5) Keil *Hermes* XX 1885 p. 630.

(6) Boisacq *Dictionnaire Étymologique de la Langue Grecque*. Deuxième livraison, p. 106.

può essere stata anche in uno stadio molto arcaico della lingua greca fissata nel significato di *schiuma*, almeno la radice da cui proviene, si riferiva alla pioggia, e questa primitiva nozione può essere rimasta negli aggettivi *ἄφριος* e *ἄφρειος*, da cui deriva la divinità *Ἀφρεία*. Pertanto *Ζεὺς Ἄφριος* ci appare con tutta verisimiglianza un equivalente di *Ζεὺς νεφεληγερέτης* ed ha perfetto riscontro col *Jupiter Pluvius* latino.

La parentela etimologica dell'epiteto *Ἄφριος* applicato a *Ζεύς*, con l'aggettivo sostantivo *Ἀφρεία*, in cui gli antichi hanno riconosciuto un altro nome di Afrodite, ci obbligano a riprendere in esame la questione dell'origine di questo nome, che non è indifferente per intendere l'origine stessa del mito. Ma prima va sbarazzato il terreno da alcune induzioni dei moderni, che offuscano il problema e fanno deviare dalla sua giusta soluzione. L'analogia di *Ἀφρεία* e *Ἀφρογένεια* con *Λύκειος* e *Λυκηγενής* (1) è solo speciosa, perchè la forma *Ἀφρογένεια* è una conseguenza del mito etimologico che fa sorgere Afrodite dalle spume del mare; e quindi, se veramente esisteva una relazione tra i nomi *Ἀφρεία* e *Ἀφρογένεια*, bisognerebbe ammettere che il primo fosse stato ricavato dal secondo, risultando così un processo inverso di quello tra *Λύκειος* e *Λυκηγενής*. Ma l'esistenza dell'epiteto e del nome di mese *Ἄφριος* sta a dimostrare la formazione glottologicamente in apparenza legittima, non provenuta da falsa analogia, del nome *Ἀφρεία*.

Va anche eliminata da ogni tentativo d'esegesi la testimonianza conservataci da un tardo scrittore che *Ἄφρος* sarebbe stato il padre d'Afrodite. Secondo Giovanni Antiocheno, Kronos ebbe per figlio Pico, che i genitori chiamarono Zeus, Nino ed Hera (2). Pico ebbe un figlio chiamato Belo, e Kronos avendo lasciato Pico nell'Assiria, venne in Occidente, e sposò Filira, da cui ebbe il figlio Afro: questi, avendo sposato Astinome, ebbe una figlia che chiamò Afrodite. Lo stesso storico aggiunge in accordo col *Chronicon Paschale* (edit. Bonn p. 66) e con Giovanni Cedreno (ed. Bonn p. 28) (3) che Kronos ebbe da Filira anche il centauro Chirone. Quest'ultima notizia risale a Fere-

---

(1) Kaibel *ib.* p. 262; Tümpel in *Philologus* p. 117 n. 65; Dümmler in RE II 1 p. 2729.

(2) F H G IV p. 542.

(3) Giorgio Cedreno cita espressamente come fonte *Sesto Giulio Africano*.

cide (1), ma da questo solo riscontro non è facile ricavare, come fa il Tümpel (2), che lo stemma di Sesto Giulio Africano *ist echt thessalisch*. S'intende che i cronografi posteriori lavoravano su fonti antiche manipolando, rimpolpando e modificando, quando avevano bisogno di escogitare combinazioni, alle quali non poteva mancare il materiale. *Ἄφρος* è l'eponimo degli *Ἄφροι*, cioè degli Africani, e, se un autore bizantino lo attesta esplicitamente (3), mentre dice che Afro ebbe Afrodite da Astinome, non attribuisce ad Afro l'eponimia degli Africani perchè ingannato dalla somiglianza dei nomi, ma a causa di questa collega Afro con Afrodite. Nè alla grecità dell'eponimo Afro conferisce il fatto narrato dallo stesso cronista, che Afro ebbe Afrodite da Astinome, perchè dal momento che di Afro si dovea fare il padre di Afrodite, era naturale che un ripiego si dovesse escogitare a giustificazione della genealogia. Come si giungesse a questa combinazione, non è possibile rintracciarlo, dal momento che a noi è pervenuta solo l'eco d'un'eco della voce iniziale; ma si comprende come *Ἀστυνόμη* epiteto di Afrodite in qualche città della Tessaglia, diventasse per sdoppiamento madre di Afrodite (4).

Accertata la fallacia della relazione che si vorrebbe stabilire tra le due forme, *Ἀφρεία* e *Ἀφρογένεια* da una parte, tra *Ἄφρος* e *Ἀφροδίτη* dall'altra, veniamo a discorrere sul mito e sul nome di Afrodite. All'origine orientale di essa, nonostante l'impenitente pervicacia di qualche mitologo o di qualche altro dotto (5), che ripete opinioni antiquate per non aver studiato il problema di proposito, non si dovrebbe ormai più prestar fede; ma, dopo le scoperte di Creta, si è fatta strada un'ipotesi, che sembrerebbe a prima vista aver tutte le parvenze della probabilità. Essa sarebbe una divinità preellenica (6), accolta dai

(1) *Schol. ad* Apoll. Rhod. II 1235 = F H G I p. 70 fr. 2 *Φερεκύδης φησὶν ὅτι Κρόνος ἀπεικασθεὶς ἵππῳ ἐμίγη Φιλύρᾳ τῇ Ὠκεανοῦ καὶ διὰ τοῦτο διφυὴς ὁ Χείρων.*

(2) *Philologus* XLIX 1890 p. 116.

(3) Giorgio Cedreno l. c. *ὡς δὲ Ἀφρικανός φησι καὶ ἕτερον υἱὸν ἔσχεν ὁ Κρόνος τὸν Ἄφρον ἐξ οὗ οἱ Ἄφροι*, e vedi anche i risarcimenti al testo del *Chronicon Paschale*.

(4) Un' *Ἀφροδίτη Ἀστυνόμη* suppone il Tümpel *Philologus* ib. p. 117.

(5) Vedi p. e. Nilsson *Griechische Feste* p. 363.

(6) Evans B S A IX 1902-3 p. 87; Burrow *The discoveries in Crete* p. 115.

Greci invasori: il sostrato preellenico sarebbe dimostrato dalla colomba, uccello a lei sacro da Pafo a Erice. Senonchè dalle particolarità del culto non si può, senza peccare contro i più rigidi canoni del metodo storico, ricavare nulla sull'essenza del mito. Ciò non ha bisogno di dimostrazione: con quest'argomento negativo cospira l'altro positivo che un mese *Ἄφριος* in Tessaglia e un nome d'una dea *Ἀφρεία*, d'origine tessalica, ritenuta identica ad Afrodite, tendono a mostrare l'origine greca del nome Afrodite. Si dovrebbe ammettere una fortuita somiglianza nelle due parole e la conseguente assimilazione? Non nego la possibilità teorica di questa soluzione; ma si converrà che è estremamente improbabile. Afrodite ci si presenta in Tessaglia con caratteri così particolari e spiccati, che si stenta a ritenerla una dea importata. A Tricca abbiamo un'Afrodite *Ἀνδροφόνος*, a Farsalo un'Afrodite *Πειθώ*, che non hanno riscontro altrove (1): nel calendario di Magnesia abbiamo il mese *Ἀφροδισιών* (2), e non era certo in quello di Magnesia soltanto. Tutto concorre dunque in favore dell'ipotesi che il mito d'Afrodite sia stato portato dai Greci invasori, ed abbia seguìto la sorte e i successivi adattamenti secondo i paesi in cui prendeva piede, e si modificasse secondo i contatti con popoli non greci.

L'Enmann ha tentato un'etimologia del nome *Ἀφροδίτη* con elementi puramente ariani. Egli comincia col respingere l'etimologia di Leo Meyer che pone a base del nome greco un *αφροδ-* corrispondente al sanscrito *bhrâj* " accendere „ con la vocale protetica come *ὀφρύς* skr. *bhrû* + il suffisso *ita*. La maggiore difficoltà di questa etimologia egli la trova nel fatto che un'iscrizione cretese dà *Ἀφροδίτα*, che secondo le regole della metatesi greca dovrebbe essere più antica di *Ἀφροδίτη*. Egli preferisce vedere nel secondo elemento un corrispondente del sanscrito *dîti* = " splendore „ e si appella a una testimonianza di Tacito, secondo la quale nel tempio di Afrodite Pafia (H.1112) " precibus et igne puro altaria adolentur nec ullis imbribus quamquam in aperto madescunt „ (3). Ma è facile vedere come l'illustre ricercatore sia stato troppo sedotto dalla sua tesi per

(1) Vedi Dümmler in RE II 1 p. 2729.
(2) I G IX 2 n.1100; 359 *a)*.
(3) *Kypros und der Ursprung des Aphroditekultus* p. 69-71.

scorgere un carattere primigenio del culto d'Afrodite in un uso praticato dove esso aveva subìte molte influenze orientali. Basta ricordare quanto dice Ovidio (F. I 339 se.):

> Nondum pertulerat lacrimatas cortice murras
> Acta per aequoreas hospita navis aquas,
> Tura nec Euphrates nec miserat India costum
> Nec fuerant rubri cognita fila croci.
> Ara dabat fumos herbis contenta Sabinis.
> Et non exiguo laurus adusta sono.

Più validi sembrano gli argomenti linguistici: col primo elemento *αφρο* egli pone in relazione la dea *Frutis* dei Latini, che suppone derivata da *Furtis*, in origine *Fortis*: onde anche *Fortuna* si riannoderebbe a questa trama etimologica. In base a una testimonianza di Agostino, che parla di una *Fructiseia* menzionata negli Indigitamenta, suppone l'esistenza originaria di forme come *Forctis, Forctuna* e di *Ἀφορκδίτη*, allegando *φορκός lucente*, e postulando la protesi dell'*α*.

Tuttavia come si stenta ad ammettere il nome *Ἀφροδίτη* d'origine preellenica accanto a quello greco *Ἀφρεία*, così non ci si rassegna a ricercare la coesistenza di due nomi, uno *Ἀφροδίτη* derivato dalla radice *φορκ*, l'altro *Ἄφρεία* che con questa non si può connettere, ed è molto difficile separare dal sostantivo *ἀφρός*. A meno quindi che non si voglia ricorrere all'ipotesi comoda della somiglianza fortuita, anche nel nome *Ἀφροδίτη* si deve scorgere un derivato, se non di *ἀφρός*, almeno della radice da cui *ἀφρός* deriva. Il sostrato originario di questa parola, sembra quello di umidità e di pioggia, e ad Afrodite, dea della fecondazione, si attaglia abbastanza uno stretto rapporto con la pioggia vivificatrice (1). In tal caso appare molto problematica la legittimità dell'etimologia supposta pel secondo elemento *διτη*, in cui l'Enmann ha ricono-

(1) Vedi Boisacq citato a p. 906 n. 6. Cfr. Aesch. fr. 44 Nauck[2] v. 3 sg.

> *ὄμβρος δ'ἀπ'εὐνάεντος οὐρανοῦ πεσὼν*
> *ἔκυσε γαῖαν· ἡ δὲ τίκτεται βροτοῖς*
> *μήλων τε βοσκὰς καὶ βίον Δημήτριον·*
> *δενδρῶτις ὥρα δ'ἐκ νοτίζοντος γάμου*
> *τέλειός ἐστι· τῶν δ'ἐγὼ παραίτιος.*

sciuto una forma corrispondente al sanscrito *dîti* " splendore ", e non è agevole pensare ad un'altra spiegazione. Ma questo non sarebbe il primo caso in cui una parola, specialmente un nome proprio, offrisse qualche ostacolo alla completa decomposizione nei suoi elementi, pur non potendosi dubitare della sua etimologia. Del resto non sarebbe senza difficoltà l'etimologia dell'Enmann, in quanto suppone una composizione di due elementi aventi lo stesso significato.

Resta a vedere se il mese *Ἄφριος* fosse consacrato a Zeus o ad Afrodite, o indicasse semplicemente un carattere della stagione. Nell'onomastica dei mesi greci abbiamo esempio di denominazioni derivate dalla divinità, cui il mese era consacrato, come Artemisione, Posideone, Dio, o di feste e riti, come Ecatombeone, Gamelione, Sciroforione; ma non mancavano quelle relative al carattere del mese, come l'attico Memacterione (1) e forse l'epidaurico e coo-rodio Agrianio. Il mese *Ἄφριος* appartiene quasi di certo a quest'ultima categoria, perchè, in qualche città abbiamo un mese consacrato ad Afrodite, ma è chiamato, come abbiamo visto, addirittura *Ἀφροδισιών*. Che fosse consacrato a Zeus, è alquanto improbabile, perchè a una divinità maggiore quale Zeus, non si consacra un mese ponendo in evidenza un attributo, che per la mancanza di diffusione, come risulta dalla singolarità della nostra iscrizione, si ha ragione di credere non fosse d'uso molto frequente in Tessaglia. *Ἄφριος* è quindi il mese della pioggia, e ben s'adatta a un mese che corrisponde all'attico Elafebolione, che è quanto dire il nostro marzo-aprile.

---

(1) Harpocrat. *Μαιμακτηριών ... μαιμακτὴς δ'ἐστὶν ὁ ἐνθουσιώδης καὶ ταρακτικός, ὥς φησι Λυσιμαχίδης ἐν τῷ περὶ τῶν Ἀθήνησι μηνῶν.*

Un memoriale inedito di Prospero Balbo nel dicembre del 1799.

Nota di EUGENIO PASSAMONTI.

Il Piemonte, nel dicembre del 1799, si trovava in una condizione difficilissima: la vittoria degli austro-russi non gli aveva ridonato la libertà sperata: ma lo aveva fatto cadere in una nuova servitù non dissimile da quella in cui era stato sotto il Direttorio. L'Austria, che non poteva, nè voleva perdonare agli Stati Sardi l'alleanza con la Francia, approfittando delle circostanze, mirava ad impossessarsi della pianura padana al di qua del Ticino, ed a ridurre gli altri dominii della casa di Savoia in una sudditanza larvata da speciose forme diplomatiche.

Il governo di Vienna non celava le sue intenzioni. Se uno dei cardini della politica dell'imperatore di Russia era il restaurare Carlo Emanuele IV sul trono degli avi, il barone Thugut, che in Austria agiva dispoticamente, imponendo la sua volontà al sovrano, mirava a costituire agli Absburgo un nuovo dominio.

Il 18 giugno 1799 lo Czar aveva inviato da Pavolosck al Souwarow istruzioni sulla condotta da tenere con i reali di Sardegna. " Voi conoscete, caro conte Alessandro Wassiliewitch, scriveva Paolo I, che in questa guerra contro la Francia noi siamo guidati specialmente dal desiderio di vedere restaurata la vera fede e ristabiliti sul trono i Principi spodestati. Avendo pertanto conquistato il Piemonte credo necessario, appena la cittadella di Torino abbia capitolato, che invitiate il Re di Sardegna ad andare a Torino. Voi curerete di riporlo sul trono, che la Sovranità gli sia pienamente restituita e conservata ". Tali parole rivelavano la ferma decisione dell'imperatore russo di non accettare, in nulla e per nulla, cambiamenti nel governo degli Stati Sardi. Il Thugut non recedè di un palmo dalla

sua politica; e, mentre inviava in Piemonte il conte Nicola Concina con il compito di eliminare ogni impedimento alla effettuazione dei suoi disegni, dall'altra, con sottile diplomazia, giovandosi delle clausole dell'alleanza con la Russia, usando gli stessi mezzi per fini diversi, piegava il maresciallo Souwarow a secondarlo nell'opera sua. La conseguenza fu che il grande generale, il quale, ricevuti gli ordini dello Czar, il 18 giugno 1799, si era affrettato ad invitare Carlo Emanuele IV a ritornare nei suoi dominii; dopo le lettere speditegli dall'imperatore Francesco d'Austria, il 3 e il 17 agosto dello stesso anno, dichiaravasi pronto a sostenere l'opera del governo di Vienna negli Stati del Re di Sardegna. E, quando il Duca d'Aosta, tenuto per desiderio del Re all'oscuro delle macchinazioni diplomatiche, il 20 agosto 1799 diresse da Livorno al Souwarow una lettera piena di entusiasmo nella quale dicevasi desideroso di conoscere il liberatore d'Italia e di volere prendere con lui gli accordi per la completa restaurazione della casa di Savoia, il maresciallo gli inviò incontro il principe Gortschakoff per invitarlo a non proseguire il cammino verso Torino ed a fermarsi in Vercelli (1).

Il Thugut, nello stesso tempo, in cui costringeva il Souwarow a subire la sua volontà, teneva fronte allo Czar che, intravedendo le macchinazioni dell'Austria, per amore di giustizia, idealista com'era, voleva convocare un congresso delle potenze a Pietroburgo per decidere sulle singole pretese che sarebbero state avanzate alla conclusione della pace. Il Ministro degli affari esteri austriaco dimostrò la inutilità di ciò, e ricordò a Paolo I un articolo segreto del trattato del 1795 per la spartizione della Polonia, secondo il quale all'Austria, per risarcirla della parte della pecora toccatale al banchetto polacco, era promessa una eventuale ricompensa nella Baviera od in Italia (2). Il Thugut ben sapeva che in questo modo si alienava la simpatia della Russia; ma era altrettanto certo che

(1) Bianchi, *Storia della monarchia Piemontese dal 1763 al 1861*, Torino, Bocca, III, pp. 264, 265; Carutti, *Storia della casa di Savoia durante la rivoluzione francese e l'impero*, Torino, Roux, 1892, II, pp. 57 *passim*.

(2) Bianchi, op. cit., III, p. 267.

l'Europa, in lotta contro la Francia, doveva essere strettamente unita, se desiderava conseguire la vittoria. In ogni caso l'Austria, assicuratosi e consolidatosi il dominio dell'Italia, avrebbe potuto tenere fronte a chiunque si fosse opposto ai suoi disegni.

Il Thugut non agiva solo nel mondo diplomatico ma spiegava tutta la sua energia in Piemonte (1). I diversi rami dell'amministrazione del Regno Sardo erano stati a poco a poco modificati secondo i concetti ed i metodi austriaci. Il 30 giugno 1799 il Concina aveva fatto convocare dal Sant'Andrea il Consiglio di Reggenza formato dal Souwarow, appena entrato in Torino, che ne aveva scelti come membri i rappresentanti più sinceri del fedelismo monarchico. L'inviato austriaco riferì ai consiglieri, che per ordine di Vienna tutti gli atti e gli editti governativi dovevano essere sottoposti per l'avvenire all'approvazione del Melas. E, sebbene il Revel, con proclama del 9 agosto 1799, dichiarasse agli abitanti di prendere egli la direzione dello Stato e mostrasse così di tenere in non cale la missione del Concina, il Thugut non mutò idea, servendosi, in luogo del Melas, vecchio e debole, dello Zach. A questo imponeva di operare in modo che il dominio austriaco fosse stabilito in Piemonte. Lo Zach, il quale non comprendeva altro che la disciplina militare e che considerava ogni luogo straniero occupato dalle sue milizie quale terra di conquista, agì in maniera tale, che lentamente si vennero concentrando nelle mani del rappresentante dell'imperatore Francesco tutti i diversi rami della amministrazione degli Stati Sardi. Si comprende come nei dominii della casa di Savoia non restasse ora altro che il nome dell'antica libertà. Gli uomini politici, che avevano negli anni precedenti lottato contro la Francia per conservare alla loro patria l'indipendenza, furono per volontà del Thugut allontanati dai pubblici uffici, primi il Priocca ed il S. Marzano. L'esercito, che erasi dimostrato il difensore più saldo della monarchia sabauda, privato dei suoi duci era stato ora messo alla mercè di generali ed ufficiali austriaci che l'avevano ordinato e regolato alla foggia straniera. Le potenze protettrici del Piemonte erano impossibilitate ad agire, o per le imprescindibili necessità che avevano

(1) Bianchi, op. cit., III, p. 284.

determinato la presente coalizione o costrette a provvedere ai loro immediati interessi (1).

Il Regno di Sardegna era quindi in balìa dell'Austria, privo di tutti i mezzi politici, militari ed economici. Infatti le sue condizioni finanziarie erano tristissime: guerre costose prima, l'annessione alla Francia poi ed in ultimo l'occupazione delle truppe austriache l'avevano ridotto alla assoluta impotenza. Sospesa ogni industria, per l'interrotta libertà dei trasporti, negletto il commercio, trascurata l'agricoltura, annichilito il credito, non si trovava modo alcuno di uscire da quello stato disperato, chè le spese e le esazioni pretese dallo Zach e dal Melas aumentavano di giorno in giorno, mentre languiva sempre più la vita economica del paese. Come se ciò non bastasse minacciava il Piemonte una carestia asprissima; e gli Austriaci non lasciavano importare negli Stati Sardi il grano necessario alle esigenze della popolazione. Raccontano le fonti, che tutte le insistenze del Luogotenente generale e del Consiglio supremo, per ottenere dal Melas, verso la fine del 1799, il permesso di introdurre grano dalla Lombardia, non valsero che la concessione di 18.000 sacchi di cereali; mentre gli Austriaci ed i Russi dal luglio al settembre dello stesso anno avevano consumato 80.000 sacchi di frumento e di segala diminuendo di un buon terzo la già scarsa raccolta. La carestia era resa più dolorosa dalle circostanze che l'avevano preceduta e che l'accompagnavano. La epizozia menava strage fra le bestie bovine. Le malattie contagiose mietevano numerose vittime fra la gente di campagna priva di ogni mezzo di difesa. Essendo arrestate le industrie molti operai e braccianti erano privi di lavoro e aumentavano il numero dei bisognosi. I contadini per l'enorme rincaro dei viveri (2) si cibavano di meliga quando trovavano da acquistarla. Nè a tante miserie potevano fare fronte le classi abbienti, perchè molte famiglie nobili o erano state salassate dalla amministrazione repubblicana o avevano dovuto subire forti perdite dalle contribuzioni loro imposte dal governo di Vienna; senza contare, che su di esse pesavano in maggior

(1) Bianchi, op. cit., III, pp. 290, 295, 299.
(2) Bianchi, op. cit., III, p. 353 *passim*.

parte i pubblici balzelli. Ciò nonostante non diminuivano le pretese austriache. Il 4 settembre 1799 il Revel scriveva: " A misura che aumenta la nostra impossibilità le esigenze del Commissario austriaco si fanno maggiori e più aspre: le casse sono assolutamente vuote „ (1).

Quando si rifletta a ciò che siam venuti esponendo si comprenderà quale grande bisogno il Piemonte sentisse di potere, libero da amici e nemici, riconcentrare in sè stesso tutte le sue energie e tentare di uscire dalla rovina in cui si trovava. La indipendenza gli avrebbe restituito la forza perduta. A conseguire ciò dovevansi prima di ogni altra cosa allontanare gli invasori, che non intendevano di abbandonare un territorio conquistato con la forza delle armi. Necessitava persuadere l'opinione pubblica europea ed i gabinetti delle singole potenze, che l'opprimere il Piemonte costituiva un pericolo per la pace europea, mentre, se si fosse concesso a questo Stato di rifarsi dei danni subiti, la Francia avrebbe avuto un nemico di più e un nemico non disprezzabile per ragioni implicite ed esplicite. Ma non era cosa agevole il parlare di un argomento siffatto, quando imperavano gli austriaci, i quali sorvegliavano tutti i movimenti di coltura e le varie manifestazioni del pensiero (2). A ciò si accinse Prospero Balbo. Egli, che per due lunghi anni aveva sostenuto una guerra a coltello contro le malizie del Direttorio, poteva ora con diritto tutelare gli interessi della sua patria. Cooperatore efficace della politica piemontese dal 1796 al 9 dicembre 1798 ne conosceva i più riposti intenti ed era nella condizione di ribattere le ragioni dell'occupazione austriaca che si fondavano specialmente sulle nascoste direttive del passato governo di Carlo Emanuele IV; mentre, provato alla fine schermaglia del Talleyrand, non certo inferiore all'astuzia felina del Thugut, lo avrebbe efficacemente fronteggiato in ogni sua mossa.

Educato dal conte Bogino, Prospero Balbo era cresciuto nel mondo della diplomazia e degli affari di governo, acquistando,

(1) Bianchi, op. cit., III, p. 277. Archivio di Stato — Collezione Balbo — Documenti per servire alla Storia patria, anni 1798-1799: lettera del Revel del 4 settembre 1799.

(2) Bianchi, op. cit., III, p. 331; Carutti, op. cit., III, p. 62.

fin da giovine, la pratica dell'uomo di stato. Di questa sua speciale attitudine aveva dato prova, più che nella carriera percorsa in patria dal 1783 al 1796, nella ambasceria di Parigi, ove, quasi periodicamente, aveva dovuto lottare contro ogni specie di ostacoli a lui frapposti dalle sfere ufficiali e dall'opinione pubblica francese, che tendevano, fin dopo la pace di Parigi, ad impossessarsi del Piemonte. Lo studio dei documenti, che numerosi il Balbo ha lasciato riguardanti questa parte dell'opera sua di statista e di diplomatico, ci fa intendere quale profondo politico fosse e come conoscesse gli uomini e l'ambiente nel quale viveva (1).

Terminato il suo ufficio in Parigi, il Balbo, rifiutata la rappresentanza diplomatica della Baviera nella capitale francese, si era unito, in Barcellona, con alcuni dei più schietti sostenitori del fedelismo monarchico piemontese, i quali avevano abbandonato Torino dopo la fuga del Re. Da Barcellona con una nave inglese era venuto in Livorno. Quando corse la voce che Carlo Emanuele IV sarebbe ritornato in Piemonte, il Balbo tutto si rallegrò e si preparò ad andare incontro al suo sovrano; ma, essendo stato questo costretto a disporre diversamente, il Balbo ricevette lettere regie, nelle quali e lo si ringraziava dell'opera data a pro de' suoi signori e lo si incaricava del controllo generale del Piemonte: compito grave questo per le attuali condizioni dello Stato, ma non affatto nuovo per il grande diplomatico, che dal 1783 al 1792 negli uffici del municipio di Torino, negli studi privati, nelle riunioni dell'Accademia delle Scienze, di recente formata, si era occupato profondamente di questioni economiche (2).

---

(1) Della vita e in modo particolare dell'ambasceria di Prospero Balbo andiamo occupandoci da alcuni anni, ricercandone tutto quanto è possibile sia nell'Archivio di Stato in Torino, che in quello ricchissimo di casa Balbo, la quale ci ha concesso con rara magnanimità di godere dei tesori ch'essa racchiude. Di queste nostre fatiche uscirà presto frutto, che raccomandiamo fin d'ora ai benevoli che ci hanno consigliato in tanto dilettevoli studi.

Sclopis, *Notizie della vita del conte Prospero Balbo*, Torino, Paravia, 1874, p. 7 *passim*; Cibrario, *Il conte Prospero Balbo*, Torino, 1873, *passim*.

(2) Sclopis, op. cit., p. 3 *passim*.

Quantunque conscio delle responsabilità, che si assumeva, il Balbo non rifiutò la missione affidatagli. Suo fratello Gaetano dal maggio del 1799 era andato in Pietroburgo per difendere gli interessi di Carlo Emanuele IV: Prospero Balbo nell'ottobre di questo anno partì per Torino per assumere la carica di controllore, nella quale, con poco frutto, lo aveva preceduto il cavaliere Giuseppe Massimino. Appena arrivato, nei primi di novembre, egli comprese, che era vano lo sperare di porre rimedio ai mali della sua terra, fino a quando gli austriaci l'avessero occupata, e sentì la necessità di liberarla in modo realmente efficace. A tale scopo scrisse il presente memoriale, che doveva essere consegnato alle singole potenze coalizzate, perchè, rendendosi conto dello stato reale delle cose, vi avessero posto una buona volta riparo.

La condotta dell'Austria verso gli Stati Sardi si fondava sopra varie ragioni le quali si potevano riassumere in una principale: il Piemonte ha in questi ultimi tempi seguita una politica favorevole alla Francia servendola a danno delle altre nazioni europee: la tranquillità dell'Europa esige che sia per sempre impedita questa politica: nessun mezzo più adatto quanto il lasciare al governo di Vienna tutta l'amministrazione del principato sardo allontanandone una casa regnante sospetta ed inetta. Lo scopo del Balbo fu quindi di persuadere i gabinetti europei, che le teorie del Thugut avevano poca o punta consistenza, dimostrando che il Piemonte aveva in ogni momento, fin dallo scoppio della rivoluzione francese in poi, salvaguardato gli interessi altrui più ancora dei propri non piegandosi mai ai voleri di Parigi quando avrebbero potuto danneggiare la stessa Austria. E non era fuor di luogo il ricordare di quale natura fossero stati precedentemente i rapporti degli Stati Sardi coll'Impero, perchè, dato il nemico con cui si aveva da fare, bisognava mostrarsi di averne sempre favorito la politica. Essendo il governo di Vienna arbitro del Piemonte, gravissimo errore sarebbe stato il provocarlo vieppiù con un contegno risentito ed ostile: era invece astuzia di fine diplomatico il far vedere di condividerne pienamente le idee generali, di averle già seguite e anche di non essere alieni dal conchiudere una alleanza contro la Francia.

Per questo scioglimento della questione propendevano molti

uomini di Stato in Torino: fra i quali lo stesso S. Gennaro, che al S. Marzano da Vienna il 2 dicembre 1799 scriveva essere il miglior partito per il Re di Sardegna quello di cedere alle circostanze. Di sentimento avverso erano coloro i quali si sentivano, oltre che piemontesi, anche italiani, e che in modo assoluto non volevano aver che fare con chi li opprimeva contro ogni giustizia: eco fedele di siffatta tendenza fu Prospero Balbo (1).

Senza molte ambagi, con quel fare secco e preciso che già aveva tanto imbarazzato il Talleyrand, il Balbo entrava in argomento: " Il est nécessaire, scriveva, il est très urgent que toutes les Puissances coalisées soient instruites de la situation actuelle du Piémont, pays si intéressant pour sa position, dont le sort a toujours décidé de celui de l'Italie, quelques fois des destinées de l'Europe „ (2). Premeva al Balbo di far rilevare, come l'Austria tendesse a nascondere l'importanza politica del Piemonte, temendo che le potenze coalizzate, quando se ne fossero reso il debito conto, avessero impedito una tale sopraffazione restituendo a questo Stato la sua piena facoltà di agire nel concerto europeo.

Il grande diplomatico, per conseguire il suo intento, doveva, prima di ogni altro argomento, dimostrare l'assurdità del concetto, che l'Austria aveva e faceva avere sulla natura della politica sarda: egli volle quindi, per quanto la natura di un memoriale gli concedeva, esporre l'opera del governo di Torino da quando si era manifestata la rivoluzione francese. E si propose, in modo speciale, di chiarire gli intendimenti di Vittorio Amedeo III e di Carlo Emanuele IV, in quell'agitato periodo, perchè fossero private di ogni consistenza le accuse del ministro degli affari esteri austriaco contro gli ultimi re del Piemonte.

Fin dal principio il Balbo accusava l'Austria di operare coscientemente e con perfidia a danno degli Stati Sardi: " Il

(1) Bianchi, op. cit., III, p. 317.

(2) Documenti per servire alla Storia Patria, anni 1790-1800. Archivio di Stato. — Collezione Balbo. — Avvertiamo che i diversi luoghi che citeremo di Prospero Balbo sono contenuti nel surricordato volume di documenti; ovvero nell'altro pure della collezione Balbo nell'Archivio di Stato, intitolato: *Correspondance de P. Balbe avec monsieur de Priocca, anno 1796-1798.*

est peut-être indispensable, egli diceva, de remonter à des faits dont l'époque n'est pas très eloignée, mais dont le souvenir presque effacé par la rapidité des événemens est encore obscuré à dessein par la profonde méchanceté des ennemis communs. Leur perfidie astucieuse et savante n'a que trop reussi à presenter sous un faux jour la conduite la plus simple, les démarches dictées par la plus imperieuse nécessité „.

Queste parole si potevano riferire alla Francia; ma quando si rifletta alla natura del momento storico, ai problemi che si dovevano allora sciogliere, agli ostacoli immediati che era indispensabile il sormontare, saremmo tentati di asserire che il Balbo, con tali espressioni, mirava unicamente all'Austria. Il presentare, sotto falsa luce, una politica, di per sè chiara, era l'arma di Vienna contro il piccolo Stato italiano. Il Balbo, pur conoscendo, che la condotta di Vittorio Amedeo III e Carlo Emanuele IV si difendeva da sè, voleva mettere, fin da principio, in rilievo il fatto che essi erano stati per partito preso travisati nell'opera loro.

Il nostro statista basò la difesa dei suoi sovrani su due sostanziali concetti: la casa di Savoia osteggiò fin dalle sue prime manifestazioni la rivoluzione sia con la diplomazia che con le armi: e, se, vinta dalle circostanze, accettò l'alleanza con la Francia, la formulò in modo da non danneggiare giammai l'Austria.

Per la prima tesi il Balbo non aveva bisogno di usare argomenti speciosi. L'opera di Vittorio Amedeo III, ostile ai moti di oltr'Alpe sia per l'indole sua, sia per interessi famigliari e politici, era efficace dimostrazione dell'assunto del diplomatico piemontese, che cioè gli Stati Sardi non avevano agito diversamente dalle direttive del governo di Vienna. Se ai primi sintomi della rivoluzione il Piemonte aveva tenuto un contegno di attesa, lo aveva fatto solo per volontà dell'imperatore austriaco (1); ed il Balbo si valse di ciò per far risaltare ancora, come Vittorio Amedeo, a differenza dei suoi predecessori, che avevano

(1) Bianchi, op. cit., I, p. 512 *passim*; Carutti, op. cit., p. 218 segg.; Manno, *Tesoretto di un bibliofilo piemontese, in curiosità e ricerche di storia subalpina*, I, p. 759.

piegato or qua or là nei grandi moti europei secondo l'opportunità del momento storico, aveva saputo resistere agli allettamenti del governo francese il quale mirava a strapparlo dalla lega dei principi europei. L'ordine dato al conte Solaro dal Re di non lasciar passare il Semonville inviato straordinario della Francia, alla fine dell'aprile del 1792, sebbene mascherato dal punto di vista di questione personale, era, ora, per il Balbo, prova convincente della sua tesi. Se Vittorio Amedeo avesse così agito per l'interesse proprio, in quanto riteneva dannoso l'unirsi con il governo di Parigi, non conveniva indagare; restava sempre il fatto, che il principe sardo aveva respinto trattative di cessione di territorio a danno dell'Austria per la ferma volontà di non separarsi da questa potenza. E ciò confermavano le pratiche che erano state, nel 1792, contemporaneamente all'invio del Semonville, compiute per una pronta alleanza austro-piemontese in difesa del minacciato Delfinato (1).

E, continuava il Balbo nel suo memoriale, non solo fu respinto il Semonville, ma Audibert Caille ebbe egual sorte. La proposta di quest'ultimo, inviato a sostituire il Semonville, dimostrava quanta volontà la Francia avesse di allearsi con il Piemonte e il nuovo rifiuto del Re chiariva la purità e l'integrità dei suoi intendimenti. Il Balbo non osservava però che la stessa ragione, per la quale erasi respinto il primo inviato francese, aveva determinato il conte Viretti a ritenere inutile di iniziar trattative con il secondo: per il nostro statista l'apparente consentaneità della politica piemontese non poteva essere messa in dubbio dopo tale operato (2).

Il grande diplomatico faceva risaltare un altro lato importante della questione. Se il governo di Parigi aveva a quello di Torino offerto in cambio dell'alleanza la Lombardia, quest'ultimo erasi unito all'Austria senza alcun immediato interesse: " Autrefois, osservava il Balbo, l'Autriche achétait du Piemont la défense de la Lombardie par la cession de quelque lisière. Le cas était différent; le Roi de Sardaigne pour défendre l'Italie

---

(1) Bianchi, op. cit., I, pp. 182, 190 segg.; Franchetti, *Storia d'Italia dal 1789 al 1799*, Vallardi, Milano, pp. 81 segg.

(2) Carutti, op. cit., I, p. 173; Bianchi, op. cit., I, p. 60.

entière ne fait pas la moindre démande „. Era un colpo da maestro contro la politica austriaca verso il Piemonte, nelle guerre della prima metà del secolo XVIII nelle quali l'aiuto tedesco era stato comprato a prezzo di dolorosi sacrifizi (1).

Vittorio Amedeo III, scriveva il Balbo, non aveva chiamato in suo aiuto ventimila uomini da Vienna come un suo illustre predecessore, ma solo alcuni battaglioni. E se il Piemonte era stato sconfitto dal Montesquieu e dall'Anselme, dal qual fatto i denigratori del Regno Sardo deducevano l'impossibilità per esso di difendersi colle sue forze, bisognava ricordare che le truppe austriache, giunte in ritardo, non si erano, nella prima campagna contro la Francia, mostrate degne della loro fama.

La causa delle nostre sconfitte dipendeva, per il Balbo, dalle stesse cause che avevano fatto subire ai tedeschi i rovesci sul Reno. In Piemonte quarant'anni di pace avevano disavvezzi gli abitanti dal mestiere delle armi: e d'altra parte la perdita della Savoia e di Nizza era dovuta, per il nostro statista, più che alla deficienza organica dell'esercito alla inesperienza di alcuni capi. Il Balbo attribuendo al conte Lazary la facilità della vittoria francese non aveva tutti i torti (2). Ma, osservava egli immediatamente, la prostrazione degli Stati Sardi non fu che momentanea: " Loin de s'abattre l'homme national se réveille et se ressouvient de notre ancienne gloire „. Dovendo persuadere le potenze coalizzate di lasciare il Piemonte libero di sè era necessario convincerle che esso possedeva energie vitali nell'intimo suo, le quali si sarebbero destate al primo apparir del pericolo. Il Balbo quindi, pur essendo costretto ad ammettere le sconfitte, cercava di controbilanciarne l'effetto con il far ad esse seguire atti che potevano dare un'idea della capacità del piccolo stato italiano. E descrivendo la ripresa delle ostilità colla Francia nel 1793, mentre taceva le dolorose condizioni alle quali aveva dovuto sottostare Vittorio Amedeo nel luglio di quest'anno,

(1) Carutti, *Storia di Vittorio Amedeo II*, Torino, Clausen, 1897, p. 297.

(2) Costa de Beauregard, *Mémoires historiques de la maison de Savoye*, III, p. 308 sg.; Pinelli, *Storia militare del Piemonte dalla pace di Aquisgrana fino ai dì nostri*, Torino, De Giorgi, I, p. 85 segg.; Thaon de Revel, *Mémoires de la guerre des Alpes*, Torino, Bocca, 1871, I, p. 17 *passim*.

narrava con giovanile entusiasmo le prime vittorie delle truppe sarde comandate da' loro generali file che esse amavano e seguivano con lo slancio della persuasione cieca. Il Balbo poteva a ragione parlare del risveglio bellico che si era manifestato in Piemonte dopo la perdita di Nizza e Savoia: egli come decurione di Torino aveva proposto di formare una milizia urbana per difendere il territorio nazionale, nel luglio del 1792; ed aveva veduto rispondere al suo appello 4.256 torinesi, dei quali 36 sacerdoti (1).

Prospero Balbo accennava appena alla presenza delle soldatesche austriache in questa seconda campagna e lo faceva solo allo scopo di rilevare l'eccellenza dei piemontesi e la perspicacia dei generali sardi in confronto agli errori commessi dagli alti ufficiali tedeschi. Non una parola, non una frase uscivano dalla sua penna che non fossero dirette allo scopo che si era proposto. Gli smacchi di Aigues Blanches e di S. Germano, dell'assedio di Giletta, il fallito tentativo su Tolone il Balbo attribuiva alla tattica austriaca. Il non avere dato a Vittorio Amedeo III ed ai suoi generali la completa libertà d'azione aveva, per il nostro statista, cagionato la rotta degli austro-piemontesi nel resto della campagna. Con un'esattezza storica non priva di mal celata soddisfazione, ricordando le sconfitte del 1793, dove i rovesci erano dovuti in parte ai duci sardi, non obliava il Balbo lo sventurato anno 1794 ove i disastri di guerra erano stati voluti dai comandanti austriaci. " La cour de Vienne envoya des forces considérables, mais par une malheureuse fatalité, la brillante armée du général Devins après des succès importans fut reduite pendant six mois à une entière inactivité „ (2). In quell'espressione *malheureuse fatalité* v'era tutto l'animo del Balbo, che, addolorato nel vedere la sua patria serva dell'Austria, voleva rifarsi delle angosce e delle vergogne sofferte, ricordando che anche gli eserciti tedeschi avevano conosciuto assai spesso la sconfitta: più ancora delle milizie che essi tanto disprezzavano. Accennando appena al

(1) Pinelli, op. cit., II, p. 118.

(2) Archivio di Stato di Torino — Collezione Balbo — Documenti per servire alla Storia Patria, 1790-1800.

danno, che, in Italia, alle potenze coalizzate aveva portato la violazione voluta o subita della neutralità della repubblica genovese, e esponendo le fasi della guerra del 1795, il nostro statista ne attribuiva il mal esito, anche questa volta, alla inettitudine dei generali austriaci: e quel che più importa è che non errava con un tale giudizio. È vero che alla vittoria dei francesi avevano cooperato varie e molteplici cause, sia estrinseche che intrinseche, contro le quali poco o punto sarebbe valsa la mente di qualsiasi capitano: ma è anche vero che le forze dei piemontesi e degli austriaci erano state mal condotte e mal organizzate dai duci tedeschi. La conclusione, che si traeva da quanto il Balbo era venuto fin qui dicendo, era che gli Stati Sardi non potevano essere accusati di incapacità bellica; quindi nessun impedimento si poteva da questo lato opporre a che fossero lasciati liberi di difendersi con le loro forze.

Tutto ciò non serviva al Balbo che di preparazione e di introduzione per discutere l'argomento più importante, i rapporti cioè che il Piemonte aveva avuto con la Repubblica francese.

Perchè, domandava il nostro diplomatico, gli Stati Sardi avevano accettato di venire a patti con la Francia? Perchè, rispondeva, l'Austria ve li aveva costretti. Il Re, diceva il Balbo, aveva secondato con tutti i suoi mezzi l'imperatore; ma ne era stato mal ripagato. Il Piemonte aveva bisogno di pace da lungo tempo; eppure il nostro sovrano aveva in nulla receduto dalla sua politica di fedele alleato dell'Austria sottostando anche a patti dolorosi, resistendo a tutte le pressioni, che gli facevano molti dei suoi statisti, sostenitori poco entusiasti della collaborazione tedesca. In cambio di questa completa dedizione Vittorio Amedeo III aveva avuto sconfitte, danni infiniti materiali e morali: ed inoltre nell'aprile del 1796 era stato abbandonato alla mercè dei francesi dal generale Beaulieu. Questi, sebbene, notava ironicamente il Balbo, avesse sempre goduto di grande reputazione, aveva commesso il madornale errore di dividere i piemontesi dagli austriaci, facilitando, colla separazione delle forze, la vittoria francese. Da ciò, continuava il nostro statista, era derivata un'importante conseguenza; la distinzione completa degli interessi dei due paesi. Finchè le ban-

diere austriache avevano sventolato con quelle sarde nella stessa battaglia, era giusto, che le due nazioni avessero avuto eguali fortune; ma, ritirandosi ed abbandonando il campo la più forte, era consentaneo che la più debole cercasse di uscire dalla penosa situazione. In questo argomento, che offriva diversi punti di appoggio, fondavasi in gran parte la difesa che il Balbo erasi assunto della politica di Casa Savoia: non l'Austria era stata tradita dal Piemonte, ma il Piemonte dall'Austria.

Un'ultima salvezza, continuava il nostro statista, rimaneva nella difesa di Cherasco, perchè le truppe francesi, decimate e stancate dalle precedenti vittorie ottenute a caro prezzo, non avrebbero potuto attaccare immediatamente l'avversario ed il Colli aveva ancora seco numerose milizie (1). Eppure, esclamava il Balbo, " l'évacuation de Querasque laissait la capitale découverte et cette évacuation avait été décidé par le général autrichien qui commandait nos troupes. C'est lui qui fit les premières ouvertures d'une suspension d'armes: c'est lui qui donna les pouvoirs et les instructions aux militaires chargés de la negocier; il leur permit de livrer s'il le fallait, comme prisonniers de guerre jusqu'aux régimens autrichiens qui servaient sous ses ordres et ce ne fut pas que pour les remontrances des officiers Piémontais qu'il fit courir après eux pour retracter cette facilité ".

Aveva il Balbo parlato con serenità e verità o non si era lasciato andare ad antipatie personali che ne avevano offuscato in certo qual modo il giudizio? Non è qui il momento di discutere tanta difficile e delicata questione: del Colli molto è stato detto in un senso e nell'altro come tattico (2); ma nessuno ha mai dubitato dell'elevatezza dei suoi principii. Riserbandoci a tempo migliore lo studiare quanta verità meriti l'opinione del Balbo importa a noi constatare che, al dire del nostro diplomatico, l'armistizio e la pace tanto discussi erano stati iniziati da un generale austriaco. Non avevano quindi più ragione d'essere le accuse che Vienna lanciava contro Vittorio

(1) Carutti, op. cit., I, p. 324.

(2) Costa de Beauregard, op. cit., III, pp. 383, 386 *passim*; Pinelli, op. cit., I, p. 644.

Amedeo III. Che, se il Beaulieu il 22 aprile, appena iniziate le trattative della sospensione d'armi, aveva, anche perchè eccitato dal Revel, scongiurato la Corte piemontese di riprendere le ostilità ed aveva fatto la mossa su Asti, S. Stefano e Nizza il 24 aprile, non era possibile supporre che una campagna ideata male e peggio condotta avesse cambiato di punto in bianco (1).

L'argomento del Balbo presentava però un lato debole: era mai lecito attribuire ad un intero governo l'operato di una singola persona e si doveva per gli errori di questa abbandonare una lunga amicizia? L'opposizione era di natura sua inoppugnabile, ma si poteva rispondere, che in quel peculiare momento storico, con in vista la completa rovina politica ed economica, con il nemico alle porte della capitale, con lo scompiglio delle forze alleate era resa impossibile una prolungata difesa e che la prima mossa di pace era naturale fosse immediatamente accettata. La mossa attesa era partita da un generale austriaco, quindi la dialettica rigida del Balbo riversava sull'impero tutta la responsabilità degli eventi.

Il Balbo, però, non poteva negare la pace del 16 maggio 1796 con tutte le sue dolorose conseguenze. Se era lecito accusare Vienna di avere operato solo in vista dell'immediato interesse e di avere abbandonato il proprio alleato, il Piemonte, dal canto suo, aveva buttato a mare le potenze europee, con le quali era unito con stretti vincoli d'amicizia, in un momento in cui tutto precipitava. Il nostro statista difendeva così da quest'accusa il governo sardo: " le malheureux armistice, diceva, aména nécessairement une paix plus malheureuse encore. A-t-elle besoin d'excuse? la dureté des conditions en fait elle même l'apologie ". Poichè la pace del 16 maggio era stata causata dall'armistizio del 22 aprile il Balbo concludeva, per le ragioni precedentemente esposte, che il Piemonte non poteva agire diversamente. Se avessimo conchiusa la pace, per solo nostro interesse, non avremmo dovuto sottostare a tante dolorose condizioni: " Ce n'est pas lorsqu'on est réduit à prendre la loi du vainqueur qu'on peut être accusé de défection ".

(1) Carutti, op. cit., I, p. 326 *passim*.

Il Balbo aveva ragione, perchè il Direttorio si rifaceva ora ad usura degli smacchi diplomatici degli anni precedenti e dettava leggi ferree al piccolo stato italiano. Il Revel ed il Tonso nel corso delle trattative avevano più volte scritto al Priocca se non convenisse ricorrere ad un ultimo sforzo disperato piuttosto che sottostare a tanta vergogna: ma il ministro degli esteri sardo aveva ordinato di piegare di fronte alla forza degli eventi. L'opera del Revel, a fatti compiuti, fu biasimata dalla maggior parte della opinione pubblica piemontese; eppure poche volte il governo di Torino era stato difeso nella propria dignità come ora (1).

Discusse le ragioni, che avevano determinato la fine delle ostilità con i Francesi, il Balbo esaminava la complicata questione dell'alleanza. Il Thugut sosteneva, che la separazione del Piemonte dall'Austria e la trasformazione di quello stato in una base di operazione delle truppe francesi avevano contribuito ai rovesci delle truppe tedesche in Lombardia, nel Veneto; ed al tramonto, nella penisola, del partito conservatore. Il Piemonte, asseriva il ministro austriaco, ha approfittato della condizione dell'Austria assalita da tutte le parti per gettarsi nelle braccia della Francia al fine di ottenere un territorio cui ambiva da lungo tempo. Esso ha agito in vista dei suoi interessi; nessuna meraviglia quindi che il governo di Vienna, ora, operi in suo vantaggio e cerchi di estendere in un modo o nell'altro il suo dominio fino alle Alpi occidentali.

Con il rigore dialettico, che lo caratterizzava, il Balbo non si peritò di contraddire questo ragionamento; tanto più che l'alleanza con la Francia era stata opera sua. Giunto in Parigi, quando regnava diffidenza e dispetto reciproco fra le due nazioni, egli aveva dovuto studiare la difficile situazione, dibattendosi contro le arti sottili della diplomazia francese: aveva restituito una certa tranquillità e confidenza al Piemonte ed al Re; aveva allontanato la procella, che pareva dovesse da un momento all'altro scoppiare.

E, quel che più importava, aveva ridonato al Piemonte il

(1) Carutti, op. cit., I, pp. 336 segg.; Franchetti, op. cit., p. 236; vedi nota pp. 305, 306.

prestigio perduto per le numerose sconfitte, facendone valere, nei consigli del Direttorio, nei colloqui con il Delacroix ed il Talleyrand, la potenza politica e militare. Mentre all'esterno e con gli uomini di stato francesi atteggiavasi a rappresentante di una grande nazione, nell'intimo dell'animo suo, del quale specchio fedele sono il copioso carteggio con il Priocca ed i documenti lasciatici, angosciosamente studiava tutti i mezzi per evitare gli scogli che ad ogni momento trovava nel condurre la sdrucita nave del Piemonte. Aveva dovuto il Balbo lottare contro tutto e contro tutti; all'aperto ed all'oscuro, colle arti della diplomazia e con la corruzione: in due anni di asprissima pugna aveva salvato il proprio paese dal dominio della Francia, aveva conchiuso il trattato di alleanza che aveva suscitato le ire dell'Austria; egli solo poteva sostenere ora la discussione contro lo specioso Thugut.

Concetto fondamentale del Balbo, fu che, in sostanza, gli Stati del Re di Sardegna non avevano mai acconsentito ad invadere i territori imperiali per impossessarsene ed a combattere contro i soldati tedeschi, quantunque infinite fossero state per ciò le pressioni della Francia. La condotta del Re, diceva il nostro statista, è stata sempre coerente. Fin dal 16 giugno 1796 il Direttorio nella seduta solenne per il ricevimento ufficiale del Revel e del Tonso aveva proposto al Piemonte, per mezzo del Carnot, di unire immediatamente alle colonne francesi in Italia alcuni reggimenti sardi, ottenendo in cambio la Lombardia (1). Il 7 maggio prima ancora della conclusione della pace il Saliceti al San Marzano in Piacenza aveva osservato, presente il Bonaparte, che, se il regno di Sardegna non avesse stretta alleanza offensiva con la Repubblica non avrebbe mai potuto rifarsi delle perdite subite (2). Eppure, notava il Balbo, " les ordres du Roi leur liaient les mains, tout hormis de l'alliance ". Era vero che Vittorio Amedeo III aveva creduto anche allora in una risurrezione della potenza austriaca, in virtù della quale non voleva troppo compromettersi con la Francia repubblicana

(1) Carutti, op. cit., I, 352; Thaon de Revel, op. cit., p. 375 segg.; Sybel, *Geschichte der Revolutionzeit*, IV, p. 189 segg.

(2) Carutti, op. cit., I, p. 352.

da cui lo separavano irremediabilmente numerosi interessi e pubblici e privati: ma per Prospero Balbo v'era il fatto, che il re di Piemonte, anche dopo la pace che lo metteva in balìa del nemico, aveva voluto conservarsi fedele all'antico alleato.

Se il Piemonte, continuava il Balbo, aveva finalmente ceduto alla forza delle circostanze, lo aveva fatto solo per assicurare la propria esistenza. Un dopo l'altro gli Stati italiani avevano piegato di fronte alla potenza del Direttorio ed al genio di Napoleone: che restava alla Sardegna? Essa era alla completa mercè dei francesi. I patti stabiliti il 16 maggio 1796 avevano dato alla Repubblica i passaggi alpini, l'occupazione delle città a questi vicine, la fortezza di Alessandria, il mantenimento delle truppe galliche nel territorio piemontese; avevano, in una parola, messo il Piemonte in dominio completo dei suoi avversari, sì che presto o tardi il Re avrebbe dovuto chinare il capo dopo un ultimo tentativo disperato. E che sarebbe allora avvenuto? Il Re Carlo Emanuele IV, continuava il Balbo, come il suo illustre genitore che era morto in quei giorni di angoscia, era contrario all'alleanza, sia per principio, che per natura.

Ancor principe erasi opposto nei consigli reali ad una intima unione con la Francia ed aveva avversato la politica del Priocca e del Balbo che giudicavano necessario per la salvezza del Piemonte l'accostarsi al potente vicino occidentale. " La signature de l'alliance, scriveva il nostro diplomatico, fut pour lui sans doute le plus grand de tous les sacrifices qu'il fit pour la tranquillité de ses États ".

I Francesi infatti non lieti del modo con cui andavano i loro affari negli Stati del Re avevano cercato d'imporre la loro volontà in maniera più efficace. I fautori della repubblica nei dominii sabaudi furono riordinati, preparati, aizzati alla lotta contro la monarchia da agenti segreti del Direttorio che costituiva quasi nello stesso tempo, ai confini del principato sardo, le repubbliche ligure e cisalpina. Prospero Balbo, quando era stato inviato a Parigi, aveva avuto come principale incarico di persuadere il governo della repubblica che nulla doveva temere dal Piemonte, mentre dannoso sarebbe stato il logorarne le forze con moti all'interno e con guerre all'esterno. Il nostro statista aveva agito con energia in mezzo ai mille ostacoli che gli op-

ponevano i diplomatici milanesi e genovesi. " Je ne puis vous donner, scriveva al suo ministro il 14 luglio 1797, une idée des difficultés de tout genre que je rencontre ici dans les petites affaires, comme dans les grandes „ (1). E, ciò non ostante, aveva continuato nel suo cammino difendendo il suo Principe e, con questo, proteggendo l'integrità del partito monarchico non solo in Italia, ma anche in Europa. Così giudicava il nostro scrittore e quanto fondamento avesse l'opinione sua tratteremo altrove: a noi importa notare come egli facesse vieppiù risaltare il valore politico del Piemonte e la coerenza della politica seguita dai suoi ultimi sovrani.

Quale alleanza era la nostra, domandava il Balbo, se i Francesi ci opprimevano d'ogni parte? Fallito il tentativo delle rivoluzioni interne, la Francia aveva indotto la repubblica ligure a dichiararci la guerra e ci aveva impedito di continuare le ostilità quando potevamo far sentire la nostra potenza al piccolo e turbolento vicino. Avremmo meritato un simile trattamento se la nostra condotta fosse stata di ossequio, di fedeltà, di devozione a Parigi?

Il Piemonte, osservava il Balbo, non aveva mai nel corso delle trattative acconsentito ad occupare, come compensi dell'unione con la Repubblica francese, i territori conquistati all'impero: " Au premier moment qu'on apprit à Paris la prise de Mantoue Carnot et Letourneur offrirent positivement à l'ambassadeur de S. M. cette place si importante et l'état qui en dépend avec la reserve de s'entendre sur les pays à ceder pour rejoindre le Mantouais au Piémont. Une si brillante offerte qui aurait pu seduire un cabinet moins sage fut d'abord accueillie froidement et ensuite poliment refusée „. Infatti il 12 marzo 1797 il Balbo riferiva al Priocca, che il Carnot gli aveva accennato, dopo molte circonlocuzioni, al possesso di quella fortezza. L'ambasciatore sardo aveva rifiutato presentando la ragione che l'acquisto di Mantova avrebbe fatto più male che bene agli Stati Sardi per l'estensione del territorio e la difficoltà della difesa. Il Balbo ben si valeva nel Memoriale di questo atto

(1) Archivio di Stato di Torino — Collezione Balbo — Correspondance de P. Balbo avec monsieur de Priocca. 1796-1798.

perchè serviva a dimostrare come e quanto il Piemonte avesse provveduto all'integrità del territorio dell'impero. Come di Mantova così di Massa e Carrara e dei feudi imperiali in Italia il nostro statista giovavasi al suo intento. Il 12 maggio 1797 il Balbo riferiva al Priocca sulla delicata questione della cessione di que' dominii: " Comme ces fiefs se réduisent à très peu de chose je ne juge pas à propos de faire aucune demande pour les obtenir, à moins que on ne fut prolongé de ce côté la ligne de frontière de façon à empêcher la Republique Cispadane à tenir aux deux mers ou du moins de couper la lisière pour conserver une comunication entre les états monarchiques d'Italie, ce qui ne laisserait pas d'être assez important pour faciliter la stipulation d'un traité de garantie et de secours pour la sureté intérieure de ces états „.

Come aveva difeso la politica piemontese per quanto riguardava il preteso acquisto di Mantova, Massa e Carrara, dei feudi imperiali, così il Balbo sostenne e dimostrò vane le accuse che il Piemonte avesse voluto impadronirsi della Lombardia. Era argomento difficile, perchè, in realtà, nella discussione dei termini generali dell'alleanza tanto il Delacroix che il Balbo, nel novembre del 1796, avevano accennato subito ai territori lombardi come di efficace compenso per gli Stati Sardi. Il 26 novembre 1796 l'ambasciatore spediva al Re un dispaccio cifrato pieno di allusioni ad un ampliamento del regno al di là del Ticino: il 17 dicembre 1796 il Balbo scriveva al Priocca che la Lombardia non sarebbe stata più restituita all'Austria, ma data al Piemonte: il giorno dopo il Balbo inviava al Re un nuovo dispaccio nel quale riferiva un lungo colloquio avuto la sera prima con il Carnot intorno al diritto che il principe sardo aveva a preferenza di ogni altro sull'antico dominio imperiale. Il 23 dicembre dello stesso anno l'ambasciatore piemontese in Parigi discuteva con il Priocca sulla opportunità di preferire a Torino Milano come capitale del nuovo Stato, sebbene fin d'allora mostrasse già di disperare della vittoria, perchè il Direttorio smascherandosi lentamente aveva fatto capire che non avrebbe mai concesso un boccone tanto ghiotto ad una nazione così povera. La conseguenza fu che fin dal gennaio 1797 il Balbo aveva compreso essere tramontata ogni speranza di ottenere il territorio lombardo e di essere stato giocato abilmente dal governo

francese; onde troncò ogni ulteriore trattativa per questo ed altri eventuali compensi, che sarebbero sempre rimasti allo stato ipotetico e mai effettivamente concessi. Il breve corso di giorni, in cui erasi discussa la possibilità di acquistare la Lombardia, e la condotta del Piemonte di un costante rifiuto offrivano al Balbo mezzo di difendere il suo sovrano dall'accusa lanciatagli dal Thugut di avere mirato ad illeciti acquisti. Se in un articolo segreto dell'alleanza si parlava di compensi, " quel cas, esclamava il nostro statista, pouvait-on faire d'une telle espèce d'engagement de la part du Directoire et comment pouvait-on ésperer qu'il détachait une portion de la Cisalpine pour en faire cadeau à Sa Majesté? „

Il Balbo, compiuta la prima parte della sua opera, si accinse alla seconda. Lo spirito acuto, che aveva manifestato nel dare ai fatti una interpretazione tale, che non solo il Piemonte uscisse purgato dalle macchie di tradimento e di fellonia, ma da rappresentarlo quale vittima della mala politica austriaca, gli suggerì ora un fierissimo attacco contro il governo di Vienna, tanto più facile in quanto non doveva destreggiarsi fra gli ostacoli oppostigli da una condotta ambigua.

Lo spirito pubblico degli Stati Sardi, osservava il nostro diplomatico, se aveva subìto, come il suo Re, l'occupazione francese, non era venuto mai meno alla fedeltà monarchica ed al principio legittimista. Infatti i rivoluzionari, che avevano agitato le terre sabaude, erano una minoranza assai esigua di fronte all'intera popolazione: le idee del 1789 non erano concepite dalla massa o concepite male. Il Piemonte era stato governato negli ultimi anni del secolo XVIII da un regime di riforme sapientemente iniziate dal Bogino e si sentiva per tradizione e per convinzione legato alla casa regnante. Le statistiche, che il Ginguené nel tempo della sua legazione in Torino inviava al Direttorio, provavano essere sì pochi gli aderenti alle nuove dottrine sociali da riconoscere egli implicitamente la necessità di ricorrere ad ogni mezzo lecito ed illecito per riuscire nel suo intento (1). Mancando una coscienza poli-

(1) Archivio di Stato di Torino — Collezione Balbo — Documenti per servire alla Storia Patria, anno 1798.

tica nazionale, era in Piemonte una forte coscienza regionale: quivi lo stato era penetrato nel sentimento popolare e vi trovava il suo fondamento più saldo.

Il Balbo si servì di questa condizione generale degli animi per persuadere come fosse vano il pretesto dell'occupazione austriaca di mantenere puri gli Stati Sardi dal contagio repubblicano. L'animo della massa si era manifestato dopo il 9 dicembre 1798: una lotta fierissima era scoppiata fra gli invasori e la nazione tutta che si era ribellata alla prepotenza del Direttorio per ragioni di sentimento, di interesse, di onore. Le insurrezioni, scriveva il Balbo nel suo Memoriale, che i Francesi non erano mai riusciti negli anni precedenti a far scoppiare fra noi contro la monarchia, sorsero ora possenti, e, compresse in un luogo, rinacquero in un altro con un'alternativa sanguinosa di repressioni e di sangue. Il facile ingresso delle armi austriache si era dovuto all'aiuto che le avevano dato le popolazioni del Piemonte. " Il faut avoir été temoin de l'entrée de ces troupes liberatrices, scriveva il Balbo, pour peindre la manière dont elles furent reçues; il faut comparer cet accueil avec celui qu'on avait fait aux Français pour juger cette nation indignement calomniée „. Ed, approfittando dell'occasione, il nostro statista ricordava l'eroismo dei popolani torinesi nell'assedio della cittadella della capitale per dimostrare con nuova prova come questa gente fosse capace di difendere sè stessa ed i propri diritti.

Ed ora, che il Piemonte aveva riacquistato la sua indipendenza, ora che poteva compiere la sua rigenerazione divenendo efficace collaboratore delle potenze coalizzate, ora, notava il Balbo, era impedito nell'opera propria. Questo disgraziato paese, esclamava l'antico ambasciatore, stanco di cinque campagne che gli sono costate 200 milioni, non può approfittare neppure di un armistizio per cicatrizzare le sue ferite. Già prostrato dalla lotta contro i Francesi, dalla dimora di queste truppe negli ultimi tempi del principato esso è stato ridotto all'assoluta indigenza dall'avidità dei generali gallici. Con la violenza e con il terrore questi hanno trovato il modo di succhiare il poco denaro che era rimasto nella nostra terra (1).

(1) Archivio di Stato di Torino — Collezione Balbo — Documenti per servire alla Storia Patria, anni 1790 1800.

Il Balbo aveva ragione: le nuove dottrine di umanità, di libertà erano state vendute a peso d'oro. Il 10 dicembre 1798 il generale Joubert aveva imposto una taglia di 2.000.000 sugli abitanti più ricchi di Torino ed il 13 dello stesso mese aveva chiesto al governo piemontese il pronto versamento di 500.000 lire. Dal dicembre del 1798 al febbraio del 1799 il Piemonte aveva pagato a' suoi liberatori dal servaggio monarchico più di dieci milioni senza contare le requisizioni ai Comuni di vettovaglie e foraggio. I beni delle corporazioni lombarde situati negli Stati Sardi, in difesa dei quali il Balbo si era tanto adoperato nella sua ambasceria, avevano dato al Direttorio altri cinque milioni. Il 27 gennaio 1799 il governo di Parigi aveva decretato che i beni mobili ed immobili della corona passassero in proprietà della nazione francese e ne aveva ordinato la vendita. Con il pretesto di coprire il *deficit* lasciato dalla amministrazione reale i repubblicani avevano ridotto di un terzo il valore della carta moneta; e sul clero e sulla nobiltà erano cadute in massima parte le gravezze del nuovo governo (1).

In questa condizione, continuava il Balbo, le potenze liberatrici hanno trovato gli Stati Sardi: eppure il governo ha avuto tanta vitalità da dare alle truppe austro-russe ogni specie di soccorso per il valore di dieci milioni. Ma questa nostra generosità è stata mal ricompensata, chè siamo stati sottoposti a nuove ed aspre gravezze. Abbiamo raccolto appena i tre quinti del frumento necessario al nostro paese: gli altri cereali sono stati in proporzione deficientissimi: eppure abbiamo dato alle milizie dei due imperii 4.300.000 doppie razioni di pane. Abbiamo speso per le forniture agli alleati 8.496.147. I Comuni hanno contribuito fino a quest'epoca per il valore di venti milioni: che uniti alle somme versate per le artiglierie e le munizioni salgono a più di trenta (2).

Nessuna dimostrazione più convincente il Balbo poteva trovare per la sua tesi, quanto quella fredda enumerazione di cifre. Se per difendere il Piemonte dalla politica tenuta con la Francia

(1) Bianchi, op. cit., III, p. 17 *passim*.

(2) Archivio di Stato di Torino — Collezione Balbo — Documenti per servire alla Storia Patria, anni 1790-1800.

aveva dovuto ricorrere ad artifizi di concetto e di forma, ora non aveva bisogno di altro che dell'esposizione nuda e cruda delle condizioni finanziarie del suo paese.

Le rendite dello stato, ordinarie e straordinarie, osservava il nostro statista, sommano a 19 milioni, dei quali più di un terzo è assorbito dal debito pubblico: le spese di amministrazione e di giustizia non lasciano all'esercito che 11.300.000: e può questa esigua somma, domandava il Balbo, bastare alle esigenze degli austro-russi e mantenere i 30.000 uomini di milizia piemontese che il Melas esige dal nostro Re? Nè si riflette che noi non possiamo servirci di quelle somme, le quali sono il prodotto del paese in condizioni normali: troppo chiaro ad ognuno è la prostrazione, nella quale giace ora il Piemonte, e giacerà per qualche anno ancora, dopo la distruzione che vi hanno portato i Francesi. Senza danaro, senza vitto la nostra terra, concludeva il Balbo, non può offrire nessun vantaggio: gli Austriaci stessi dovranno andarsene se non vorranno morire di fame (1).

Venendo direttamente, dopo queste dolorose premesse, al suo assunto, l'antico ambasciatore lamentava che i sistemi amministrativi impiantati negli Stati Sardi dall'Austria tendessero alla completa rovina di questa regione italiana. Cercava il Balbo di far risaltare le singole disposizioni come ispirate a malvagità, non al desiderio del generale benessere. Egli ricordava che la gabella del sale era stata tolta alle casse del Piemonte. Obbedendo ad una grande prudenza non accusava nessuno di questo atto arbitrario, ma ne parlava con la fredda maniera dell'uomo di stato che, ponendosi al disopra delle ire di parte, osserva il pro ed il contro della questione. L'avere impedito uno dei cespiti più fecondi per la monarchia sabauda era cosa che nessuno perdonava al governo di Vienna: il Balbo, facendosi eco della riprovazione generale, citava questo fatto, piccolo in sè, alle potenze coalizzate, perchè, intendendo esse i sistemi repressivi dell'Austria, vi avessero posto immediatamente rimedio. E come il sale così il tabacco, notava il nostro statista,

---

(1) Archivio di Stato di Torino — Collezione Balbo — Documenti per servire alla Storia Patria, anni 1790-1800.

era sottratto alle dogane piemontesi non da aperti impedimenti, ma dal contrabbando favorito da agenti austriaci. " Les douanes, egli esclamava, les droits de traite, l'impôt sur le vin, celui sur la viande et les autres de ce genre ne rendent pas davantage par la stagnation du commerce, par la devastation de l'ennemi et par la contrebande que les agens autrichiens favorisent tous les jours „. Più chiaro di così non si poteva parlare: lasciato da parte ogni ritegno il Balbo svelava alle potenze europee le magagne e le prepotenze dell'Austria.

Prospero Balbo, a un tale quadro desolante, faceva seguire una visione di consolazione: " Un peu de repos et une bonne administration suffiront à retablir les finances: mais il ne faut que le mal empire, il ne faut pas qu'il se prolonge. Il est de l'intérêt de l'Europe que le Piémont conserve sa force: sans cela plus de barrière entre la France et l'Italie: il faut aux Alpes une défense locale qui ne consiste pas seulement dans les places et dans les armées, mais dans le courage et dans la fidelité des habitans, dans le système suivi d'un gouvernement dont l'éxistence est liée à sa position. Une ancienne et recente expérience a demontré de nouveau ce que nous apprenait l'histoire; depuis Hannibal jusqu'à Charles VIII et depuis ce Roi de France jusqu'à Bonaparte le vainqueur du Piémont a pu devenir le conquerant de l'Italie. Il est donc nécessaire que toutes ses parties concourent à la défense commune... Le Piémont fatigué par huit ans de malheurs s'est devoué sans réserve... il doit en récevoir la recompense: il ne doit au moins porter la peine de son généreux dévouement „.

Il Balbo terminava così l'opera sua. Egli aveva parlato come gli avevano dettato la consapevolezza piena della necessità del momento e la profonda conoscenza dell' ambiente. Era riuscito nell'intento propostosi? Se egli non avesse dovuto affrontare le prepotenze austriache radicate sulla violenza, e se avesse potuto esporre il suo Memoriale di fronte ad un consesso di giudici, avrebbe ottenuto la vittoria. Ogni luogo della cavillosa argomentazione del Thugut era stato ribattuto dalla sottile diplomatica diatriba del Balbo. Egli aveva distrutto l'accusa, che il ministro degli esteri austriaco aveva formulato contro il Piemonte, dalla pretesa unione con la Francia alla fedeltà all'impero di Vienna; ed aveva anche, in

termini sobrii, ma non meno efficaci, dimostrato il danno che, agli Stati Sardi ed all'Italia, cagionava l'occupazione austriaca: associando il Piemonte all'intera penisola egli compiva opera di patriottismo, nuova in quei tempi, ma non meno nobile e bella.

Era però destinato, che la fatica del Balbo dovesse rimanere senza effetto alcuno: nè è da stupirsene quando siano considerati quei tempi nei quali solo il più forte aveva ragione. Le potenze coalizzate avevano ben altro da fare che occuparsi seriamente del piccolo Piemonte; e l'Austria non si sarebbe lasciata commuovere da alcuno. Nè il nostro statista potè neppure in patria conseguire, almeno in parte, quello che bramava; la storia del 1800 ci dice a quale rovina andassero incontro gli Stati Sardi (1). In ogni modo rimaneva sempre al Balbo la soddisfazione intima di chi ha compiuto un'opera buona. Nel Memoriale, del quale abbiamo parlato, alitava un sentimento vivissimo di italianità, che, quantunque, allora, solo virtù di pochi, dimostrava come non fosse mai spento nelle anime italiche il grande principio della indipendenza e della nazionalità: prime ed incerte luci del nostro risorgimento.

MÉMOIRE

sur la situation actuelle du Piémont
et sur les événements qui l'ont précédé.

Il est nécessaire, il est même très urgent que toutes les Puissances coalisées soient instruites de la situation actuelle du Piémont, pays si intéressant par sa position, dont le sort a toujours décidé de celui de l'Italie, quelquefois des destinées de l'Europe.

Il est peut être indispensable de remonter à des fait dont l'époque n'est pas très eloignée, mais dont le souvenir presque effacé par la ra-

(1) Bianchi, op. cit., III, p. 362 *passim*.

pidité des événements est encore obscuré à dessin par la profonde méchanceté des ennemis communs. Leur perfidie astucieuse et savante n'a que trop réussi à présenter sous un faux jour la conduite la plus simple, les démarches dictées par la plus imperieuse nécessité. Mais faut-il encore en revenir à l'apologie du Roi défunt, ou au Roi régent ? Nous ne croyons pas craindre d'aborder cette question, qui n'en est pas une pour tout observateur impartial et éclairé.

Quel est le prince qui se soit dévoué à la cause générale plus de bonne foi, de zèle, d'abandon que Victor Amédé ?

La politique de ses prédécesseurs avait toujours été de s'offrir ou du moins de se faire prier des deux côtés. Le roi Victor a vu de bonne heure que cette guerre ne ressemblait pas aux autres. Il a donné, lui le premier, l'exemple, trop peu suivi, d'arrêter à la frontière et de renvoyer sur le champ un ambassadeur français. Malgré l'éclat de l'affaire de Semonville un autre négociateur fut expedié de Paris.

Audibert Caille se tint plusieurs mois près de nos limites; jamais il ne peut les franchir. La guerre éclate. Autrefois l'Autriche achetait du Piémont la défense de la Lombardie, pour la cession de quelque lisière. Le cas était différent: le Roi de Sardaigne, pour défendre l'Italie entière ne fait pas la moindre demande. Il prend presqu'à la solde quelques bataillons entretiens, garnison ordinaire du Milanais. Le faible secours arrive trop tard et les troupes qui le composent, separées depuis longtemps de l'armée imperiale, ne se montrent pas dignes de lui appartenir. Les premiers revers des armées piémontaises avaient eu la même cause: malgré l'esprit militaire du Roi, une paix de 45 ans avait, pour ainsi dire, fait oublier le métier de la guerre. Ce ne fut pas cependant la faute des soldats, ou des officiers, mais celle de quelques chefs qui fit perdre la Savoie et le comté de Nice. Mais loin de s'abattre l'homme national se réveille ou se ressouvient de notre ancienne gloire: un général habile est mis à la tête de l'armée. Les princes vont l'animer par leur présence, la défensive se soutient, on reprend l'offensive, on rentre dans le comté de Nice. Quelques bataillons de plus et on allait aux bords de la mer et la porte de l'Italie était à jamais fermée à ses éternels ennemis. Des généraux autrichiens arrivent, nos troupes sont mises à leur disposition. Elles soutiennent constamment leur reputation qu'elles avaient regagnée, l'exemple d'Assiette se renouvelle au col de Rauss et une armée française vient se fondre aux pieds de nos retranchements. Inutiles efforts. La prétendue neutralité des Génois ouvrit à l'ennemi l'entreé de l'Italie.

Pour un respect mal entendu pour cette republique la ligne impénetrable de nos postes ne fut pas poussée jusqu'à Ventimille, elle fut tournée sur ce point comme on devait s'y attendre et Saorgio tomba.

Il y eut un temps où l'intérieur de la France et surtout l'état des départements qui nous avoisinent, donnait à la coalition les plus belles espérances qu'elle ait jamais eues avant ou après cette époque; si l'on eût soûtenu Lyon, si l'on eût défendu Toulon, la cause était décidée. La France hérissée de deux lignes de place sur la frontière des Pays Bas et de l'Allemagne, ne présentait de notre côté, aucun moyen de résistence. Dans cette occasion, comme dans les autres, le Roi de Sardaigne ne manqua pas à son dévoir. Il encourage les Lyonnais: pour les secourir il tente une expédition en Savoie, que la faiblesse des moyens fit seule échouer. Nul doute qu'elle n'eut réussie, si le Roi eût eu la disponibilité de ses troupes. Nul doute aussi que Toulon n'eût été soutenu, si on eût pu y envoyer des forces. Le petit corps d'élite que le Roi y fit passer, se couvrit d'honneur et emporta les suffrages des nations alliées.

Pour la chûte de cette place, il fallut prendre la défensive de l'Italie sur les frontières de Gênes. La cour de Vienne envoya des forces considérables; mais pour une malheureuse fatalité, la brillante armée du Général Devins après des succès importants fut réduite pendant six mois à une entière inactivité.

L'armée piémontaise ne fut occupée qu'à la défense des passages des Alpes: on ne voulut pas aller à Nice, ou du moins à Ventimille, on ne voulut pas s'assurer de Savone et la fin de la campagne de 1795 fit perdre les avantages qu'on avait gagnés au commencement.

On prévit dès lors les malheurs de la campagne suivante: une ligne trop étendue de Coni à Tortone ne présentait plus qu'un cordon et pouvait être trop aisément enfoncée. La cour de Vienne envoya plusieurs corps de ses excellentes troupes avec un général qui jouissait d'une grande réputation. Le Roi de Sardaigne de son côté secondait de tous ses moyens les efforts de l'Empereur; son armée, toujours commandée par des généraux Autrichiens, fut mise sous les ordres immédiats du Général Beaulieu: mais celui-ci trompé par une maneuvre habile de Bonaparte se porta sur la gauche et rompit la ligne. Les Français en profitèrent et après plusieurs jours de combats sanglants, ils pénétrèrent dans le Piémont et se portèrent rapidement sous Quérasque à quelques lieues de la capitale. Les deux armées Piémontaise et Autrichienne étaient également en déroute et entièrement séparées l'une de l'autre. Cette malheureuse séparation des armées produit nécessairement une séparation d'intérêts. Le Roi fut contraint à s'occuper avant tout du salut de son peuple. Il fit auparavant une dernière tentative auprès de Beaulieu. Ce général à la vérité se prêta, mais trop tard au plan de campagne qu'un habile tacticien piémontais, Mr de Silva

était allé lui proposer. S'il eût envoyé d'avance ce plan de défensive dictée par les circonstances et connu des militaires instruits du pays, si au lieu de se retirer et de se retenir dans une position inutile il eût pu auparavant, ou s'il eût voulu marcher vers Turin, rien n'était perdu, et le Roi n'était plus dans le cas de négocier l'amnistie, quand même il l'aurait souhaité, ce qui certainement n'était pas. Dans ces entrefaits l'évacuation de Quérasque laissait la capitale à découvert et cette évacuation avait était décidée par le général autrichien qui commandait nos troupes. C'est lui qui fit les premières ouvertures d'une suspension d'armée, c'est lui qui donna les pouvoirs et les instructions aux militaires chargés de la négocier, il leur permit de livrer s'il le fallait comme prisonniers de guerre, jusqu'aux régiments autrichiens qui servaient sous ces ordres et ce ne fut que sur les remontrances des officiers Piémontais, qu'il fit courir après eux pour retracter cette facilité; au contraire le premier soin du Roi, sa plus grande sollicitude fut de garantir la retraite des Imperiaux et ses intentions à cet égard, furent exactement suivies. Cex malheureux armistice amena nécessai rement une paix plus malheureuse encore. A-t-elle besoin d'excuse? la dureté des conditions en fait elle même l'apologie. Ce n'est pas lorsqu'on est reduit à prendre la loi de vainqueur qu'on peut être accusé de défection. La Prusse et l'Espagne avaient fait leur paix: celle-ci avait stipulé sa médiation en faveur de S. M. Le roi ne l'avait pas acceptée. Il avait reçu des français, à plusieurs reprises, des propositions avantageuses. Quel usage en avait-il fait? il les avait communiquées au cabinet de Vienne. Aucune vue ambitieuse, aucune arrière pensée n'avait souillé la pureté de ses motifs. Il avait refusé les offres d'un agrandissement en France; il refusa bien plus nettement les proposition, du Directoire qui voulait lui donner la Lombardie. *Une colonne de troupes Piémontaises et la Lombardie est à vous.* Il fut le propos du Président Carnot à nos plénipotentiaires. Les ordres du Roi leur liaient les mains: *tout, hormis l'alliance*: telles étaient leur instructions. Mais cet acte auquel il répugnait si fort, cet acte illégitime pour acquérir dévenait nécessaire pour le conserver. Le Piémont était à la merci entière des Français: la politique du cabinet ne pouvait être que de temporiser de céder le plus tard et le moins possible, mais de céder toujours puisque on n'avait plus moyen intérieur de résister et qu'on était complètement isolé de tout appui extérieur. Le nouveau Roi répugnait à l'Alliance autant et plus que son Père, ses sentiments et ses principes sont bien connus. On sait même les oppositions qu'il avait faites à la ratification de la paix et la signature de l'Alliance fut sans doute le plus grand de tous les sacrifices qu'il fit pour la tranquillité de ses états. Les Français travaillaient depuis longtemps pour se ménager le prétexte d'une revo-

lution: jamais ils ne purent parvenir; ils mirent en avant les démagogues Génois, ennemis implacables du repos de leurs voisins. Les Génois furent battus malgré tous les secours des Français, malgré toutes les entraves que ceux-ci mettaient au plus petit déployement de force de la part du gouvernement piémontais; mais la conclusion de l'alliance et surtout la négociation précédente avait fait gagner du temps et avait empêché les Français de se démasquer plutôt. C'est tout ce qu'on en pouvait espérer, et sous ce rapport la politique du Cabinet de Turin avait été très utile à l'empereur; car si le Piémont eût été révolutionaire avant la paix de l'Autriche un tel surcroit de moyens dans le premier moment de leur exploitation aurait rendu cette paix bien plus difficile, ou moins avantageuse. Il est bon qu'on sache qu'au premier moment qu'on apprit à Paris la prise de Mantoue, Carnot et Letourneur offrirent positivement à l'Ambassadeur de S. M. cette place si importante et tout l'Etat qui en dépend avec la reserve de s'entendre sur les pays à céder pour rejoindre le Mantouais au Piémont. Une offre si brillante qu'aurait pu seduire un cabinet moins sage, fut d'abord accueillie froidement et ensuite poliment refusée. On avait de même laissé tomber d'autres propositions, celles par exemple des fiefs impériaux et du Duché de Massa et Carrara. C'est pour une telle conduite que la négociation de l'Alliance fut tramée jusqu'au moment où elle ne pouvait plus qu'être utile à la sûrete du Roi sans être nuisible aux intérêts de l'Empereur. Aussi les préliminaires de Leoben furent signés à peu près à la même époque du traité de Turin et c'est pour une marche analogue que la ratification de l'alliance ne fut aucunement sollicitée qu'au moment où l'Autriche allait conclure sa paix définitive: en effet la nouvelle du traité de Campoformio avait sanctionné l'alliance avec le Roi de Sardaigne.

Il est positif que ce traité d'alliance ne contenait aucun article secret. Parmi les articles publiés il y en a un qui annonce très vaguement des avantages que la France voulait faire espérer au Roi à l'occasion de la paix générale, mais quel cas pouvait-on faire d'une telle espèce d'engagement de la part du Directoire et comment pouvait-on esperer qu'il détachât une portion de la Cisalpine pour en faire cadeau à S. M.? Il est donc bien demontré que ce n'est pas l'ambition de s'agrandir mais le besoin de sa propre conservation qui a décidé au Roi cette Alliance et par conséquent qu'on ne peut pas la lui reprocher sans la plus grande injustice. C'est par ce moyen qu'on traîna une pénible existence dans tout l'intervalle qui s'écoula entre la paix de l'Autriche et la rupture de Naples. Pour principe et pour nécessité le Roi se gardait bien de donner aux Français tout puissants chez lui le moindre sujet de mécontentement: il remplissait même avec exactitude les engagements

que la force lui avait fait contracter, mais il ne pouvait s'empêcher de soupirer après un autre ordre de choses.

Il était possible qu'on prit le change sur les veritables sentiments du Roi et de ses conseils, on n'aurait qu'à lire le mémoire qu'un des ministres de S. M. dans le charger lui fit passer au mois d'octobre 1798 et qui se trouva parfaitement d'accord avec sa manière de voir et d'agir. La tragédie approchait de son terme, les hostilités commencées par le Roi de Naples en accélérèrent le dénoument. Dans ces pénibles moments, pour sauver les jours de la famille royale et conserver l'espérance de l'avenir, il fallait exiger des troupes une dernière preuve de dévoument, la plus pénible sans doute qu'on put demander à des fidèles sujets. A quelques exceptions près le pays entier a été témoin des regrets de ces braves soldats. Sans doute ils ne pouvaient renoncer à leur bravoure lorsqu'ils furent forcés de se battre pour une cause détestée, mais dès qu'ils en trouvèrent l'occasion, le plus grand nombre se hâta de quitter les drapeaux des ennemis de leur Roi. La masse de la Nation (quelques centaines de jacobins ou quelques milliers de lâches ne composent pas une nation) les paysans surtout déployèrent généralement la même énergie contre un régime absourd. Les insurrections que jamais les Français n'avaient pu parvenir à organiser contre l'ancien gouvernement, éclatèrent partout dès que la spoliation la plus inique fut proclamée comme une plausible révolution. Comprimées dans un endroit, ces insurrections renaissaient dans un autre. De la province d'Asti elles passèrent dans le haut Monferrat, d'un côté le dénouement de tout secours, de l'autre les seductions et les fusillades n'empêchaient pas ce mouvement. Mais lorsque une lueur d'espérance annonça de loin l'aurore d'un plus beau jour, c'est alors que des peuplades entières coururent aux armes. C'est ainsi qu'un partisan hardi le Major autrichien Borda Lucumi parcourant les villages avec 25 hussards fait lever tout le Canavais, vient jusqu'aux portes de Turin, force l'ennemi à s'enfermer dans la ville lui coupe de ce côté toutes les comunications, construit des ponts sur plusieurs rivières et fraye le chemin aux armées victorieuses. Mais les habitants du Canavais ne s'en tiennent pas à ces courses et à ses travaux. Aidés par une partie du régiment de la Province ils emportent le château d'Ivrée et le fort important de Bard qui ferme la Vallée d'Aoste. Les environs de Carmagnola s'insurgent dans le même temps trop tôt pour eux, un riche faubourg de cette ville est pillé, incendié, rasé par les Français. La province de Mondovi devient le théatre d'une guerre sanglante, les braves habitants sont joint par le régiment de Belly, après bien de revers leur constance est encouronnée par le succès, ils mettent le siège à la place de Cève très essentiel position et eux seuls sans le moindre secours, sans l'appui d'aucun corps de troupes,

ils la forcent à capituler. En attendant les armées victorieuses avançaient sur Turin, à leur approche les portes leur furent ouvertes de force par la milice et les habitants, malgré la rage des Français qui s'en vengèrent d'une manière atroce en cannonant et bombardant la ville, de la citadelle où ils s'étaient retirés. Il faut avoir été témoin de l'entrée de ces troupes libératrices pour peindre la manière dont elles furent reçues: il faut comparer cet acueil avec celui qu'on avait fait aux Français pour juger cette nation indignement calomniée. Déjà une partie du régiment de la Province avait rejoint l'armée et était entrée avec elle dans la ville: on établit tout de suite un dépôt pour rassembler les officiers et soldats des differentes corps au service du Roi: et dans peu de jours on fut dans le cas d'envoyer de forts détachements aux postes avancés, outre le contingent qu'on faudrait pour le service de la ville (1).

On allait commencer le siège de la citadelle, on demanda des matelats pour ouvrir la tranchée, dans quelques heures on en eut une si grande quantité que les Autrichiens en marquèrent leur étonnement et leur satisfaction.

Le corps royal d'artillerie fut employé à ce siège et y servit avec une telle distinction qu'il s'attira les plus grands éloges du général en chef et des autres généraux: il soutient cette réputation par d'éclatants services aux sièges de la citadelle d'Alexandrie, de Tortone et de Coni.

Les excellents tireurs, employés dans ces occasions furent aussi très utiles: les assiégés n'osaient plus paraître sur les remparts. Les cavaliers et les dragons, faute de chevaux, ont marché à pieds et ont fait d'une manière très honorable le service des postes avancés. Tous les régiments provençaux ont pris les armes: celui de Pignerol s'est battu souvent soit contre les Français, soit contre les Vaudois leurs partisans. Mondovi a été plusieurs fois aux prises avec l'ennemi: Suse s'est trouvé aussi aux différentes affaires qu'il y a eu dans cette ville: Acqui a repoussé l'ennemi toutes les fois qu'il s'est présenté. De détachements tirés de la totalité des régiments provincaux la force de 934 hommes ont servi dans la vallée d'Aosta à Suse à Pignerol et autres endroits. Les autres détachements près du dépôt de Turin ont été portés depuis à 3844 hommes. On a de plus formé en grande partie sur ce dépôt les corps autrichiens de Brentano et de Bonacossi.

(1) A Suse 1157 hommes — a Mondovì 218 — a Salux 216 — aux environs de Coni 108 — a Pynérol 228 — 1927, portés à 3844 — Autres tièrs des régiments provencaux 934 — 4778 — outre l'artillerie, les cavaliers et les dragons et les compagnies légères.

Il faut aussi porter en compte les deux compagnies légères au service du Roi St. Ambroise et Saissi qui dans differentes affaires ont donné des preuves éclatantes de leur bravoure et de leur zèle pour la cause commune. Ce n'est pas seulement en Piémont que cette cause sacrée était si bien servie par les débris de nos troupes. Celles qui se trouvaient a Livourne aidèrent puissamment à chasser les Français de cette partie de la Toscane et de toute la côte. Joints aux habitants de Volterra et des Maremmes ils attaquèrent et prirent l'une après l'autre les tours du litoral, dont quelques unes sont bien fortifiées. Les Aretins avaient aussi une petite légion Piémontaise qui se trouva aux sièges de Perugia et de Civita Castellana et passa ensuite à celui d'Ancone.

Enfin on peut dire que depuis la proclamation de Souwarow les troupes et les habitants du Piémont n'ont cessé de concourir au grand bût de la délivrance de leur pays et de toute l'Italie. Aussi les généraux leur ont toujours rendu des témoignages publics de leur satisfaction. Dernièrement encore sur l'invitation du Général Melas et du gouvernement Piémontais plusieurs milliers de volontaires se sont portés aux sièges de Coni.

Ce n'est pas seulement dans cette occasion, mais dans toutes les autres que notre gouvernement dès qu'il a existé, a cherché tous les moyens pour conserver l'esprit national et le diriger à l'appui des armées victorieuses. Il s'est hâté de proposer une nouvelle formation de l'armée Piémontaise moyennant laquelle il se flattait de fournir bientôt 8 o 10 mille hommes de bonnes troupes sans y comprendre les Provençaux. Il avait encore à cette époque des ressources pour les solder qu'il n'a plus à présent.

La nécessité de cette opération a été sentie par les Autrichiens: ils demandent maintenant 25 ou 30 mille hommes qu'il sera difficile de trouver, plus difficile encore et pour mieux dire impossible d'entretenir dans l'état actuel de finances. Cependant le Roi s'est prêté à tout et le gouvernement qu'il a établi s'est décidé à toucher au dernier terme de toute possibilité à employer constamment tout les moyens pécuniaires en faveur de la cause commune, à ne cesser enfin les fournitures énormes qu'il fait tous les jours que lorsque tous les moyens cesseront.

Mais ce triste avenir ne se présente pas dans le lointain, il est malheureusement très proche, il faut avant qu'il arrive s'entendre de bonne foi et trouver d'accord d'autres moyens à la place de ceux qui vont être. Ce malheureux pays, fatigué par cinq campagnes désastreuses qui avaient compté aux finances près de 200 millions, ne put profiter pour cicatriser les playes d'une paix mensongère qui dans le fond n'était pas même un armistice véritable. Les circonstances avaient forcé à multiplier le papier monnaie au délà de toutes limites. Il perdait les deux

tiers de sa valeur nominale. Les réformes, les impôts, les ventes des biens, ne purent remedier au mal qui alla toujours en croissant. Il restait encore des ressources au pays. Les Français les épuisèrent entièrement. Par la violence et la terreur ils trouvèrent le secret de pomper le peu d'argent qui était enfoui et ne laissèrent qu'un papier discrédité. C'est dans cet état de dénouement total que les armées libératrices trouvèrent le Piémont. Cependant tel fut le zele du Gouvernement et de la Nation, qu'on donna toute espèce de secours à ces braves troupes et qu'on se chargea presque en totalité de leur entretien. Il existait heureusement des magazins militaires que les Français avaient trouvé après eux en Lombardie où s'etaient reservés. Ils tombèrent comme de raison en pouvoir de nos libérateurs. Ces magazins qui étaient dans le fond une propriété piémontaise sont évalués à la somme d'un million. Une bonne récolte aurait donné les moyens de fournir encore pendant quelques mois aux besoins des armées, mais notre bonheur devait être mêlé d'amertume et d'embarras de toute espèce.

Nous avons à peine recueilli le $^3/_5$ de froment nécessaire à notre consommation (on entend que la consommation ordinaire du Piémont en pur froment est au moins de deux millions de sacs. La récolte a été de 1.800.000). Les autres bleds n'ont pas été plus abondants et néammoins nous avons déjà fourni aux armée plus de 4.300.000 rations doubles de pain.

Les autres denrées ont été livrées en proportion et le total des fournitures faites par le bureau de la solde soit commissariat général de guerre, jusqu'au 30 novembre monte à la somme de L. 7.452.822. Il faut ajouter l'argent que les français ont directement déboursé pour le même objet ont fait passer dans les provinces pour les moyens de quittance et rescription ; il monte à 1.023.625. Total de fournitures faites par le gouvernement jusqu'au 30 novembre L. 8.496.147. On ne peut pas évaluer au juste le montant de fournitures faites à l'armée par les administrations locales; mais par des calculs d'approximation, fondés sur des bases assez solides, on peut assurer que la valeur des denrées fournies par les commissaires, en bleds, avoine, foin, paille, bois de chauffage, vin, viande, riz, se en y ajoutant les voitures et transport surpasse 20.000.000. On peut en juger par le tableau des dépenses et fournitures faites par la seule ville de Turin et son territoire qui n'a pas été, à beaucoup près le plus sujet au passage et séjours des armées et dont le total monte à L. 3.055.516. Total de fournitures faites aux armées par le gouvernement et par le pays 8.476.147. Il faut ajouter les dépenses faites pour le bureau d'artillerie, pour le service de l'armée 542.078. Pour les ouvrages de fortification 806.008. L'approvisionnement de places en munitions de bouche, fait sur pareille demande par le bureau général de la solde 725.404.

Dépense totale de la campagne aux frais du Piémont du mois de mai au mois de novembre 30.549.530.

Il s'agit maintenant de démontrer, ce qui n'est que trop facile, que les ressources de l'état ne peuvent plus suffire à la continuation de ces dépenses. Le revenu net des finances y compris les impôts extraordinaires ne va pas à 19 millions. Les intérêts de la dette publique surpassent trois millions et demi. Il ne reste disponible que 15.300.000. Les frais de justice et de administration les appointements qui sont tous très modiques et toutes les autres dépenses indispensables montent à la somme de 4.000.000.

Il ne reste que 11.300.000 à destiner aux objets militaires.

Sur cette somme il faut entrétenir les places, l'arsenal, les magazins, les invalides et les autres débris d'une armée qui a fait la guerre. Qu'on juge du fond qu'on peut employer à l'entrétien d'une armée active.

Tel serait l'état des finances si elles pouvaient compter sur leurs revenus et si elles n'étaient pas gravées d'énormes dépenses extraordinaires.

Mais ce que personne n'aura peine à croire c'est que les revenus de l'armée ont été mangés d'avance par les Français et par quelques uns de leurs agents fort habiles dans ce genre d'opération.

Ce qu'il faut de plus remarquer, c'est que les provinces harassées par le passage et le séjour des armées par les réquisitions de toute espèce et par le surcroit des dépenses locales que cet état de choses entraîne nécessairement bien loin, les caisses royales ne font que demander des secours.

Partout on est menacé d'une horrible famine et tandis que les petits grains propres à la nourriture des hommes tel que le bled de Turquie et le seigle sont consommés par les chevaux par une funeste inversion il y a des peuplades reduites à se nourrir d'avoine.

Même dans le temps tranquille l'effroyante disette dont nous avons parlé auparavant tari toutes les ressources, épuisé tous les moyens le terrible fléau n'est pas seul à ajouter aux malheur de la guerre. Dans un tel pays que le nôtre où toute la culture se fait pour les bêtes à cornes, une épizoozie affreuse portée de la Hongrie attaque depuis cinq ans la source de la reproduction et ne cesse de ruiner les seuls fondaments de la richesse réelle de l'Etat.

Mais voici le dernier trait de cet affligeant tableau. La presque totalité de nos provinces a été assiégée par l'ennemi. Le haut Novarais, le Duché d'Aoste, le Marquisat de Suse, le haut Monferrat, les provinces d'Alexandrie et de Tortone ont été à plusieurs reprises le théâtre des incursions des Français et en conséquence de plus terribles dévasta-

tions, une très grande quantité de subsistances a été pillée, emportée ou détruite. Les propriétaires sont reduits à la misère, les cultivateurs au désespoir.

On sent bien que dans cette position les impôts directs, soit les tailles sont reduites à rien et les indirects ou gabelles à fort peu de chose: mais pour ceux-ci il existe encore d'autres causes de diminution et même d'anéantissement.

Le plus productif qui est celui sur le sel ne peut plus entrer en ligne de compte. Telle est la disette de cet objet de première nécessité qu'on a été obligé à permettre et encourager la contrebande. Nous en avons il est vrai des magazins à l'embouchure du Po; mais nous ne pouvons obtenir des agents autrichiens, les bœufs nécessaires pour le transport. Les tabacs beaucoup plus chers qu'autrefois, ont la même difficulté à nous arriver et d'autre côté les fournisseurs de l'armée impériale se permettent d'en faire le débit au public de sorte que les fermiers des gabelles ont déclaré qu'ils ne payeront plus les sommes portées par leurs contrats. Les douanes, les droits de traite, l'impôt sur le vin, celui sur la viande et les autres de ce genre ne rendent pas davantage par la stagnation du commerce, par la dévastation de l'ennemi et par la contrebande que les agents autrichiens favorisent tous les jours avec abus de passeports et même quelquefois de force militaire. Au défaut de revenus ordinaires et extraordinaires c'est par une émission de 20 millions de papier monnaie qu'on a fait faire aux dépenses dont les finances ont été chargées. Il en est déjà sorti près de 9 millions et demi, il y a des payements indispensables à faire au commencement de janvier pour près de douze millions. Il ne reste donc qu'un peu plus de 8 millions et demi et il y a 300/m. sacs de blé à payer qui vaudront peut être 15 millions. Ces 8 millions et demi de billets ne sont plus même faits et les précautions à prendre pour empêcher les contrefaçons il exigent encore bien du temps.

Mais il y a plus; les 20 millions des nouveaux billets n'ont été émis qu'avec l'engagement de retirer les anciens dès le commencement de l'année prochaine, à mesure qu'ils rentreront dans les caisses royales. Voilà donc que pour longtemps toutes les entrées seront réduites à des non valeurs. Fera-t-on encore des billets? ils perdent déjà les tiers, la perte croît toujours, en croissant, le bénéfice serait nul et l'opération ruineuse.

Une opération plus ruineuse encore ce serait celle d'invader le pays de mauvaise monnaie. Ce que nous avons dit sur les impôts existant: fait assez voir quel compte peut faire sur les nouveaux impôts.

Point d'espoir d'emprunter le pays et les emprunts avec l'étranger ne pourraient se faire que sous la caution d'une province amie.

Il reste encore, il est vrai, une masse assez considérable des biens soit appartenants à la couronne soit à sa disposition, mais on sent bien que ce n'est pas le moment de les mettre en vente. L'opération doit être lente et graduelle et en attendant ils ne peuvent servir que d'hypothèques.

Sans doute le pays est excellent, le sol très fertile, la culture bien étendue, les productions abondantes et variées, la population très nombreuse, les habitants actifs et industrieux. La dette de l'état n'est pas encore disproportionnée à ses moyens.

Un peu de repos et une brave administration suffirait à retablir les finances: mais il ne faut pas que le mal empire, il ne faut pas qu'il se prolonge. Il est de l'intérêt de l'Europe que le Piémont conserve sa force: sans cela plus de barrières entre la France et l'Italie: il faut aux Alpes une défense qui ne consiste pas seulement dans les places et dans les armées, mais dans le courage et la fidélité des habitants et dans le système suivi d'un gouvernement dont l'existence est liée à la fortune.

Une cruelle et recente expérience a démontré de nouveau ce que nous apprénait l'histoire: depuis Hannibal jusqu'à Charles VIII et depuis ce Roi de France jusqu'à Bonaparte le vainqueur du Piémont a pu devenir le conquérant de l'Italie. Il n'y a pas un coin de cette péninsule qui soit en sûreté dès que les barrières sont franchies. Il est donc juste et nécessaire que toutes les parties concourent à la défense commune. Si ce système proposé par la cour de Turin eût été suivi dans la première guerre avec 20 ou 30 millions on en aurait épargné 7 à 800.

Jamais les circonstances n'ont été plus favorables pour réaliser cette idée.

D'après tous les principes de justice distributive, ceux qui ont le moins fait et le moins souffert pour la cause sociale doivent apporter plus de moyens dans l'association commune sur cette base combinée avec les richesses et la population des différents pays de l'Italie, on peut recevoir un impôt de guerre à durer, par exemple 2 ou 3 années pour chaque campagne qui serait encore nécessaire. Le Piémont de son côté, qui paye en particulier ses impôts de guerre très considérables pouvait encore fournir à la solde et à l'entretien de son armée portée à la force de 20/m. hommes en état d'activité pourvu qu'il soit déchargé de l'entretien de l'armée Autrichienne qui renoncerait au système des réquisitions ruineuses sous tous les rapports et aurait ses fournisseurs payés sur la caisse générale, où serait versé l'impôt de guerre de tout le reste de l'Italie.

Comme la chose est très urgente et que sans une prompte détermination l'armée autrichienne finirait par manquer du nécessair par

l'épuisement total du pays, la cour de Vienne pourrait faire les avances indispensables par des cédules de sa banque qui perdent beaucoup moins que le papier monnaie de Turin et on pourrait s'entendre aisément pour leur faciliter les moyens de circuler avantageusement dans le Piémont. Qu'on pense que les coalisés n'ont pu le soutenir en Hollande, ni en Suisse: les hollandais plus riches, la Suisse aussi belliqueuse que les Piémontais, n'ont pas secondé de tous leurs moyens les efforts des armées.

Le Piémont fatigué par 8 ans de malheurs s'est dévoué sans réserve; il doit en recevoir la récompense: il ne doit au moins porter la peine de son généreux dévoument.

Turin le 15 décembre 1799.

Relazione sulla Memoria del prof. Giuseppe Prato, *Un capitolo della vita di Giovanni Law.*

Il giudizio dato su Giovanni Law e sull'opera sua dai suoi biografi e dagli storici del periodo di cui egli fu tanta parte, rimane tutt'ora assai discorde. Fra l'ottimismo entusiastico di taluni suoi apologisti e le requisitorie implacabili dei suoi detrattori prendono posto molti apprezzamenti intermedii, dei quali però soltanto pochi sanno tracciare una linea di distinzione ben netta tra i diversi e successivi periodi della vita di Law e tra le teorie da lui professate e le azioni per le quali il suo nome è famoso nella storia. Ciò risulta chiaramente da un largo esame analitico che il Prato nella memoria presentata al nostro esame innanzitutto compie delle principali opinioni espresse sul conto suo.

Ma un equo giudizio sull'uomo e sulle sue dottrine non può darsi se non scomponendo la vita del grande avventuriero in tanti momenti distinti, che corrispondano alle diverse fasi della sua evoluzione mentale ed alle diverse manifestazioni della sua attività multiforme; onde riesce interessante sorprenderlo pensante, scrivente ed operante in anni anteriori alle sue gesta sulla terra di Francia, dove una frenesia fatale lo trascinò alla catastrofe.

Il passaggio di Law in Piemonte, ed i suoi rapporti con Vittorio Amedeo II appaiono, da questo punto di vista, importantissimi. Li studiò con grande diligenza Domenico Perrero; ma alla sua ricerca sfuggì un gruppo di documenti dell'Archivio di Stato, Sez. I, soltanto in parte riprodotti in quelli della Sezione II da lui scoperti; e, d'altronde, non avendo conosciuto od almeno tenuto conto delle opere a stampa del Law, fu indotto in qualche inesattezza circa la novità ed originalità degli esaminati documenti e teorie.

Tale serie di carte inedite è fatta invece oggetto di speciali analisi del Prato, il quale ne raffronta il contenuto non soltanto coi documenti veduti dal Perrero, ma altresì con tutta la copiosa massa di scritti diversi che nelle successive edizioni delle opere di Law vennero alla luce.

Ne risulta anzitutto che la maggior parte dei memoriali con cui lo scozzese guadagnò la fiducia del reggente e del Consiglio di Francia erano stati da lui elaborati assai prima, per offrirli al Principe Sabaudo; e che non furono in seguito variati se non in particolari formali o nella disposizione dei diversi capitoli e paragrafi. Ma taluni degli scritti redatti e presentati in Piemonte non ricompaiono nelle ulteriori raccolte, ed è in questi che convien cercare la nota originale relativa al particolare atteggiamento assunto dal genio di Law in quel periodo della sua vita. Il Perrero pubblicò una importante lettera al Duca, in cui è tracciato il piano di una banca non molto dissimile da quella che, sotto il nome di Banca Generale, fu attuata in Francia, nel 1716. Ma più caratteristiche proposte contengono i documenti studiati dal Prato, e specialmente *L'Introduction au crédit*, lungo memoriale esplicativo dei concetti fondamentali del Law, un piano particolareggiato per lo stabilimento della Banca a Torino e la minuta d'editto per la sua erezione (questi due ultimi documenti riportati in appendice).

Se ne desume che, di fronte forse alla riluttanza di Vittorio Amedeo ad accogliere i concetti illustrati nella lettera memoriale del 1711 (pubblicata dal Perrero), lo scozzese venne ulteriormente perfezionando il suo piano fino a giungere a due proposte che, per genialità costruttiva e correttezza tecnica, rappresentano una sorprendente anticipazione di quanto soltanto un secolo più tardi fu, in tema di banca d'emissione, pacificamente ammesso e generalmente attuato.

Consiste la prima in una banca privata, dotata di privilegi ma non monopolistica, strettamente specializzata nelle operazioni di credito (in esse compreso il prestito su pegno), debitamente garantita contro ingerenze ed esigenze pericolose dello Stato, sottoposta alla più assoluta pubblicità di gestione, dotata della facoltà di emissione, ma con molte garanzie. Si concreta invece la seconda in una vera e propria Banca di emissione di Stato, solidamente fondata e rigorosamente amministrata, con

le più severe norme riguardo alla circolazione dei biglietti e particolarmente con l'obbligo d'una riserva metallica fortissima (pari ai tre quarti dei biglietti emessi) a garanzia del cambio a vista. Prescrizione quest'ultima che sembra sopra tutte le altre notevole, in un'epoca in cui il concetto della copertura bancaria appena incominciava a farsi strada lentamente, così nella pratica che nella dottrina, anche in Inghilterra ed in Olanda, dove Law aveva attinte le sue migliori cognizioni in materia.

La fase Piemontese della randagia esistenza di Law sembra dunque giovevole a riabilitare in parte la sua tanto contestata fama, contribuendo ad avvalorare l'opinione di coloro che sostengono doversi giudicare l'uomo e le idee, non in base alle aberrazioni finali soltanto, ma tenendo conto di tutte le circostanze e di tutti i fattori che ne determinarono l'evoluzione mentale e psicologica.

Certo è che, se tanta importanza fu data dagli apologisti di Law all'esperimento felice della Banca generale del 1716, un argomento ben più forte offrono in suo favore i piani elaborati in Piemonte, per la correttezza tecnica e scientifica assai maggiore a cui sono ispirati.

Ne risulta sempre più chiaramente che — come già accennarono altri biografi — ci sono nella storia due Law: l'uno che per la genialità degli intuiti e delle dottrine, può ascriversi fra i più insigni precursori della libertà economica e della rivoluzione scientifica che fa capo allo Smith (pur non essendosi ancora emancipato del tutto del bagaglio d'errori dei suoi contemporanei); l'altro che, nella pazzesca aberrazione di un'ora di follia, rinnega con le opere quanto aveva proclamato con gli scritti, e di violenza in violenza, precipita in una spaventosa catastrofe. Dopo il 1718, coll'erezione della Banca reale e la costituzione della Compagnia del Mississipì, la megalomania di Law assorge al sogno frenetico d'una specie di socialismo di Stato mostruoso e despotico, il quale costituisce la più perfetta antitesi degli equilibrati sistemi e delle geniali teorie da lui illustrate a Vittorio Amedeo.

Dalla esposizione fatta sopra chiaramente si scorge come la memoria del Prato riesca non soltanto a riassumere documenti inediti importantissimi per la storia delle idee economiche

nel Piemonte, ma questi documenti collochi in un ampio quadro, illuminando di viva luce uno dei momenti più caratteristici della vita di un uomo, il quale di sè lasciò così gran traccia nella storia di Francia.

Perciò i sottoscritti propongono l'inserzione nelle memorie accademiche di questo saggio, che è un contributo di altissimo pregio alla storia del sistema di Law in particolare e più in generale alla storia degli istituti economici e bancari.

F. Ruffini
Luigi Einaudi, *relatore.*

L'Accademico Segretario
R. Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Maggio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio e i Soci Naccari, Peano, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Fusari, Balbiano e Segre, Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Mattirolo e Grassi.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica una lettera di ringraziamento del Socio Grassi per le condoglianze che gli furono inviate dalla Classe.

L'Accademia delle Scienze di Vienna ha partecipato la notizia della morte del proprio Presidente Edoardo Suess, avvenuta il 26 aprile scorso. Apparteneva egli alla nostra Accademia, come Socio straniero, dal 15 maggio 1910. Furono inviate le condoglianze alla Famiglia ed all'Accademia di Vienna. Il Socio Parona legge una Commemorazione dell'eminente Scienziato, la quale verrà pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Corrispondente Bassani ha inviato in omaggio una sua *Commemorazione del Prof. Giuseppe Mercalli*; ed il Socio Corrispondente Lacroix una sua Memoria: *Les latérites de la Guinée et les produits d'altération qui leur sont associés.*

Per la stampa negli *Atti* vengono successivamente presentate, dai Soci Guidi e Peano, le due Note seguenti:

C. L. Ricci, *Dell'attrito nei freni e nei perni*, Nota II;

A. Pensa, *Sulla risoluzione di equazioni vettoriali ed omografiche.*

Infine il Socio Foà, anche a nome del Collega Fusari, legge la Relazione sulla Memoria del Dott. Sapegno: *Contributo all'istologia normale e patologica del fegato.* Accogliendo la proposta della Relazione la Classe unanime delibera la stampa della Memoria.

LETTURE

EDOARDO SUESS

Cenni commemorativi del Socio C. F. PARONA.

Nel secolo scorso parecchi grandi ingegni, fra i numerosi cultori delle discipline geologiche, hanno promosso colle loro opere il rapido progresso della geologia, e ad essa legarono indissolubilmente il loro nome. Ma due eccelsero segnatamente per l'impulso che hanno dato alle indagini geologiche e per l'influenza che ebbero nel nuovo indirizzo dato alla interpretazione dei fenomeni geologici — LYELL e SUESS —; perchè l'uno e l'altro, in campi diversi e con apprezzamenti diversi sulla intensità d'azione delle forze telluriche, fecero opera grande, nella quale la profondità e genialità dei concetti teorici e delle sintesi ebbero il fondamento scientifico delle ricerche documentatrici, estese a tutto il mondo geologicamente conosciuto. Però ad essi spetta principalmente il merito di avere fondato la geologia positiva e comparata.

Il progresso scientifico e la critica hanno reagito contro certe deduzioni troppo spinte, od erronee nelle loro applicazioni, della dottrina dell'attualismo del LYELL, e mettono in dubbio o negano la realtà di certe concezioni fondamentali del SUESS, e la possibilità delle applicazioni ch'egli ne fece nel definire i fattori dell'evoluzione geologica, geografica e biologica della superficie terrestre, dei mari e dei continenti. Ma i *Principî della Geologia* del LYELL e l'*Aspetto della Terra* del SUESS, riassunto e sintesi delle conoscenze sulla geologia, sono e rimarranno

opere classiche, perchè hanno segnato e caratterizzato due momenti decisivi nel cammino della geologia, del pensiero umano e delle conquiste scientifiche.

***

Le Alpi e la Penisola furono campo prediletto di ricerche e di studî per E. Suess, dove raccolse molti degli elementi che, elaborati e coordinati nella sua vasta mente, lo condussero a sintesi originali sulle cause generatrici delle dislocazioni e deformazioni della corteccia terrestre e delle catene di montagne. Riconosciamogli dunque subito anche il merito di avere largamente contribuito allo studio del nostro paese, nel quale fece ripetuti viaggi e che disse incomparabile.

Ricordo le sue osservazioni sui rappresentanti del Carbonifero e del Permiano nelle Alpi, e la scoperta della flora permiana a *Walchia* nell'alta Val Trompia; le sue ricerche sulle formazioni paleogeniche del Vicentino e l'ordinamento propostone; il contributo portato alla conoscenza del Trias alpino. Notevoli poi le ricerche sulla origine e struttura dei Colli Euganei. La visione sua del grande Vulcano Venda, del quale i colli attuali rappresenterebbero i relitti, pare non possa essere confermata dai risultati delle successive indagini: tuttavia è da ritenere che si accordino colle più recenti vedute i rilievi da lui fatti sulla ricorrenza a diversi livelli delle lave trachitiche e doleritiche, e sulle intrusioni di grandi masse trachitiche fra gli strati del mesozoico recente.

Ancora più notevoli, per l'importanza e complessità del problema considerato, sono le sue idee sulla struttura della Penisola italiana. Secondo il Suess, l'Appennino vero e proprio, cioè la catena del Gran Sasso, che è la linea orografica principale dell'Italia, corrisponde ad una zona di ripiegature, laterale ad un rilievo di tipo alpino, del quale la Catena metallifera, colle Apuane, le isole dell'Arcipelago Toscano ed i massicci del Monte Cocuzzo, dell'Aspromonte e del Messinese sarebbero i residui. Questo asse primitivo, tectonico della Penisola, continuazione

forse dell'asse curvato in arco delle Alpi, giace sotto il Tirreno; e l'antica, supposta terra tirrenica sarebbe oggidì rappresentata dai frammenti rimasti della sua rovina, sporgenti dal mare. Una linea di fratture decorre dalla Spezia verso sud, delimitando il Tirreno: ad essa si collegherebbe geneticamente il vulcanismo tirrenico. Il Suess si propose di dimostrare in modo più particolareggiato questa connessione in altro lavoro, col quale contribuì alla teoria tectonica ed orogenetica dei grandi terremoti. Intendo di riferirmi alla pubblicazione sull'attività sismica dell'Italia meridionale, in correlazione col vulcanismo, colle linee di frattura e di separazione delle catene montuose, nella quale egli propose la distinzione dei gruppi vulcanici che comunicano scosse radiali a grandi distanze e dei vulcani isolati su linea periferica, oppure su linea radiale.

Il Meneghini, richiamando con una lettera al Cocchi l'attenzione degli studiosi sulla concezione del Suess riguardo alla struttura della Penisola, mentre ricordava come già il Savi avesse riconosciuta l'individualità della Catena metallifera " benchè smembrata nelle anella ellissoidali sparse per l'Italia centrale „ ed avesse manifestata l'idea ch'essa catena si fosse parzialmente subissata nel mare, faceva rilevare la genialità del quadro delineato dal collega viennese; soggiungendo che all'annunzio della nuova teoria del Suess molte altre questioni insorgevano e si affollavano alla mente, come avviene al manifestarsi di idee importanti, che fanno epoca nella scienza, perchè uniscono la grandiosità alla semplicità del concetto.

Si può dire che il Meneghini previde esattamente, perchè l'interpretazione data dal Suess dell'importante problema dell'origine e struttura della Penisola in rapporto coi fenomeni sismici e vulcanici, che le sono caratteristici, provocò una gara scientifica appunto sulle controverse questioni della unilateralità dell'Appennino, della troncatura delle sue pieghe verso il Tirreno, della esistenza della Tirrenide e delle relazioni genetiche fra il vulcanismo e la sismicità della regione calabro-sicula coll'avvallamento del Tirreno meridionale. Alle discussioni sulla supposta Tirrenide, anche nei suoi legami colla Penisola, colla Corsica e colla Sardegna, parteciparono geologi e geografi, paleontologi, zoologi e botanici. E gli approfonditi studi sulla

geologia dell'Appennino e della Sicilia, e le ricorrenze ed i risvegli frequenti dell'attività vulcanica e sismica offrirono agli studiosi ripetute occasioni per la critica scientifica dei concetti del SUESS; e nel largo e fecondo movimento di idee e nella verifica dei fatti sembra che i contradditori abbiano il sopravvento.

*
* *

La serie dei numerosi lavori del SUESS, pubblicati da Accademie e da Riviste europee ed americane si iniziò nel 1851: e questi lavori riguardano argomenti assai disparati, per quanto tutti coordinati ai fini dell'opera ch'egli si proponeva di compiere. Fra le molte altre pubblicazioni, oltre quelle già menzionate, ricorderò ancora, in considerazione dell'importanza loro, quelle sul bacino terziario di Vienna e sulla formazione sarmatica, e le ricerche istituite coll'OPPEL sulla estensione degli strati di Kössen e sul significato stratigrafico di questo orizzonte. Fu anche paleontologo, e si occupò di graptoliti, di brachiopodi, di ammoniti ed inoltre di vertebrati: particolarmente notevoli gli studi sui brachiopodi e sugli ammoniti, per il contributo portato ai criteri sulla nomenclatura e sull'ordinamento razionale sistematico di questi fossili così importanti anche per i riferimenti cronologici dei sedimenti che li contengono.

Ma l'opera — monumento — di SUESS, che esercitò una reale influenza nella scienza e che gli procurò fama mondiale e duratura, è quella che porta il titolo suggestivo di " *Aspetto della Terra* ". In quest'opera presenta, con insuperata erudizione, una meravigliosa raccolta di documenti ordinati in modo da prospettare i tratti caratteristici della " Faccia della Terra " e disposti al fine di dare l'appoggio della realtà dei fatti a idee nuove e alle sue vedute scientifiche.

Le idee fondamentali che informano quest'opera di carattere generale si presentano abbozzate o già precise nelle pubblicazioni suaccennate relative alla struttura della Penisola e nel lavoro, di poco più recente, sull'*origine della catena delle*

Alpi. Egli attribuisce la formazione della catena alpina, la più meridionale, la più interna, la più recente delle tre catene sinuose che sorsero l'una dopo l'altra sull'area che ora corrisponde all'Europa Centrale, ad un corrugamento per spinte tangenziali moventi da sud: sul fianco esterno a nord, nel loro successivo costituirsi, le rughe urtarono e si arrestarono contro massicci di antica consolidazione, residui di altra catena, che determinarono colla loro presenza e resistenza l'orientamento dell'arco alpino, a pieghe ravvicinate ad occidente e che si stendono a ventaglio verso oriente. Il fianco interno, o mediterraneo, è invece troncato sopra un'area di sprofondamento, ed il distacco è segnato da una linea di fratture che aprì il varco a roccie eruttive. A questo riguardo è da notare ch'egli attribuisce la maggior importanza agli sprofondamenti di porzioni della corteccia terrestre col riflesso di corrugamenti ai margini.

Il Suess mise in evidenza l'importanza della dissimmetria nei versanti delle catene montuose, disposte in archi convessi verso nord o verso sud, generalizzando il fatto rilevato nella struttura della catena alpina, nonchè l'influenza esercitata da massicci primigenî sulla direzione e modalità dei corrugamenti impressi alle masse in movimento, loro attigue od interposte. Confermò nel tempo stesso che le roccie eruttive hanno nell'orogenesi soltanto un'azione passiva di presenza, e che le manifestazioni del vulcanismo sono piuttosto l'effetto del costituirsi delle catene di montagne. E in questi ordini di idee, alla luce dei fatti e col controllo dei fondamenti della geodinamica e delle ricerche sperimentali, che tendono a riprodurre le condizioni realizzate in natura, egli aprì nuovi orizzonti alla geologia meccanica, o, in altri termini, alla interpretazione della struttura dell'involucro esterno terrestre, che chiamò *stratosfera*, in considerazione del grande sviluppo ed influenza che ebbero nel costituirla i terreni stratificati.

Un'altro concetto, fra i più discussi, che informa l'opera, è quello relativo ai grandi movimenti positivi e negativi del mare; movimenti che sono attribuiti a spostamenti generali (eustatici) dell'idrosfera, dall'equatore ai poli e dai poli all'equatore, determinati da cause astronomiche periodiche.

Ben considerata nel suo insieme, l'opera appare come un logico concatenamento e coordinamento di fatti e di deduzioni:

si inizia coll'esame critico delle tradizioni sul Diluvio nella vasta pianura del Tigri e dell'Eufrate, studiato nella sua natura ed estensione, in relazione colle varie fonti dei documenti e cogli avvenimenti tellurici recenti nel bacino inferiore dei fiumi dell'India, e si chiude cogli studi regionali; particolarmente interessanti per noi i capitoli relativi alle Alpi e al sistema alpino in Italia e nel Mediterraneo occidentale.

I movimenti della crosta esterna della Terra sono studiati nelle loro cause, negli effetti e nei rapporti col vulcanismo. Delle catene di montagne si stabilisce l'età relativa, si indaga l'origine, si descrive la struttura; e, rintracciando le correlazioni fra l'andamento delle pieghe e le regioni che stanno all'avanti (esterno) o all'indietro (interno) delle arcuate catene, si riconoscono dei raggruppamenti naturali nei fasci di pieghe, secondo un piano di linee direttrici. Dei mari, come dei continenti, si narra la storia, se ne cercano i contrasti, come quelli caratteristici fra il Pacifico e l'Atlantico, ed i rapporti reciproci successivi; e si mettono in rilievo le vicende del grande mare mediterraneo (*Tethis*), che nel succedersi dei periodi geologici fu sede degli avvenimenti fra i più decisivi nell'imprimere nuovi tratti alla " faccia della Terra "; nel tempo stesso si discute sull'indole degli spostamenti delle linee di spiaggia e sull'importanza e significato geo-biologico dei ritorni periodici delle grandi trasgressioni marine. Così delle aree della superficie terrestre geologicamente conosciute si fa un esame particolareggiato e comparativo.

Le diverse parti dell'opera, pubblicate successivamente a notevole distanza di tempo (1883-1909), risentono, e sono al corrente, del progresso portato in questi ultimi decenni dal movimento scientifico. E merita a questo proposito di rilevare come il Suess, formatasi la convinzione che l'esame dei fenomeni naturali ha mostrato che le ipotesi le più azzardate, quali si potevano proporre pochi anni or sono, sull'importanza dei movimenti orizzontali stanno ben al disotto della realtà, non abbia esitato a seguire le discusse idee dei geologi francesi e svizzeri riguardo alla frequenza e sviluppo delle falde di ricoprimento ed alla realtà dei carreggiamenti; aderendo egli al concetto che nel fatto generale delle deformazioni della parte superficiale della corteccia terrestre si presentano dei casi nei quali il cor-

rugamento passa nell'ordine dei fenomeni secondari, mentre il movimento tangenziale assume importanza fondamentale per aver determinato superfici di discontinuità di assai grande estensione.

Dovendosi riassumere con una frase l'impressione generale, parmi si possa dire, che l'opera del Suess è un quadro grandioso, concepito da mente poderosa e geniale, che è il saggio di analisi e di sintesi geologiche più fondato e meglio riuscito, e la guida indispensabile alle ricerche future sulle trasformazioni evolutive della superficie terrestre e sulla paleografia.

M. Bertrand, in un entusiastico elogio della grande opera, premesso alla traduzione francese curata da Emm. De Margerie, osservando com'essa fosse lodata da tutti, ma anche criticata, soggiunge che questa è la sorte obbligata per tutto ciò che è nuovo. Dice che i metodi ed anche le idee nuove del Suess, maestro indiscusso di una nuova generazione di geologi, non sono che un mezzo, un istrumento di studio, e che si dovranno giudicare in base ai risultati; vale a dire sui progressi ch'esse, idee nuove, hanno portato nella conoscenza della storia del globo. Qui sta realmente la grandezza dell'opera; e per valutarla basta confrontare ciò che si poteva dire or son trent'anni di questa storia col quadro che ora ne possiamo fare. Nel 1896 la Società Geologica di Londra gli assegnava la medaglia Wollaston, e Sir John Evans, riferendo su questo conferimento, notava che la grande influenza esercitata dal Suess sulla scuola geologica di Vienna era derivata dalla sua qualità di grande maestro della scienza; e lo dichiarava degno del premio perchè la serie incessante dei suoi lavori era prova della tenace sua tempra di lavoratore, e perchè l'originalità della sua opera e lo stimolo intellettuale esercitato dai suoi scritti anche sui geologi stranieri lo segnalavano come un grande pensatore.

*
* *

Edoardo Suess, nato a Londra il 20 agosto 1831, morì a Vienna il 26 dello scorso aprile.

Nominato nel 1852 assistente di mineralogia e nel 1857 professore di geologia all'Università di Vienna, egli diede mente ed opera per oltre 55 anni all'insegnamento universitario. Ritiratosi dall'insegnamento, tenne dal 1898 l'alta carica di Presidente dell'Accademia di Vienna, della quale ultimamente era Decano. Il lavoro dell'insigne geologo e geografo si svolse dunque ininterrotto per ben 60 anni a vantaggio della scienza.

La R. Accademia di Torino, che si onora di avere avuto Edoardo Suess fra i suoi Accademici stranieri, si associa all'omaggio di ammirazione e di riconoscenza che il mondo scientifico tributa in questi giorni alla sua memoria.

10 maggio 1914.

Dell'attrito nei freni e nei perni.

Nota IIª del Dott. Ing. CARLO LUIGI RICCI

§ 1. — In queste pagine, come preannunciai nell'introduzione della Nota precedente, espongo lo studio delle azioni che mutuamente si trasmettono un perno ed un cuscinetto, o la puleggia ed il ceppo di un freno, applicando l'ipotesi del Reye, ed in certo qual modo generalizzandola, col tener conto del consumo di entrambi i corpi striscianti a contatto.

Il trascurare il consumo del corpo *interno* (perno o puleggia), secondo quanto si usa fin qui, è giustificato dal fatto che detto corpo è generalmente di materiale molto più duro dell'altro (cuscinetto o ceppo); ma non può essere del tutto privo d'interesse uno studio più rigoroso che detto consumo non trascuri, specialmente qualora i materiali costituenti i due corpi abbiano durezze poco diverse.

Si noti che questo studio, come pure quello della Nota I, può avere interesse per i perni con lubrificazione scarsa o nulla, mentre nel caso della lubrificazione completa la ricerca della ripartizione delle pressioni, meglio che sull'ipotesi del Reye, va impostata sul comportamento meccanico del fluido lubrificante.

Maggiore interesse possono avere le presenti ricerche per lo studio dei freni a ceppi, e per la soluzione di tutti i problemi pratici che in esso si presentano, sulla determinazione delle sospensioni più convenienti dei ceppi e sull'analisi delle forze in giuoco su questi.

Si noti pure che il caso del contatto parziale qui considerato interessa in generale soltanto lo studio dei perni, giacchè nel progettare i freni occorre por mente ad evitarlo, od almeno a restare nelle condizioni limiti; ed infatti ov'esso si verificasse, all'atto di staccare il ceppo dalla puleggia si produrrebbe un

accostamento, e perciò una pressione nell'arco del contatto prima inattivo, e non si potrebbe quindi far cessare del tutto l'azione frenante.

È ovvio che i volumi di materiale logorato contemporaneamente nei due organi stanno tra loro in un rapporto costante, dipendente unicamente dalla natura dei due materiali; rapporto che nel seguito indicheremo con m, e che potrebbe caso per caso venir determinato da apposite esperienze dirette, basate sulla misura (per esempio in peso) del materiale logorato contemporaneamente per strisciamento tra i due corpi.

Poichè entrambi i corpi si logorano, si verifica non soltanto (come nel caso della Nota precedente) l'accostamento, ossia la penetrazione del perno nel cuscinetto in una data direzione, ma anche una riduzione del diametro del perno, il quale però naturalmente rimane sempre circolare.

Sia a l'accostamento, cioè lo spostamento del centro del perno; la riduzione del raggio r del perno sia ka, essendo k un rapporto da determinare in base alla natura dei materiali ed ai caratteri geometrici del sistema.

La proporzionalità qui ammessa tra queste grandezze è giustificata dal fatto che esse sono rispettivamente proporzionali ai volumi di materiale logorato nei due corpi, volumi che stanno tra loro nel rapporto costante m.

In un punto della superficie di contatto individuato dall'angolo ϑ contato dalla direzione dell'accostamento, la penetrazione del perno nel cuscinetto, misurata secondo il raggio, è espressa da:

$$a(\cos\vartheta - k),$$

e questo valore si annulla in corrispondenza dell'angolo ϑ_0, tale che sia:

$$\cos\vartheta_0 - k = 0.$$

Perciò detto spostamento si può esprimere come segue:

$$a(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0).$$

Applichiamo ora l'ipotesi del Reye, ritenendo anche qui, come quando si trascura il consumo del perno, che il volume di materiale del cuscinetto logorato su un dato elemento della

superficie di contatto sia proporzionale al lavoro consumato contemporaneamente sull'elemento stesso; questa proporzionalità non può venire alterata dal maggiore o minore grado di logorabilità del perno.

Quindi, indicando con p la pressione unitaria in un punto qualunque della superficie di contatto e con p_0 una costante, dovrà essere:

$$p = p_0 (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0). \tag{1}$$

La pressione unitaria massima si verifica nella direzione dell'accostamento ($\vartheta = 0$) e vale:

$$p_m = p_0 (1 - \cos\vartheta_0).$$

Per determinare ϑ_0, o, ciò che fa lo stesso, k, basta esprimere che il consumo totale del perno e quello del cuscinetto stanno tra loro nel rapporto costante m; ed invero questi consumi sono dovuti ad uno stesso lavoro complessivo al quale sono in diverso grado proporzionali.

Il consumo totale del perno è evidentemente:

$$2\pi r \cos\vartheta_0$$

Il consumo elementare del cuscinetto è:

$$ar (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)\, d\vartheta;$$

per avere il consumo totale basterà integrare tra i limiti ϑ_1 e $-\vartheta_2$ corrispondenti ai punti estremi del cuscinetto, e si ottiene:

$$ar [\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2 - (\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos\vartheta_0].$$

Quindi facendo il rapporto dei due volumi complessivamente consumati si ottiene:

$$m = \frac{2\pi \cos\vartheta_0}{\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2 - (\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos\vartheta_0},$$

e da questa relazione si ricava:

$$\cos\vartheta_0 = \frac{m(\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2)}{m(\vartheta_1 + \vartheta_2) + 2\pi}. \tag{2}$$

Indichiamo ancora con ϑ l'ampiezza del cuscinetto, e sia α l'angolo che l'accostamento fa coll'asse di simmetria del cuscinetto; se il contatto è completo si ha:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \vartheta\,, \qquad \operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2 = 2\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\cos\alpha$$

e quindi:

$$(2') \qquad \cos\vartheta_0 = \frac{2m\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\cos\alpha}{m\vartheta + 2\pi}$$

e la condizione che dev'essere soddisfatta perchè il contatto sia completo è:

$$\vartheta_0 \geq \frac{\vartheta}{2} + \alpha\,.$$

Il valor limite α_0 di α al disopra del quale il contatto diviene parziale si ottiene dalla (2') ponendovi: $\vartheta_0 = \frac{\vartheta}{2} + \alpha_0$ ossia:

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \alpha_0\right) = \frac{2m\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\cos\alpha_0}{m\vartheta + 2\pi}$$

da cui sviluppando si ottiene:

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\alpha_0 = \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{2m}{m\vartheta + 2\pi}\,.$$

Si potrà avere contatto parziale unilaterale, ossia da una sola parte del cuscinetto, quando risulti:

$$\frac{\vartheta}{2} + \alpha > \vartheta_0 > \frac{\vartheta}{2} - \alpha.$$

Si noti però che ϑ_0 non può in tal caso venir calcolato colla formola (2), ma bensì con quella che dalla (2) si deduce sostituendo ϑ_0 ad uno dei due angoli ϑ_1 o ϑ_2; fissiamo per esempio $\vartheta_0 \equiv \vartheta_1$, $\left(\text{e quindi riteniamo } \vartheta_2 = \frac{\vartheta}{2} - \alpha\right)$; sviluppando si ottiene:

$$(2'') \qquad \operatorname{tang}\vartheta_0 - \vartheta_0 + \operatorname{sen}\vartheta_2 \sec\vartheta_0 = \frac{2\pi}{m} + \vartheta_2$$

equazione trascendente che andrà risolta per tentativi o per successive approssimazioni.

È chiaro che in questo caso l'ampiezza dell'arco di contatto effettivo sarà minore dell'ampiezza totale ϑ del cuscinetto, ed indicandola con ϑ', sarà:

$$\vartheta' = \vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} - \alpha.$$

Potrà pure accadere che l'ampiezza del cuscinetto sia tale che il contatto risulti parziale da ambe le parti, cioè che ϑ_1 e ϑ_2 risultino entrambi maggiori di ϑ_0; in tal caso dalla (2) risulta:

$$m = \frac{\pi \cos \vartheta_0}{\operatorname{sen} \vartheta_0 - \vartheta_0 \cos \vartheta_0} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} \vartheta_0 - \vartheta_0};$$

e quindi l'angolo ϑ_0 viene determinato dalla relazione:

$$(2''') \qquad \operatorname{tang} \vartheta_0 - \vartheta_0 = \frac{\pi}{m}.$$

La formola (1) esprime che il diagramma polare della pressione unitaria si può formare come differenza di due diagrammi circolari; l'uno, $p' = p_0 \cos \vartheta$, è un cerchio passante per il centro O del perno, ed avente il diametro $= p_0$ disposto sulla direzione dell'accostamento; l'altro $p'' = p_0 \cos \vartheta_0$ è un cerchio concentrico col perno e di raggio $= p_0 \cos \vartheta_0$; la pressione unitaria sarà in ogni punto misurata dal segmento compreso tra questi due cerchi sul raggio corrispondente.

§ 2. — Per avere la risultante delle pressioni normali basta eseguire l'integrale, esteso a tutto il diagramma delle pressioni:

$$N = r \int p \, d\vartheta$$

ove si ha:

$$\int p \, d\vartheta = \int p' d\vartheta - \int p'' d\vartheta.$$

Indichiamo con ds' e ds'' gli archi elementari corrispondenti ad uno stesso angolo elementare $d\vartheta$, sui due cerchi diagrammi delle p' e p'' rispettivamente; avremo perciò:

$$d\vartheta = \frac{ds'}{p_0} = \frac{ds''}{p_0 \cos \vartheta_0}.$$

Quindi:

$$\int p\,d\vartheta = \frac{1}{p_0}\left(\int p'ds' - \frac{1}{\cos\vartheta_0}\int p''ds''\right).$$

Si osservi che se s' ed s'' sono le lunghezze dei due archi circolari diagrammi delle pressioni, e se G' e G'' sono i rispettivi baricentri, si ha:

$$\int p'ds' = s'.\,OG'\,; \qquad \int p''ds'' = s''.\,OG'' = s'\cos\vartheta_0\,.\,OG''.$$

Perciò, sostituendo nelle formole precedenti si ha:

$$N = \frac{rs'}{p_0}(G' - G'') \equiv \frac{rs'}{p_0}\,G''G'.$$

La quantità:

$$\widehat{A} = \frac{rs'}{p_0} = r\,(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

è la lunghezza dell'arco di contatto tra perno e cuscinetto; e la relazione:

$$N = \widehat{A}\,(G' - G'') \tag{4}$$

esprime che la risultante delle pressioni normali è proporzionale all'arco di contatto ed al vettore che unisce i baricentri dei due archi circolari diagrammi delle p' e delle p''. Delle due grandezze l'una dovrà essere misurata nella scala delle lunghezze, l'altra nella scala delle forze per unità di lunghezza.

Per avere poi la linea d'azione di detta risultante basta condurre dal centro O del perno la parallela al vettore $G''G'$.

Se supponiamo il contatto completo, l'ampiezza angolare degli archi diagrammi delle p' e p'' rimane inalterata al variare dell'accostamento, e per semplicità potremo ritenere che quello delle p' sia sempre lo stesso cerchio, riservandoci poi di convenientemente variare la scala delle pressioni ed orientare il diagramma rispetto al cuscinetto.

Tenendo quindi fisso detto cerchio, il centro del perno sarà

un punto O della circonferenza variante secondo l'accostamento. Il raggio del cerchio diagramma delle p'' espresso da:

$$p'' = p_0 \cos \vartheta_0 = p_0 \frac{2m \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}}{m\vartheta + 2\pi} \cos \alpha$$

si può ottenere proiettando ortogonalmente sull'asse di simmetria del cuscinetto OS il segmento:

$$S'Q'' = p_0 \frac{2m \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}}{m\vartheta + 2\pi} \qquad \text{(V. fig. 1).}$$

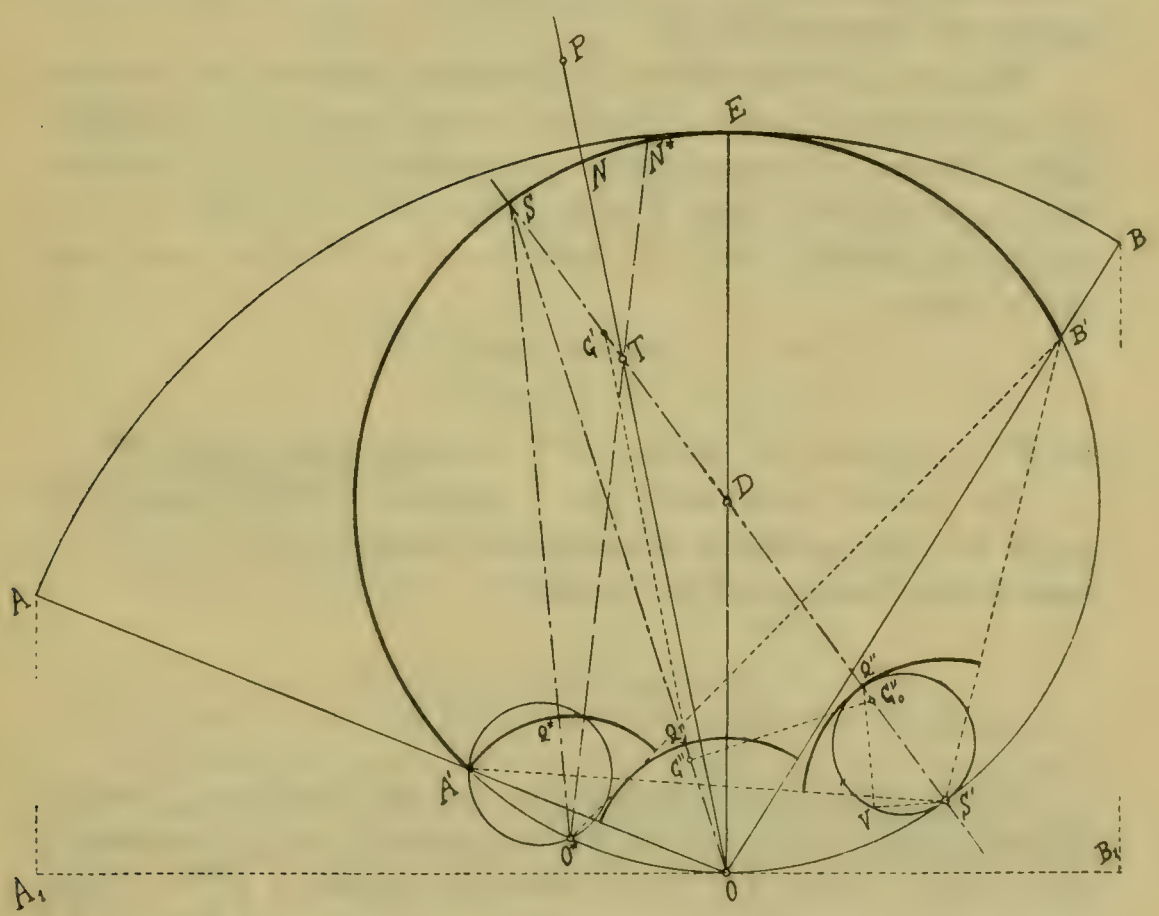


Fig. 1.

disteso sull'asse SDS' di simmetria del diagramma delle p'; e poichè l'angolo al centro del diagramma p'' non varia coll'accostamento, il baricentro G'' di detto arco si potrà ottenere proiettando sull'asse OS il baricentro G_0'' corrispondente al caso di $\alpha = 0$.

Il luogo di G'' al variare dell'accostamento è quindi un cerchio di diametro $G_0''S$.

Poichè il punto G'' divide il segmento OS in un rapporto costante, ne viene che la risultante delle pressioni normali, che è la parallela condotta da O alla retta $G'G''$, incontra l'asse SDS' di simmetria dell'arco diagramma delle p' in un punto fisso che chiameremo T. Determinato quindi questo punto per un accostamento qualunque, data una qualsiasi posizione del centro O, la linea d'azione della risultante delle pressioni normali è immediatamente determinata nella retta OT.

Quindi inversamente, conducendo da G' la parallela ad OT si trova il punto G'' dove questa retta incontra il già citato cerchio di diametro $G_0''S$.

Importa pure determinare la posizione limite O^* del centro O del perno, oltre la quale il contatto diventa parziale. Il punto Q'', come abbiamo visto, proiettato sulla retta OS, dà in Q l'estremo del raggio $OQ = p''$ per il dato valore di α; il luogo di Q è il cerchio di diametro SQ''. Il punto cercato O^* deve esser tale che si abbia:

$$A'O^* = O^*Q^*$$

se Q^* è il punto del cerchio $Q''S$ giacente sulla retta O^*S.

Ma risulta dalla figura che il segmente O^*P^* è uguale alla corda ad esso parallela del cerchio di diametro $Q''S'$; inoltre si osservi che sono eguali gli angoli:

$$S'\widehat{A'}O^* = S'\widehat{S}O^* = S'Q''V.$$

Se ne deduce immediatamente che per risolvere il nostro quesito basta descrivere un cerchio passante per A', avente il centro sulla corda $A'S'$, ed il diametro uguale a $Q''S'$; l'ulteriore intersezione di questo cerchio col diagramma delle p' è il punto O^* cercato.

La soluzione analitica di questo problema è data dalla (3), la quale permette di calcolare l'angolo $\alpha_0 = S'SO^*$.

Sarà pure utile determinare analiticamente la distanza DT.

Riteniamo per semplicità uguale ad 1 il raggio del cerchio diagramma delle p': $DS = 1$.

Dalla costruzione del punto T sopra indicata si ricava:

$$\frac{ST}{SG'} = \frac{SS'}{SG_0''}.$$

Si ha poi:

$$SG' = \frac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta} \qquad SS' = 2$$

$$SG_0'' = 2\left(1 - \frac{2m \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}{m\vartheta + 2\pi} \times \frac{\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}{\frac{\vartheta}{2}}\right) = 2 - \frac{8m \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}{m\vartheta + 2\pi\vartheta}$$

ossia:

$$SG_0'' = 2\,\frac{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta - 4m \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta}.$$

Quindi:

$$ST = \frac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta} \cdot \frac{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta}{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta - 4m \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}};$$

cioè:

$$ST = \frac{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta - m\vartheta \operatorname{sen}\vartheta - 2\pi \operatorname{sen}\vartheta}{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta - 4m \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}},$$

da cui si ottiene infine:

$$(5) \qquad DT = 1 - ST = \frac{m\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + 2\pi \operatorname{sen}\vartheta - 4m \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta - 4m \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}} = \eta.$$

Nel seguito questa distanza verrà appunto indicata con η.

Determiniamo ora il punto P nel quale la risultante delle azioni tangenziali incontra la risultante delle pressioni normali; per questo punto dovrà quindi passare pure la risultante totale.

Per trovare la linea d'azione della risultante delle azioni tangenziali si potrà fare astrazione dal coefficiente d'attrito, ossia ritenerlo uguale ad uno.

Il momento delle forze $prd\vartheta$ agenti tangenzialmente si può esprimere come segue:

$$M = r^2 \int p\,d\vartheta = r^2 \left(\int p'\,d\vartheta - \int p''\,d\vartheta\right)$$

ove le p indicano i moduli dei vettori $\boldsymbol{p}$ e gli integrali vanno estesi a tutto l'arco di contatto.

Ricordando le espressioni di p' e p'' si ha:

$$M = r^2 p_0 \int (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)\, d\vartheta$$

ed integrando tra i limiti $-\vartheta_2$ e $+\vartheta_1$, si ottiene:

$$M = r^2 p_0 [\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2 - (\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos\vartheta_0].$$

La distanza $e = OP$ della risultante delle azioni tangenziali dal centro O del perno è data da:

$$e = \frac{M}{N} = \frac{r^2 p_0 [\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2 - (\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos\vartheta_0]}{r(\vartheta_1 + \vartheta_2) \,.\, \boldsymbol{G''G'}};$$

ossia:

$$(6) \qquad e = \frac{r p_0}{G''G'} \left[\frac{\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} - \cos\vartheta_0 \right].$$

Se indichiamo come più sopra con ϑ l'ampiezza totale dell'arco di contatto ed introduciamo l'obliquità α dell'accostamento si ha:

$$(6') \qquad e = \frac{r p_0}{\boldsymbol{G''G'}} \left[\frac{2 \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2} \cos\alpha}{\vartheta} - \cos\vartheta_0 \right].$$

Possiamo pure esprimere questa eccentricità in funzione di lunghezze misurate in figura, ed avremo:

$$e = \frac{r \,.\, p_0 (\boldsymbol{A_1 B_1} - \widehat{A''B''})}{\widehat{A'B'} \,.\, \boldsymbol{G''G'}}.$$

§ 3. — Vediamo ora come si possa determinare la direzione dell'accostamento quando sia data la risultante delle pressioni normali. Questa sarà nota pure quando sia data la risultante totale, se è noto l'angolo d'attrito e il verso della rotazione.

Si tratta di determinare l'angolo α obliquità dell'accostamento.

Poichè è dato il punto N in cui la risultante delle pressioni normali incontra il cerchio diagramma delle p', costruito nel modo noto il punto T (§ 2, fig. 1), la retta NT è la linea d'azione della detta risultante, ed incontra il cerchio nel punto O centro del perno; perchè il contatto sia completo il punto O non deve oltrepassare la posizione limite O^* di cui si disse più sopra. L'angolo $\widehat{SOD}$ è l'obliquità α dell'accostamento cercata.

Per determinarla analiticamente (come già si fece nella prima Nota) indichiamo con μ l'angolo che la risultante delle pressioni normali forma colla direzione dell'accostamento, e poniamo $\omega = \alpha - \mu$.

Dal triangolo DOT si ricava:

$$\frac{DT}{OT} = \frac{\operatorname{sen}\mu}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

e dal triangolo SOT:

$$\frac{ST}{OT} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha}$$

da cui, dividendo membro a membro, si ottiene:

$$\frac{DT}{ST} = \frac{\operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\mu}{2\operatorname{sen}\omega\cos\alpha}.$$

Ma si ha:

$$\mu = \alpha - \omega; \qquad DT = \eta; \qquad ST = 1 - \eta;$$

e quindi sostituendo si ricava:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\omega}{2\cos\alpha\operatorname{sen}\omega} - \frac{1}{2} = \frac{\eta}{1-\eta},$$

ossia:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1+\eta}{1-\eta}\operatorname{tang}\omega.$$

Se ad η sostituiamo la sua espressione già trovata in funzione di ϑ, semplificando, troviamo:

$$(7) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{(m\vartheta + 2\pi)(\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta) - 8m\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}{(m\vartheta + 2\pi)(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)}\operatorname{tang}\omega.$$

Questa relazione risolve il problema proposto nel caso del contatto completo, ossia se il valore da essa ricavato risulta minore del valor limite α_0 dato dalla (3).

§ 4. — Il valor limite ω_0 di ω, al disopra del quale il contatto diviene parziale (unilaterale) dovrà soddisfare alla relazione che si ottiene combinando la (3) e la (7) ossia:

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tang} \omega_0 = \frac{(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{2m}{m\vartheta + 2\pi}\right)}{\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta - \frac{8m}{m\vartheta + 2\pi}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Supponiamo che, essendo parziale il contatto, il punto in cui la pressione si annulla sia dalla parte di A, e che quindi in B il contatto si mantenga completo. Ciò posto, se è data la risultante delle pressioni normali, risulta fissato l'angolo ψ che essa forma col raggio che dal centro del perno va all'estremo B del cuscinetto.

Occorrerà determinare l'ampiezza ϑ' dell'arco di effettivo contatto, in modo che il valore ω_0' ottenuto dalla (8) ponendo ϑ' in luogo di ϑ soddisfaccia alla relazione:

$$\psi = \frac{\vartheta'}{2} - \omega_0'.$$

Se sviluppiamo l'espressione di $\operatorname{tang}\psi$, e sostituiamo a $\operatorname{tang}\omega_0'$ il suo valore, otteniamo:

$$\text{(9)} \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang}\frac{\vartheta'}{2}\left[\vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta' - \frac{8m}{m\vartheta'+2\pi}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta'}{2}\right] - (\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta')\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta'}{2} - \frac{2m}{m\vartheta'+2\pi}\right)}{\vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta' - \frac{8m}{m\vartheta'+2\pi}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\vartheta'}{2}(\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta')\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta'}{2} - \frac{2m}{m\vartheta'+2\pi}\right)}.$$

Dato l'angolo ψ, da questa espressione risolta per successive approssimazioni si potrà ricavare l'angolo ϑ'.

Questo si può pure determinare graficamente con un metodo di falsa posizione, costruendo una curva d'errore.

Facciamo variare l'arco $A'B'$ in modo che il suo punto di mezzo resti fisso in S. Per una posizione generica $A_i'B_i'$ del-

l'arco, considerato come diagramma delle p', costruiamo nel modo indicato il relativo punto T_i', e la posizione limite del

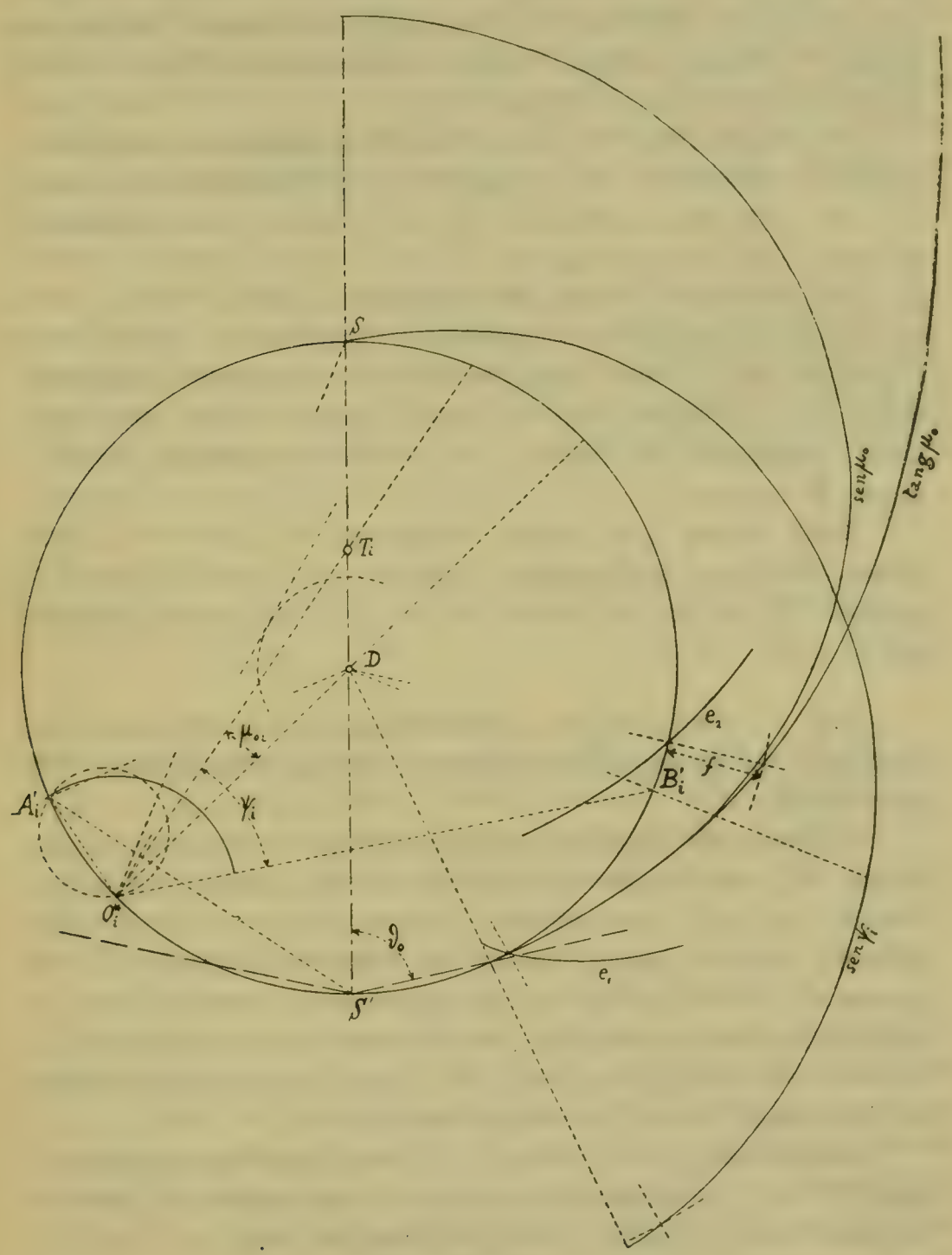


Fig. 2.

centro O_i^*; per questo punto si conduca una retta che faccia colla $O_i^*B_i'$ un angolo uguale al dato ψ; essa in generale non

passerà per T_i'; quindi la sua distanza da questo punto si porti come ordinata sul raggio DB_i' a partire dal cerchio considerato come asse delle ascisse curvilinee. Così per punti si costruisce una curva d'errore e_1, la quale interseca il cerchio nel punto B' cercato, estremo dell'arco diagramma $A'B'$ che risolve il problema (V. fig. 2 a pag. prec.).

Può essere utile la curva ottenuta portando sui raggi DB_i' a partire dal cerchio dei segmenti rappresentanti nella scala $1 = DS$ il sen ψ_i, indicando con ψ_i l'angolo ψ corrispondente all'arco $A_i'B_i'$, ossia l'angolo $T_i'O_i^*B_i'$. Questa curva si presta ad una soluzione diretta del problema; basta infatti, dato un valore dell'angolo ψ, costruire un cerchio col centro in D e distante dal cerchio diagramma di un segmento rappresentante sen ψ; l'intersezione di questo cerchio colla curva suddetta, proiettata dal centro D sul cerchio diagramma ci dà il punto B' cercato.

Nella figura 2 si cercò l'ampiezza ϑ' per $m = 1$ nelle stesse condizioni dell'analogo problema risolto nella Nota I, e si trovò $\vartheta' = 151°, 20'$ invece di $161°,25'$, valore colà ottenuto per $m = 0$.

§ 5. — Veniamo ora a determinare quel particolare accostamento che avviene nella direzione della corrispondente risultante totale.

Graficamente questo problema si risolve costruendo sul segmento DT' come corda un arco di circolo capace dell'angolo d'attrito φ; delle intersezioni di questo arco col cerchio diagramma delle p', quella che risulta esterna all'arco $O^*A'S$ rappresenta il centro del perno da assumersi in questo caso. Se entrambe queste intersezioni risultassero interne a detto arco, il contatto diventerebbe parziale ed il problema andrebbe ripreso in altro modo, come faremo più innanzi.

Analiticamente il problema si risolve esprimendo tang $\mu =$ tang $(\alpha - \omega)$ e sostituendo a tang ω il suo valore in funzione di tang α che è fornito dalla (7); si ottiene così:

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{2\operatorname{sen}\vartheta - \dfrac{8m}{m\vartheta + 2\pi}\operatorname{sen}^2\dfrac{\vartheta}{2}}{\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta - \dfrac{8m}{m\vartheta + 2\pi}\operatorname{sen}^2\dfrac{\vartheta}{2} + (\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)\operatorname{tang}^2\alpha} \cdot \operatorname{tang}\alpha.$$

Si avrà l'accostamento in direzione della risultante se sarà: $\mu = \varphi$; se quindi nella relazione precedente si pone φ in luogo di μ, si ottiene un'equazione di 2° grado in tang α dalla quale si ricava la cercata obliquità dell'accostamento. Delle due radici di questa equazione ha significato per noi soltanto quella che porta il segno — al radicale, poichè all'altra, com'è facile verificare, corrisponderebbe una posizione del centro O sempre interna all'arco $O^*A'S$, come già si osservò nella trattazione grafica.

§ 6. — Come già sappiamo, se risulta: $\alpha > \alpha_0$ [V. formola (3)], il contatto è parziale. Per studiare questo caso c'interessa conoscere il valor limite μ_0 di μ compatibile col contatto completo; esso si può ottenere dalla formola precedente sostituendo in essa α_0 in luogo di α, e ricordando la espressione di tang α_0 data dalla (3); così si ottiene:

$$\operatorname{tang}\mu_0 = \frac{\left[2\operatorname{sen}\vartheta - \frac{8m}{m\vartheta + 2\pi}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right]\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{2m}{m\vartheta + 2\pi}\right)}{\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta - \frac{8m}{m\vartheta + 2\pi}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2} + (\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{2m}{m\vartheta + 2\pi}\right)^2}.$$

Indichiamo con ϑ' l'ampiezza effettiva del contatto parziale; se l'accostamento è nella direzione della risultante totale, deve essere soddisfatta la relazione che si ricava dalla precedente ponendo in essa φ in luogo di μ_0 e ϑ' in luogo di ϑ.

L'equazione così ottenuta, risolta per successive approssimazioni ci potrà dare l'angolo ϑ' quando sia dato φ.

Lo stesso problema si può trattare per via grafica mediante una curva d'errore. Si fa variare, come già più sopra l'arco $A'SB'$ in modo che il punto medio S resti fisso; per ogni posizione scelta dell'arco $A_i'B_i'$ si costruisce il corrispondente punto T_i e la posizione limite del centro O_i^*; per quest'ultimo si tira una retta la quale faccia col raggio O_i^*D l'angolo d'attrito φ, e quindi sia tangente al cerchio di centro D e di raggio $DS \operatorname{sen}\varphi$ (cerchio d'attrito); la distanza di questa retta dal punto T_i si porta sul raggio DB_i' a partire da B_i' tenendo conto del segno; l'estremo di tale segmento al variare di B_i'

descrive una curva d'errore e_2 la quale taglia il cerchio nel punto B_i' cercato.

Sono utili le curve ottenute portando sui raggi DB_i' a partire dal cerchio segmenti rappresentanti $\operatorname{sen} \mu_{0i}$ o $\operatorname{tang} \mu_{0i}$, i quali si possono ricavare direttamente dalla figura; dato il valore di φ, se si costruiscono i cerchi col centro in D e distanti dal cerchio diagramma delle p' di $\operatorname{sen} \varphi$ o $\operatorname{tang} \varphi$ rispettivamente (per $DS = 1$), essi tagliano le rispettive curve in punti che stanno sul raggio che dal centro proietta il punto B' che risolve il problema.

Il cercato angolo ϑ' è dato allora da $B'DS$.

Nella fig. 2 furono costruite dette curve per $m = 1$; inoltre per $f = 0{,}3$ si determinò nel modo ora detto l'angolo ϑ', ottenendo $\vartheta' = 103°{,}30' \sim$; si osservi che nella Nota I, pure per $\operatorname{tang} \varphi = 0{,}3$ si ottenne $\vartheta' = 119°{,}30'$.

Nella fig. 3 (a e b) si segnarono i diagrammi cartesiani delle pressioni unitarie, riferite alle proiezioni dei varî punti della superficie di contatto sul diametro del perno perpendicolare all'asse di simmetria del cuscinetto: si fece, come già nella fig. 1, $\vartheta = 100°$.

L'accostamento nella fig. 3a corrisponde alla posizione O del centro segnato in fig. 1; nella 3b invece si ha l'accostamento nella posizione limite del contatto completo, corrispondente al centro O^*.

Se ξ è l'angolo che un raggio qualunque forma coll'asse di simmetria del cuscinetto, le equazioni parametriche del detto diagramma cartesiano, essendo l'origine nel centro del perno, sono della forma:

$$x = r \operatorname{sen} \xi \qquad y = p = p_0 \left[\cos(\xi - \alpha) - \cos \vartheta_0\right],$$

ossia il diagramma è un'ellisse, il cui centro dista da quello del perno, nel verso delle y negative, di un segmento $= p_0 \cos \vartheta_0 = p''$.

Detti diagrammi, calcolati per $m = 1$, si tracciarono con linea continua; inoltre a tratti si segnarono per confronto i diagrammi analoghi delle pressioni corrispondenti alla stessa risultante, nell'ipotesi però che il perno non sia soggetto a logoramento, ossia per $m = 0$.

Il cerchio diagramma delle pressioni per questo caso viene

determinato colla condizione che il suo baricentro G stia sulla risultante delle pressioni normali, e che la distanza OG ri-

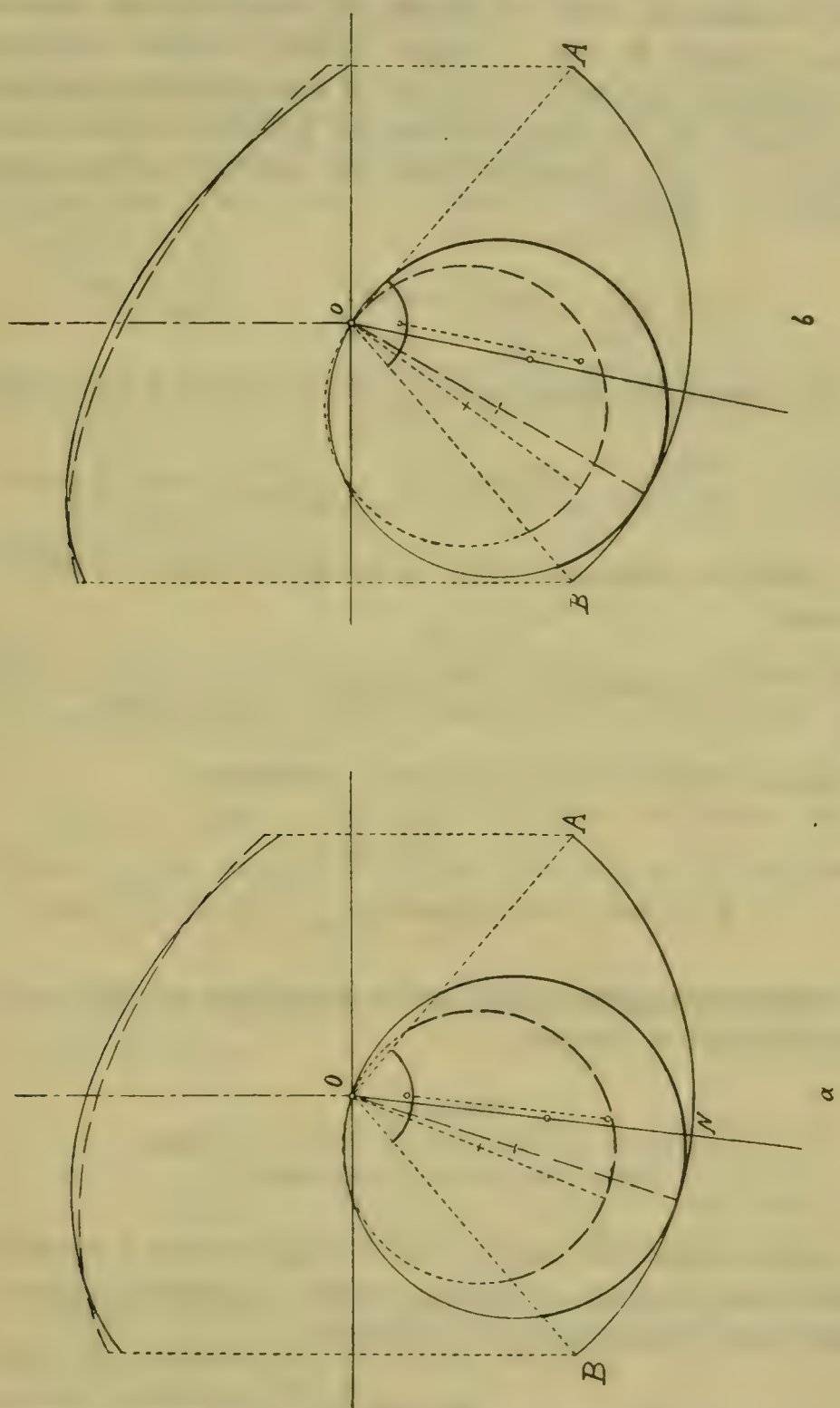


Fig. 3.

sulti eguale al segmento $G'G''$ del diagramma bicircolare per $m = 1$.

§ 7. — Cerchiamo ora il luogo del punto P intersezione della risultante totale con quella delle pressioni normali; di questo assumiamo come coordinate la distanza ρ dal centro del perno e l'angolo ω che il raggio vettore relativo (risultante delle pressioni normali) fa coll'asse di simmetria del cuscinetto.

Il valore di ρ è stato calcolato nel § 2 (ov'è indicato con e); dalla formola (6′) ponendo in luogo di $\cos\vartheta_0$ il suo valore dato dalla (2′), si ottiene:

$$\rho = \frac{rp_0}{G''G'} \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2} \cos\alpha \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{m}{m\vartheta + 2\pi}\right).$$

Per semplicità porremo $r = p_0 = 2$; inoltre si ha (V. § 2):

$$SG' = \frac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}; \qquad SG'' = 2\left(1 - \frac{4m}{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta} \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\alpha.$$

Quindi dal triangolo $SG'G''$ in cui si ha l'angolo $G'\widehat{S}G'' = \alpha$ si ricava:

$$G''G' = \sqrt{\frac{(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)^2}{\vartheta^2} + 4\cos^2\alpha\left[\left(1 - \frac{4m}{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{4m}{m\vartheta^2 + 2\pi\vartheta}\operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right)\frac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}\right]}.$$

Inoltre dalla (7) (§ 3) si deduce facilmente:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta}{\vartheta}}{\sqrt{(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)^2 + \left[\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta - \dfrac{8m}{m\vartheta + 2\pi}\operatorname{sen}^2\dfrac{\vartheta}{2}\right]^2 \operatorname{tang}^2\omega}}.$$

Sostituendo questi valori nella precedente espressione di ρ e semplificando si ottiene:

$$\rho = \frac{16\pi \operatorname{sen}\dfrac{\vartheta}{2}}{(m\vartheta + 2\pi)(\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta) - 8m \operatorname{sen}^2\dfrac{\vartheta}{2}} \cos\omega.$$

Questa equazione esprime che il luogo cercato è un cerchio passante per il centro del perno, avente il centro sull'asse di simmetria del cuscinetto, ed il diametro

$$\rho_0 = \frac{16\pi \operatorname{sen}^2\dfrac{\vartheta}{2}}{(m\vartheta + 2\pi)(\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta) - 8m \operatorname{sen}^2\dfrac{\vartheta}{2}}.$$

L'arco di questo cerchio che interessa nel caso del contatto completo è soltanto quello compreso tra i punti corrispondenti ad $\omega = \pm \omega_0$ (V. formola (8), § 4).

Se il contatto è parziale indichiamo al solito con ϑ' l'ampiezza variabile dell'arco di contatto. Il corrispondente valore di ρ si potrà ottenere dall'espressione valevole per il contatto completo per $\omega = \omega_0$ ($\rho = \rho_0 \cos \omega_0$), esprimendo in esso $\cos \omega_0$ in funzione di ϑ e ponendo poi ϑ' in luogo di ϑ.

Si ha:

$$\cos \omega_0 = \frac{\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta - \frac{8m}{m\vartheta + 2\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{\left(\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta - \frac{8m}{m\vartheta + 2\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2 + (\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)^2 \left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{2m}{m\vartheta + 2\pi}\right)^2}}.$$

Sostituendo nell'espressione di ρ, semplificando e ponendo ϑ' in luogo di ϑ si ottiene:

$$\rho = \frac{16\pi \operatorname{sen}\frac{\vartheta'}{2}}{(m\vartheta' + 2\pi)\sqrt{\left(\vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta' - \frac{8m}{m\vartheta' + 2\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta'}{2}\right)^2 + (\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta')\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta'}{2} - \frac{2m}{m\vartheta' + 2\pi}\right)^2}}.$$

Inoltre si osservi che colle notazioni più sopra adottate si ha:

$$\psi = \frac{\vartheta}{2} - \omega$$

ed introducendo questo valore nell'espressione di tang ψ prima ricavata si ottiene:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\vartheta}{2} - \omega\right) = \frac{\operatorname{tang}\frac{\vartheta'}{2}\left[\vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta' - \frac{8m}{m\vartheta' + 2\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta'}{2}\right] - (\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta')\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta'}{2} - \frac{2m}{m\vartheta' + 2\pi}\right)}{\vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta' - \frac{8m}{m\vartheta' + 2\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta'}{2} + \operatorname{tang}\frac{\vartheta'}{2}(\vartheta' - \operatorname{sen}\vartheta')\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta'}{2} - \frac{2m}{m\vartheta' + 2\pi}\right)}.$$

Questa relazione e la precedente espressione di ρ sono le equazioni parametriche del luogo del punto P per il contatto parziale (parametro ϑ').

È ovvio che le proprietà geometriche del luogo del punto P, che sono state dimostrate nell'ultima parte del § 7 della Nota I valgono pure in questo caso; e per esse ci riferiamo a quanto

è esposto nel detto paragrafo; esse si possono verificare seguendo gli stessi procedimenti colà indicati; lo stesso si dica per l'inviluppo delle linee d'azione delle risultanti totali.

Il luogo di P per $m = 0$ e per $\vartheta = 100°$, tracciato nella fig. 5 della Nota I, non differisce sensibilmente da quello che si ha per $m = 1$; soltanto l'angolo ω_0 in questo caso ha il valore $11°,45' \sim$, mentre nel caso precedente si aveva:

$$\omega_0 = 13° \sim.$$

È facile verificare che, come deve essere, tutte le formole di questa Nota, facendo $m = 0$, si trasformano nelle corrispondenti della prima Nota, trattanti problemi analoghi; lo stesso si dica delle costruzioni grafiche.

Si può perciò dire che la presente Nota come caso particolare comprende pure la precedente; però non sembra inopportuno l'aver esposto separatamente ed indipendentemente il contenuto della prima Nota, sia perchè esso è basato sull'ipotesi più comunemente usata nelle applicazioni e realizzante una buona approssimazione, sia perchè è costituito da concetti e relazioni più semplici che si prestano a dimostrazioni dirette ed immediate.

Torino, Maggio 1914.

Sulla risoluzione di equazioni vettoriali ed omografiche.

Nota di ANGELO PENSA.

1. — Nella presente Nota sono studiate alcune equazioni ed alcuni sistemi di equazioni, che si presentano nelle applicazioni della teoria dei vettori e delle omografie; e di qualcuna di queste applicazioni si dà un cenno (n. 2 e n. 10).

Altri tipi di equazioni omografiche e vettoriali sono già stati studiati, ed hanno già ricevuto numerose ed importanti applicazioni nella trattazione assoluta (cioè indipendente da coordinate) di molte questioni geometriche e meccaniche [1].

§ I.

Due sistemi di equazioni vettoriali.

2. — Nella recente Nota di Keraval, *Sur une famille de systèmes triplement orthogonaux* [2], è studiato un particolare sistema triplo ortogonale. Considerate le superficie

$$u\,(\mathrm{P}) = \text{costante}$$

(ove u è un numero funzione della posizione di P), sono determinate le condizioni affinchè le linee asintotiche del primo

---

[1] Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*; vol. 1°: *Transformations linéaires*, traduit de l'italien par P. Baridon; vol. 2°: *Applications à la Mécanique et à la Physique* (Pavia, Mattei et C., 1912, 1913).

Cfr. pure: C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel, avec de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique mathématique* (Paris, Hermann et Fils, 1910).

[2] " Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris ", t. 157, a. 1913, 2° semestre, n. 20, pag. 905.

sistema, sulle superficie $u(P) = \text{cost.}$, ammettano delle superficie traiettorie ortogonali, e che le asintotiche del 2° sistema ammettano esse pure delle superficie traiettorie ortogonali; e le condizioni perchè ciò avvenga si hanno eliminando $\boldsymbol{x}$ dalle equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x} \times \operatorname{grad} u = 0 \\ \boldsymbol{x} \times \frac{d \operatorname{grad} u}{dP} \boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{x} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{x} = 0. \end{cases}$$

Dalle prime due, col metodo che ora esporremo, si ricava $\boldsymbol{x}$; e questo, sostituito nella terza, dà un'equazione differenziale di terzo ordine, che determina u.

3. Le prime due equazioni (1), indicando con $\boldsymbol{a}$ ed $\boldsymbol{x}$ due vettori, e con α una dilatazione, si possono scrivere:

$$(2) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a} = 0 \\ \boldsymbol{x} \times \alpha \boldsymbol{a} = 0. \end{cases}$$

Di qui risulta che $\boldsymbol{x}$ è normale ad $\boldsymbol{a}$ e ad $\alpha\boldsymbol{x}$, e quindi, detto m un numero reale, si può porre:

$$\boldsymbol{x} = m\boldsymbol{a} \wedge \alpha\boldsymbol{x},$$

onde $\boldsymbol{x}$ è direzione unita per l'omografia $\boldsymbol{a} \wedge \alpha$. Per trovare queste direzioni basta applicare il metodo generale noto [3]; cerchiamo perciò le radici dell'equazione cubica in t:

$$\mathrm{I}_3 (\boldsymbol{a} \wedge \alpha - t) = 0$$

ossia [4]

$$t^3 + t \,.\, \boldsymbol{a} \times \mathrm{R}\alpha\boldsymbol{a} = 0 \quad [5].$$

Esse sono

$$t = 0, \text{ e } t = \pm \sqrt{-\boldsymbol{a} \times \mathrm{R}\alpha\boldsymbol{a}}.$$

---

[3] Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*; vol. I: *Transformations linéaires* (Pavia, Mattei et C., 1912), pag. 160.

[4] Loc. cit. [3], pag. 42, formola [1].

[5] Se α fosse un'omografia generale, l'equazione sarebbe

$$t^3 + 2\boldsymbol{a} \times \mathrm{V}\alpha \,.\, t^2 + \boldsymbol{a} \times \mathrm{R}\alpha\boldsymbol{a} \,.\, t = 0.$$

Allora, quando per t si assume una delle radici ora trovate, il vettore

$$x = \mathrm{RK}\,(a \wedge \alpha - t)\, v,$$

ove v è un vettore arbitrario, soddisfacente alla sola condizione che sia $\mathrm{RK}\,(a \wedge \alpha - t) \neq 0$, sarà una delle direzioni unite cercate (È da notare che x conserva sempre la medesima direzione qualunque sia v).

Si osservi ora che la soluzione $t = 0$, trovata, deve essere esclusa, nel caso nostro, perchè, come si riconosce subito, il corrispondente vettore x non soddisfa alla prima delle (2). Si deve quindi tener conto solo degli altri due valori di t, che soddisfano entrambi alla detta equazione.

Assumendo in particolare, come vettore v, il vettore a, si trae che se $x = \mathrm{RK}\,(a \wedge \alpha - t)\, a$ è vettore non nullo, esso dà le soluzioni cercate. Ora si ha:

$$\mathrm{RK}\,(a \wedge \alpha - t) = \mathrm{R}\,(-\alpha \,.\, a \wedge - t) =$$

cioè {A.V.G., I, n. 12, [2]} (6):

$$= \mathrm{R}\alpha \,.\, \mathrm{R}\,(a \wedge) - t\mathrm{C}\,(a \wedge \alpha) + t^2 =$$

e quindi {A.V.G., II, pag. 132, [7]}:

$$= \mathrm{R}\alpha \,.\, \mathrm{H}\,(a, a) + t \,.\, a \wedge \alpha + t^2 = \mathrm{H}\,(a, \mathrm{R}\alpha a) + t \,.\, a \wedge \alpha + t^2.$$

Sostituendo a t^2 il suo valore $-a \times \mathrm{R}\alpha a$, si ottiene

$$x = a^2 \,.\, \mathrm{R}\alpha a + t \,.\, a \wedge \alpha a - a \times \mathrm{R}\alpha a \,.\, a$$

od anche

$$x = -a \wedge (a \wedge \mathrm{R}\alpha a) + t \,.\, a \wedge \alpha a = -a \wedge (a \wedge \mathrm{R}\alpha - t\alpha)\, a$$

che risolve la questione proposta (7).

---

(6) Indicheremo, qui e nel seguito, con A. V. G. l'*Analyse vectorielle générale* di C. Burali-Forti et R. Marcolongo [cfr. nota (1)].

(7) La determinazione di x equivale, in coordinate omogenee nel piano, a trovare i punti comuni a una retta e una conica, e in coordinate non omogenee nello spazio, a trovare le generatrici di un cono quadrico, normali ad una direzione data.

4. — Considereremo ora un secondo sistema di equazioni vettoriali, che pure si presenta assai sovente nelle applicazioni. Si ha:

Teorema. — *Se* α, β *sono dilatazioni,* γ *è una omografia qualunque,* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *sono vettori, ed*

$$A = I_3(\alpha\beta) - I_3\gamma^2 + I_1 \{\alpha . R\gamma . \beta . RK\gamma - \gamma . R\beta . K\gamma . R\alpha\},$$

allora il sistema di equazioni

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \alpha\boldsymbol{x} + \gamma\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} \\ K\gamma\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}, \end{cases}$$

nell'ipotesi

$$A \neq 0,$$

dà, per i vettori $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, *le espressioni:*

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{u} + \gamma_1\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = K\gamma_1\boldsymbol{u} + \beta_1\boldsymbol{v} \end{cases}$$

ove α_1, β_1 *sono dilatazioni e* γ_1 *è un'omografia generale.*

Se α, β, γ *sono invertibili, allora:*

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = (\alpha - \gamma . \beta^{-1} . K\gamma)^{-1} \\ \beta_1 = (\beta - K\gamma . \alpha^{-1} . \gamma)^{-1} \\ \gamma_1 = (K\gamma - \beta . \gamma^{-1} . \alpha)^{-1} \end{cases}$$

Per α, β, γ *invertibili o no, si ha:*

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} A\alpha_1 = I_3\beta . R\alpha + R\gamma . \beta . RK\gamma - R'(\alpha, \gamma . R\beta . K\gamma), \\ A\beta_1 = I_3\alpha . R\beta + RK\gamma . \alpha . R\gamma - R'(\beta, K\gamma . R\alpha . \gamma), \\ A\gamma_1 = -I_3\gamma . RK\gamma - R\beta . K\gamma . R\alpha + R'(\beta . RK\gamma . \alpha, K\gamma). \end{cases}$$

Dim. — Supponiamo, per ora, α, β, γ invertibili. Operando (a sinistra) nella 1ª delle (I) con γ^{-1}, nella seconda con β^{-1},

e sottraendo, poi operando nella prima con α^{-1} e nella seconda con $K\gamma^{-1}$ e sottraendo, si otterrà:

$$(1)\qquad \begin{cases} (\gamma^{-1}\alpha - \beta^{-1}\,.\,K\gamma)\,x = \gamma^{-1}u - \beta^{-1}v\,, \\ (\alpha^{-1}\gamma - K\gamma^{-1}\,.\,\beta)\,y = \alpha^{-1}u - K\gamma^{-1}v\,. \end{cases}$$

Per formole note \{ A. V. G., I, n. 25, [9], [2], [5]; n. 9, [3]; n. 17, [7] \}, si ha:

$$(2)\qquad I_3(\gamma^{-1}\alpha - \beta^{-1}\,.\,K\gamma) = \frac{I_3\alpha}{I_3\gamma} - \frac{I_3\gamma}{I_3\beta} + \\ + I_1\{\alpha\,.\,K\gamma^{-1}\,.\,R\beta^{-1}\,.\,RK\gamma - \gamma\,.\,\beta^{-1}\,.\,R\gamma^{-1}\,.\,R\alpha\}\,,$$

e quindi \{ A. V. G., I, n. 20, [4'], [6]; n. 16, [2] \}:

$$I_3(\gamma^{-1}\alpha - \beta^{-1}\,.\,K\gamma) = \frac{I_3\alpha}{I_3\gamma} - \frac{I_3\gamma}{I_3\beta} + \\ + I_1\left\{\alpha\,.\,\frac{R\gamma}{I_3\gamma}\,.\,\frac{\beta}{I_3\beta}\,.\,RK\gamma - \gamma\,.\,\frac{R\beta}{I_3\beta}\,.\,\frac{K\gamma}{I_3\gamma}\,.\,R\alpha\right\} = \frac{1}{I_3(\beta\gamma)}\,.\,A\,,$$

e analogamente:

$$(3)\qquad I_3(\alpha^{-1}\gamma - K\gamma^{-1}\,.\,\beta) = -\frac{1}{I_3(\alpha\gamma)}A\,.$$

Dunque, essendo $A \neq 0$, le omografie che nelle (1) sono applicate ad x ed y sono invertibili.

Operando nei due membri delle (1) con le inverse di tali omografie, si ha (A. V. G., I, Int. n. 7, p. 7):

$$(4)\qquad \begin{cases} x = (\alpha - \gamma\,.\,\beta^{-1}\,.\,K\gamma)^{-1}u + (K\gamma - \beta\,.\,\gamma^{-1}\,.\,\alpha)^{-1}v\,, \\ y = (\gamma - \alpha\,.\,K\gamma^{-1}\,.\,\beta)^{-1}u + (\beta - K\gamma\,.\,\alpha^{-1}\gamma)^{-1}v\,; \end{cases}$$

e se osserviamo che (A. V. G., I, n. 9, [3]; n. 16, [2]; n. 17, [5]):

$$K(\alpha - \gamma\,.\,\beta^{-1}\,.\,K\gamma) = \alpha - \gamma\,.\,\beta^{-1}\,.\,K\gamma\,,$$
$$K(\beta - K\gamma\,.\,\alpha^{-1}\,.\,\gamma) = \beta - K\gamma\,.\,\alpha^{-1}\,.\,\gamma\,,$$
$$K(K\gamma - \beta\,.\,\gamma^{-1}\,.\,\alpha) = \gamma - \alpha\,.\,K\gamma^{-1}\,.\,\beta\,,$$

risultano dimostrate le (II) e (III).

Osservando che:

$$\gamma^{-1}\alpha - \beta^{-1} . K\gamma = \gamma^{-1}(\alpha - \gamma . \beta^{-1} . K\gamma),$$
$$\alpha^{-1}\gamma - K\gamma^{-1} . \beta = - K\gamma^{-1}(\beta - K\gamma . \alpha^{-1} . \gamma),$$
$$\gamma^{-1}\alpha - \beta^{-1} . K\gamma = - \beta^{-1}(K\gamma - \beta . \gamma^{-1} . \alpha),$$

dalle (2) e (3) si ha (A.V.G., I, n. 12, [1]; n. 17, [7]; n. 25, [1], [2], [5]):

$$(5) \qquad \begin{cases} I_3(\alpha - \gamma . \beta^{-1} . K\gamma) = \dfrac{A}{I_3\beta} \\ I_3(\beta - K\gamma . \alpha^{-1} . \gamma) = \dfrac{A}{I_3\alpha} \\ I_3(K\gamma - \beta . \gamma^{-1} . \alpha) = - \dfrac{A}{I_3\gamma}. \end{cases}$$

Tenendo ora presenti le formole (A.V. G., I, n. 20, [4']):

$$\sigma^{-1} = \frac{RK\sigma}{I_3\sigma}, \qquad R\sigma^{-1} = \frac{K\sigma}{I_3\sigma},$$

(ove σ è un'omografia qualunque), si ha (A.V. G., II, p. 134):

$$\begin{aligned} A\alpha_1 &= I_3\beta . R(\alpha - \gamma . \beta^{-1} . K\gamma) = \\ &= I_3\beta . \{ R\alpha + R\gamma . R\beta^{-1} . RK\gamma - R'(\alpha, \gamma . \beta^{-1} . K\gamma) \} = \\ &= I_3\beta . \left\{ R\alpha + R\gamma . \frac{\beta}{I_3\beta} . RK\gamma - R'\left(\alpha, \gamma . \frac{R\beta}{I_3\beta} . K\gamma\right) \right\} = \\ &= I_3\beta . R\alpha + R\gamma . \beta . RK\gamma - R'(\alpha, \gamma . R\beta . K\gamma), \end{aligned}$$

che è la prima delle (IV). La seconda si ottiene da questa cambiando α, β, γ in β, α, $K\gamma$; la terza si ottiene come la prima.

Le (IV) non contengono le inverse di α, β, γ e quindi valgono per α, β, γ invertibili o no (A.V. G., II, pag. 131, Théor. 2).

5. — Analogo teorema si ha per il sistema:

$$\begin{cases} \alpha x + \gamma y = u \\ \delta x + \beta y = v \end{cases}$$

ove α, β, γ, δ sono omografie qualunque: si ottiene:

$$\begin{cases} (\gamma^{-1}\alpha - \beta^{-1}\delta)\,\boldsymbol{x} = \gamma^{-1}\boldsymbol{u} - \beta^{-1}\boldsymbol{v} \\ (\alpha^{-1}\gamma - \delta^{-1}\beta)\,\boldsymbol{y} = \alpha^{-1}\boldsymbol{u} - \delta^{-1}\boldsymbol{v} \end{cases}$$

ed

$$A = \mathrm{I}_3(\alpha\beta) - \mathrm{I}_3(\gamma\delta) + \mathrm{I}_1 \{ \mathrm{K}\alpha \,.\, \mathrm{RK}\gamma \,.\, \mathrm{K}\beta \,.\, \mathrm{R}\delta - \mathrm{K}\delta \,.\, \mathrm{RK}\beta \,.\, \mathrm{K}\gamma \,.\, \mathrm{R}\alpha \},$$

ecc.

6. Osservazioni. — Facendo uso di un sistema cartesiano O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, invece delle (I) si presentano *sei* equazioni lineari tra le coordinate a, b, c di $\boldsymbol{x}$, e le coordinate f, g, h di $\boldsymbol{y}$.

Si ha, dalla 1ª delle (I):

$$a\alpha\boldsymbol{i} + b\alpha\boldsymbol{j} + c\alpha\boldsymbol{k} + f\gamma\boldsymbol{i} + g\gamma\boldsymbol{j} + h\gamma\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}$$

e una analoga dalla 2ª. Moltiplicando ($\times$) ciascuna per $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ si ottengono le *sei* equazioni cartesiane.

Il determinante dei coefficienti delle a, b, c, f, g, h è:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}\times\alpha\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i}\times\alpha\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{i}\times\alpha\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{i}\times\gamma\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i}\times\gamma\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{i}\times\gamma\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}\times\alpha\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}\times\alpha\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{j}\times\alpha\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\times\gamma\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}\times\gamma\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{j}\times\gamma\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}\times\alpha\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\alpha\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k}\times\alpha\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{k}\times\gamma\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\gamma\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k}\times\gamma\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{i}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{i}\times\beta\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i}\times\beta\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{i}\times\beta\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{j}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\times\beta\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}\times\beta\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{j}\times\beta\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k}\times\mathrm{K}\gamma\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{k}\times\beta\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\beta\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k}\times\beta\boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Facendo uso delle identità (ove $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ indicano vettori):

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}),$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}\,.\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c},$$

con calcoli laboriosi si trova che $\Delta = A$, e si trovano anche le a, b, c, f, g, h, come vengono date dalle (II), (IV). Risulta

ora perfettamente inutile sviluppare questo calcolo, avendolo già effettuato rapidamente sotto forma assoluta. È utile osservare che gli operatori R, R′ sostituiscono efficacemente l'algoritmo dei determinanti minori di un determinante, e che l'uso sistematico delle coordinate cartesiane conduce a complicazioni notevoli, e, ciò che più importa, del tutto estranee alla natura della questione.

§ II.

Funzioni vettoriali omogenee.

7. — Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vettori variabili, indipendentemente l'uno dall'altro, e sia:

$$f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

un ente (numero, vettore, omografia, ecc.) appartenente ad un sistema lineare, e funzione degli $\boldsymbol{u}$.

Come in analisi, noi diremo che f è *funzione omogenea di ordine* m quando, qualunque sia il numero t, si ha:

$$(a) \qquad f(t\boldsymbol{u}_1, t\boldsymbol{u}_2, \ldots, t\boldsymbol{u}_n) = t^m . f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

Sussiste, come per le funzioni numeriche (ammessa la derivabilità, ecc.), il *teorema di* Eulero, cioè:

$$(b) \qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}_n}\boldsymbol{u}_n = mf(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n).$$

La (b) si dimostra derivando la (a) rispetto a t (A. V. G., I, Intr. au Chap. II), e ponendovi poi $t = 1$.

Viceversa, dalla (b) si deduce la (a).

In particolare, se f è un *numero* funzione degli $\boldsymbol{u}$, allora la (b) diviene (A. V. G., I, n. 39, [1′]):

$$(c) \quad \mathrm{grad}_{\boldsymbol{u}_1} f \times \boldsymbol{u}_1 + \mathrm{grad}_{\boldsymbol{u}_2} f \times \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \mathrm{grad}_{\boldsymbol{u}_n} f \times \boldsymbol{u}_n = mf,$$

ed è chiaro che $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{u}_r} f$ è un vettore, funzione omogenea di ordine $m - 1$ degli $\boldsymbol{u}$.

8. — Daremo qui due teoremi relativi ai numeri funzioni omogenee quadratiche di due vettori.

Teor. 1°. — *Se i punti M, N variano, indipendentemente uno dall'altro, in un campo a tre dimensioni, e O è un punto fisso, la più generale funzione numerica omogenea quadratica dei vettori $M-O$, $N-O$ è:*

$$(M-O)\times\alpha(M-O)+2(M-O)\times\gamma(N-O)+(N-O)\times\beta(N-O),$$

ove α e β sono dilatazioni, e γ è un'omografia generale.

Dim. — Qualunque sia il numero T, funzione omogenea quadratica di $M-O$ e $N-O$, dal teorema di Eulero si ha:

$$(1)\qquad 2T=\operatorname{grad}_M T\times(M-O)+\operatorname{grad}_N T\times(N-O);$$

inoltre i gradienti di T rispetto ad M e N devono essere funzioni lineari di $M-O$ e $N-O$; esisteranno quindi le omografie α, β, γ, δ tali che:

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{grad}_M T=\alpha(M-O)+\gamma(N-O) \\ \operatorname{grad}_N T=\delta(M-O)+\beta(N-O). \end{cases}$$

Dalle (1) e (2) si ha subito:

$$(3)\qquad 2T=(M-O)\times\alpha(M-O)+(M-O)\times(\gamma+K\delta)(N-O)+ \\ +(N-O)\times\beta(N-O);$$

e operando in (3) con grad_M e grad_N, si ha:

$$2\operatorname{grad}_M T=(\alpha+K\alpha)(M-O)+(\gamma+K\delta)(N-O),$$
$$2\operatorname{grad}_N T=(\delta+K\gamma)(M-O)+(\beta+K\beta)(N-O),$$

che, confrontate con le (2), dànno:

$$\alpha+K\alpha=2\alpha,\quad \gamma+K\delta=2\gamma,\quad \delta+K\gamma=2\delta,\quad \beta+K\beta=2\beta,$$

ossia:

$$\alpha=K\alpha,\qquad \delta=K\gamma,\qquad \beta=K\beta.$$

Queste, per la (3), ricordando la [3] di A. V. G., I, n. 9, dimostrano il teorema.

Teor. 2°. — *Se, essendo* α, β *dilatazioni, e* γ *una omografia qualunque,* M, N, O *punti, come nel teor. 1°, si pone:*

$$(d) \quad 2T = (M - O) \times \alpha (N - O) + 2 (M - O) \times \gamma (N - O) + \\ + (N - O) \times \beta (N - O),$$

allora, posto ancora:

$$(e) \qquad P = O + \mathrm{grad}_M T, \qquad Q = O + \mathrm{grad}_N T,$$

si ha:

$$(f) \qquad 2T = (M - O) \times (P - O) + (N - O) \times (Q - O).$$

$$(g) \qquad M = O + \mathrm{grad}_P T, \qquad N = O + \mathrm{grad}_Q T,$$

purchè il numero A, *considerato nel § 1, n. 4, di questa nota, non sia nullo.*

Dim. — Essendo $2T$ un numero funzione quadratica omogenea di $M - O$ e $N - O$, si ha dal teorema di Eulero e dalla (d):

$$2T = \mathrm{grad}_M T \times (M - O) + \mathrm{grad}_N T \times (N - O),$$

che, per la (e), dà la (f).

Da (d) ed (e) si ha:

$$\mathrm{grad}_M T = \alpha (M - O) + \gamma (N - O) = P - O,$$
$$\mathrm{grad}_N T = \mathrm{K}\gamma (M - O) + \beta (N - O) = Q - O,$$

e per le (II) del § 1, n. 4, si ha:

$$(4) \qquad \begin{cases} M - O = \alpha_1 (P - O) + \gamma_1 (Q - O) \\ N - O = \mathrm{K}\gamma_1 (P - O) + \beta_1 (Q - O), \end{cases}$$

con α_1, β_1 dilatazioni e γ_1 omografia qualunque.

Posti i valori (4) nella (f), si ha:

$$2T = (P - O) \times \alpha_1 (P - O) + 2 (P - O) \times \gamma_1 (Q - O) + \\ + (Q - O) \times \beta_1 (Q - O),$$

da cui si trae:

$$\operatorname{grad}_P T = \alpha_1 (P - O) + \gamma_1 (Q - O) = M - O\,,$$
$$\operatorname{grad}_Q T = K\gamma_1 (P - O) + \beta_1 (Q - O) = N - O\,,$$

in virtù delle (4). Queste formole dimostrano le (g).

9. Osservazione. — L'espressione (d) di $2T$ mostra che $2T$ dipende dai punti M ed N, e quindi, complessivamente, da 6 parametri numerici: interpretandoli come coordinate di un punto in uno spazio a 6 dimensioni, ed indicando con x ed α rispettivamente un *vettore* ed una *dilatazione* in tale spazio, scelti convenientemente, potremo porre:

$$2T = x \times \alpha x$$

da cui:

$$\operatorname{grad}_x T = \alpha x\,,$$

e, posto $\alpha x = y$, risulta, supponendo α invertibile, $x = \alpha^{-1} y$. E quindi:

$$\operatorname{grad}_y T = \alpha^{-1} y = x.$$

Si ha così immediatamente il passaggio dalla equazione $\operatorname{grad}_x T = y$ all'altra $\operatorname{grad}_y T = x$.

La condizione di essere α invertibile porta alla conseguenza che il numero A, di cui si tratta al n. 4, sia diverso da zero.

Questo procedimento, molto più rapido del precedente, è però puramente formale, mancando la corrispondenza biunivoca fra le coppie di punti dello spazio ordinario e i vettori dello spazio a 6 dimensioni.

10. — Le cose esposte nei n^i 8 e 9 dànno modo di ricavare, in forma assoluta, gl'integrali delle equazioni differenziali del moto di un corpo immerso in un fluido. Tali equazioni sono state date da Kirchhoff ([8]), e in seguito poste da Clebsch sotto forma di equazioni differenziali di 1° ordine ([9]).

([8]) Kirchhoff, *Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit* (" Crelle's Journal ", Bd. 71).

([9]) A. Clebsch, *Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit* [" Mathem. Annalen ", Bd. 3 (1871), pag. 239, equazioni (1) e (2)].

In esse compaiono le derivate di una funzione omogenea di 2° grado T, rispetto alle sue sei variabili u, v, w, p, q, r. La T rappresenta l'energia cinetica del corpo e del fluido insieme; le u, v, w, le componenti della traslazione di un punto generico del corpo, e p, q, r quelle della rotazione dello stesso punto.

Le u, v, w si possono interpretare come coordinate di un punto M, e le p, q, r come coordinate di un secondo punto N. Allora le (1) e (2) della citata memoria di Clebsch [cfr. la nota (9)] si possono scrivere:

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{grad}_M T = (N - O) \wedge \mathrm{grad}_M T, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{grad}_N T = (M - O) \wedge \mathrm{grad}_M T + (N - O) \wedge \mathrm{grad}_N T, \tag{6}$$

ed è anche facile ottenere queste, direttamente, in modo assoluto, senza ricorrere a quelle di Clebsch, citate.

Essendo dati i due vettori $\mathrm{grad}_M T$, $\mathrm{grad}_N T$ ed il punto O, fisso, consideriamo i due punti P e Q tali che si abbia:

$$\left\{\begin{aligned} P &= O + \mathrm{grad}_M T \\ Q &= O + \mathrm{grad}_N T. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Di qui, pel teor. 2° di questo §, si deduce:

$$\left\{\begin{aligned} M &= O + \mathrm{grad}_P T \\ N &= O + \mathrm{grad}_Q T. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Queste sono le equivalenti delle relazioni (12) della citata memoria di Clebsch.

Servendoci di queste e delle (7), e sostituendo nelle (5) e (6), si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(P - O) = \mathrm{grad}_Q T \wedge (P - O)$$

$$\frac{d}{dt}(Q - O) = \mathrm{grad}_P T \wedge (P - O) + \mathrm{grad}_Q T \wedge (Q - O),$$

cioè:

$$\frac{dP}{dt} = -(P - O) \wedge \mathrm{grad}_Q T. \tag{9}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -(P - O) \wedge \mathrm{grad}_P T - (Q - O) \wedge \mathrm{grad}_Q T. \tag{10}$$

Le (9) e (10) sono rispettivamente le (13) e (14) di CLEBSCH [loc. cit., (9)].

Calcoliamo ora i tre integrali, trovati da KIRCHHOFF ([10]), delle equazioni (5) e (6), e riportati da CLEBSCH ([11]).

Si ha, per le (9) e (10):

$$\mathrm{grad}_P T \times \frac{dP}{dt} + \mathrm{grad}_Q T \times \frac{dQ}{dt} =$$

$$= \mathrm{grad}_P T \times \mathrm{grad}_Q T \wedge (P - O) - \mathrm{grad}_P T \times \mathrm{grad}_Q T \wedge (P - O) = 0,$$

cioè:

$$\frac{dT}{dt} = 0\,,$$

da cui:

(11) $$T = \text{cost.}$$

Si ha poi, per la (9):

$$\frac{dP}{dt} \times (P - O) = 0\,.$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt}(P - O)^2 = 0\,,$$

ossia:

(12) $$(P - O)^2 = \text{cost.}$$

Infine si ha, per le (9) e (10):

$$\frac{dP}{dt} \times (Q - O) + \frac{dQ}{dt} \times (P - O) =$$

$$= -(P - O) \wedge \mathrm{grad}_Q T \times (Q - O) + (P - O) \wedge \mathrm{grad}_Q T \times (Q - O) = 0.$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt}[(P - O) \times (Q - O)] = 0\,,$$

ossia:

(13) $$(P - O) \times (Q - O) = 0.$$

Le relazioni (11), (12), (13) costituiscono i tre integrali di KIRCHHOFF ([12]).

([10]) Loc. cit. ([8]).

([11]) Loc. cit. ([9]), pag. 240, formole (6).

([12]) Cfr. loc. cit. ([11]).

Ed è utile osservare che, mentre nelle opere dei citati autori, i calcoli, coll'uso di coordinate cartesiane, sono appena accennati, e si presentano lunghi e laboriosi, coll'uso delle omografie vettoriali si riducono invece ad essere semplicissimi, e così brevi da potersi sviluppare per intero in poco spazio.

§ III.
Risoluzione di equazioni omografiche.

11. — Siano α, β, ξ omografie, e l'omografia ξ debba soddisfare alla condizione:

$$\beta\xi = \alpha. \tag{1}$$

Se β è invertibile, allora si ha subito:

$$\xi = \beta^{-1}\alpha;$$

ma se β non è invertibile, allora l'equazione proposta non sempre ha soluzioni, e se ne ha, non possono essere trovate col metodo precedente.

In ogni caso, l'equazione:

$$\xi\beta = \alpha$$

si riduce alla prima forma operando con K, perchè si ottiene:

$$K\beta \,.\, K\xi = K\alpha.$$

In ciò che segue risolveremo la (1) per β degenere, cioè per i casi in cui sia β *omografia assiale*, o *diade*, o *somma di due diadi* ([13]).

12. Teor. 1°. — *Se* $\boldsymbol{a}$ *è un vettore unitario e* α *è una omografia, l'equazione:*

$$\boldsymbol{a} \wedge \xi = \alpha \tag{I}$$

([13]) Se β è degenere essa è somma di due diadi od è una diade, secondochè $R\alpha \neq 0$ od $R\alpha = 0$.

Anche *l'omografia assiale è somma di due diadi* (A. V. G., II, pag. 127), ed è soltanto sotto questa forma complicata che essa può essere trattata coi metodi del Gibbs.

ammette soluzione, rispetto alla omografia ξ, *solo quando:*

$$\text{(II)} \qquad K\alpha a = 0 ,$$

e, in tale ipotesi, la soluzione generale è:

$$\text{(III)} \qquad \xi = - a \wedge \alpha + H(u, a) ,$$

essendo u *un vettore arbitrario.*

Dim. — Qualunque sia il vettore x, si ha dalla (I):

$$a \wedge \xi x = \alpha x ,$$

e quindi:

$$a \times \alpha x = 0 ,$$

cioè (A.V. G., I, n. 15, [1]):

$$x \times K\alpha a = 0 ,$$

che, valendo per x arbitrario, dà la (II), che è quindi condizione *necessaria*.

Operando, a sinistra, con $a \wedge$ sulla (I), si ha:

$$H(a, a)\,\xi - \xi = a \wedge \alpha ,$$

cioè:

$$H(K\xi a, a) - \xi = a \wedge \alpha ,$$

da cui:

$$\text{(2)} \qquad \xi = - a \wedge \alpha + H(H\xi a, a).$$

Posto $K\xi a = u$ la (2) coincide con la (III), cioè la soluzione generale della (I) ha la *forma* (III). Ma occorre provare che nella (III) il vettore u può essere arbitrario, contrariamente a quanto apparisce formalmente dalla (2). Invero, operando con $a \wedge$ nei due membri della (III), e tenendo conto della (II) si ha, *qualunque sia* u:

$$a \wedge \xi = - \{ H(a, a) - 1 \} \alpha + H(u, a \wedge a) =$$
$$= - H(K\alpha a, a) + \alpha = \alpha.$$

Si osservi che dare ad arbitrio u equivale a dare ad arbitrio $K\xi a$, perchè anche dalla (III) si ha identicamente $K\xi a = u$.

13. Osservazioni. — *a)* Facendo uso di formole note (A.V.G., I, n. 12, [3]; n. 20, [3]; n. 23, [1]; II, pag. 136), si hanno le seguenti formole:

$$\begin{aligned} I_1\xi &= \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{u} + 2V\alpha) \\ I_2\xi &= \boldsymbol{a} \times \{ R\alpha\boldsymbol{a} + C(K\alpha \,.\, \boldsymbol{a}\wedge)\,\boldsymbol{u} \} \\ I_3\xi &= \boldsymbol{a} \times R\alpha\boldsymbol{u} \\ 2V\xi &= (\boldsymbol{u}\wedge - C\alpha)\,\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

b) A causa della (II) la α può essere assiale solo quando è della forma $m\boldsymbol{a}\wedge$, con m numero, e in tal caso si ha:

$$\text{(I')} \qquad \boldsymbol{a}\wedge\xi = m\boldsymbol{a}\wedge\,,$$

e quindi:

$$\text{(III')} \qquad \xi = m + H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a})\,,$$

indicando con $\boldsymbol{u}$ un vettore arbitrario.

Se, nelle stesse ipotesi, si vuole che ξ sia dilatazione, allora deve essere $2V\xi = 0$, ossia, ricordando l'espressione di $2V\xi$ data precedentemente, risulta che deve essere $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a} = 0$, cioè $\boldsymbol{u} = n\boldsymbol{a}$, indicando con n un numero reale arbitrario; e si ha:

$$\text{(III'')} \qquad \xi = m + nH(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}).$$

c) Se poi si vuole che tanto α quanto ξ siano dilatazioni (cioè $V\alpha = 0$, $V\xi = 0$), allora la soluzione generale della (I) è:

$$\text{(III''')} \qquad \xi = mH(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + n\boldsymbol{a}\wedge \{ 2H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) - 1 \}\,,$$

ove m, n sono numeri reali, arbitrarii, ed $\boldsymbol{i}$ è un vettore unitario, arbitrario, purchè normale ad $\boldsymbol{a}$.

Infatti, dalla (1) del n. 10, si ricava (A.V.G., n. 12, [3]; n. 23, [2]):

$$2V\xi = -(I_1\alpha - \alpha)\,\boldsymbol{a} + K\xi\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}\,,$$

la quale diventa:

$$0 = -(I_1\alpha)\,\boldsymbol{a} + K\xi\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}\,,$$

e porge:

$$I_1\alpha = 0\,, \qquad K\xi\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}.$$

Poichè $V\alpha = 0$, dalla (II) si ha, indicando con h un numero reale, e $\boldsymbol{j}$ un vettore unitario tale che $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{a}$ sia un sistema ortogonale destrorso:

$$\alpha = h\,H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + n\,H(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}),$$

perciò:

$$I_1\alpha = h + n = 0, \qquad \text{cioè} \qquad h = -n.$$

Dunque:

$$\alpha = -n\,\{H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) - H(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j})\};$$

ma si sa che (A. V. G., I, n. 6, [8]):

$$H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + H(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) + H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1.$$

Dunque:

$$\alpha = -n\,\{2H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) - 1 + H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\}.$$

Sostituendo nella (1) del n. 10 si ha la (III‴).

Si vede che l'omografia $2H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) - 1$ che compare in (III‴) è la simmetria rispetto ad $\boldsymbol{i}$.

14. Teor. 2°. — *Se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono vettori ($\boldsymbol{a}$ unitario) ed α è una omografia, l'equazione:*

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\xi = \alpha$$

ammette soluzioni solo quando α è una diade, il cui secondo elemento è $\boldsymbol{b}$.

E l'equazione:

$$\text{(IV)} \qquad H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\xi = H(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$$

ammette come soluzione generale:

$$\text{(V)} \qquad \xi = H(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) + H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}) + H(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j})$$

ove $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori arbitrarii, e $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ formano con $\boldsymbol{a}$ una terna unitaria, ortogonale, destrorsa.

Dim. — Dalla (IV′) si ha:

$$H(K\xi\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha,$$

e quindi α deve essere una diade, e precisamente della forma $H(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$.

Dalla (IV) si ha:

$$H(K\xi\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = H(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) \qquad \text{e quindi} \qquad K\xi\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c};$$

in conseguenza:

$$K\xi = H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + H(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) + H(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{v}),$$

da cui risulta subito la (V).

15. — Abbiamo risolta l'equazione $\beta\xi = \alpha$, proposta al n. 11, nei casi in cui β sia una omografia assiale od una diade. Ci resta da considerare il caso in cui sia β una somma di due diadi. Ci sarà utile il seguente

Teor. 3°. — *Se β è somma di due diadi, non riducibile ad una sola diade, allora, fissati ad arbitrio i vettori (non paralleli) $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, complanari con tutti i vettori $\beta\boldsymbol{x}$, sono determinati, e in un solo modo, i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ tali che*

$$\beta = H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d});$$

e se invece fissiamo i vettori (non paralleli) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, complanari con tutti i vettori $K\beta\boldsymbol{x}$, sono allora determinati, e in un solo modo, i vettori $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ tali che β ha la forma precedente.

Dim. — Si ha, per ipotesi:

$$\beta = H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + H(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'), \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \neq 0, \ \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}' \neq 0,$$

ed i vettori $\beta\boldsymbol{x}$ sono complanari con $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}'$; i vettori $K\beta\boldsymbol{x}$ sono complanari con $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}'$. Fissati, ad es., $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ complanari con $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}'$, si ha:

$$\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{c} + n\boldsymbol{d}, \qquad \boldsymbol{v}' = m'\boldsymbol{c} + n'\boldsymbol{d},$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\beta &= H(\boldsymbol{u}, m\boldsymbol{c}) + H(\boldsymbol{u}, n\boldsymbol{d}) + H(\boldsymbol{u}', m'\boldsymbol{c}) + H(\boldsymbol{u}', n'\boldsymbol{d}) = \\ &= H(m\boldsymbol{u} + m'\boldsymbol{u}', \boldsymbol{c}) + H(n\boldsymbol{u} + n'\boldsymbol{u}', \boldsymbol{d}). \qquad \text{c. v. d.}\end{aligned}$$

Teor. 4°. — *Se* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ *sono vettori, e* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *unitari e ortogonali,* $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ *non paralleli, e* α *è un'omografia, l'equazione:*

$$\text{(VI}'\text{)} \qquad \{ \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \} \xi = \alpha$$

ammette soluzioni solo quando α *è somma irriducibile di due diadi, cioè* (Teor. 3°) *quando si ha:*

$$\text{(VI)} \qquad \{ \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \} \xi = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{c}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{d}) ;$$

e in tal caso la soluzione generale è:

$$\text{(VII)} \qquad \xi = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) ,$$

indicando con $\boldsymbol{u}$ *un vettore arbitrario* ([14]).

Dal teorema 3° risulta che l'equazione (VI′) deve avere la forma (VI).

Dalla (VI) si ha:

$$\mathrm{H}(\mathrm{K}\xi\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mathrm{H}(\mathrm{K}\xi\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{c}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{b}' \boldsymbol{d}) ,$$

e pel Teor. 3°:

$$\mathrm{K}\xi\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \qquad \mathrm{K}\xi\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' ;$$

e per una nota identità (A. V. G., I, n. 6, [7]):

$$\mathrm{K}\xi = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}') + \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}') + \mathrm{H}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) ,$$

ove $\boldsymbol{u} = \mathrm{K}\xi(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$. Di qui si ha la (VII).

Osservazione. — Operando con R sulla (VI′) si ha (A. V. G., I, n. 21, [5]; n. 20, [5]):

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) \,.\, \mathrm{R}\xi = \mathrm{R}\alpha ,$$

che è del tipo (IV). Dovrà essere $\mathrm{R}\alpha$ una diade.

Soddisfatta tale condizione, la (V) determina $\mathrm{R}\xi$, e si potrà quindi avere ξ (A. V. G., II, pag. 133, Théor.).

([14]) È interessante confrontare questa soluzione con quella del Teor. 1°, n. 12, ed esaminare quale complicazione di forma e di calcolo si avrebbe se, come col metodo del Gibbs, si fosse costretti a considerare l'omografia assiale come somma di due diadi.

§ IV.

Sulla condizione $R'(\alpha, \beta) = 0$.

16. Teor. 1°. — *Se* α *e* β *sono omografie, una almeno delle quali è invertibile* (*ad es.* $I_3\beta \neq 0$), *e per* x *vettore arbitrario si ha:*

$$(\alpha x) \wedge \beta x = 0 ,$$

allora esiste un numero reale m *tale che*

$$\alpha = m\beta.$$

Dim. — Dall'ipotesi segue che per x arbitrario si ha:

$$\alpha . x = m\beta . x ,$$

ove m è un numero che può essere funzione del vettore x. Se β è invertibile, opero con β^{-1} a sinistra, sui due membri di quest'ultima uguaglianza, ed ho:

$$\beta^{-1}\alpha x = mx.$$

Dunque l'omografia $\beta^{-1}\alpha$ trasforma ogni vettore in un vettore avente la stessa direzione. Perciò (A. V. G., I, pag. 14) essa deve essere un numero, cioè:

$$\beta^{-1}\alpha = m , \qquad \text{da cui} \qquad \alpha = m\beta ,$$

con m indipendente da x. c. v. d.

Teor. 2°. — *Se* α *è un'omografia, e se per* x, y *vettori arbitrarii si ha:*

$$x \times \alpha (x \wedge y) = 0 ,$$

allora α *è un numero.*

Infatti, pel teorema di commutazione (A. V. G., I, n. 15, [1]), dalla ipotesi segue:

$$K\alpha x \times (x \wedge y) = 0 ,$$

ossia:

$$(K\alpha x \wedge x) \times y = 0 ,$$

per y arbitrario, e quindi:

$$K\alpha . x \wedge x = 0 ,$$

per x arbitrario. Cioè $K\alpha$ (e quindi α) è un numero.

Teor. 3°. — *Se* α, β *sono omografie, si ha:*

$$R'(\alpha, \beta) = 0$$

solamente nei seguenti casi:

a) *Quando* $\beta = 0$ (*o rispettivamente* $\alpha = 0$) *ed* α (*o risp.* β) *non è degenere;*

b) *Essendo* α *e* β *degeneri, e una almeno delle omografie* $R\alpha$, $R\beta$ *non nulla, occorre che le omografie* $R\alpha$, $R\beta$ *trasformino ogni vettore in un altro parallelo ad un medesimo vettore* $\boldsymbol{k}$ *(cioè* $R\alpha$ *e* $R\beta$ *devono essere diadi aventi* $\boldsymbol{k}$ *per secondo elemento), per il quale sia pure* $R'(K\alpha, K\beta)\boldsymbol{k} = 0$;

c) *Essendo le omografie* $R\alpha$, $R\beta$ *entrambe nulle (il che implica che* α *e* β *siano degeneri* ([15])) *occorre che* α *e* β, *ovvero* $K\alpha$ *e* $K\beta$ *trasformino ogni vettore in un altro parallelo ad un medesimo vettore (cioè* α *e* β *siano diadi aventi paralleli i primi od i secondi elementi).*

Dim. — *a)* La condizione $R'(\alpha, \beta) = 0$ dà, per x ed y arbitrarii:

$$(\alpha x) \wedge \beta y + (\beta x) \wedge \alpha y = 0 , \tag{1}$$

la quale prova che, ad es., i vettori βx, αx, αy sono complanari; quindi si ha, ad es.:

$$(\beta x) \times (\alpha x) \wedge \alpha y = 0, \quad \text{od anche} \quad \beta x \times R\alpha (x \wedge y) = 0 ,$$

e quindi (A. V. G., I, n. 15, [1]):

$$x \times K\beta . R\alpha (x \wedge y) = 0 .$$

Valendo questa per x ed y arbitrarii, dal Teor. 1° (n. 16) si ha:

$$K\beta . R\alpha = m ,$$

([15]) Cfr. A. V. G., I, n. 20, [4]; II, pag. 131.

indicando con m un numero reale. Moltiplicando a destra per $K\alpha$ si ha (A. V. G., I, n. 20, [4]):

$$(I_3\alpha)\, K\beta = mK\alpha\,, \qquad \text{cioè} \qquad (I_3\alpha)\,\beta = m\alpha.$$

Supposto $I_3\alpha \neq 0$ (cioè α non degenere ([16])), si ha:

$$\beta = h\alpha\,,$$

ove h è un numero reale. E quindi (A. V. G., II, pag. 134, [1]; I, n. 20, [1]):

$$R'(\alpha, \beta) = R'(\alpha, h\alpha) = 2hR\alpha.$$

E affinchè sia $R'(\alpha, \beta) = 0$, deve essere $h = 0$, cioè $\beta = 0$, perchè, essendo α non degenere, non può essere $R\alpha = 0$ (A. V. G., I, n. 20, [4]; II, pag. 131).

La condizione *a)* è dunque *necessaria*. È pure sufficiente, perchè $R'(\alpha, 0) = 0$.

b) La (1) dice che i vettori αx, αy, βx, βy sono complanari, e quindi i vettori:

$$(\alpha x) \wedge \alpha y = R\alpha\,(x \wedge y)\,, \qquad (\beta x) \wedge \beta y = R\beta\,(x \wedge y)$$

sono paralleli, vale a dire che, per x arbitrario, si ha:

$$(R\alpha x) \wedge R\beta x = 0. \tag{2}$$

Se α e β sono degeneri, allora $R\alpha$ ed $R\beta$ sono diadi (A. V. G., I, n. 22, [1]; II, pag. 133), e se non sono entrambe nulle, allora la (2) dice che:

$$R\alpha = H(p, k)\,, \qquad R\beta = H(q, k) \tag{3}$$

ove p, q, k sono vettori, e k può ridursi ad essere unitario ([17]).

([16]) A. V. G., II, pag. 131.

([17]) Perchè $H(a, mb) = H(ma, b)$.

Si deve allora avere, essendo $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ un sistema unitario destrorso (A. V. G., I, n. 21, [5]):

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{j}) & \text{con} \quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} \\ \beta = \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{i}) + \mathrm{H}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) & \text{con} \quad \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}. \end{cases}$$

Per questi valori di α e β si ha (A. V. G., II, pag. 134, [5], [12]):

$$\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = \mathrm{H}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}),$$

e la condizione $\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = 0$ equivale a:

$$(5)\qquad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Ma dalle (4) si ha subito:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{i}\,; \qquad \boldsymbol{u} = \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{j}\,; \qquad \boldsymbol{b} = \mathrm{K}\beta\boldsymbol{i}\,; \qquad \boldsymbol{v} = \mathrm{K}\beta\boldsymbol{j}\,,$$

e quindi la (5) diviene:

$$(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{i}) \wedge \mathrm{K}\beta\boldsymbol{i} + (\mathrm{K}\beta\boldsymbol{i}) \wedge \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{j} = 0\,,$$

cioè:

$$(6)\qquad \mathrm{R}'(\mathrm{K}\alpha, \mathrm{K}\beta)\,\boldsymbol{k} = 0.$$

Le (3), (6) dimostrano che la condizione *b)* è *necessaria*. È pure *sufficiente* perchè, valendo le (3) e (6), valgono pure le (4) e (5).

c) Se $\mathrm{R}\alpha = 0$ e $\mathrm{R}\beta = 0$, allora α e β sono diadi (A. V. G., II, pag. 133), cioè:

$$\alpha = \mathrm{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})\,, \qquad \beta = \mathrm{H}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}).$$

E poichè (A. V. G., II, pag. 134, [12]):

$$\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = \mathrm{H}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}),$$

si ha $\mathrm{R}'(\alpha, \beta) = 0$ solo quando:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = 0\,,$$

cioè solo quando α, β sono diadi aventi paralleli i primi od i secondi elementi.

La condizione *c)* è dunque *necessaria* e *sufficiente*.

§ V.

Derivate dei vettori, funzioni di un punto, formanti un sistema unitario, ortogonale, destrorso.

17. — I vettori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, funzioni del punto P, variabile in un campo a tre dimensioni, formino un sistema unitario, ortogonale, destrorso, cioè:

$$(a) \qquad \boldsymbol{i}^2 = 1\,, \qquad \boldsymbol{j}^2 = 1\,, \qquad \boldsymbol{k}^2 = 1\,,$$

$$(b) \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = 0\,, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = 0\,, \qquad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = 0.$$

Dalle (a), (b) si deduce subito:

$$(a') \qquad \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{i} = 0\,, \qquad \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{j} = 0\,, \qquad \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\,\boldsymbol{k} = 0\,,$$

$$(b') \qquad \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{k} + \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\,\boldsymbol{j} = 0\,, \qquad \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{k}}{dP}\,\boldsymbol{i} + \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{k} = 0\,,$$

$$\mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{i}}{dP}\,\boldsymbol{j} + \mathrm{K}\,\frac{d\boldsymbol{j}}{dP}\,\boldsymbol{i} = 0.$$

Per le derivate rispetto a P dei vettori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sussiste un teorema analogo a quello fondamentale della cinematica ([18]).

Si ha invero il seguente

Teor. — *Esiste una omografia* ω *tale che* ([19])

$$(1) \qquad \frac{d\boldsymbol{i}}{dP} = \boldsymbol{i} \wedge \omega\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dP} = \boldsymbol{j} \wedge \omega\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dP} = \boldsymbol{k} \wedge \omega.$$

([18]) Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo: *a) Éléments de calcul vectoriel...* (Paris, Hermann, 1910); *b) Analyse vectorielle générale*: I. *Transformations linéaires...* (Pavia, Mattei et C., 1912).

Cfr. pure: A. Pensa, *Sopra alcune proprietà del moto di un corpo rigido* [" Rendic. del Circolo Matem. di Palermo ", vol. 36 (1913, 2° semestre), n. 2].

([19]) Si noti l'analogia con le formole di Frenet [Cfr. C. Burali Forti et R. Marcolongo, loc. cit. ([18]), *a)*]. Esiste infatti il vettore

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{b} - \frac{1}{\tau}\,\boldsymbol{t}$$

tale che

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{t}\,, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}\,, \quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{b}\,.$$

Dim. — Si ha identicamente, ad es.:

$$(c) \qquad \frac{di}{dP} = \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{di}{dP}\,i,\, i\right) + \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{di}{dP}\,j,\, j\right) + \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{di}{dP}\,k,\, k\right),$$

e quindi per la prima delle (a'), e osservando che $j = -i \wedge k$, $k = i \wedge j$, si ha:

$$\frac{di}{dP} = i \wedge \left[-\mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{di}{dP}\,j,\, k\right) + \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{di}{dP}\,k,\, j\right)\right],$$

e per le (b'):

$$\frac{di}{dP} = i \wedge \left[\mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{dk}{dP}\,j,\, i\right) + \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{di}{dP}\,k,\, j\right) + \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\,\frac{dj}{dP}\,i,\, k\right)\right].$$

Ma l'omografia entro parentesi quadre è simmetrica rispetto ad i, j, k: indicandola con ω, risultano senz'altro dimostrate le (1).

Si ha poi, che:

La forma effettiva di ω in funzione delle derivate di i, j, k è:

$$(2) \qquad \omega = -\frac{1}{2}\left\{ i \wedge \frac{di}{dP} + j \wedge \frac{dj}{dP} + k \wedge \frac{dk}{dP} \right\}.$$

Dim. — Dalla (1) si ha (A. V. G., I, pag. 43, nota 1ª):

$$i \wedge \frac{di}{dP} = (i \wedge)^2 . \omega = \} \mathrm{H}(i, i) - 1 \{ \omega,$$

e due altre analoghe, in cui i è sostituito da j e da k. Sommando si ha (A. V. G., I, n. 6, [8]):

$$i \wedge \frac{di}{dP} + j \wedge \frac{dj}{dP} + k \wedge \frac{dk}{dP} = \omega - 3\omega,$$

da cui si ha la (2).

18. — Giova osservare che dalla (2) si ha:

$$-2i \wedge \omega = \mathrm{H}(i, i)\,\frac{di}{dP} - \frac{di}{dP} + \mathrm{H}(i, j)\,\frac{dj}{dP} + \mathrm{H}(i, k)\,\frac{dk}{dP},$$

che, per le (b') e (c) dà ancora la prima delle (1).

Notiamo anche le formole seguenti, che si deducono facilmente dalle (1):

$$(3)\quad \operatorname{rot} \boldsymbol{i} = C\omega \boldsymbol{i}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{j} = C\omega \boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{k} = C\omega \boldsymbol{k},$$

$$(4)\quad \operatorname{div} \boldsymbol{i} = -2\boldsymbol{i} \times V\omega, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{j} = -2\boldsymbol{j} \times V\omega, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{k} \times V\omega,$$

$$(4')\quad \operatorname{div} \boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{i} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} \,.\, \boldsymbol{j} + \operatorname{div} \boldsymbol{k} \,.\, \boldsymbol{k} = -2V\omega,$$

$$(5)\quad \boldsymbol{i} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{k} = I_1 C\omega = 2 I_1 \omega,$$

$$(6)\quad \boldsymbol{i} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{k} = 2VC\omega = -2V\omega \text{ [20]}.$$

Torino, 6 maggio 1914.

---

[20] Mediante l'omografia ω, alcune delle formole della interessante nota di M. Pieri, *Sui sistemi di* ∞^1 *superficie* ("Atti R. Accad. di Torino", vol. XLVIII, anno 1912) possono rendersi più semplici.

Relazione sulla Memoria del Dott. Mario Sapegno, *Contributo all'istologia normale e patologica del fegato.*

Nella sua Memoria l'A. porta un primo contributo ad importanti questioni concernenti tanto l'istologia che l'istopatologia del fegato umano, usando di nuovi metodi tecnici di indagine microscopica da lui stesso studiati e basandosi sull'esame sistematico di 200 esemplari di fegati.

Premesso sinteticamente quanto ci è noto oggi sulla costituzione dell'apparato connettivo-vascolare del lobulo epatico, notate le lacune e le contraddizioni che vi esistono e i problemi nuovi che tuttora aspettano la loro soluzione, l'A. dimostra che è possibile isolare dal complesso di fibrille precollagene che attorniano i capillari portali e che rivestono le trabecole epatiche, un sistema particolare di membrane delimitanti uno spazio perivascolare. Con i metodi proposti dall'A. non solo riesce di dimostrazione facile anche nel materiale cadaverico umano, e su sezioni, l'esistenza di tali guaine, ma riesce ancora agevole studiare di esse le variazioni strutturali patologiche.

Gli spazi perivasali descritti dall'A. sono delimitati da due membrane composte di una sostanza omogenea in cui decorrono nervature di rinforzo fra loro anastomizzantesi a rete: essi circondano il capillare portale e si mettono in comunicazione con i contigui per mezzo di derivazioni laterali passanti fra due cellule epatiche della trabecola interposta: le membranelle in parola, fra loro congiunte da tenui tramezzi che decorrono dall'una all'altra, non posseggono un rivestimento endoteliale ma sono fornite di elementi cellulari triangolari o stellati, con prolungamenti, che sembrano identificabili con le cellule descritte da v. Kupffer e la cui funzione era tuttora ignota.

L'A. dopo di aver descritto i rapporti che intercedono fra queste speciali strutture e le fibre cosidette a " graticcio ", e aver dimostrata la possibilità di riscontrare in esse un contenuto di natura varia (sostanza amorfa, pigmento biliare, globuli rossi etc.) passa ad esaminare le alterazioni istologicamente rilevabili nelle guaine perivasali. In un primo gruppo di casi esse consistono nella comparsa di fibrille precollagene nello spazio perivasale con o senza proliferazione di esse secondo modalità diverse: in un secondo gruppo consistono invece in evidenti e pure metamorfosi regressive delle membranelle delimitanti gli spazi perivascolari.

Tutte queste alterazioni non si riscontrano solo in svariate condizioni morbose sia locali del fegato che generali, ma anche in quei particolari stati dell'organismo che più direttamente son collegati con la insufficienza o la deviazione dei processi di nutrizione, quali lo stato linfatico o timo-linfatico, il marasma, la cachessia, l'atrepsia, il mixedema, etc.

Dalla morfologia in condizioni normali e dal comportamento delle guaine perivasali in condizioni patologiche, l'A. è indotto ad attribuire ad esse una notevole importanza nella nutrizione dell'elemento cellulare e ad interpretarle come costituite da membrane permeabili che regolano gli scambi fra cellula e plasma sanguigno. In base a tali dati ci è quindi possibile penetrare più intimamente di quanto finora non si sia potuto fare la natura di molti processi morbosi e di dare a questi una base anatomica morfologicamente dimostrabile.

Particolarmente degni di nota sono due reperti che l'A. potè mettere in evidenza nell'amiloidosi e nell'atrepsia: nel primo caso si ha un quadro affatto specifico e che differisce da quello riscontrato in processi che all'amiloidosi si vollero avvicinare — ialinosi —: nel secondo si nota che lo sviluppo del sistema perivasale è rimasto inferiore a quello che esso, data l'età del soggetto, avrebbe dovuto aver già raggiunto, reperto che differisce completamente da quello osservato dallo stesso A. nel marasma e nella cachessia degli adulti.

Fra altre osservazioni raccolte dall'A. ricordiamo infine ancora come più notevoli e per la prima volta descritte, la dimostrazione di una proliferazione di tessuto precollageno in fegati di alcoolisti cronici che non presentavano nessuna alterazione

cirrotica, e la dimostrazione di una proliferazione notevolissima sempre di tessuto precollageno nel fegato in casi di nefrite parenchimatosa cronica, proliferazione che manca invece completamente quando si tratti di un rene grinzo genuino.

L'originalità e l'importanza delle osservazioni fatte dall'A. ci inducono a giudicare il lavoro del Dott. Mario Sapegno come degno di essere pubblicato fra le Memorie della nostra R. Accademia.

Torino, 10 Maggio 1914.

Pio Foà
R. Fusari, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 17 Maggio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Presenti i Soci: Manno, De Sanctis, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Einaudi, Baudi di Vesme, Renier Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli e dei Soci Carle, Brondi, Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 3 maggio 1914.

Il Socio Ruffini offre in omaggio, da parte dell'autore, due opuscoli ed il volume: *Il giornalismo giobertiano in Torino nel 1847-1848* di Eugenio Passamonti.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Baudi di Vesme presenta la sua Nota, a lui richiesta dalla Classe, su *Baldassare Mathieu, pittore d'Anversa.*

Pure per l'inserzione negli *Atti* il Socio De Sanctis porge sotto la propria responsabilità i seguenti lavori, di cui chiarisce l'importanza:

1° Achille Vogliano, *Una iscrizione greca arcaica;*

2° Adele Cortese, *Le origini di Taranto;*

3° Aldo Ferrabino, *Ancóra Cirene mitica.*

Raccoltasi quindi la Classe in Seduta privata elegge a Soci corrispondenti:

nella Sezione di *Scienze filosofiche*: Giovanni Gentile, Pietro Martinetti, Guglielmo Windelband e Enrico Bergson;

nella Sezione di *Scienze giuridiche e sociali*: Pasquale Jannaccone e Camillo Montalcini;

nella Sezione di *Scienze storiche*: Roberto Davidsohn, Edoardo Meyer, Silvio Lippi.

LETTURE

Baldassare Mathieu, pittore di Anversa.

Nota del Socio ALESSANDRO BAUDI DI VESME

(Con una tavola).

Nell'adunanza che la nostra Classe tenne il 21 dicembre 1913, io ebbi l'onore di presentare, per incarico datomene dall'autore, una memoria del Prof. Adolfo de Ceuleneer, intitolata *La Dernière Cène de Balthasar Mathysen à la Soperga* ed inserta nel periodico *Les Arts anciens de Flandre* (Bruges, 1913). Avendo io accompagnato la mia presentazione di quella memoria con alcune informazioni verbali intorno al pittore studiato dal Professore Ceuleneer, fui invitato dalla cortesia dei Colleghi a stendere una Nota per i nostri *Atti* nella quale fossero riportate le dette informazioni e quelle altre che eventualmente avrei potuto aggiungere in proposito. Il presente scritto è in adempimento di quell'invito.

Comincio col dichiarare ch'io sono d'accordo col Ceuleneer nel ritenere che il Balthasar Mathysen che, stando ai *Liggeren* ossia alle matricole della Corporazione d'Anversa, fu nel 1647 ricevuto maestro pittore, sia l'identico artista che in Piemonte pochi anni appresso era chiamato Baldassare Mathieu; ma non intendo per ciò rinunciare alla forma del nome di famiglia " Mathieu ", — che è quella che più comunemente incontrasi nei documenti e nei libri antichi, e quella pure, probabilmente, in cui l'artista stesso, durante gli anni da lui trascorsi in Piemonte, soleva sottoscriversi, — per adottare la forma " Mathysen ", la quale sinora non risulta che da un unico documento e si riferisce ad un tempo in cui l'artista era ancora ignoto.

Il più antico libro, per quanto io sappia, in cui trovasi menzione di Baldassare Mathieu è la *Notizia delle pitture, scul-*

ture ed architetture..... delle città d'Italia, di Francesco Bartoli (Venezia, 1776), ove, a pp. 20-21 del 1° volume, descrivendosi l'Eremo di Torino (allora chiamato di Pecetto), è detto: " Nel refettorio il considerabile quadro esprimente la Cena di Cristo cogli Apostoli è di Matteo d'Anversa che vi lasciò il suo nome così: " MATTHEVS ANTVERPIENSIS „ (1). Già alcuni anni prima la *Guida de' forestieri per la real città di Torino* (Torino, 1753), a p. 156, aveva ricordato quella *Cena* come " stimata molto da' periti nell'arte „, ma non ne aveva indicato l'autore altrimenti che col dire ch'esso era " un celebre pittore fiamengo „; ed Ignazio Nepote, l'anonimo autore di *Il pregiudizio smascherato da un pittore* (Venezia, 1770), a p. 59, in uno dei suoi sgangherati settenari sdruccioli la disse " pittura di un buon gallico „, tacendo il nome dell'artista e facendo errore sulla nazionalità di lui. La *Nuova Guida per la città di Torino* di Onorato Derossi (Torino, 1781), a p. 150, aggiunse un nuovo particolare, dicendo che la *Cena* fu dipinta nel 1657. Questo particolare fu certamente comunicato al Derossi dall'erudito Giuseppe Vernazza, al quale, com'è noto, è dovuta la massima e miglior parte delle notizie artistiche contenute in quella guida, ed il Vernazza lo trovò senza dubbio nelle scritture d'archivio dell'Eremo dei Camaldolesi, donde egli estrasse pure un'altra indicazione, cioè il prezzo pagato all'artista, che fu di lire 545 e soldi 10 (2).

Il Lanzi, la cui *Storia pittorica* ebbe la sua prima edizione nel 1789, scrisse: " Dopo un Baldassare Mathieu d'Anversa, di cui è una Cena di Nostro Signore nel refettorio dell'Eremo, pregiata molto, si trova dichiarato pittor di corte Giovanni Miel dei contorni pure d'Anversa..... „. Il *Dizionario dei pittori* di Stefano Ticozzi (Milano, 1818) afferma anch'esso che il Mathieu (da lui, forse per errore tipografico, chiamato Mattein) " era pittore di Corte in Torino nel 1656 „. Per contro il Cibrario,

---

(1) Presentemente nè questa firma nè altra qualsiasi è visibile sia sulla pittura che a tergo della tela. Forse le parole segnalate dal Bartoli si leggevano sulla cornice del quadro, quando questo ancora si trovava all'Eremo.

(2) Biblioteca del Re, *Miscellanea Vernazza*, XLIII, f. 129.

nella *Storia di Torino* (II, 69), ebbe il capriccio di negare che il nostro artista sia mai stato pittore ufficiale della Corte di Savoia: ma il seguente documento dimostra che la sua negazione è infondata.

1656, 31 maggio. — " Il Duca di Savoia..... Al Tesoriere generale..... Havendo noi per patenti nostre in data delli 30 genaro 1654 dechiarato per nostro pittore Baldassare Mathieu fiamengo, e volendo noi hora che si trattenga appresso la nostra persona per travagliare, li stabiliamo un trattenimento col quale possa convenientemente sostenersi alla nostra servitù; onde con le presenti ..... vi ordiniamo che ..... debbiate pagare ..... annualmente et a quartieri, cominciando dal primo del corrente anno 1656 et durante il nostro beneplacito in avvenire, al sopradetto nostro pittore Baldassare Mathieu la somma di livre due milla d'argento .... Torino ..... Carlo Emanuel „ (Archivio Camerale in Torino, *Controllo*, vol. 135, f. 196).

Ecco altri due documenti concernenti l'opera del Mathieu in servizio del Duca di Savoia.

1655. — " Al signor pittore Mattia, a consideratione di due gran quadri presentati a S. A. R.; livre 675. „ (Archivio Camerale, *Tesoreria Generale*).

Quantunque in questo documento (come pure in un altro che darò fra poco) il nome di battesimo sia taciuto e quello di famiglia sia alquanto sfigurato, non può esser dubbio che vi si alluda al nostro pittore d'Anversa, tanto più se si bada che fra gli artisti che in quel tempo vivevano a Torino non se ne trova alcuno il cui nome o il prenome fosse " Mattia „.

1657. — " Al signor Baldassar Mattheus fiamengo, pittore di S. A. R., a conto del suo stipendio..... „ (Ibidem).

Darò ora su Baldassare Mathieu due preziose nozioni biografiche che non si trovano in alcun libro a stampa da me conosciuto. Entrambe sono desunte dalle carte del piccolo archivio della Compagnia di San Luca in Torino, le quali presentemente si conservano presso la R. Accademia Albertina di belle arti.

Una di queste nozioni ci apprende che " Monsù Mattia „ era nel 1658 priore della sunnominata Compagnia di San Luca, la quale si componeva di pittori, scultori ed architetti. La carica di priore era elettiva, annuale e la più alta che avesse la Compagnia di San Luca. Questa società data almeno dal 1652,

anno in cui ottenne l'uso di una cappella nella chiesa cattedrale; nel 1675 essa fu aggregata all'Accademia di San Luca di Roma, e nel 1676 fu da Maria Giovanna Battista, Duchessa Reggente di Savoia, onorata della protezione sovrana; essa ebbe alternatamente periodi di floridezza e periodi di languore, sino all'occupazione francese del Piemonte sul cadere del sec. XVIII, epoca in cui cessò. Talora si chiamava ambiziosamente Accademia, anzichè Compagnia, ma in nessun caso essa dev'essere confusa con la Reale Accademia di pittura e scultura di Torino, istituita dal re Vittorio Amedeo III nel 1768.

Grazie all'altra notizia fornitaci dalle carte amministrative della Compagnia di San Luca veniamo a sapere che " Baldassare Mattia " morì nell'anno istesso in cui fu priore, cioè nel 1658.

Il Ceuleneer, il quale non seppe menzionare che un'unica opera di Baldassare Mathieu, cioè la *Cena* originariamente all'Eremo ed ora a Superga, termina il suo articolo dicendo: " Je souhaite que des recherches ultérieures permettent de découvrir d'autres œuvres de cet artiste qu'on peut ranger parmi les bons maîtres de l'École anversoise du XVIIe siècle ". Questo augurio sin qui rimase senza effetto, ma oggi io mi credo in grado di segnalare alcuni altri dipinti eseguiti dal nostro artista.

Il 19 settembre 1657 i frati dell'Eremo di Torino, ai quali Baldassare Mathieu già aveva dipinto la nota *Cena*, gli pagarono lire 97,15 per due quadri, l'uno rappresentante S. Benedetto e l'altro S. Romualdo. Così trovasi nei manoscritti di Giuseppe Vernazza (1), il quale evidentemente attinse la notizia alla stessa fonte dove trovò la data e il prezzo del quadro della *Cena*, cioè nei libri contabili del convento dell'Eremo. Non si sa che sia divenuto di questi due quadri dopo la vendita ai pubblici incanti del detto convento e del suo arredamento nel 1809.

Nello stesso anno 1657 Baldassare Mathieu dipinse per il Principe Emanuele Filiberto di Carignano (il sordomuto) un ritratto equestre del Duca Carlo Emanuele II, che gli venne pagato 25 doppie (2). Anche di questa tela s'ignora la sorte.

---

(1) Biblioteca del Re, *Miscellanea Vernazza*, XLIII, 129.

(2) *Miscellanea Vernazza*.

Il *Dizionario geografico* di Goffredo Casalis (IV, 610) ha che all'Eremo di Cherasco, detto anche di Selva Maggiore, lateralmente al coro eranvi due gran quadri del Mattei (*sic*) fiammingo. Non è, a parer mio, un'ipotesi soverchiamente audace il ritenere che questo " Mattei fiammingo „ debba essere identificato con Baldassare Mathieu. In tal caso rimane notevole il fatto che questo pittore durante il non lungo suo soggiorno in Piemonte abbia eseguito non meno di cinque quadri — tre dei quali erano certamente di grandi dimensioni — per l'ordine dei frati Camaldolesi. Il Casalis parla dei due quadri dell'Eremo di Cherasco come già non più esistenti quand'egli stampava il IV volume della sua opera (cioè nel 1837), nè in appresso essi vennero ritrovati.

Ma sebbene nessuna delle pitture pur ora menzionate sia più in essere, mi proverò a dimostrare esser falso che la *Cena* di Superga sia la sola opera di Baldassare che ci sia pervenuta.

È noto ai bibliofili un pregevole volume che ha per titolo: *La Venaria Reale, Palazzo di piacere e di caccia, ideato dall'Al.ª Reale di Carlo Em. II Duca di Savoia Re di Cipro*, disegnato et descritto dal Conte Amedeo di Castellamonte; *L'Anno 1672*. Esso è illustrato da 66 tavole incise a bulino da Giorgio Tasnière, fuorchè una sola ch'è lavoro di Antonio de Piene. Il testo è in forma di dialogo: uno degli interlocutori è il Conte di Castellamonte, il quale fu non soltanto l'autore del libro ma anche l'architetto del grandioso castello della Venaria, e l'altro è il Cavalier Lorenzo Bernini. Questo celebre artista vide veramente la Venaria quando, durante l'autunno del 1665, nel suo ritorno da Francia a Roma, passò per Torino. Nel summenzionato volume leggesi che quando il Bernini in quella sua visita al castello giunse nella gran sala che si chiamava la Reggia di Diana, dopo aver ammirato i ricchi freschi della volta esprimenti soggetti mitologici e venatori, così interpellò il Castellamonte che gli serviva di cicerone (p. 28): " E quest'altro ordine di quadri maggiori dipinti ad oglio, cinti di grandi cornici dorate, rappresentanti Cavaglieri e Dame al naturale, in habiti chi d'Amazoni e chi di Cacciatrici, sopra generosi cavalli, in atti tutti di saltare e di correre; chi sono? poichè non devono esservi posti a caso „.

Alla qual domanda il Conte di Castellamonte rispose: " Se

" là su, Signor Cavagliere, nel cielo di quella volta V. S. ha
" mirate le bellezze di quelle Deità poetiche e favolose della
" Reggia di Diana, qui nella corona di questo gran fregio di-
" stribuito in dieci altri quadri ammirerà le non finte, ma vere
" e naturali bellezze del corpo e dell'animo delle Reali Heroine
" e principali Dame di questa Regia Corte, le quali distintamente
" darò a conoscere a V. S. „.

Ed infatti l'architetto piemontese addita e nomina al Bernini i cavalieri e le dame effigiati in quelle dieci tele. Egli non enuncia i nomi dei pittori, ma siccome fra le incisioni del suo libro della *Venaria Reale* ve n'ha dieci che riproducono appunto i quadri in discorso e portano in basso, oltre ai nomi delle persone rappresentate, del delineatore e dell'incisore, anche i nomi (talora abbreviati) dei differenti pittori che li fecero, v'ha per noi la possibilità di venir a conoscere chi furono gli autori dei singoli dipinti.

Qui sotto trascriverò le iscrizioni che indicano i pittori, ma ometterò quelle che si riferiscono al delineatore (ch'è sempre G. B. Brambilla) e quelle che si riferiscono all'incisore (ch'è sempre Giorgio Tasnière).

" *Math. pinx.* — *C. Delphinus pinx.* — *C. Delphin. pinx.* —
" *Spirit. pinx.* — *J. Miel pierix.* (sic). — *Cau. Mombasilio pinx.*
" — *C. Delphin. pinx.* — *B. Carauoglia pinx.* — *Math. pinx.* —
" *Cau. Mombasilio pinx.* „.

L'epigrafe " *C. Delphinus pinx.* „, che figura in tre composizioni, dimostra che queste sono dovute al pittore francese Charles Dauphin. " *Spirit. pinx.* „ significa che il relativo quadro è di mano di Esprit Grandjean, di Chambéry. Il nome " *J. Miel* „ dinota il fiammingo Giovanni Miel, che dal 1658 al 1664 fu pittore di Corte del Duca di Savoia e morì in Torino. " *Cau. Mombasilio* „ è il dilettante Cavaliere di Mombasiglio. " *B. Carauoglia* „ è Bartolomeo Caravoglia. — Solamente rimane a spiegarsi a chi alluda la scritta " *Math. pinx.* „, che occorre due volte.

La circostanza, già da me riferita, che fra i pittori che operavano in Torino nella seconda metà del secolo XVII non ne fu trovato alcuno il cui nome di battesimo o di famiglia cominci con " *Math.* „, mi fece sospettare *a priori* che quest'abbreviazione accenni al nostro Mathieu. Ma poichè in questioni

d'arte poco valgono gli argomenti ed ancor meno gl'indizi di carattere documentario quando non sono confermati da prove basate sulle affinità o diversità degli stili e delle tecniche, volli che fosse riservata a siffatte prove la decisione della questione, servendo la *Cena* di Superga, ch'è opera indubitabile del Mathieu, come di pietra di paragone.

Nessuno dei dieci quadri di questa serie si trova più alla Venaria. Si conosce però esattamente quando è avvenuta la loro emigrazione da quel castello, per l'adornamento del quale erano stati dipinti. In una lettera (1), curiosa per l'incolta naturalezza dello stile, del 2 ottobre 1693 il custode del castello della Venaria Reale informa da Torino il suo sovrano Vittorio Amedeo II del saccheggio e del parziale incendio dato tre giorni innanzi a quel magnifico edifizio dalle truppe di Catinat. Fra l'altre cose egli scrive che, temendosi nuove rapine da parte del nemico, un certo Maulandi " si porterà alla Venaria " per far venire a Torino tutto quello che si potrà di quadri " ed altri mobili, ed io resterò a Torino per riceverli. Già sono " oggi arrivati carri cinque quadri, e si continuerà sino a che " ce ne sarà „. Cessata la guerra, i dieci quadri non ritornarono alla Reggia di Diana, ma furono, in epoca che non potei determinare, portati al Castello Reale di Moncalieri. Nel 1889, non so se tutti o solamente alcuni di essi furono mandati alla Villa Reale di Monza per l'addobbo provvisorio di alcune sale in occasione della visita fatta dall'Imperatore di Germania al Re d'Italia, e poscia furono restituiti al Castello di Moncalieri. Ma mi fu riferito (ed io non potei appurare la verità della cosa) che immediatamente prima del loro invio a Monza essi furono consegnati al pittore Rodolfo Morgari affinchè li ripulisse e restaurasse, e che essendo disgraziatamente scoppiato un incendio nello studio del Morgari, alcuni andarono distrutti dal fuoco. Se la notizia è esatta, rimarrebbe spiegato perchè presentemente la serie non si trovi più in numero completo al Castello di Moncalieri, dove i soli che mi fu dato riscontrare sono i seguenti :

(1) Pubblicata da Gaudenzio Claretta, in " Atti della Società d'archeologia e belle arti per la provincia di Torino „, I, 56.

La Principessa Ludovica di Savoia, e la Contessa di Bagnasco ;

Margherita di Savoia, Duchessa di Parma, e la Contessa di Villafalletto ;

Enrichetta Adelaide di Savoia, ed il marito suo Ferdinando Elettore di Baviera ;

La Marchesa di San Giorgio, ed il Principe Emanuel Filiberto di Carignano ;

La Marchesa del Marro, e la Marchesa di San Maurizio ;

La Marchesa di Caluso, e la Marchesa di Rodi.

Esiste dunque ancora, oltre la *Cena* di Superga, un quadro ch'io, grazie all'iscrizione che leggesi sulla riproduzione intagliata dal Tasnière, ritengo di Baldassare Mathieu. Esso è l'ultimo di quelli qui sopra registrati (vedi fig. 1). Il confronto di esso con la *Cena* di Superga non si presenta guari facile, l'una pittura essendo un soggetto all'aperto, illuminato da luce solare e rappresentante due dame a cavallo, e l'altra pittura un soggetto d'interno, con luce notturna e con figure maschili sedute. Nondimeno potei constatare ch'esse hanno comuni le seguenti caratteristiche : composizione bene equilibrata, ma troppo ricercata e pomposa ; tonalità generale bituminosa ; colorito che evita gli accenti forti che non siano prodotti da un violento contrasto di bianco e di fosco ; tocco di pennello molle ma singolarmente elegante ; tipi fisionomici poco pronunciati, tanto che si può argomentare che il pittore non aveva temperamento di ritrattista ; maggior studio e maggior felicità nel rendere il vestiario che la figura ; notevole abilità nel trattare i cani. Nè scorsi che fra le due tele esistesse alcuna incompatibilità per cui si dovesse loro attribuire due paternità differenti.

Spero dunque che sarà accolta la mia tesi, che questo quadro di Moncalieri sia anch'esso di Baldassare Mathieu, del quale si conoscerebbero così, non più una sola, ma due opere.

Sinora non ho parlato che di uno solo dei quadri che, secondo le epigrafi che leggonsi sulle incisioni del Tasnière inserte nel volume della *Venaria Reale*, sarebbero di Baldassare Mathieu ; ma poichè un'altra delle dette incisioni — rappresentante il Duca Carlo Emanuele II con la madre sua Cristina di Francia — ha pure l'indicazione " *Math. pinx.* ", il dipinto che le corrisponde dovrà anch'esso esser ascritto al Mathieu. Ma

pur troppo tale dipinto non fu da me rintracciato, ed è possibile ch'esso sia perito nell'incendio nello studio del Morgari. Non potendo io dunque qui dar la riproduzione di esso, darò quella della relativa incisione del Tasnière (fig. 2), affinchè se il dipinto originale è distrutto, rimanga almeno più diffusamente memoria della sua composizione, e se esso è soltanto smarrito, ne riesca più facile il riconoscimento.

Nel libro dialogato della *Venaria Reale* il Conte di Castellamonte così parla al Bernini dei due quadri che io qui, e spero con buon fondamento, ho dichiarato essere della mano di Baldassare Mathieu: " Questa [Dama] che vede a man dritta in " capo la sala maneggiare con maestosa gravità le redini del " superbo destriere, e frenar più col comando della voce che " con la forza della mano gl'impeti del suo furore, è la gran " Cristina di Francia, madre al nostro Regnante Carlo Ema- " nuele, che pur in questo quadro l'accompagna, come in ef- " fetto l'ha più volte con le Regie Caccie ossequioso figliuolo " divertita dalle noiose cure nella sua longa e spinosa Reg- " genza ".

" ..... Queste altre due sono, l'una Madamigella di Caraglio " poi Marchesa di Caluso, e l'altra Madamigella di Parella hora " Marchesa di Rodio, pari di bellezze, di spirito, e di fortuna, " poichè hanno havuto ugualmente adoratori delle loro Virtù " non solo li Pianeti tutti del Cielo di questa Corte, ma il Sole " istesso ".

Fig. I

g. II

Officina Fototecnica Ing. Molfese - Torino.

Fig. I

Fig. II

Officina Fototecnica Ing. Molfese - Torino.

Una iscrizione greca arcaica.

Nota del Dott. ACHILLE VOGLIANO.

πάγχυ δ'εὔμαρες σύνετον πόησαι
πάντι τοῦτ(ο).

SAPPHO

Per gentile concessione di Luigi Siciliani sono in grado di presentare al pubblico degli studiosi un documento epigrafico di una notevole importanza. Si tratta di una iscrizione incisa sopra una piccola targa di bronzo, rinvenuta a Cirò (presso l'antica Crimisa) (1), in occasione di uno scavo, eseguito da quel Comune, per costruire un serbatoio d'acqua. Dato il carattere giuridico del documento, sarebbe di un certo interesse poter determinare, con sicurezza, la natura del luogo di ritrovamento, per poter fare delle deduzioni legittime sulla originaria collocazione della targa. La presenza di frammenti di grosse lastre di terracotta, appartenenti sicuramente alla camera di un sepolcreto, porterebbe alla supposizione che in quella località esistesse una necropoli e che il documento in parola facesse parte del corredo di una tomba; ma per dichiarazione dello stesso Siciliani, che, non presente allo scavo, potè per altro rendersi conto esatto del luogo di ritrovamento, il terreno appariva sicuramente esplorato in precedenza; e per conseguenza, anche ammessa la esistenza di una necropoli, è tutt'altro che sicuro che la targa, in origine, fosse proprio collocata in una delle tombe (2).

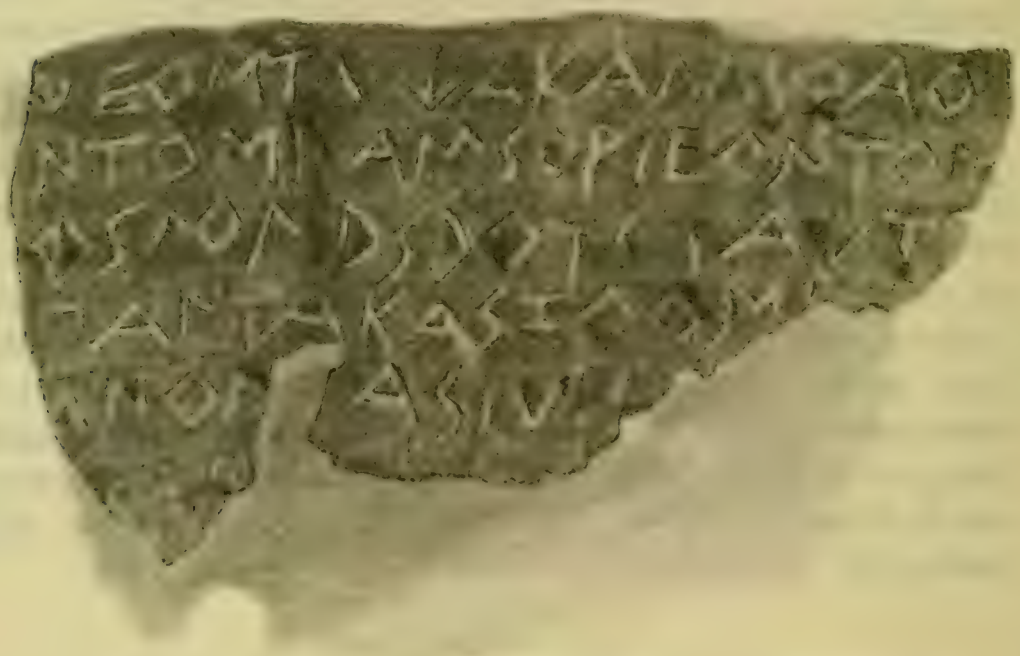
(1) LENORMANT, *La Grande Grèce*, I p. 328; NISSEN, *Landeskunde*, II 2 p. 935.

(2) La laminetta si trova nelle mani di Luigi Siciliani (a cui pervenne dopo varie peregrinazioni non ostante che lo scavo fosse eseguito in una località appartenente alla sua famiglia) che subito si rese conto dell'importanza del ritrovamento.

La laminetta ha sofferto parecchio dalle ingiurie del tempo: la parte inferiore ed un lembo di destra sono andati perduti; la parte superstite è contorta in due punti, la superficie è qua e là sgretolata.

La lettura si presenta quindi in condizioni tutt'altro che favorevoli specialmente a prima vista. La scrittura però fu tracciata da mano abilissima ed è quindi possibile determinare, con piena sicurezza, il valore di ciascuna lettera; permane semplicemente il dubbio là dove la frattura della lamina ha troncato la lettera in modo da poter essere questa completata in più di una maniera.

Le dimensioni della targa, l'altezza delle lettere, la loro forma precisa si possono ricavare dalla riproduzione da me eseguita, colla massima scrupolosità, dell'originale, a grandezza naturale. Come ho avvertito, la targa presenta in due punti due accentuati ripiegamenti in senso longitudinale: nel mio facsimile invece la lamina appare svolta, o quanto meno il gioco delle ombre, che dovrebbe determinare il rilievo, è stato di molto attenuato per permettere di rendere leggibile, nella sua interezza, tutta la superficie della laminetta.



4 La lettera che segue il M è quasi tutta asportata dalla frattura; non rimane che la parte superiore di un'asta verticale, che ci può condurre ad un I o ad un K. 6 dopo l'A o ϟ o O; — sotto il secondo A di l. 5 la parte superiore di un I o di un K.

Come si vede, ci troviamo dinanzi ad un documento scritto nell'alfabeto delle colonie Achee dell'Italia inferiore. Paleograficamente abbiamo un esemplare che ripete in tutto e per tutto, si può dire, il tipo unico di scrittura, già conosciuto dagli altri, non copiosissimi, documenti forniti dalle iscrizioni e dalle monete di queste colonie.

Per la datazione dell'epigrafe non è possibile riferirsi al dato paleografico semplicemente, mancando per questo rispetto un sicuro criterio di classifica: fissando come *terminus ante quem* il 400 circa, avremmo la possibilità di risalire assai indietro, al sesto secolo e magari più in là. Nè maggior luce ricaviamo dal dialetto dell'iscrizione: il dorico delle colonie Achee. L'esame del contenuto giuridico del documento potrà permetterci di stabilire dei termini meno lati. Veniamo ora a fissare il testo dell'iscrizione.

Θεός · Τύχα . Καλλιφάο-
ντος δαμιοργέοντος.
Φίλον δίδοτι ταὐτ[ὸ
πάντα καὶ ζοὸς [καὶ ἱκ-
5 *ανὸς [τ]ᾶι γυν[αικὶ - - -*
-ζαι - - - - - - - - - - -

Il supplemento *ἱκ]ανός* che mi pare, quanto al contenuto, certissimo, è un po' lungo: occorrerebbero quattro lettere nella lacuna e non sei *(KAIHIK)*. Il prof. De Sanctis proporrebbe di introdurre la crasi *χἰκανός* (cfr. *χἰκετεύετε* Eurip. *Hel.* 1024) avvertendo che non si violerebbero quelle leggi di *concinnitas*, che andrebbero rispettate in una formula di uso corrente (i due *καί* si dovrebbero rispondere), perchè la crasi riduce trisillabico il secondo membro *χἰκανός*, come è trisillabico il primo *καὶ ζοός*. Confesso di non sapermi decidere: in fondo non sarei alieno dal pensare che l'artefice non abbia mantenuta la simmetria nella lunghezza di alcuni righi o che magari per la tirannia dello spazio abbia raggruppato maggiormente le lettere. Ad altro supplemento non so pensare.

Per completare il contenuto della laminetta non occorreranno molte linee; il confronto con due altre di contenuto af-

fine, e la presunzione legittima che giuridicamente per dare validità all'atto, occorra la presenza dei testimoni, ci fa credere che dopo il nome della donna si debbono trovare quelli di cinque *πρόξενοι*.

Rispetto all'onomastica della nostra iscrizione sarà bene notare che il nome Callifonte, tutt'altro che infrequente nelle iscrizioni greche, specialmente attiche, è forse già documentato nella storia delle colonie Achee. Il padre del famoso medico Crotoniate Democede era precisamente un Callifonte e non è da escludere che anche questi fosse nativo di Crotone (1).

Nel corso del lavoro avrò più volte occasione di ricordare l'altra iscrizione, or ora menzionata, proveniente da una località che dista da Crimisa non molti chilometri: intendo parlare della laminetta di Petelia che, salvo un particolare, ripete il contenuto della nostra. Sarà quindi opportuno darne la trascrizione:

Θεός · Τύχα . Σάοτις δίδ-
οτι Σικαινίαι τὰν Ϝοι-
κίαν καὶ τἄλλα πάντ-
α · Δαμιοργὸς Παραγόρ-
5 *ας . Πρόξενοι Μίνκον,*
Ἁρμοξίδαμος, Ἀγάθαρ-
χυς, Ὀνάτας, Ἐπίκορ-
ος .

E veniamo finalmente a determinare il valore giuridico di questi due documenti (2). Di recente Eb. Friedrich Bruck, a

---

(1) Cfr. Herod. III, 125: *Πολυκράτης δὲ πάσης συμβουλίης ἀλογήσας ἔπλεε παρὰ τὸν Ὀροίτεα. ἅμα ἀγόμενος ἄλλους τε πολλοὺς τῶν ἑταίρων, ἐν δὲ δὴ καὶ Δημοκήδεα τὸν Καλλιφῶντος Κροτωνιήτην ἄνδρα, ἰητρόν τε ἐόντα καὶ τὴν τέχνην ἀσκέοντα ἄριστα τῶν κατ' ἑωυτόν.*

(2) Conosco un po' tutta la letteratura giuridica sull'argomento, riassunta del resto dal Bruck nel suo principale lavoro: *Die Schenkung auf den Todesfall im griechischen Recht bis zum Beginn der hellenistischen Epoche zugleich ein Beitrag zur Geschichte des Testaments.* Breslau, Marcus, 1909. Recensì il lavoro il Thalheim "BphW", 1909 878-881; rispose il Bruck in

diverse riprese, ha cercato di ribadire la sua tesi che tenderebbe ad abbassare notevolmente la data dell'istituzione giuridica del testamento, attribuita a Solone; nella disposizione Soloniana, non vedrebbe che una riforma delle precedenti istituzioni inerenti *la donazione*. Nel periodo pretestamentario il Bruck, accanto alle adozioni, non vede che *donazioni*, *donazioni mortis causa* e fra queste rientrerebbe la iscrizione di Petelia.

La tesi del Bruck, se da una parte è stata accolta con alcune riserve (1), che per altro non infirmerebbero la linea evolutiva dei due istituti giuridici paralleli da lui tracciati (donazioni *mortis causa*, *διαθήκη* senza adozione; adozioni, *διαθήκη* con adozione), ha trovato fra gli oppositori (2) il Thalheim, che attribuendo ogni valore alla formula *τὰ ἑαυτοῦ διαθέσθαι* del passo della legge Soloniana, ha negato ogni fondamento alla tesi del Bruck, e tacitamente è stata respinta dal Beauchet, che nel suo recentissimo articolo *Testamentum* del *Dictionnaire des Antiquités* di Daremberg-Saglio, mantiene immutate le conclusioni esposte nella sua grande opera sul diritto privato della Repubblica Ateniese.

Io confesso che per amore della tesi semplicista, per quanto suggestiva del Bruck, non sono disposto a forzare la interpretazione del passo fondamentale per la istituzione del testamento citato da Demostene *Adv. Steph.* II, 1133, 14 " *Ὅσοι μὴ ἐπεποίηντο, ὥστε μήτε ἀπειπεῖν μήτ' ἐπιδικάσασθαι, ὅτε Σόλων εἰσῄει τὴν ἀρχήν, τὰ ἑαυτοῦ διαθέσθαι εἶναι ὅπως ἂν ἐθέλῃ, ἂν μὴ παῖδες ὦσι γνήσιοι ἄρρενες, ἂν μὴ μανιῶν ἢ γήρως ἢ φαρμάκων ἢ νόσου ἕνεκεν ἢ γυναικὶ πειθόμενος, ὑπὸ τούτων του παρανοῶν ἢ ὑπ' ἀνάγκης ἢ ὑπὸ δεσμοῦ καταληφθείς* ". Nè qui si limita l'arbitrio del Bruck; come si è detto, la iscrizione

---

" BphW " 1909, 1166-68: e replicò il Thalheim " ib. ". — Seguì un nuovo lavoro del Bruck, *Zur Geschichte der Verfügungen von Todeswegen im altgriechischen Recht*. Breslau, Marcus, 1909, poi il Thalheim con un articolo *Testament, adoption und Schenkung auf den Todesfall* " ZSS ", XXXI Rom. Abt. 398-401 (1910) e con una recensione al secondo lavoro del Bruck in " BphW " 1910, 369-372, da ultimo ribattè il Bruck in " ZSS ", XXXII Rom. Abt. 353-359.

(1) Fra gli altri ricordo il Glotz " REG " XXIII, 102, p. 228-229, il Rabel in " ZSS " XXX Rom. Abt. 465-475.

(2) Fra questi va pure ricordato il De Sanctis in *Ἀτθίς*² 213 n. 3.

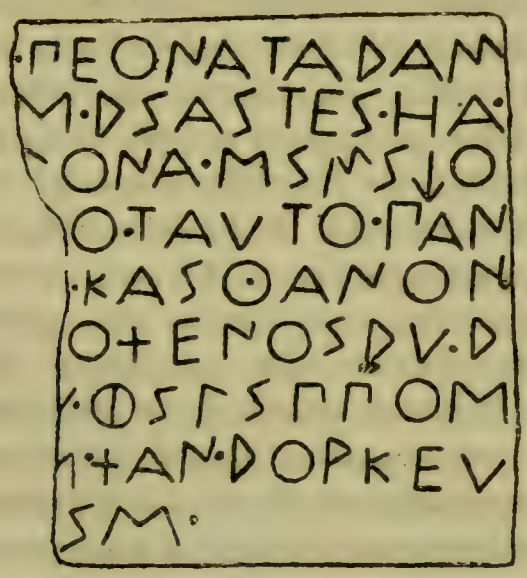
di Petelia è da lui considerata come una *donatio mortis causa* (ragionevolmente esclude l'ipotesi avanzata da qualcuno che qui si possa vedere una semplice *donazione*). Sentiamo un po' in che modo spiegherebbe per esempio la mancanza di una clausola *imprescindibile* dato il carattere che si vorrebbe attribuire alla donazione: " Unsere Inschrift ist anscheinend ein auf konsistenterem Material aufgezeichneter Auszug, der einer in Publizitätsinteresse errichteten, ausführlicheren Beurkundung des ganzen Geschäfts entnommen worden ist. Hierfür würde — abgesehen von der soeben erwähnten Bezeichnung des veräusserten Objekts — auch die Weglassung der Bestimmung sprechen, dass der Anfall des Eigentums bis zum Tode des Schenkers suspendiert sein sollte „. E ammesso pure il *compendio* sarebbe possibile omettere niente meno la formula " che il trapasso della proprietà dev'essere sospeso fino alla morte del donatore „?

Non si nasconde il Bruck, così io penso, che negato il carattere di semplice *donatio inter vivos* tutte le apparenze stiano per il testamento piuttosto che per la *donatio mortis causa*. Ma eccolo tolto dall'imbarazzo: " l'iscrizione, traduco testualmente, è dello stesso tempo, anzi è forse più antica del Codice di Gortina, che..... non conosce nè il testamento, nè il testamento con adozione, ma la donazione *mortis causa*, precisamente del marito alla moglie. Ora è difficile supporre che già in un tempo così antico la legislazione di una colonia Achea come Petelia fosse così innanzi rispetto alla legislazione dei Dori Cretesi, da aver fatto il passo importante dalla *donatio mortis causa* al testamento (per di più con una successione universale), ecc. „. Come mai il Bruck non si meraviglia che la piccola Petelia conosca la *donatio mortis causa* del marito alla moglie *senza limiti*, mentre il diritto di Gortina limita sempre più questo potere? Petelia concedendo il diritto di donare *mortis causa* illimitatamente, si noti bene, alla moglie, mostrava di avere spezzato quel vincolo gentilizio che limitava in Gortina la libera disposizione del patrimonio. In altri termini per cansare una difficoltà il Bruck incappa in un'altra non meno grave.

Per di più il Bruck ricorda come in queste regioni della Bassa Italia sia passata una corrente legislatoria per influenza dei *νόμοι* di Zelenco e Caronda. E perchè mai dovremmo ne-

gare *a priori* che, magari per alcuni determinati istituti giuridici, appunto per influenza di questa corrente, le colonie Achee dovessero trovarsi in uno stadio di evoluzione maggiore rispetto ai Dori dell'Isola di Creta? A buon conto nemmeno si è sicuri che proprio Solone in persona sia stato il creatore dell'istituto del testamento: pare anzi probabile che il legislatore ateniese non facesse che introdurre nell'Attica un'istituzione già praticata in qualche altra città greca.

Prima di concludere voglio richiamare l'attenzione sopra un documento epigrafico già edito, ma rimasto, può dirsi, completamente ignorato. Si tratta di un frammento di iscrizione arcaica, pure su bronzo, in alfabeto acheo, edita da Federico Halbherr in " Not. Scavi ", 1890, p. 361. Oggi mediante il confronto delle due iscrizioni precedenti è possibile aggiungere qualche cosa a quanto egregiamente ha detto l'editore, che a sua disposizione aveva semplicemente la laminetta di Petelia.



È nota la perizia dello Halbherr nel riprodurre le iscrizioni; quindi *a priori* debbo giudicare il suo facsimile — che ho riprodotto — in tutto e per tutto rispondente al vero. Nè deve far troppa meraviglia la incostanza nei segni di divisione tra parola e parola, non rara nelle poche epigrafi greche che hanno tali segni.

La prima difficoltà consiste nello stabilire quanta parte della lamina sia andata perduta. Parrebbe che questo dato lo si potesse ricavare dal *ΔΑΜ* di l. 1 che completato in *ΙΟΡΓΕΟΝΤΟ]Σ* farebbe supporre l'esistenza di una lacuna di nove lettere circa nei righi superiori dell'iscrizione, di dieci circa per gli altri. A confermare in certo modo questa ipotesi starebbero due fatti: nel primo rigo rimarrebbe esattamente lo spazio per il supplemento *ΘΕΟΣΤΥΧΑ* che doveva figurare in testa all'iscrizione; negli ultimi tre righi ci sarebbe posto per includere o completare i nomi coi relativi *compendi*, a significare i patronimici o i demotici, dei tre *proxenoi* per raggiungere il numero di *cinque*, quanti sono quelli che compaiono nella laminetta di Petelia.

Esaminiamo i termini di questa disposizione; il più importante è senza dubbio il *διαιτεῖ* del rigo 2, per il quale lo Halbherr raffronta *ET. M.*, p. 267, 4 *διαιτηταί · κριταὶ καὶ διαιτεῖν διακρίνειν*. Nella parola seguente *ΗΑ* lo Halbherr vedrebbe volentieri un neutro plurale: data la mia restituzione *Πε. Ὀνάτα δαμ[ιοργέοντο]ς* questo diverrebbe impossibile. Qui, secondo me, dovremmo ravvisare un articolo femminile. Dalle linee seguenti si ricava sicuramente che abbiamo a che fare con un atto giuridico in rapporto con una disposizione testamentaria. Il prof. De Sanctis vedrebbe quindi nel *διαιτεῖν* un equivalente di *διαδικάζειν*. La *διαδικασία κλήρων* (Lipsius, *Att. Recht* II, p. 382 sgg.) spettava in Atene a un tribunale eliastico presieduto dall'arconte, ma vi aveva una qualche parte l'assemblea popolare (Aristot., *Ἀθ. πολ.* 43, 4. Cfr. De Sanctis, *Ἀτθίς*², p. 122). Nulla di strano che in città ordinate oligarchicamente, come è precisamente il caso di queste colonie Achee, la *διαδικασία κλήρων* spettasse alle *βουλή*; è perciò assai probabile che nella nostra iscrizione si abbia a leggere *διαιτεῖ ἁ [βολλά]*.

Le linee seguenti vengono illuminate da un supplemento proposto dal prof. De Sanctis a l. 4: *ἐχέτ]ο ταὐτὸ πάν[τα]*. — Nell'*ονα* (*μονα* o *λονα*) bisognerà riconoscere il frammento di un nome proprio di donna (che potrebbe essere ad es. *Παραμόνα*), evidentemente la moglie di Simico. Possiamo quindi scrivere (1):

(1) Non si conosce la località di provenienza della laminetta (Cfr. Halbherr l. c.); non credo per altro si debba andar molto lontano da

Θεός· Τύχα.] Πε.'Ονάτα δαμ-
ιοργέοντο]ς. διαιτεῖ ha
βολλά· - -]όνα Σιμίχο
γυνὰ ἐχέτ]ο ταὐτῶ πάν-
5 *τα hοπόσα] καὶ θανὸν*
κατέλιπε· πρ]όξενοι Δυ.Δ-
- - - - - - - -] Φίλιππος
- - - - - - - -]ς, Ξαν. Δορκεύ-
ς - - - - - - -]ις.

Mi pare che da questa restituzione (che potrà essere dal punto di vista formale molto perfezionata) sia possibile cavare una netta disposizione giuridica. La moglie di Simico diviene la legittima erede dei beni lasciati dal marito in forza di una *διαδικασία* della *βουλή*, che probabilmente, per procedere a questa assegnazione avrà dovuto invocare le disposizioni testamentarie del defunto. Così io giustifico la presenza dei *πρόξενοι* in rapporto non colla *διαίτησις*, ma colla donazione di Simico. La mancanza di formule parallele impedisce di dare consistenza a queste restituzioni. Esse per altro rispondono sufficientemente a quel carattere di austera semplicità che abbiamo riscontrato nelle laminette di Petelia e di Crimisa. Giuridicamente con questa nuova laminetta abbiamo fatto un passo innanzi: le istituzioni testamentarie di queste colonie Achee incominciano a delinearsi. Dalla persistenza di alcune formule siamo indotti a pensare alla esistenza di vero e proprio linguaggio giuridico rispecchiante istituzioni fisse e determinate. La facoltà di disporre dei propri beni al di fuori della cerchia gentilizia, il diritto di entrare in possesso della eredità fondato sopra una *διαδικασία* della *βουλή* ci mostrano il progresso giuridico di questi istituti.

Petelia. Parrebbe anzi di ravvisare un *Πε(τηλ ....)* nel compendio che precede il nome *'Ονάτα* (cfr. la laminetta di Petelia) al primo rigo. Nell'ultimo rigo dell'iscrizione si potrebbe pure pensare al compendio *Τε]ις*. Cfr. IG. XIV, 614 e 615 (Reggio).

Se paleograficamente è possibile far risalire queste iscrizioni fino al secolo sesto non è altrettanto facile ammettere in un'epoca così remota istituzioni tanto evolute, io penso quindi che sia nel vero il prof. De Sanctis che le assegna al quinto secolo.

Riaffermata la piena forza giuridica della legge Soloniana di poter liberamente disporre dei propri beni non c'è più alcuna difficoltà per vedere nelle due donazioni di Crimisa e di Petelia due veri e propri testamenti e nell'altra un *διαθικασία κλήρων* fondata sopra un testamento. Nella laminetta di Crimisa noi per di più potremmo vedere per via della formula *ζωὸς καὶ ἱκανός* uno stretto legame di parentela colle restrizioni volute dal legislatore ateniese per assicurare la capacità giuridica del testatore.

Le origini di Taranto.

Nota della Dottoressa ADELE CORTESE.

I.

La tradizione parla concorde di abitanti che precedettero in Taranto i Laconi: Japigi-Messapi li chiama Antioco (1), e le origini ne deriva, come fa Erodoto (2), da Creta. Cretesi di ritorno dall'assedio di Camico in Sicilia avrebbero naufragato sulle coste della Japigia, ove diedero origine agli Japigi, così detti da Japige figlio di Dedalo.

La favola degli Japigi-Cretesi, si è osservato più volte, ebbe origine con molta probabilità dal raffronto tra il nome dei Messapi-Japigi e il fiume Messapio in Creta (3). Il Pais credette poter dire di più: la leggenda dell'arrivo di Minosse e dei suoi Cretesi in Sicilia sorse per effetto della colonizzazione rodio-cretese di Gela e Agrigento, la quale localizzò nell'isola i miti portati dalla madre patria; di una colonizzazione rodio-cretese nella Sallentina serberebbe ricordo la tradizione, che parla di Cretesi, i quali tuttavia non sarebbero giunti soli in Italia, ma, come in Sicilia, insieme coi Rodì, di cui rimarrebbe qualche traccia sulle coste messapiche e in generale dell'Apulia. Integrando la versione degli antichi, secondo il Pais, Rodio-cretesi avrebbero preceduto a Taranto i Laconi (4).

(1) Antioch. ap. Strab., VI, 279.

(2) Herodt., VII, 170.

(3) E. Pais, *Storia della Sicilia e della Magna Grecia*, I, p. 30 e n. 1; G. De Sanctis, *Storia dei Romani*, I, p. 165.

(4) E. Pais, op. cit., p. 29, e specialmente App. I: *I Messapi e gli Japigi*, p. 347 sgg.; e XIII: *La colonizzazione greca sulle coste dell'Adriatico*, p. 566 sgg.

Ma nè la notizia isolata di una colonia rodio-coa a mezzogiorno del Gargano (1); nè qualche omofonia geografica che il Pais porta a sostegno della sua tesi (2); nè le relazioni commerciali fra le coste della Messapia e le città della pentapoli dorica in età assai posteriore dimostrano che i Rodì abbiano realmente colonizzato l'Apulia. E a spiegare l'identificazione tra gli Japigi e i Cretesi è superfluo far giungere a Taranto coloni da Creta, tanto più che nessun indizio in questo senso ricaviamo dall'esame del dialetto tarentino. Esempi consimili frequenti inducono piuttosto a riconoscere nella connessione degli Japigi-Cretesi coi miti siciliani il resultato puro e semplice di tarde speculazioni letterarie. Ma pure ammettendo che coloni venuti dalle stesse regioni abbiano avuto efficacia nel formarsi di leggende consimili nei vari paesi occupati, è noto che al movimento colonizzatore parteciparono popolazioni greche di varie stirpi fra loro mescolate, e però, quando fosse dimostrata la presenza di un elemento cretese a Taranto, non sarebbe sufficientemente provato per questo solo un più antico strato cretese nella città, nulla vietando di credere che quell'elomento vi giungesse contemporaneamente coi Laconi, o magari dopo.

Altre congetture etimologiche posero i Messapi in relazione con la Beozia per il monte Messapio che ivi sorge e che avrebbe avuto nome dal beoto Messapo, e da lui la terra d'Otranto (3). Ancora somiglianze toponomastiche favorirono l'altra credenza, che i Messapi traessero origine dall'Etolia (4).

Alcune tradizioni assegnano agli Japigi-Messapi origine illirica (5), e il confronto dei nomi di persone e di luoghi, e lo

(1) Elpie, v. Strab., XIV, 654. La notizia ha valore assai dubbio, come l'altra, riferita contemporaneamente, di una Partenope colonia di Rodi nella Campania; v. Beloch, *Campanien*, *Ergänzungen*, p. 440.

(2) Il Pais (op. cit., p. 569) crede rodia la città di Rudiae, *Ῥοδίαι*, che è detta da Strabone *πόλις Ἑλληνίς*. Ma l'epiteto si lascia spiegare altrimenti.

(3) Strab., IX, 405; cfr. Steph. Byz. s. v. *Μεσσάπιον*.

(4) Brindisi sarebbe stata fondata da Etoli compagni di Diomede (Iust., XII, 2, 5 sgg.). Nelle coste dell'Etolia esisteva un lago *Οὐρία* (Strab., X, 459); la forma è usata da Strabone anche per la messapica Hyria.

(5) Sui Dauni v. Paul. *Ep.*, p. 69 M. s. v. Daunia; sui Peucezi v. Plin., *N. H.* III, 102; per i Sallentini v. Varr., ap. Pron. *ad Verg. Ecl.*, VI, 31, se-

studio della lingua delle iscrizioni messapiche danno a queste notizie fondamento di verità (1).

Origini illiriche sono attribuite a un altro popolo della penisola, i Veneti; e però l'ipotesi che gli Japigi fossero discesi per via di terra attraverso l'Italia centrale, ove per l'Umbria è attestata l'esistenza di Sallentini e di Japidi, fino nell'Apulia, in cui essi rappresenterebbero il più antico strato etnografico della regione, sino all'arrivo dei coloni greci e prima dell'invasione osca (2).

Ma i dati linguistici, in accordo con la tradizione, dimostrano che gli Japigi rappresentano una invasione di popoli illirici attraverso il canale d'Otranto, dall'opposta riva dell'Adriatico. Difatti la lingua delle iscrizioni messapiche presenta col moderno dialetto dell'Albania, che è l'ultima fase di un antico dialetto illirico meridionale, molto maggiori affinità che con la lingua delle iscrizioni venete (3). Si aggiunge il criterio geografico, per la breve distanza fra le due coste dell'Adriatico. Non

---

condo il quale la gens Sallentina era formata da genti venute " tribus e locis, Creta Illyrico Italia „; cfr. Fest., p. 329, M. Nicandro ap. Ant. Lib., *Metam.* 31, deriva gli Japigi da Licaone, il noto eroe Arcade (cfr. Pherecyd. ap. Dion. Hal., I, 13 = fr. 85 in Müller, I, p. 92), però aggiunge: *ἦν δὲ τὸ πλέον αὐτοῖς τῆς στρατιᾶς ἔποικον Ἰλλυριοὶ Μεσσάπιοι*; e chiama Illiri i sudditi di Dauno (ap. Anton. Lib., 37).

(1) Il materiale toponomastico e onomastico trovasi raccolto in Helbig, *Studien über die älteste italische Geschichte*, in " Hermes „, XI (1876), p. 257, 290; Deecke, in " Rhein. Museum „, XXXVI (1881), p. 576 sgg., Kiepert, *Lehrbuch d. alt. Geograph.*, p. 450; Pais, op. cit., p. 358-362; Kretschmer, *Einleitung in die Geschichte der griech. Sprache* (Göttingen, 1896), p. 244 sgg.; Schulze, *Zur Gesch. latein. Eigennamen*, in " Abhandl. der königl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen „, Ph. H. Kl., 1904, p. 29 sgg.; Hirt, *Die sprachliche Stellung des Illyrischen* in " Festschr. für H. Kiepert „, p. 179-188, e *Die Indogermanen*, II, 607-609; Ribezzo, *La lingua degli antichi Messapi*, Napoli, 1907, p. 6 sgg.; Von Scala, *Umrisse der ältesten Geschichte Europas* (" Sonderabdruck aus der Universitätschr. „, Innsbruck, 1907-1908) e *Die Anfänge geschichtlichen Lebens in Italien*, in " Hist. Zeitschr. „ 108, p. 1 sgg. (1912). Per le iscrizioni v. Droop, *Messapian Inscriptions*, in " Annual of the British School at Athens „, XII, p. 137 sgg.

(2) E. Pais, op. cit., p. 368 sgg.

(3) V. Helbig, " Bull. de l'Inst. „, 1882, p. 86 segg.; Pauli, *Die Veneter*, *Altital. Forschungen*, III *Vorgriech. Inschrift von Lemnos*, ibid., VI, 2, p. 200;

lungi dalla costa apula popolazioni illiriche, i Liburni, possedevano, secondo Eforo, Corcira, prima dell'arrivo del corinzio Chersicrate (1).

La somiglianza fra il nome degli Japigi e degli Japodi veneti e simili omofonie non implicano naturalmente la derivazione dell'un popolo dall'altro, poichè abbondano gli esempi di nomi consimili in regioni abitate da stirpi affini, se pure giunte in tempi e per vie diverse. E perciò cade l'argomento addotto dal Pais a sostegno della sua tesi, e cioè l'assurdo storico che una popolazione formatasi nel caldo e snervante suolo di Puglia sia risalita a occupare un paese vastissimo, l'Umbria, la Venezia e oltre, fino alle rive della Sava. Se non è dimostrabile che gli Apuli siano venuti dal nord, non ne segue che le popolazioni illiriche del nord e magari del centro d'Italia siano venute dal sud. Degli Apuli dice la tradizione che essi giunsero fino al Gargano (2). Se furono essi a impedire, come è verosimile e probabile, lo sviluppo della colonizzazione ellenica sulle coste dell'Apulia durante i sec. VIII, VII, VI, e forse, aggiungiamo, la colonizzazione greca nel golfo di Taranto e più al sud prima dell'VIII sec., nulla si oppone a che riconosciamo negli Japigi un popolo venuto dal mare piuttosto che un popolo terrestre disceso dal nord, una gente emula dei Greci nelle imprese coloniali piuttosto che i precursori dei Sanniti e dei Romani. Parrebbe che i Messapi si siano addentrati nel paese respintivi dall'arrivo dei Greci. A ogni modo una emigrazione iapigia per via di terra non è richiesta affatto da quanto sappiamo dell'estensione, del carattere, della storia di quel popolo.

All'ipotesi che gli Japigi fossero discesi nell'Apulia per via di terra giovò la distinzione fatta da alcuni moderni fra gli Japigi e i Messapi: questi ultimi rappresenterebbero stirpi greche venute dalla Grecia settentrionale e centrale, conforme-

Kretschmer, *Einleitung in die Geschichte der griech. Sprache* (Göttingen, 1896), p. 266 sgg.; Hirt, *Die Indogermanen*, 1905-7, p. 151, 604-607. Per le iscrizioni venete v. Cordenons, *Silloge delle iscrizioni venetiche*, 1911. Per l'albanese v. Bartoli, *Das Dalmatische*, in " Schriften der Balkankommission ", Linguistische Abt., IV, § 109, 111, 121, 136 sgg.

(1) Ap. Strab., VI, 269.

(2) Ps. Scyl., 14; cfr. Dionys. Perieg., 379 sgg.

mente alla tradizione che i Messapi fa giungere per via di mare. Ma la tradizione considera come un solo popolo tanto gli Japigi che i Messapi (1); furono dunque stirpi illiriche quelle che i Greci chiamavano con voce greca Messapi, e però tanto il nome che i raffronti toponomastici fatti in base ad esso nulla provano a favore della grecità di quel popolo (2). Così resta escluso che la tradizione serbi ricordo, nei Messapi, di genti greche venute in Italia prima della fine dell'VIII sec., rimanendo aperto il campo a discutere con quale gente greca i Messapi siano venuti prima a contatto (3).

Tentiamo ora di determinare l'epoca cui fare risalire l'invasione messapica. Gli Japigi-Messapi adottarono l'alfabeto dei coloni greci, abbiamo dunque un *terminus ante quem* per fissare la data della loro immigrazione: essi giunsero prima del sec. VIII. Ma non abbiamo ragione di porre una data molto alta. Il materiale archeologico scoperto presso Taranto non prova in modo assoluto che la civiltà dei metalli sia stata introdotta nel paese in epoca molto anteriore alla colonizzazione ellenica nell'VIII secolo. Le scarsissime notizie che abbiamo degli Japigi non sembrano dimostrare che il loro arrivo abbia preceduto di molti secoli i Greci. In età storica appaiono ristretti fra il Gargano, il Capo di S. Maria di Leuca, le foci del Bradano; che si fossero spinti prima più a mezzogiorno fino ai luoghi dove sorse Crotone dice la tradizione, ed è reso per lo

---

(1) Herod., l. c.; Thuc., VII, 33.

(2) Messapio monte della Beozia (Strab., IX, 405; Steph. Byz. s. v. *Μεσσάπιον*); tribù di Messapi nella Locride (Thuc., III, 101); fiume Messapio a Creta (Ps. Scyl., 47). Un Poseidone Messapio era venerato a Sparta (*Μεσσαπεὺς*, Theop. ap. Steph. Byz. s. v. *Μεσσαπέαι*; *Μεσσαπέυς*, Paus., III, 20, 3).

(3) Di una emigrazione dalle coste dell'Epiro serba traccia il nome dei Coni nel golfo di Taranto (Antioch. ap. Strab., VI, 255), che ritroviamo nei Caoni epiroti. La vicinanza dei luoghi rende improbabile che si tratti di omonimia casuale. V. Beloch, *Griech. Gesch.*, I², p. 1ª, p. 234, e la memoria di V. Costanzi, *Gli Enotri Itali*, nei " Rend. dell'Accad. dei Lincei ", 1913, p. 4 sgg. Ma per i Caoni rimane il dubbio se si tratti di un popolo greco o piuttosto di una gente illirica che non vada perciò distinta dai nostri Japigi. A ogni modo l'indizio è troppo tenue perchè si possa parlare di un più antico strato di Greci settentrionali sulle coste italiche.

meno probabile dal fatto che tre promontori del territorio crotoniate serbarono il nome degli Japigi (1). L'arrivo dei Greci dovè porre un argine all'estendersi delle stirpi illiriche. Tuttavia non trovare a occidente di Taranto maggiori tracce di un popolo che dalla penisola balcanica dovè giungere in possesso di una civiltà superiore a quella degli indigeni, è forse un indizio che il loro dominio non ebbe in quella regione lunga durata. D'altronde non è probabile che fra la colonizzazione più antica della costa apula e i progressi verso il sud sia corso un lungo intervallo.

È necessario ammettere a priori che nell'epoca relativamente tarda in cui giunsero gli Japigi dal mare, la piana e ferace terra di Puglia fosse da tempo abitata. E del resto non mancano dati archeologici per stabilire che il paese fu abitato fino dall'età neolitica. Appunto dai ritrovamenti archeologici parve anzi giungere improvvisa luce sui primitivi abitanti della regione. Gli scavi fatti in Taranto nel 1899-1900 a nord della stazione ferroviaria allo scoglio del Tonno parvero condurre alla scoperta di un abitato terramaricolo perfettamente analogo alle terramare della bassa valle padana; e però restava aperta la via ad una emigrazione lungo le coste dell'Adriatico del popolo terramaricolo. Tuttavia, restandoci una relazione assai particolareggiata degli scavi eseguiti (2), in base ad essa, e con il consenso di insigni cultori di preistoria, non solo non restiamo convinti che si tratti di una terramara, ma si forma in noi il convincimento che non possa trattarsi di una terramara, mancando punti essenziali di contatto tra gli abitati terramaricoli e la stazione di Taranto (3). In questa tuttavia il materiale fittile ed eneo venuto in luce presenta notevoli somiglianze coi bronzi e la ceramica delle terramare. Si noti che il materiale tarentino è perfettamente analogo ai resti dell'età del bronzo

(1) Eph. ap. Strab., VI, 262; Strab., VI, 261.

(2) Quagliati, *Not. degli scavi*, 1900, p. 411 sgg.

(3) Foglia, *Osservazioni intorno alla pretesa terramara di Taranto*, " Atti dell'Accad. d'arch. lett. e b. Arti di Napoli ", XXIII, 2, 1905, p. 65 sgg., ove è riportata l'opinione del Montelius, p. 392, n. 1. V. pure le sobrie osservazioni del De Sanctis, op. cit., I, p. 134, n. 2.

della intera regione pugliese, dal Gargano al Capo di Leuca (1); tutta questa suppellettile, se da un lato presenta delle affinità con la ceramica terramaricola, d'altro lato se ne differenzia per la tecnica più progredita e una decorazione sconosciuta alle palafitte e terramare dell'Italia del Nord, e più completi riscontri trova nella ceramica delle terre balcaniche (2). È generalmente ammesso che la tecnica vascolare terramaricola fu introdotta in Italia dai Balcani per i varchi delle Alpi Giulie; ora, poichè la civiltà enea delle Puglie trova più strette analogie nei Balcani che nell'Italia del Nord, volendo pure attribuirle carattere etnico, il che è lecito fare nel nostro caso per il netto distacco fra lo strato eneo e il precedente neolitico, ne segue che genti balcaniche dovettero giungere nelle Puglie direttamente, traverso l'Adriatico (3).

Tentiamo ora di rispondere alla questione, quale fu il popolo che immigrò nelle Puglie dai Balcani in possesso di una civiltà affine alla terramaricola. In tali condizioni, a quanto pare, giunsero nell'Italia del Nord popolazioni illiriche; difatti

---

(1) Per le comparazioni, diligenti e accurate, v. M. Gervasio, *I Dolmen e la civiltà del bronzo nelle Puglie*, Bari, 1913, specialmente cap. IV, pagina 151 sgg. V. pure Peet, *The stone and bronze ages in Italy and Sicily*, 1909, p 400 sgg.; Iatta, *La Puglia preistorica*, Bari, 1914.

(2) Per le relazioni sugli scavi della Bosnia v. Truhelka, Woldřich, Maly, *Der vorgeschichtliche Pfahlbau im Savebette bei Donja Dolina*, in " Wissensch. Mitteil. aus Bosnien und der Herzegovina ", IX, Wien, 1904, p. 3-175; Truhelka, *Der Pfahlbau von Donja Dolina*, nelle cit. " Mitteilungen ", XI, 1909, p. 3 28, e *Prähistorische Funde aus Bosnien*, " ibid. ", p. 28-75; Curčic, *Der prähistorische Pfahlbau der Bronzezeit in Ripač bei Rihac' in Bosnien*, " ibid. ", 1912, p. 3-12; Nopcsa, *Beiträge zur Vorgesch. und Ethnologie Nordalbaniens*, " ibid. ", 1912, p. 168-254.

(3) A tale conseguenza non potendo sottrarsi gli archeologi, ammettono generalmente il doppio fenomeno, una corrente transadriatica la quale avrebbe influito sulla corrente nordica (cfr. Peet, *The early settlements at Coppa Nevigata and the preistory of the Adriatic*, in " Liverpool Annals of Archaeology and Anthropology ", vol. III, 1910, p. 132; M. Gervasio, op. cit., p. 239, 254). Che i terramaricoli abbiano avuto scambi attivi con gli abitanti delle Puglie in sè è verosimile, ed è reso probabile della presenza di speciali strumenti terramaricoli nella regione pugliese (come l'ascia ad alette), ma ogni base manca per affermare che i terramaricoli rappresentino nelle Puglie uno strato etnografico.

nel Veneto, e cioè in una regione ove Illiri furono preceduti dal popolo delle terremare, manca una stratificazione archeologica che contraddistingua gli Illiri (1). Nelle Puglie dagli scavi eseguiti sembra potersi ricavare che la prima età del ferro procedè direttamente dall'età del bronzo (2). A Bari lo strato eneo è immediatamente sottostante alla ceramica apulo-geometrica ascritta agli Japigi, non anteriore, secondo la cronologia più alta, al sec. VIII (3), quindi posteriore all'immigrazione illirica. Per tutto ciò si è detto che manca nelle Puglie uno strato caratterizzante gli Illiri al loro apparire. Ma poichè di una civiltà affine a quella dell'età enea nelle Puglie troviamo traccia nella penisola balcanica, e, in Italia, presso un popolo della stirpe medesima che gli Japigi, siamo pure indotti a credere che la traccia della immigrazione illirica nelle Puglie sia da ricercarsi appunto nello strato dell'età del bronzo (4), che si protrasse, gradatamente evolvendosi, sino all'VIII sec.

In base agli scavi eseguiti fino ad oggi non pare quindi dimostrato che gli Japigi giungessero nell'Apulia quando era già in possesso della civiltà dei metalli. In mancanza di dati archeologici non soccorre meglio la toponomastica, poichè per i nomi italici che si ritrovano nell'Apulia accanto ai nomi iapigi vi è sempre la possibilità che non siano anteriori alla invasione osca (5). Quanto alla tradizione, essa afferma che gli Japigi abitavano una terra precedentemente posseduta da Ausoni. Nicandro narra che i trigemini Japige Dauno Peucezio, figli del-

(1) De Sanctis, op. cit., I, p. 158.

(2) Quagliati, " Bull. di Paletn. ", XXXVI, 1910, p. 38 sgg.; M. Gervasio, op. cit., p. 106 sgg.

(3) La cronologia del Furtwaengler, *Beschreib. der Vasensamml. im Antiquarium zu Berlin*, 1885, p. 248-275; cfr. Pottier, *Catalogue des vases antiques du Louvre*, Paris, 1899, II, p. 372; Walters, *Catalogue of vases in British Museum*, I, parte II, Londra, 1912, p. 264.

(4) Queste stesse considerazioni contrastano all'ipotesi (per cui vedi M. Mayer, *Zur Topographie und Urgeschichte Apuliens*, in " Philologus ", LXV, 1906, p. 530 sgg.) che sia invece da attribuirsi agli Japigi un gruppo di antichità apule della prima età del ferro, i così detti *cumuli* delle Murge e di Modugno, allo stato delle nostre conoscenze privo di rapporti col resto della civiltà apula, e in genere dei paesi intorno all'Adriatico.

(5) Il materiale toponomastico della regione apula è raccolto in E. Pais, op. cit., p. 375-380.

l'arcade Licaone, si divisero la regione pugliese, dopochè ne ebbero scacciati gli Ausoni (1). Secondo Ellanico furono gli Japigi a spingere gli Ausoni nella Sicilia (2). Sono induzioni disgraziatamente incontrollabili. All'alba della storia popolazioni italiche occupano la Campania e la Lucania: certo può sedurre l'ipotesi che alla prima invasione italica non rimanesse estranea una regione come la terra d'Otranto e la provincia di Bari, priva di barriere naturali, ferace, aperta agli scambi marittimi pei quali doveva farsi sentire allora il bisogno anche dalle stirpi italiche. Queste avrebbero perduto terreno di fronte all'arrivo dei Messapi. Ma siamo così poco informati sull'età in cui avvennero tali stanziamenti di popoli, che nessuna ipotesi mi pare abbia in proposito sufficiente fondamento di probabilità.

Gli scavi eseguiti a Taranto allo Scoglio del Tonno portarono alla scoperta, oltre che della suppellettile di cui ho già parlato, creduta terramaricola, di notevolissimi resti di ceramica micenea. Ai Messapi ne attribuisce l'appartenenza il De Sanctis, poichè essi traevano l'origine da una terra che fu pervasa a un certo momento dagli influssi della civiltà micenea (3); ma ho cercato poc'anzi di dimostrare che l'immigrazione illirica nell'Apulia è caratterizzata dal materiale creduto terramaricolo; per conseguenza i Messapi avrebbero subìto gli influssi micenei quando si erano stanziati già nell'Apulia, circa l'epoca in cui gli influssi medesimi agivano sulle popolazioni sicule. Tuttavia la nazionalità dei Messapi, la loro provenienza dai Balcani, quindi il carattere particolare dei loro rapporti con le popolazioni balcaniche, intervengono per sempre a spiegare come il fenomeno miceneo assuma a Taranto un aspetto così notevole,

---

(1) Ap. Anton. Lib., *Metam.*, 31.

(2) Ap. Dion. Hal., I, 22, = fr. 53 in Müller, I, p. 52.

(3) De Sanctis, op. cit., I, p. 163, ove per altro si attribuiscono allo stesso periodo, in base alla prima relazione degli scavi (Mayer, *Le stazioni preistoriche di Molfetta*, Bari, 1904), le terrecotte dipinte di Molfetta, pertinenti invece all'età neolitica: v. Peet, " Liverpool Annals „, II, 1909, p. 84; M. Gervasio, op. cit., p. 183. Per la civiltà micenea nell'Illiria v. S. Reinach, " Anthropologie „, 1896, p. 270; 1897, 536; Hoernes, *Urgeschichte des Menschen*, p. 229.

a differenza che nella Sicilia. La popolazione illirica della regione tarentina offrì per così dire un ambiente più favorevole alla diffusione della nuova civiltà. Nè la mancanza di uno strato archeologico intermedio fra la suppellettile creduta terramaricola e la micenea mi sembra nuocere alla mia tesi, chè non mi pare se ne debba inferire una grave difficoltà cronologica. Così per l'Attica gli scavi non ci fanno davvero assistere a un graduale passaggio fra due tipi diversi di civiltà, che, nettamente distinti, tuttavia direttamente si sovrappongono.

Però non ritengo che i Messapi ricevessero la civiltà micenea dai loro connazionali rimasti di là dell'Adriatico. Mentre par certo che furono i Greci a portare la civiltà micenea sulle coste della Sicilia prima della colonizzazione dell'VIII secolo, è assai probabile che essi toccassero anche le coste del golfo tarentino, come ci aspetteremmo per motivi geografici: difatti la navigazione di cabotaggio portava dalla Grecia prima in Italia che in Sicilia. Forse qualche indizio in proposito è lecito ricavarlo dal dialetto di Taranto (1): trattasi, come è noto, di un dialetto laconico; e tuttavia si riscontrano in esso sodravvivenze di un dialetto non dorico, che non hanno le corrispondenti nella lingua parlata a Sparta (2), benchè a Sparta ricorrano pure fenomeni linguistici predori. E perciò sorse l'ipotesi che i Tarentini non provenissero veramente da Sparta, e quindi nessun indizio si potesse dedurre dal confronto dei dialetti. Tuttavia per i Tarentini è provato ch'essi vennero da Sparta: ne sono argomento irrefutabile la caratteristica istituzione degli efori che ritroviamo in Eraclea, colonia di Taranto (3), tracce delle tribù di Sparta che ricorrono anche a Taranto (4)

(1) Sul dialetto tarentino v. Thumb, *Handb. der Griech. Dial.*, 1909, p. 92-96. La nostra conoscenza del dialetto di Taranto è basata, come è noto, principalmente sulla iscrizione di Eraclea, nota sotto il nome di tavole di Eraclea (*I. Sic. It.*, 645).

(2) Per Taranto *ζοθαρός* e *τοφιών* (Thumb, *Hand.*, l. c.) e gli infiniti in *εν* (cfr. Thumb. " N. Jahrb. „, XV, 398). Nel dialetto di Eraclea si conserva il *σ* intervocalico e *κατὰ* + consonante. Cfr. Solmsen, " Rh. Mus. „, 1907, p. 334 sgg.; Thumb, *Handb.*, 94

(3) *I. Sic. It.*, 645.

(4) Strab., VI, 250.

e la tradizione concorde. Però sembra accertato che i fenomeni arcadici osservati nel dialetto laconico si produssero dopo la deduzione della colonia di Taranto, e che i fenomeni non dorici del dialetto tarentino hanno origine non laconica. Infiltrazioni non laconiche poterono aver luogo anche al tempo della deduzione e dopo, ma se riconnettiamo questo indizio con la importazione di ceramica micenea a Taranto intorno al primo millennio avanti l'êra nostra, e abbiamo presente il criterio geografico, che una più antica colonizzazione delle coste italiche dovesse partire dall'occidente del mondo ellenico, noi giungiamo alla completa intelligenza del fenomeno. Intorno al mille con molta probabilità popolazioni arcadiche restavano nel Peloponneso occidentale e lentamente cedevano ai Dori; l'invasione di questi ultimi provocò l'esodo degli Arcadi verso l'occidente, e ne abbiamo forse una traccia nei dialetti di Zante, Itaca, Corfù e nel tarentino, con perfetta analogia con quanto era avvenuto alcuni secoli prima per il Peloponneso orientale: quivi mentre i Dori si sostituivano ai più antichi abitanti arcadi, questi emigravano fino a Cipro e alla Pamfilia.

Vi è forse un altro indizio in questo senso. Le colonie greche del golfo di Taranto, le più vicine dunque alla madre patria, sono tutte di origine peloponnesiaca: i Calcidesi, benchè la tradizione affermi che furono essi i primi a colonizzare in occidente, si stabilirono sulle coste più lontane della Sicilia e della Campania. Dobbiamo immaginare che all'aprirsi della colonizzazione greca in occidente gli abitanti del Peloponneso si trovassero in una condizione di favore, per così dire, rispetto agli altri Greci; e le relazioni svoltesi nell'età precedente fra il Peloponneso e le coste del golfo di Taranto renderebbero perfettamente ragione del fenomeno.

II.

La tradizione afferma che Taranto fu colonia di Sparta; dai moderni la notizia è stata accolta subordinatamente a tutto il complesso di tradizioni relative alla più antica storia greca, e perciò variamente interpretata.

Da alcune circostanze riferite dai nostri autori parrebbe che i Parteni coloni di Taranto provenissero da Amicle (1), ma Amicle secondo un'antica versione da poco era entrata a far parte dello stato spartano (2) e perciò era sempre achea, e Achei, non Dori, dovettero essere gli emigrati che si recarono in Occidente a fondare Taranto. Come andassero le cose, il Geffcken spiega nella seguente maniera: gli Achei recentemente sottomessi da Sparta si ribellano alla nuova signoria; Sparta, ch'è impegnata contro i Messeni, viene a patti coi ribelli Laconi e permette il loro esodo verso l'Occidente. Taranto non fu dunque colonia dorica (3).

Per noi viceversa è dimostrato che Taranto fu proprio una colonia dorica: testimone inoppugnabile la lingua, che è, come abbiamo veduto, un dialetto dorico ancora più schietto di quello parlato nella Laconia in epoca storica, dopochè ebbe subìto influssi stranieri. È dunque sicuro che al momento della deduzione della colonia il territorio da cui provenivano i coloni era perfettamente dorizzato.

A tale conclusione hanno trovato modo di sottrarsi i moderni seguendo una via di mezzo: Taranto fu colonia dorica, ma i coloni dori furono immediatamente preceduti a Taranto da Laconi predori, nella stessa guisa che Achei non dori precedettero gli Spartani nel dominio della Laconia. E poichè la tradizione non parla che di una colonia mandata da Sparta, tutto il racconto deve essere una contaminazione di tradizioni varie, riferentisi le une alla colonia dorica, le altre alla colonia più antica (4). La tesi, con qualche variante, fu sostenuta dallo Studniczka, di cui mi farò a esaminare gli argomenti.

(1) La rivoluzione dei Parteni doveva scoppiare ad Amicle durante le Jacinzie; v. Antioch. ap. Strab., VI, 278. Il culto di Apollo Jacinzio a Taranto è attestato da Polibio, VIII, 30, 2. Falanto, l'ecista di Taranto, è detto Amicleo, Sil. Ital., 7, 665 (*Amyclaei stirps impacata Phalanti*); cfr. Dionys., *Perieg.*, 377.

(2) Paus., II[1], 2, 6, 7 (cfr. *Schol. Pind. Isthm.*, VII, 18), secondo cui Amicle fu sottomessa da Teleclo. Sul valore della notizia v. Beloch, *Griech. Geschichte*, I[2], 1, p. 205.

(3) Geffcken, *Die Gründung von Tarent*, in " Jahrb. für Philol. ", 1893, p. 177 sgg.

(4) Sui vari tentativi per spiegare le origini di Taranto v. per es. Lorentz, *De origine veterum Tarentinorum*, Berlin, 1827, p. 38 sgg.; Gilbert,

I Parteni tarentini, benchè ci vengano presentati come Spartani, non sono però, stando alla tradizione, cittadini di Sparta con pieni diritti. Antioco li dice figli di Spartani discesi a condizione di servi per non avere partecipato alla guerra messenica; Eforo li dà come nati durante la guerra da accoppiamenti illegittimi. In altra colonia greca, Tera, i coloni sono detti Mini dalla tradizione, e mescolati con la storia di Sparta, fatti venire dalla Laconia. I Mini rappresentano uno strato della popolazione predorica; d'altronde sappiamo che a Tera fu dedotta una colonia spartana: se la leggenda fa venire dalla Laconia i Mini, è perchè essa contamina i racconti della colonizzazione dei Mini e di quella più recente degli Spartani. Deve essere avvenuto per Taranto qualche cosa di simile; ecco come i Parteni sono fatti venire da Sparta mentre non sembra ne siano stati essi i coloni; difatti le varie versioni sulla loro origine e disparità sociale di fronte al resto degli Spartani troverebbero la loro spiegazione nella diversità della stirpe (1).

Fin qui lo Studniczka, ma egli non prova poi sufficientemente che i Mini a Tera siano una popolazione storica, nè mi attenterò di dimostrarlo io. I Mini che secondo Erodoto andarono nella Laconia e di lì a Tera, erano i discendenti degli Argonauti (2); se i coloni di Tera, di origine, sappiamo, spartana, si consideravano discendenti dei Mini, vale a dire degli Argonauti, è chiaro che si tratta di genealogie favolose, e la popolazione prespartana di Tera non c'entra nè punto nè poco (3). Quanto alle leggende sulla nascita dei Parteni, è evidente che a noi manca ogni motivo per inferirne l'origine predorica dei Parteni stessi.

Un altro argomento a sostegno di una colonizzazione predorica a Taranto si volle vedere nel culto di Falanto. È merito

---

Studien zur altspart. Geschichte, Göttingen, 1872, p. 180 sgg.; Döhle, *Geschichte Tarents*, Strassburg, 1877 (Progr.), p. 4 sgg.; Busolt, *Gr. Gesch.*, I², p. 405; E. Pais, *Storia d. Sicilia*, I, p. 609; Byvanck, *De magnae Graeciae hist. antiq.*, 1912, p. 63 sgg.

(1) Studniczka, *Kyrene*, Leipzig, 1890, p. 176 sgg.

(2) Herodt., IV, 145.

(3) Ed. Meyer, *Gesch. d. Alterth.*, II, p. 195 (§ 26). Sui Mini, popolo mitico, v. Beloch, *Griech. Gesch.*, I², p. 2ª, p. 63.

del Döhle, seguito dallo Studniczka, avere dimostrato che Falanto, l'ecista della colonia spartana, rappresenta in origine un culto del mare (1). Ma lo Studniczka vorrebbe dimostrare pure che il culto di Falanto è anteriore alla venuta dei Laconi perchè lo ritroviamo a Brindisi, città dei Messapi, i quali abitarono Taranto prima dei Greci, e furono nemici acerrimi dei coloni tarentini di origine spartana.

Ora nulla esclude che i Messapi abbiano derivato un culto dai loro vicini, benchè nemici. Per citare un esempio, i Cartaginesi nemici dei Sicelioti non introdussero a Cartagine nel IV sec. il culto siracusano di Demetra? E a prescindere dai rapporti fra Tarentini e Messapi, tanto gli uni che gli altri possono aver ricevuto il culto di Falanto da genti greche che non ebbero nulla a vedere con la fondazione di Taranto e di Brindisi. Insomma a noi manca ogni base per affermare che il culto di Falanto nell'Apulia, anche se non fu spartano in origine, sia più antico della colonia spartana.

Un'altra conferma dell'origine predorica di Taranto venne parallelamente allo Studniczka dall'avere attribuito al medesimo personaggio mitico origine achea. Un Falanto troviamo in Arcadia, quindi in territorio non dorico (2), un altro Falanto in Acaia, rocca di Jaliso a Rodi (3); trattasi dunque di un culto non dorico, acheo: come Falanto, furono Achei i suoi Parteni. A questo punto lo Studniczka ricorre alla tradizione: secondo Eforo i Parteni si imbatterono in Achei, insieme con i quali combatterono contro gli indigeni (4). E con gli Achei andrebbero identificati i Cretesi di Antioco; tanto vero che di Cretesi si parla anche per Brindisi (5), la quale accolse il culto acheo di Falanto.

(1) Döhle, op. cit., p. 13 sgg.; Studniczka, op. cit., p. 185 sgg. V. pure l'art. Phalanthos nel dizionario mitologico del Roscher (Ilberg).

(2) Paus., VIII, 35, 9 parla di Falanto città in Arcadia sul *Φάλανθον ὄρος*, fra Trikolonoi e Methydrion; cfr. Steph. Byz. s. v. *Φάλανθος*.

(3) V. Ergias Rhodius e Polyz. Rhod. ap. Athen., VIII, p. 360 = F. H. G., IV, p. 405, 481.

(4) Eph. ap. Strab., VI, 280.

(5) V. Strab., VI, 282, e per il culto di Falanto a Brindisi, Strab., ibid.; cfr. Just., III, 4, 12.

Quanto alla patria di origine di questi Achei, lo Studniczka aveva già infirmato, si è veduto, la provenienza dei Parteni della Laconia; in base ad alcune circostanze di luogo contenute nel racconto leggendario li derivò invece dall'Acaia, madre delle colonie achee d'Italia. Ma dall'Acaia non può essere venuto un culto che non fosse dorico, per l'eccellente ragione che i coloni venuti in Italia dall'Acaia vi portarono un dialetto dorico (1). E se gli Achei sono Dori e Falanto è un culto acheo, ne segue ch'esso è un culto dorico, se non originariamente, almeno divenuto tale; e come mai un culto dorico testimonierebbe di per sè una colonizzazione prespartana?

Per concludere: nulla dimostra che il culto di Falanto non appartenga originariamente ai coloni spartani; quando ciò fosse dimostrato, non proverebbe tuttavia l'esistenza di una colonia prespartana in Taranto.

III.

Da quanto ho esposto credo risulti sufficientemente dimostrato che i racconti delle origini di Taranto non contengono nessun accenno a quei Greci predori, i quali, come per altra via credo aver dimostrato, effettivamente abitarono la regione tarentina.

Sulla fondazione della colonia spartana abbiamo due versioni principali, di Antioco siracusano e di Eforo, conservateci entrambe da Strabone.

Secondo Antioco (2), scoppiata la guerra messenica, quei Lacedemoni che non vi presero parte furono dichiarati servi e detti eloti, e i loro figliuoli, nati durante la guerra, furono chiamati Parteni e tenuti in dispregio. Congiurarono allora i Parteni contro i cittadini, e fu stabilito che la ribellione dovesse scoppiare, a un dato segnale, durante le feste iacinzie nel-

---

(1) Che la tradizione degli antichi sugli Achei predori è del tutto inammissibile dimostra il Beloch, " Rh. Mus. „, 1890, p. 555 sgg.; " Hist. Zeitschr. „, 1897, p. 207 sgg.; " Ausonia „, IV, 2 (origini cretesi); *Gr. Geschichte*, I², specialmente, p. 2ª, p. 85, p. 92 sgg.

(2) Antioch. ap. Strab., VI, 278.

l'Amicleo. La congiura viene scoperta; i partecipi alcuni fuggono, altri chiedono perdono, e, dietro la risposta dell'oracolo, Falanto e i Parteni muovono alla volta di Taranto. Quivi sono accolti da Barbari e da Cretesi, reduci dalla spedizione di Minosse in Sicilia, e dalla tempesta gettati sulle coste dell'Apulia, ove diedero origine agli Japigi (1).

Secondo Eforo (2) nel 10° anno della guerra i Lacedemoni, che avevano giurato di tornare in patria solo dopo avere presa Messene, mandarono a Sparta i più giovani tra i combattenti, quelli che partiti prima dell'età adulta non avevano pronunciato il giuramento, affinchè avessero prole dalle vergini spartane. I nati furono perciò detti Parteni, figli delle vergini, ma non si volle poi considerarli alla pari dei figliuoli nati da giuste nozze, ed essi congiurarono contro la patria insieme con gli Eloti. La congiura viene scoperta, i colpevoli sono invitati e persuasi ad andarsene, si promette loro, se l'impresa coloniale dovesse fallire, la quinta parte dell'agro di Messene da poco conquistato. I Parteni lasciano Sparta, e giunti in Italia vi incontrano gli Achei; insieme lottano contro i barbari e fondano Taranto.

La prima guerra messenica, come è noto, viene datata in base alla notizia di Tirteo (fr. 5) secondo il quale essa fu combattuta all'epoca di Teopompo, il cui regno nella serie genealogica degli Euripontidi cade nella seconda metà del sec. VIII (3). La data della colonia sembra ottenuta anch'essa mediante computi genealogici: fra la guerra e la fondazione di Taranto l'intervallo è di una generazione; si giunge così alla fine del secolo. V'è tuttavia adito a supporre che non facessero completamente difetto a Taranto materiali per la cronologia: le liste degli

(1) Antioco distingue i Cretesi dai Barbari, il che ha dato occasione ai moderni di far distinzione fra Cretesi, o comunque Elleni, e Japigi. Ma Cretesi per Antioco non sono altri che gli Japigi: risulta in modo chiaro dal contesto. Ho cercato innanzi di far valere che l'identificazione Cretesi-Siculi-Japigi è frutto di pura speculazione letteraria; ne ho qui, mi sembra, la conferma. È il tardo elemento erudito che si sovrappone, senza coprirla esattamente, alla tradizione genuina, onde lo sdoppiamento.

(2) Ephor. ap. Strab., VI, 279.

(3) V. in proposito Beloch, *Griech. Gesch.*, I², p. 2ª, p. 262 sgg.

efori sarebbero state redatte a Sparta a cominciare dalla metà del sec. VIII (1), nè si può escludere in modo assoluto che gli elenchi degli efori tarentini risalissero ad epoca remota. È un periodo, del resto, nel quale i computi genealogici danno pure resultati apprezzabili; difatti, partendo da altri criteri, non andiamo lontani dalla data che le nostre fonti stabiliscono per la fondazione della colonia di Sparta.

Taranto, avuto riguardo all'eccellenza della sua posizione, dovette essere contemporanea o di poco posteriore alle colonie achee nel golfo omonimo; l'occupazione del golfo, poi, non è verosimile sia stata preceduta da quella della più lontana Sicilia, che risale alla fine dell'VIII secolo. A conferma della data della tradizione, il materiale archeologico rinvenuto a Taranto contiene vasi protocorinzi pertinenti alla colonia greca.

Datata la colonia dalla fine del secolo, la correlazione in cui viene posta con la prima guerra messenica è frutto di speculazione, che non è senza esempi nella storia di altre colonie italiote. Locri e Crotone, secondo Pausania, sarebbero state fondate al tempo del re di Sparta Polidoro dagli Spartani (2); l'errore che attribuisce alle due colonie la stessa origine, e precisamente origine spartana, trova con probabilità la sua spiegazione nel sincronismo degli avvenimenti (3). Difatti Locri e Crotone dovevano essere considerate coeve e fatte risalire all'epoca in cui da Sparta si combatteva contro Messene, al al tempo cioè del re Polidoro. La fondazione di Reggio è posta da Antioco in relazione con la prima guerra messenica sulla base di una notizia, erronea del resto, che esuli Messeni vi avessero avuta parte (4); viene così attribuita alle stesse cause la fondazione tanto di Taranto che di Reggio, colonie ritenute coeve.

Torniamo ai coloni di Taranto. In Eforo ricorre la spiegazione etimologica del nome dei Parteni, i nati delle vergini;

---

(1) V. Beloch, I^2, p. 1^a, p. 24.

(2) Paus., III, 3, 1.

(3) Niese, " Gött. Gel. Anz. ", 1884, Nr. 2, p. 56; v. anche Busolt, I^2, 401, n. 2.

(4) Antioch. ap. Strab., VI, 257.

per Antioco i Parteni sono figliuoli di eloti, e che la spiegazione sia anch'essa di natura etimologica è reso assai probabile dal racconto analogo di un'altra colonia italiota, Locri Epizefiri.

Secondo Polibio, che sostiene la testimonianza in proposito di Aristotele combattendo le asserzioni contrarie di Timeo, i Locresi sarebbero stati discendenti di servi o combattenti allontanatisi dal campo, i quali furono perciò scacciati, e andarono a fondare Locri in occidente. I Locresi a occultare origini così umili solevano derivare dalle madri la loro nobiltà (1). Questa circostanza è storica (2); quanto alla spiegazione degli antichi, è la stessa che assegna origine servile ai Parteni, i quali traevano dalle madri il nome. Se agli Spartani disertori, e perciò decaduti a condizione di eloti, Eforo sostituisce cittadini debitamente autorizzati a lasciare il campo, trattasi con probabilità di una modificazione escogitata dal nostro storico, esistendo pure la tradizione che i coloni di Taranto fossero Spartiati di pieno diritto (3). Del resto Eforo ebbe presente la vecchia versione, e fa partecipare gli eloti alla ribellione dei Parteni.

La tendenza della storiografia ad attribuire origine servile ai coloni di Taranto ritorna in un'altra versione riferitaci da Diodoro (4). Secondo tale versione, parteciparono alla congiura di Falanto gli Epeunacti, anzi, fallito il colpo, mentre i Parteni desistettero dai propositi di secessione, gli Epeunacti stabilirono di fondare una colonia, e poichè la Sicionia venne loro negata dall'oracolo, ottennero di abitare Taranto. Epeunacti erano, secondo Teopompo, eloti che gli Spartani sostituirono ai loro guerrieri morti combattendo contro Messene, affinchè il nemico non si accorgesse dei vuoti nell'esercito (5). I servi chiamati a occupare i letti dei cittadini, *εὐναί*, donde Epeunacti, ebbero il conferimento della cittadinanza. Abbiamo ancora una spiega-

(1) Polyb., XII, 5-10.

(2) Pais, *Storia della Sicilia e della Magna Grecia*, p. 203; Beloch, op. cit., I², p. 1ª, p. 84.

(3) Arist., *Pol.*, V, 6, 1, p. 1306 Bkk.

(4) Diod., VIII, 21.

(5) Theop. ap. Athenaeus, VI, p. 271 C.; in Müller = F. H. G., I, p. 310.

zione etimologica inquadrata, per così dire, nelle medesime circostanze di tempo e di luogo che entrano nel racconto dei Parteni, ed è probabilmente in grazia di ciò che gli Epeunacti vengono introdotti nella storia di Taranto.

È possibile che la leggenda dei Parteni serbi traccia di un antico diritto familiare, per cui la discendenza era ricercata dal lato materno; tanto più che la poliandria, sopravvissuta a Sparta in età storica, sembra presupporne in un dato periodo l'esistenza (1).

Per concludere, ben poco è lecito di ricavare dalla versione degli antichi sulla deduzione della colonia. I fondatori provenivano da Sparta e dal territorio, una parte, sembra, da Amicle: difatti con la presenza di Amiclei a Taranto si spiegherebbe l'importanza che vi ebbe il culto amicleo di Apollo Jacinzio, attestato da Polibio, come pure la circostanza che nella versione di Antioco sulle origini di Taranto queste fossero riconnesse con la celebrazione delle Jacinzie. La città fu fondata verso la fine dell'VIII sec.; l'espansione coloniale di Sparta tiene dietro a guerre di conquista, e pare ne conservi gli impulsi; il suolo della patria non bastava più agli abitanti. E l'oscurità che avvolge le origini di Taranto conviene a una colonia fondata da povera gente, che le necessità della vita sospingevano oltre i confini della terra natale.

IV.

Delle vicende di Taranto nulla ci è tramandato per tutto il sec. VII e per il VI, sino alla fine. I racconti delle origini parlano di lotte che i coloni spartani ebbero a sostenere contro i barbari indigeni (2). Altre notizie accennano a guerre fra Taranto e Metaponto per contestazioni di confine (3). A due secoli di distanza all'incirca la tradizione riprende il filo interrotto.

---

(1) Beloch, *Griech. Gesch.*, I², p. 1ª, p. 84.
(2) Eph. ap. Strab., V, 280.
(3) Antioch. ap. Strab., V, 264.

I Tarentini non sono mai nominati a proposito delle lotte che si svolsero fra le città achee durante il secolo sesto. Presumibilmente fra il 530-520 le città collegate di Sibari, Crotone, Metaponto rasero al suolo Siris sul fiume omonimo (1). Quest'ultima, come Sibari, Crotone, Locri, aveva aperto ai suoi commerci la via fino al Tirreno, ove Pyxus, le cui monete attestano un'alleanza con Siris, ne rappresenta con molta probabilità una colonia (2). Verso le rimanenti città achee Siris dovè assumere la posizione di una temibile rivale, e fu abbattuta. Durante la prima metà del sec. V la città non fu riedificata, e la conquista del territorio divenne oggetto delle mire di Taranto.

Diodoro riferisce al 473 l'alleanza fra Reggio e Taranto, al 471 la deduzione di una colonia reggina a Pyxus sul Tirreno (3). Fra le due notizie vi è un nesso probabile, come il Pais ha veduto (4), nè toglie che il nesso vi sia la non contemporaneità dei due avvenimenti quale risulterebbe da Diodoro, e che è forse solo apparente (la divergenza fra le due date si lascia spiegare per il diverso carattere delle fonti cui Diodoro dovè attingere l'una e l'altra notizia). Difatti la vecchia alleanza fra Pyxus sul Tirreno e Siris nel golfo di Taranto farebbe luce sui rapporti tra i Reggini padroni di Pyxus e i Tarentini, i quali più tardi sostennero con le armi le loro pretese sulla Siritide.

A occidente di Taranto Metaponto tagliava alla colonia spartana la via a espandersi verso l'ovest, cui la chiamava, per l'eccellenza della posizione geografica, il suo compito naturale d'intermediaria fra la Grecia e l'Italia. Dall'opposta sponda tirrenica il bisogno era sentito di mantenere le tradizionali relazioni con la costa orientale, vale a dire ormai con Taranto, che dominava le acque dello Ionio. L'intesa con Reggio, divenuta per la colonizzazione di Pyxus città tirrenica, sgomberava ai Tarentini gli ostacoli, porgendo loro un importante vantaggio sulla vicina Metaponto.

(1) V. Beloch, *Siris*, in *Griech. Gesch.*, I², p. 2², p. 238-245.

(2) Beloch, loc. cit., p. 243.

(3) Diod., XI, 52, 59.

(4) E. Pais, *Ricerche storiche e geografiche sull'Italia antica*, II, *L'alleanza di Reggio e di Taranto contro gli Japigi*, p. 29-42.

Il Pais ritiene invece la conquista della Siritide già avvenuta al tempo dell'alleanza fra Taranto e Reggio. Taranto avrebbe dominato tutta la valle del Siri, e per conseguenza, essendovi di mezzo Metaponto, avrebbe tenuto in soggezione anche quest'ultima. Ma nell'epoca cui ci riferiamo Metaponto aveva pienissimi diritti di sovranità: ne sono prova le monete, le quali attestano pure il massimo fiorire della potenza metapontina nella prima metà del sec. V. È inammissibile che Metaponto fosse già incuneata nei dominii della potente vicina: quando Taranto divenne realmente padrona della Siritide e vi fondò la colonia di Eraclea, Metaponto non tardò ad assumere fra le due una posizione assai mediocre.

Il Pais porta a sostegno della sua tesi il fatto che Metaponto non partecipò alle lotte fra Turi e Taranto per il possesso della Siritide, arguendolo dal silenzio delle fonti. E che i Metapontini non abbiano preso le armi contro Taranto può trovare conferma in questo, che dopo la vittoria di Taranto, Metaponto conservò la sua posizione indipendente; difatti al momento della spedizione ateniese in Sicilia i Metapontini disposero liberamente di aiuti per gli Ateniesi, a differenza di Taranto, che si mantenne neutrale. Cade così l'argomento che la mancata partecipazione di Metaponto al conflitto per la Siritide stia a significare la sua soggezione alla vicina Taranto.

D'altronde, ove si ammetta che Taranto al principio de V secolo possedesse tutta la valle del Siri e di fatto anche Metaponto, si comprende assai meno l'interesse dei Tarentini ad allearsi con Reggio. Dopo tutto Taranto si sarebbe trovata in condizioni più favorevoli che le colonie achee quando colonizzarono la costa tirrenica, e sarebbe strano che non avesse pensato a imitarne l'esempio. Il Pais riconosce che il vantaggio nell'alleanza stava dalla parte di Reggio: questa lo avrebbe tuttavia compensato con aiuti militari. Ma in tal senso la reciprocità fra i due stati doveva essere già convenuta: Pyxus ai confini della Campania, allora infestata dagli Etruschi, non si trovava per questo rispetto in condizioni più favorevoli che Taranto.

Dell'attività guerresca dei Tarentini abbiamo scarse notizie, e solo approssimativamente databili. Una loro vittoria sui Mes-

sapi fu celebrata con un ex-voto a Delfi opera di Agelada (1). L'iscrizione dedicatoria ne è stata scoperta di recente: ricopiata nel sec. IV, serba però traccia dei caratteri originari, per i quali sembra debba essere posta in epoca non anteriore al 480 (2). La cronologia di Agelada ci riporta agevolmente alla stessa epoca. Sappiamo inoltre di una vittoria ottenuta dai Tarentini sui Peucezi, per la quale mandarono a Delfi statue di Onata (3). Di questo artefice è sicuramente databile, com'è noto, fra il 467 e il 466 l'ex-voto di Ierone mandato a Delfi dal figlio di lui Deinomene (Paus., VI, 12, 1). È impossibile peraltro ristabilire la successione di questi fatti d'arme in rapporto alla grande sconfitta toccata all'esercito di Taranto e Reggio collegate contro i Messapi, e che da Diodoro è riportata al 473.

Diodoro racconta che i vinti si divisero in due parti: gli uni, e cioè il contingente tarentino, piegarono su Taranto; gli alleati reggini fuggirono verso Reggio, e i Messapi li inseguirono sino in fondo, ed espugnarono la stessa Reggio; particolari questi ultimi evidentemente assurdi. La correlazione in cui sono poste le due notizie fa sospettare che si tratti di una congettura dello stesso Diodoro: la fuga dei Tarentini a Taranto gli avrebbe suggerito l'indicazione a lui mancante relativa ai Reggini. Il Pais crede di utilizzare il dato di Diodoro sostituendo a Reggio, ch'è fuori questione, un possedimento di Reggio nella Siritide, concessole da Taranto. Ho già esposto per quali motivi ritengo che non si possa parlare in questa epoca di possesso della Siritide da parte di Taranto. È superfluo aggiungere che la notizia di Diodoro non rende in nulla più probabile la tesi contraria.

La sconfitta ebbe conseguenze per la politica interna di Taranto, che passò dalla forma oligarchica a reggimento demo-

(1) Paus., X, 10, 6.

(2) Della iscrizione si sono occupati l'Homolle (" B. C. H. ", 7, 1894, p. 187; 1897, p. 301 sgg.; 1898, p. 573; " C. R. A. I. ", 1894, p. 584); il Pohtow, " Arch. Anzeiger ", 1895, p. 9, n. 1; " Klio ", 1908, p. 326-337; " Berl. Phil. Wochenschr. ", 1910, p. 187; il Bourguet, in " Fouilles de Delphes ", 4, III, fasc. I, p. 73 sgg.

(3) Paus., X, 13, 10.

cratico (1). Della oligarchia, essendo Taranto colonia di Sparta, si può congetturare che fosse corrispondente al governo della madre patria. Che il potere regio si sia mantenuto a Taranto finchè la costituzione originaria ebbe vita si potrebbe dedurlo da una notizia di Erodoto, il quale parla di un re di Taranto Aristofilide dei tempi di Dario (2). Il De Sanctis per l'analogia coi fatti contemporanei delle colonie italiote e siceliote ritiene più probabile che si parli non di un re nel vero senso della parola, ma di un *tiranno* (3). Ora non va escluso che Taranto, più conservatrice che le altre colonie come fu la madre patria di fronte agli altri stati della Grecia, abbia mantenuto più lungamente il potere regio. Da quanto ci narra Aristotele, poi, sembra da escludere che il passaggio dalla oligarchia alla costituzione democratica fosse segnato da una reazione democratica violenta, come quella che tolse il potere di mano ai pitagorici nelle altre colonie italiote. Un numero grandissimo di nobili era rimasto sul campo di battaglia; d'altronde Taranto, città eminentemente commerciale, doveva sentire il bisogno di un reggimento più libero, e si venne a riforme in senso democratico.

Dopo il 473 non è fatto alcun accenno a Taranto sino alla fondazione di Turio, avvenuta nel 445 sotto gli auspici di Atene. Gli eredi di Sibari vollero assicurarsi prontamente l'espansione verso il nord, occupando il territorio della distrutta Siris; per l'occasione si rinvangò nel racconto leggendario delle origini sirite un diritto di Atene (4). In realtà la Siritide non è che una parte della pianura in cui sorge Metaponto, di cui originariamente Siris dovette essere una colonia (5), ma l'indebolimento e l'assorbimento della città finitima era il prezzo dell'opera politica di Taranto, e contro Turio, venuta a strapparle

(1) Arist., V, 2, 8.

(2) Herodt., III, 136.

(3) G. De Sanctis, *Storia dei Romani*, I, p. 339, n. 2.

(4) Che gli Ateniesi vantassero dei diritti sulla Siritide è dimostrato dal racconto di Erodoto, che attribuisce a Temistocle l'affermazione di tale diritto (VIII, 62), v. Beloch, loc. cit., p. 239.

(5) Beloch, loc. cit., p. 240.

i frutti ch'essa aveva maturati, Taranto fece valere con le armi la sua precedenza.

La guerra terminava con un accordo, per il quale Turi e Taranto insieme fondavano alle foci del Siri, in luogo della città scomparsa, in posizione più forte, la colonia di Eraclea (1).

Al tempo della guerra del Peloponneso, e precisamente della spedizione degli Ateniesi contro Siracusa, Taranto si mantenne neutrale (2): vincitori che fossero i Siracusani o gli Ateniesi, il successo avrebbe segnato il sorgere di una nuova potenza in Italia, al cui programma le città italiote non avrebbero potuto consentire di buon grado, doriche o ioniche che fossero. Taranto si astenne dal mandare aiuti a Siracusa, Reggio si comportò identicamente con l'alleata Atene. D'altronde perfino a Turio, sorta da poco sotto gli auspici di Atene, quest'ultima trovò difficoltà a reclutare dei rinforzi (3); non vi fu che Metaponto, la quale aderì prontamente alle sue richieste (4): presa in mezzo fra Taranto ed Eraclea, la sua disgraziata posizione doveva renderla comunque propensa a un cambiamento di cose.

Taranto non è nominata al tempo delle guerre di Dionisio I contro i Greci d'Italia. La lega delle città italiote in origine non comprese Taranto (5); questa e le città del golfo tuttavia dovettero farne parte di buonora, come sembra dimostrato dal corso degli avvenimenti: gli Italioti opposero forze rilevanti all'attacco del Siracusano; quindi par certo che cooperassero tutte (6).

Alla caduta di Crotone, che aveva la direzione della lega (379), questa passò ai Tarentini; ormai contava le sole città del golfo: Taranto, Metaponto, Turio, Eraclea, quest'ultima sede del concilio della lega, evidentemente per non urtare di soverchio la gelosa suscettibilità delle alleate, ove la sede del concilio fosse

(1) Antioch. ap. Strab., VI, 264.
(2) Thuc., VI, 44.
(3) Thuc., VII, 33.
(4) Ibid.
(5) Polyb., II, 39.
(6) V. in proposito Beloch, *L'impero siciliano di Dionisio*, " Atti dell'Accad. dei Lincei ", 1881, p. 215 sgg., e *Griech. Gesch*, II, p. 164 sgg.

stata la stessa Taranto (1). La guerra tra il Siracusano e le città italiote aveva rivelato ai duellanti la vera entità delle proprie forze: se gli Italioti non potevano lusingarsi di ricacciare oltre lo stretto l'influenza di Dionisio, questi a sua volta dovevarinunciare a infrangere la resistenza oppostagli dai confederati; in Italia egli rappresentava una potenza di più, la quale doveva sentire in quel momento la necessità della cooperazione pacifica, avvertita da tutte le altre. Il momento era giunto per Dionisio di sfruttare con le arti della pace la posizione faticosamente guadagnata, e seppe farlo egregiamente, colonizzando le coste adriatiche; Taranto dovè subire la fondazione di due colonie siracusane sulla costa apula (2). I rapporti pacifici fra la città italiota e Siracusa durarono al tempo di Dionisio II, quando in Taranto fioriva Archita. Di questo celebre personaggio poco sappiamo: fu in carica di stratego sette volte, benchè la costituzione tarentina non lo comportasse (3), combattè con i Messapi (4) e con i Lucani, che si erano già dal tempo di Dionisio I cimentati con gli Italioti di Turio. A queste guerre degli Italioti contro i Lucani partecipò Dionisio II (5).

Nella direzione della politica della lega, Archita fu vigile mantenitore dell'equilibrio tra la forte compagine siracusana e la confederazione dei Greci d'Italia. Il governo di lui coincide con un periodo di grande prosperità economica e politica per Taranto. Ottenuta una relativa sicurezza contro i nemici indigeni mediante la lega delle forze italiote, stabilite relazioni pacifiche con Siracusa, Taranto dovette godere allora tutti i vantaggi della sua privilegiata posizione geografica. Si aggiunse un altro coefficiente di prosperità con la caduta di Dionisio e dell'impero siracusano (6); la parte di qua dallo stretto, tramontata l'influenza di Siracusa, dovette accostarsi a Taranto,

---

(1) Strab., VI, 280.
(2) Beloch, mem. cit., p. 217.
(3) Laert. Diog., VIII, 79, 82; Suidas, *Ἀρχύτας*; Aelian., VII, 14.
(4) Iambl., *d. vit. Pyth.*, 197.
(5) Diod., XVI, 5; Strab., 261.
(6) E. Pais, *Storia della Sic. e della M. Grecia*, p. 584.

tutrice degli interessi italioti, e l'indirizzo conciliante seguito da Taranto negli ultimi tempi dovè facilitare singolarmente l'ingrandirsi della sua clientela politica (1).

(1) Ho fatto seguire alla ricerca sulla *κτίσις* di Taranto le scarse e frammentarie notizie dei primi secoli della colonia per far servire il mio breve studio di introduzione quanto era possibile completa ad una esposizione del periodo, che è in maggior luce storica, fra l'apogeo e la caduta della potenza tarentina.

Ancóra Cirene mitica.

Nota di ALDO FERRABINO.

I.

Gli studii su i miti della Cirenaica, cui avevan dato opera principalmente il THRIGE (*Res Cyrenensium*, etc. Hafniae 1828) e lo STUDNICZKA (*Kyrene, eine altgriechische Göttin*, Leipzig 1890) in anni ormai lontani, furon ripresi di recente, com'è noto, e con gran fortuna, da L. MALTEN (*Kyrene, sagengeschichtliche und historische Untersuchungen*, in " Philologische Untersuchungen ", XX 1911): il lavoro del quale ebbe potere di stimolar più altre ricerche. Contemporaneamente a quelle apparse in questi medesimi " Atti " (vol. XLVII, 1912, p. 505-529) (1), ne venivan pubblicate dal COSTANZI, in " Ausonia ", VI, 1912, p. 27 segg. E poi G. PASQUALI al mito di Cirene dedicava un capitolo intiero (pp. 93-147) delle sue *Quaestiones Callimacheae* (Gottingae 1913).

Breve cenno daremo del pregevole scritto del Costanzi; come di quello che s'accorda a pieno con la posizione fondamentale da noi assunta nell'indagare i miti cirenaici. A insaputa l'uno dell'altro, mentre io scrivevo (p. 505, n. 1) di non voler cercare in quelli " la chiave delle più antiche vicende greche " in Tera e in Libia, il Costanzi dichiarava di non " voler cercare un significato recondito " in quei medesimi miti (p. 32). Di fronte alla quale concordanza di metodo divengono trascurabili le piccole discrepanze di particolari, su cui ogni

(1) Una rielaborazione di quell'articolo, condotta con quell'ampiezza che allora lo spazio non concedeva, vedrà la luce in un volume di prossima pubblicazione: *Kalypso: Saggio d'una storia del mito* (Torino, Bocca).

studioso darà il suo giudizio; senza che convenga vagliarle polemicamente.

Ben altro è pel Pasquali. Egli, come lo Studniczka, come il Malten, come il Gercke, ha tenuto appunto quella via che io dichiarai e ritengo erronea: ha, cioè, tradotto il mito in realtà storica, valendosi di quello per costruire questa. Il presupposto costante di tutto il suo lavoro è che la leggenda mosse da condizioni storiche a noi ignote, le quali (sia pure un poco deformate) in essa si possono scorgere. Il presupposto costante di tutta la nostra indagine in vece è che si debbano e si possano dalle condizioni storiche a noi note spiegare tutti i particolari della leggenda. Per ben giudicar fra questi due indirizzi, bisogna tener presente che il primo, convertendo in storia il mito, riflette una fantasia in una congettura e, accettando la saga come testimonianza di fatti antichissimi, si accorda con i mitologi, che la inventarono appunto per supplire alla lacuna della preistoria; — laddove il secondo indirizzo, il nostro, spiega la favola dalla realtà testimoniata e non asseconda la speciosa pretesa dei mitologi. L'effetto è che il metodo del Malten e, ora, del Pasquali riesce a dare pochissimo affidamento di conoscenza su l'età antichissime, di cui nè testi nè monumenti fino adesso ci parlano; — il metodo del De Sanctis, del Costanzi e mio dà una visione più piena delle epoche meno antiche, mostrandole, oltre che nell'opera (di cui son traccia le fonti), anche nell'atto di trasformare con la imaginativa (di cui è frutto il mito) l'opera compiuta.

Posta tal discrepanza fondamentale di metodo, è ovvio che i risultati delle diverse ricerche sieno differentissimi. Così è noto che lo Studniczka pensò a una colonizzazione tessalo-beota in Tera anteriormente a quella dorica. Il Gercke (" Hermes „ XLI, 1906, pp. 447-459) a una colonizzazione di Mirmidoni in Libia anteriormente a quella dei Terei. Il Malten (1), svolgendo il concetto appena abbozzato nel breve ma (per dirla coi Tedeschi) *epochemachend* articolo del Gercke, sostenne, pure anteriormente alla venuta dei Terei in Libia, una migrazione tessalo-pelopica

(1) Si noti però che già prima del Gercke il Malten aveva espresso in parte i suoi concetti in *Cyrenarum origines*, Berlin, Diss. 1904.

mossa dal capo Tenaro. Tutti, come ognun vede, sono pertanto assai meglio informati su la preistoria libica che non noi: peccato che tanto discordino fra loro pur nel comune officio di tradurre il mito in storia. Dai suoi predecessori discorda difatti anche il Pasquali, che pur si avvicina assai al Gercke (1), che anzi, può dirsi, del Gercke riprende l'idea fondamentale svolgendola, integrandola e traendone luce pei varii particolari (cfr. p. 147).

Ecco ora in breve la teoria di lui. La Libia fu occupata prima dai Tessali ftioti; poi dai Terei; da ultimo dai Greci delle isole. Di queste tre, le due ultime occupazioni sono accertate in piena luce di storia; la prima sola dev'essere dimostrata. Come? Il dotto assertore vi giunge traverso una lunga disamina, di cui i punti fondamentali sono tre: *A*) i Cirenei ritennero, dice, tessala l'eponima della loro città Cirene; — *B*) eroi tessali tentarono d'impadronirsi, secondo la saga, della Libia; — *C*) un dio tessalo, Euripilo, avrebbe o donato o denegato a un eroe tessalo, Eufemo, il possesso della Libia. Esaminiamo questi tre punti, uno ad uno, riassumendo gli argomenti del sagace ellenista, e confutandoli.

II. *A*).

Il P. (p. 100) fa, come già l'Aly *o. c.*, molte riserve sul nesso, asserito dal Malten (p. 69), fra *Κύρη* (la fonte) e *Κυρήνη* (la ninfa e la città); tuttavia finisce per accettare, — e credo sia impossibile far altrimenti, — la teoria del Malten a questo riguardo. Le riserve, del resto, non sembrano resistere alla critica. Contro gli esempii paralleli di *Μέσση* a canto di *Μεσσήνη*, *Πέλλα* di *Πελλήνη*, *Πύλη* di *Πυλήνη*, il P. obietta che non sappiamo se *Μέσση* sia la stessa città di *Μεσσήνη*, ecc. Certo non sappiamo; se bene nè pure il contrario sia per tutti quei casi affermabile. Ma ciò non importa affatto: basta constatare l'esistenza di nomi proprii che si presentano in una

(1) Al Gercke si accosta pure, nella sua recensione sul Malten, l'Aly in " Berl. Phil. Woch. „ XXXII (1912) 1033 sgg.

duplice forma, ora con e ora senza un suffisso speciale *-ανο-* *-ανᾱ*. Esistenza, si badi, che non è punto singolare, come sembra credere il P., ma è invece analoga al coesistere della medesima doppia forma, semplice e sviluppata, per nomi comuni; ecco una lista:

βοτός . . . . *βοτάνη*
ἕδρα . . . . *ἕδρανον*
κάρα . . . . *κάρᾱνος*
κόπρος . . . . *κόπρανον*
πλεκτός . . . *πλεκτάνη*
ὄλισθος . . . *ὀλίσθανος*
στέφος . . . . *στεφάνη*
τιθός . . . . *τιθήνη*

lista incompiuta che adduciamo solo a cagion di esempio e che ognuno può completare. E così per questi come per i nomi addotti dal Malten, non monta l'identità del significato o del riferimento geografico, ma solo della radice e del valore di questa. — Ancor meno poi mi pare che il P. apprezzi il sèguito del testo del Malten. Questi, dopo gli esempii riportati, parla dell'etnico *Διηνός* desunto da *Δίη*; ne suppone uno *Κυρηνός* da *Κύρα*; e ne ricava, col ritiro dell'accento, *Κυρήνη*. Contraddice il P. che quest'ipotesi è diversa dall'altra precedente, e che bisogna accettare, e proporre l'una delle due non entrambe, tanto meno raccoglierle in unico testo. Ma come non s'avvide il P. che contraddizione non v'è fra le due teorie e che la seconda serve a spiegare i doppioni constatati con la prima, introducendo tra la forma *Κύρα* e la forma *Κυρήνη* uno stadio di mezzo *Κυρηνός*? Nè il Malten fu avventato in questo secondo caso come non nel primo. Udiamo la parola del Solmsen, " Glotta „, I (1909) 76 segg., 81: " In allen diesen Fällen (1) handelt es sich um Erweiterung eines *n*-Stammes mittels

(1) I casi sono quelli che il Solmsen ha indicati prima: *κόπρος-κόπρανον*, *στέφος-στεφάνη*, ecc. — Noi, naturalmente, non entriamo qui a giudicare la teoria del Solmsen; ci basta proteggere la congettura del Malten (che accettiamo) con l'analoga teoria di uno studioso specialmente competente

des Suffixes *-ŏ- -ā-*, wobei der Vokal vor dem Nasal entweder ganz geschwunden oder so weit reduziert ist, dass er im Griechischen als *α* auftritt. Die Bedeutung ist zunächst adjektivisch, aber es konnte wie bei jedem Adjektivum ohne weiteres Substantivierung unter zurückziehung des Akzents von der Endsilbe auf die dritt- oder vorletzte erfolgen; das eigentlich adjektivische Wesen der Bildung aber gibt sich noch in ihrem zwischen Maskulinum, Neutrum, Femininum wechselnden Geschlecht zu erkennen. Also *κόπρος* 'Mist', *κοπρών* 'was durch Mist gekennzeichnet ist, Miststätte', *κόπρανον* 'was zur Miststätte gehört, Mist,' somit, wie sehr häufig bei solchen Weiterbildungen, im Sinne dem Grundworte gleich; *στεφών* 'wessen Wesen darin besteht, dass es ein *στέφος*, etwas Umkränzendes, Umsäumendes ist', *στέφανος στεφάνη* 'einen *στεφών* bildend', also wieder gleich *στέφος*..... Ich bin überzeugt dass das Suffix *-ανο- -ανη-*, soweit es sekundär d. h. an fertige Nomina angefügt ist, dieses Ursprungs ist „. La tesi del Malten è dunque assai ben fondata e spiega il passaggio da *Κύρη* a *Κυρήνη* in guisa dicevolissima. Torto di lui fu solo, se proprio qualcuno gliene vogliano imputare, di non citar il testo del Solmsen e di considerar il problema un po' isolatamente.

Comunque, anche pel P. Cirene è libica. Come mai la ritroviamo, secondo il mito, in Tessaglia? " Poëta quidam Hesiodius Aristaeum Apollini et Cyrenae filium supposuit, ut hanc scilicet cum Thessalia coniungeret „. Ossia: non Aristeo fu la causa perchè Cirene fosse trasportata in Tessaglia; ma questo trasporto, voluto, fu causa del nesso con Aristeo. E perchè, allora, voluto quel trasporto? Perchè i Tessali erano dai Cirenei riconosciuti come antichissimi predecessori. — Io invece avevo congetturato che Aristeo, nume-eroe (la differenza fra questi due termini su cui il P. tanto insiste è assai meno

---

ne' fenomeni glottologici. Analoga teoria: perchè in tutt'e due le ipotesi si suppone intermedia, tra la forma che è senza e la forma che ha il suffisso in questione, una forma aggettivale, ossitona e di tema ampliato con *n*. I due punti poi che abbiamo spaziato nel testo del S. sono quelli da cui ci pare venga maggiore il suffragio al M.

rigorosa di quel che egli pretende; come ogni differenza fra categorie astratte), nume-eroe prevalentemente tessalo, diffondendosi sopra una larghissima area giungesse anche in Libia; che in Libia come altrove si collegasse con la divinità-eroina a lui affine, Cirene; e che per esso Cirene toccasse la Tessaglia. Ma congetturavo ciò " infirmo fundamento „ a dir del P. (pagina 102, n. 1).

Vediamo. — Dalle testimonianze (*scol. Aristof. Caval.* 894; *Itin. Anton.* 72, 2; *scol. Pind. Pit.* IV 4), risulta che Aristeo in Cirenaica era ritenuto inventore del silfio (1). Ciò, scrissi (p. 508), si spiega o col supporre che in Cirenaica Aristeo pervenisse *dopo* il nesso con Cirene, e a causa di quello; o che vi pervenisse *prima* e vi stringesse legame con la Ninfa, determinandone il trasporto in Tessaglia [il P. per svista mi fa dire " in Libyam „]. Ora io chiedo: vi è più fondamento ad accettare la prima ipotesi o la seconda? Vi sono, mi pare, motivi per preferire la seconda alla prima; e gravissimi. Con la seconda si suppone avvenuto in Libia un fenomeno identico ad altri avvenuti, per Aristeo, in Arcadia, p. e., e in Sicilia (i testi sono presso Malten 77 segg.), e quasi tutt'altrove; — con la seconda, sovra tutto, si spiega nel modo più semplice e più ovvio la vernice tessalica di cui la libica Cirene fu ricoperta (e la semplicità ed evidenza sono criterii definitivi per decidere delle ipotesi); — con la seconda, da ultimo, senza ricorrere a intestimoniate colonizzazioni tessaliche, si pensa un fatto ad analogia di quei molti casi in cui un nume adduce nella sua regione il nume, a lui collegato, di un'altra. E se (unica argomentazione del P. è questa) il mito dice che Aristeo fu, bimbo, tosto trasportato in Tessaglia, ciò non significa che " non ve ne fosse traccia in Libia „, ma solo che in Libia era assai meno a casa propria che in Tessaglia; la qual cosa, molto diversa, conforta la mia ipotesi, come ognun vede: la mia ipotesi che dalla preponderante tessalicità di Aristeo deriva quella di Cirene.

(1) Per l'esattezza: il P. a pag. 102 scrive: " religio Aristaei in Libya fuit, quantum scimus, nulla „ e rinvia al Malten 82. Ora il Malten 82 dice proprio il contrario: " der Gott [Aristaios], der auch in Libyen seine segnende Macht bewies und hier zum Spender des Silphius wurde..... „: e cita l'Itin. Anton. così: " *'Αρισταίου* (sc. *ἱερόν*) „.

Concludendo: Cirene tessala si spiega senza sforzo, anzi con elementare chiarezza. E rende pertanto inutile, anzi dannosa, ogni ipotesi che da lei desuma notizie intorno alla preistoria.

Esaurito questo punto importantissimo, dirò solo per cenni poche altre cose. Nel negare l'antichità del mito callimacheo contro il Malten io, avendolo prevenuto, son lieto del conforto da un così dotto recato alla mia tesi; ma mi sorprende che il P. (p. 99), mostri disprezzo per la tradizione di Filarco (= *scol. Apoll. R.* II 498), la quale in vece rincalzerebbe la sua tesi, insieme con il testo di Giustino XIII 7, 8. Dice difatti Filarco che Cirene giunse in Libia *μετὰ πλειόνων*, ossia con molti Tessali; proprio come vuole il P. E dice Giustino: *missos a patre Hypseo, rege Thessaliae, qui perquirerent virginem, loci amoenitate captos in isdem terris cum virgine resedisse*: press'a poco come piace al P. Ma per fortuna non ho più bisogno di mostrare, poichè il P. da sè lo dichiara, che questi passi sono tarda derivazione dall'Eea, che pertanto in essi è da accettare quanto coincida con l'Eea, e il resto è da ritenere amplificazione posteriore determinata dall'analogia della colonia Terea.

A p. 98, n. 1, poi il P. mostra di non aver bene inteso nè presso il Malten, nè presso me il parallelo fra l'*Eea* di Cirene (-Aristeo) e quella di Coronide (-Asclepio). Le differenze ch'egli nota sono nulle di fronte alla affinità fondamentale: entrambe le Eee trasportano in Tessaglia un nume non tessalo a motivo della sua analogia con un altro tessalo. Se ciò fosse stato veduto, la colonizzazione tessala in Libia avrebbe anche così perduto della sua base.

III. *B*).

" Eroi tessali tentarono, secondo la saga, di impadronirsi della Libia ". Ciò sono: gli Argonauti; Euripilo, figlio di Evemone; Protoo, magnete; e Guneo perrebico. Ora se la leggenda serba così tenace ricordo di naufragi Tessali in Libia, la leggenda deve avere un fondo storico (frase brutta quanto è falso

il concetto): il quale è che i Tessali colonizzarono antichissimamente la Libia, prima che i Terei. Così il Pasquali.

Riguardo agli Argonauti io già impugnai (" Atti „ pp. 517 sgg.), le dottrine del Malten, con cui in sostanza si accorda il P., e proposi tutt'altra teoria (1). Alla quale non debbo nulla mutare, chè le confutazioni e gli argomenti già mossi contro il Malten valgono ora contro il P. Mi limiterò a esprimerla in breve. Ritengo che rimanga da me dimostrato come un'antichissima saga narrasse gli Argonauti in Tripolitania nella *Τριτωνὶς λίμνη* più occidentale, e come di questa antichissima leggenda profittassero, da un lato i mitologi della spedizione di Dorieo (2) mutandone taluni particolari, dall'altro i mitologi della dinastia Battiade mutandone, e più profondamente, altri particolari. Ora, se in Tripolitania la saga prisca faceva naufraghi gli Argonauti (Tessali), non v'è nessun diritto di dichiarare che quella saga ricordasse una primitiva colonia tessala in Cirenaica.

Al contrario è chiaro che la saga porta gli Argonauti in Cirenaica approfittando di quella leggenda anteriore che li portava in Tripolitania; e approfittandone in epoca meno antica e, quindi, meno autorevole. Non può pertanto valere come rivelazione storica, ma solo come combinazione tendenziosa.

Passiamo a Euripilo (di Evemone) (3), Protoo e Guneo. Concedo che essi siano tessali: tali li pensa il poeta che li narra e come tali varrebbero anche se in altre regioni prevalessero (il che è vero, credo, per Euripilo) con altre cognazioni. Ma per poterne dedurre ciò che ne deduce il sagace nostro avver-

(1) Alla quale teoria do più ampio svolgimento nel volume sopra citato, pag. 442 sgg.

(2) Erodoto IV 178-9. Il P. obietta che questa leggenda erodotea non può essere stata concepita solo nel 515 (tentativo di Dorieo) chè Erodoto non l'avrebbe accolta come antichissima. — Certo. Ma se, com'io dissi (pag. 517), la leggenda ha uno strato vetusto indipendente da Dorieo e anteriore a lui, e uno posteriore e connesso col suo tentativo, si spiega che quest'ultimo acquistasse il pregio d'antichità proprio del primo.

(3) Insisto: " di Evemone „; ossia ben diverso da quell'Euripilo, di Posidone, che offre la zolla a Eufemo nel mito dei Battiadi e su cui cfr. sotto pag. 1072. Anzi, l'esser rimasti quello e questo Euripilo distinti nella saga è conferma della tesi che sostengo alla pag. citata.

sario la logica pretende: 1° che solo essi, tessali, faccian mitico naufragio in Libia; 2° che sia certo aver essi, nella leggenda, naufragato, della Libia, in Cirenaica; 3° che non sia possibile altra spiegazione più semplice e più consona alle abitudini della mitopeja postomerica e esiodea. Ebbene: 1° oltre a quei tre anche Diomede naufraga in Libia, — ed è eroe argivo del Peloponneso; e vi giunge Menelao e ne parla Odisseo. Inoltre (2°), la leggenda è imprecisissima riguardo al luogo del disastro. Licofrone parla di Cirenaica e di Cinipe, mischia insomma città di quella regione con un fiume tripolitano. Apollodoro (*scol. a Licofr.* 902 = Apoll. IV 15 *a* Wagner) parla del solo Cinipe. Il P. disputa su ciò senza venire a certezza (p. 131). Dunque si può dire, almeno, che v'è dubbio grave sul secondo punto dell'argomentazione e sul più importante. Ma credo possa asserirsi anche di meglio. Licofrone parla di Cirenaica perchè è sotto l'influsso del mito di Eufemo e dei Battiadi; parla del Cinipe perchè ricorda la saga degli Argonauti e di Dorieo. Apollodoro, per quanto appare dallo scolio ov'è riassunto, subisce quest'ultima influenza soltanto. In somma, sono miti diversi (se bene analoghi) che fanno contradittoriamente determinare la sede dei tre naufragi di Guneo, Protoo ed Euripilo; probabile quindi che nell'origine venissero localizzati puramente e vagamente ἐν Λιβύῃ. Così che cade, o molto s'infirma, la certezza, necessaria alla tesi del P., che le fortune dei Tessali avvengano in Cirenaica. — In fine (3°), quando tutte le teorie or ora svolte non fossero vere, resterebbe sempre, a spiegare i tre naufragi, l'ipotesi semplice e chiara da noi posta innanzi: la Libia nell'epopea postomerica è il luogo tipico dei naufragi perchè i navigatori greci vi han fatto, a prescindere da ogni colonizzazione, questa dolorosa esperienza che anche oggi si rinnova; nella Libia quindi finiscono gli eroi di cui la tarda epopea vuol disfarsi; o di là passano quelli di cui vuol complicare le gesta.

Conchiudiamo: eroi tessali (1) naufragati in Libia non legit-

(1) Anche men ferma riescirebbe l'ipotesi del P. se gli Argonauti non fossero tessali, come sostiene ora P. Friedländer " Rhein. Mus. „ NF. LXIX (1914) 312.

timano in nessun modo la ipotesi d'una colonizzazione tessala, anteriore alla dorica in Cirenaica.

IV. *C*).

" Un eroe tessalo (Euripilo) avrebbe denegato o donato a un eroe tessalo (Eufemo) il possesso della Libia ". Il P. studia il mito di Eufemo argonauta (che studiammo noi a pp. 515 sgg.) e crede di poterne costruire una forma originaria, rimasta senza traccia, nella quale Euripilo non dà la zolla, ma riceve il tripode. Dunque nel mito vi sarebbe prima il riflesso d'una mal riuscita colonizzazione tessala (Argonauti, Eufemo); poi un'alterazione, introdotta in seguito al felice successo dei Dori.

Questa tesi si regge se è vero che: 1° l'Euripilo di Cirenaica è tessalo; 2° se è probabile l'esistenza di quella forma originaria del mito di Eufemo; 3° se Eufemo in Cirenaica non si possa e non si debba spiegare in altro modo.

1° Il P. conferma con la sua ricerca che Euripilo è il dio della porta infernale. Ma alla mia tesi che in Cirenaica questo diffuso e generale concetto-fantasma mitologico sia stato riportato a cagione della grotta del Gioh, ritenuta appunto apertura di Dite, obietta " id videtur non sufficere ". Perchè? rispondo. L'egregio contradittore mi dimostra che l'epopea dà a bastanza larga parte a questa figura di nume-eroe sotterraneo; mi lascia per ciò intravvedere la diffusione di quel nume e di quel concetto; sa che il Gioh è ritenuto bocca dell'Ade (1)

(1) Apprendiamo da Strabone XIV 647 (cfr. 836) che *ἐν τοῖς Ἑσπερίταις Λίβυσι* esisteva un fiume chiamato *Λήθαιος*. La notizia è confermata da Tolemeo *Geogr.* IV 4, 4, 8 e da Plinio *N. H.* V 31 (*nec procul ante oppidum* [Esperide] *fluvius Lethon*); indi Marziano Capella VI 672; e da Lucano IX 355 (*Tritonida... unda. Quam iuxta Lethon tacitus praelabitur amnis*), il quale però trasporta il lago Tritonio, l'orto delle Esperidi, e il fiume nella Sirte, per la solita confusione fra la *Τριτωνὶς λίμνη* di Tripolitania e quella di Cirenaica (v. sopra). Sappiamo d'altra parte che " natürlich müssen auch die zahlreichen Orte, wo Flussnamen, wie Aidoneus, Lethaios, Styx, Acheron... überliefert sind, einst als Zugänge der Unterwelt gegolten haben " (Gruppe *Gr. Myth.* 815). Possiamo dunque conclu-

a simiglianza di assai altre caverne; dovrebbe quindi ritenere che la grotta abbia suscitato l'idea degl'inferi, gl'inferi quella di Euripilo. Così, p. e., a Patre in Acaja è una tomba di Euripilo (Paus. VII 19, 1) perchè vi scorre il fiume *Μειλίχιος* ch'è connesso con sotterra e perchè ivi è la spiaggia occidua della Grecia. Che difficoltà dunque? " Id videtur non sufficere „; forse, ma nè pure quelle tre parole bastano per scalzare un ragionamento. Il P. me lo concederà.

Ma se dunque la mia ipotesi si regge, anche non certa (nessuna ipotesi è tale), la tessalicità di Euripilo rimane assai dubbia; tanto più dubbia, quanto più verisimile il mio argomentare.

2° " Qui vero Orcum Libyae deum esse finxit, ille Libyam mortuorum terram credidit, neque igitur illam sub Graecorum dicionem redactum iri sperabit, neque finxit ipsum Orcum illam Euphemo pollicitum esse „. Questa è la base su cui il P. fonda una primitiva non che ipotetica forma della saga di Eufemo, secondo la quale Euripilo avrebbe non donato la zolla a Eufemo, ma ricevuto il tripode, denegando agli Argonauti (Tessali) il possesso della Libia. Ma è, mi sembra, base manchevole. Un dio infernale può significare una " mortuorum terram „; non deve. Può anche significare la divinità indigena scaturita dal suolo e viva nel suolo: la più adatta quindi a offrire una zolla. E il P. ricorda che Apollonio narra Cirene accolta in Libia dalle *χθόνιαι νύμφαι*: ninfe sotterranee che sono le indigene protettrici, e non san di morto (1). Anzi la zolla conviene a Euripilo molto più e meglio che il tripode; questo quindi può esser primitivo per Tritone, non per Euripilo: per cui è primitiva in vece la zolla. La pretesa forma originaria della saga di Eufemo è quindi una insostenibile congettura. Con cui cadono tutte le conseguenze che vi si connettevano.

---

dere che presso il lago Tritonio a Bengasi era supposta una bocca dell'Ade; e questa bocca non può essere che il Gioh, come riconobbero bene i geografi moderni. Molte e molte ipotesi si sarebbero risparmiate tenendo presente questa semplice circostanza.

(1) Nella stessa guisa Neleo non avrebbe mai dovuto essere capostipite d'una famiglia; e Cecrope, figlio della terra, darebbe ben trista fama all'Attica di cui era detto primo re; come Eufemo (per chi crede al suo carattere ctonio) farebbe stupire nella genealogia dei Battiadi.

3° Eufemo tessalo-beota si può spiegare in Cirenaica come il ftio Achille fra i Molossi, come Euristene progenitore degli Agiadi, Procle degli Euripontidi, Nestore dei Pisistratidi, ossia come il capostipite scelto dai regnanti per un motivo qualsiasi. E questo motivo può essere il nome Arcesilao che quattro re de' Battiadi portarono: ché Arcesilao è un eroe beota, come Eufemo, nell'*Iliade* (*B* 495 *O* 329, cfr. Pausania IX 39, 3).

E potrebbe darsi che, nel caso Euripilo sia (non crediamo) in Cirenaica quel medesimo di Tessagliá, Eufemo abbia trascinato con sè Euripilo: ma sarebbe ipotesi secondaria.

Se dunque Eufemo si spiega semplicissimamente con dieci altre analogie; se il mito di lui non ebbe mai altra forma che quella nota nelle fonti (su la cui origine cfr. " Atti ", citati pp. 516 sgg.); se Euripilo probabilmente non è il tessalico; il ragionamento del P. non regge; e non è vero, o è dubitabilissimo, che nella leggenda un eroe tessalo neghi e poi doni il possesso della Libia a un tessalo; e non è in nessun modo accettabile che da ciò possa dedursi una prisca colonizzazione tessala in Cirenaica.

V.

Così che nessuno dei tre punti su cui la teoria del P. si regge è saldo; nè son essi tali che l'uno l'altro conforti. Di fatti molte coincidenze che si pretendessero casuali potrebbero far sospettare una causa comune; ma singoli fatti che si spiegano ciascuno con una causa semplice ed ovvia non possono giustificar l'opinione di un sostrato unico. E inoltre bisogna notare che noi, i quali pretendiamo di non sapere dal mito nulla intorno alla Cirenaica prima dei Dori, siamo assai più prudenti di coloro che, come il Malten e il Pasquali, asserendo di saper qualcosa di probabile, corrono il rischio di venir smentiti dagli scavi di quella regione.

Il giudizio contradittorio del P. e mio circa i punti svolti dianzi si riflette sull'esame del mito di Batto in Pindaro ed Erodoto.

Batto è in quel mito discendente dei Minii e in ispecie

un Eufemide (1); e i Minii avrebbero occupato Tera movendo dal Taigeto. D'altra parte la sede patria di Eufemo è il Tenaro. Di questi tre nomi di luogo (Tera, Tenaro, Taigeto) l'ultimo è tardo ed è introdotto dalla saga spartana, che volle a Sparta dare un posto nella colonizzazione di Tera. Lo spunto fu, secondo crede L. Pareti (cfr. Costanzi *o. c.* p. 38) il nome di *Θῆραι* che ha una località del Taigeto presso Sparta; ed è verisimile: il fine fu di collegare con Sparta Tera; e su ciò scrive alquante pagine il P. e già aveva ben veduto il Malten. Anzi in Erodoto la saga appare complessa con quella dei Minii di Trifilia. Escludiamo dunque il Taigeto. Resta il Tenaro e resta Tera. Chiediamo adunque: perchè a Tera vanno i Minii? perchè il Tenaro è la sede di Eufemo?

Alla prima domanda si deve rispondere a seconda delle premesse poste dalla ricerca; perchè vi è scelta fra varie possibilità e deve decidere il lavoro precedentemente condotto su punti ove non era scelta. Il P. dirà: i Minii (Tessali) si recano in Tera perchè dopo i Tessali si recarono in Cirenaica i Terei, i quali, non potendo eliminare il ricordo dei loro predecessori, li condussero però nella lor propria isola. Noi diremo: i Minii (discendenti degli Argonauti) vanno a Tera, perchè di Tera mossero i Dori verso la Cirenaica, e quei Dori avevano capi terei che si ritenevano Eufemidi, e questo Eufemo si pretendeva Argonauta affinchè potesse essersi recato in Libia prima dei suoi discendenti a legittimarne il possesso futuro. Le risposte hanno il loro valore dalle premesse.

Lo stesso è pel Tenaro ma con lieve differenza. Pel P., l'Eufemo tessalo era caduto in dimenticanza di fronte alla fama dell'Eufemo tenario. Io dissi in vece che Eufemo ivi fu posto perchè del Peloponneso si doveva far menzione, essendone mossi i Terei (Dori); e perchè, nel Peloponneso, Posidone padre di Eufemo aveva fiorente culto al Tenaro. In questo caso io ho, credo, due vantaggi. In primo luogo tengo conto di un elemento storico in più: la provenienza dei Terei dal Peloponneso, provenienza di cui il ricordo doveva serbarsi in seno ai Dori: la do-

(1) Nel testo di Erodoto è *Εὐθυμίδης*; la correzione in *Εὐφημίδης* mi par sicurissima. Il P. (p. 106 n. 2) vi s'indugia invano.

ricità di Tera è così evidente e indubitabile che la coscienza non ne dovette mancare nè fra gl' Isolani nè fra i Dori del Peloponneso. E senza dubbio prima che Sparta ipotecasse a proprio vantaggio la colonizzazione terea, si doveva raccontarla come mossa dal Peloponneso in genere. In secondo luogo con la mia ipotesi elimino un elemento mitico in più : il culto di Eufemo al Tenaro, che non è affatto testimoniato e che da tutti vien sol tanto supposto su la fede della saga (1).

Dal P. dissento pure su altri tre problemi ; su cui per esser men importanti basterà un cenno rapido.

Egli fa risalire (p. 107) agli Isolani così la tradizione che Erodoto dice Terea (IV 150-153) ; come quella che dice Cirenea (IV 154-156) ; il Malten, e con lui io, aveva in vece ricondotto la prima ai coloni terei, la seconda agli Isolani, in ispecie ai Cretesi, immigrati poi nella Cirenaica (2). Ora che la tradizione terea contenga una lode di Creta e di Samo si può anche ben spiegare, senza attribuirla (come fa il P.) ai Cretesi e Samii, ma col supporre un interesse dei Terei all'amicizia di Creta e Samo, interesse che è per Samo svelato dallo stesso Erodoto (IV 152) apertamente. I particolari poi della bastardigia e della balbuzie, che pel P. non sono disonorevoli secondo i criterii dell'età, vengono taciuti con cura dalla tradizione terea e asseriti con cura da quella cirenea : è dunque palese un intento di silenzio cauto là e di affermazione aperta qui ; intento che è sintomatico e, checchè si pensasse in quell'epoca (la qual cosa mal sappiamo, tenuto conto anche del variare dei criterii nei paesi diversi), induce a credere un contrapposto voluto fra le due tradizioni, e conferma che l'una deve appartenere ai primi coloni terei, l'altra ai secondi isolani.

Nè mi pare che il P. migliori la ipotesi del Malten (p. 102)

---

(1) La versione che fa Eufemo nipote di Eurota (Tzetze *Chil.* II 43 *τῆς τοῦ Εὐρώτα*) è evidentemente tarda e deriva dall'esser stato Eufemo posto sul Tenaro. Non può quindi essere addotta a confortare il passo Pindarico (*Pit.* IV 430) su la patria (*οἴκοι*) di Eufemo al Tenaro.

(2) Su i caratteri delle due tradizioni e sul come le potesse apprendere Erodoto fece aggiustate osservazioni già E. Mollmann *Herodots Darstellung der Geschichte von Cyrene* (Progr. des Kneiphöfischen Stadt-Gymn.) Königsberg 1889 ; che fu a torto trascurato.

e mia (p. 524) per quel che riguarda Grinno, il quale, secondo la versione terea di Erodoto, avrebbe avuto dalla Pizia l'ordine di colonizzare la Libia e lo avrebbe deferito a Batto. Il Malten aveva detto a tal proposito, col mio assenso, che Grinno, discendente di Tera eponimo dell'isola, è qui introdotto da quei medesimi terei che tacevano a ragion veduta la balbuzie di Batto e non facevan cenno della bastardigia; ed è introdotto al medesimo scopo, di porre in rilievo la parte dei Terei nella colonizzazione libica. Il P. in vece (p. 108) spiega Grinno come una intrusione, non terea, ma spartana: gli Spartani cioè avrebbero voluto attribuire a Grinno, discendente del loro " concittadino " Tera, parte analoga a quella di Batto. Ma è vero che Tera è lacedemonio fin dall'origine? o non è vero piuttosto che lacedemonio divenne nel VI sec. quando Sparta prese a esercitare influenza su l'isola, di cui era già l'eponimo? Il P. accetta la prima ipotesi senza addurre motivi. Ma egli non può non vedere che ce ne sono alcuni assai validi per preferire la seconda. È difatti impossibile che a Tera non si raccontasse nulla, fino al sec. VI, su l'origine della città e non si ricordasse un *οἰκιστής*. D'altra parte, secondo la versione spartana, egli conduce a Tera, con gli Spartani, i Minii; ma i Minii risalgono a uno strato leggendario più antico (VII sec., colonizzazione della Libia) e non hanno altro capo oltre Tera; dunque Tera doveva appartenere al loro medesimo strato, ed essere anteriore all'intervento lacedemone, e originariamente non spartano. Al medesimo risultato conduce l'esame della genealogia, onde deriva che Tera è inserito nel quadro dei re spartani artificiosamente (Erod. IV 147) come tutore e affine sol per parte di donna. Per tanto Tera pare anteriore alla saga spartana del sec. VI; quindi Grinno, discendente di Tera, può non essere introdotto a favore di Sparta. A favore di chi? Evidentemente dei Terei; di quegli stessi Terei che vantavano Tera eponimo, e lo ritenevano avo dei loro re, e lo avevan fatto capo dei Minii, un discendente de' quali, Batto, passerà in Libia. In somma, vi sono gravi motivi per ritenere che coloro i quali han introdotto un discendente di Tera accanto a Batto nel tempio delfico, posson essere quei medesimi i quali han posto Tera a capo dei Minii, allor quando dei Minii si valsero per spiegare il potere libico dei Battiadi; siano quindi quei medesimi i quali hanno elabo-

rato la saga favorevole ai Battiadi, ossia i Terei (1). È vero che Pindaro tace di Grinno e ricorda la balbuzie; ma è chiaro che l'uno e l'altro particolare ebbero diversamente rincalzo dalla leggenda ostile che Erodoto dice " cirenea „ e che risale agli Isolani passati in Libia sotto Batto II. Crediamo dunque di poter asserire che il P. mancò alquanto di cautela nell'attribuire senz'altro alla leggenda lacedemone il particolare di Grinno.

Quanto a Batto, il P. respinge l'ipotesi di Erodoto (*Βάττε* = *βασιλεῦ*) e quella del Malten, da me accettata (" Atti „ p. 527). Erodoto, dice il P., non conosceva la lingua dei Cirenei e non poteva quindi sapere come si chiamasse il Re. Ma la conseguenza non risponde affatto alla premessa: ignorare una lingua non vuol dire ignorarne alcuni termini, specialmente ufficiali, che anche gli stranieri conoscono e ripetono (2). Tanto più, il termine in questione s'era in Cirenaica grecizzato, e non doveva quindi sfuggire al greco Erodoto. A ogni modo è certo che i Re cirenei si chiamano Batto alternatamente. Batto è dunque realmente un nome di Re se anche non è l'epiteto regio; sul nome quindi come su l'epiteto può essersi formata la leggenda etimologica della balbuzie. Ma (e qui il P. dice cosa che mi pare, mel perdoni, ingenua) " illa autem fabula omni acumine et paene sensu caret nisi Battos re vera *βάττος*, balbus fuit „. Come! la leggenda (dell'oracolo delfico) ha tutto il suo *acumen* e tutto il suo senso semplicemente se dal nome Batto, del mitico colonizzatore di Cirene, è stato, per gioco etimologico, finto il particolare della balbuzie, e su quel particolare la si è costituita. Il passo di Giustino XIII 7 segg., su cui il P. insiste (p. 110) non muta in nulla la questione: mostra di fatti che l'ordine delfico di colonizzare la Libia fu spacciato come un rimedio della balbuzie da quei mitografi che inventarono l'etimologia di Batto da *βατταρίζω*. Ma da ciò non si può desumere in nessuna guisa

(1) Bastino per ora questi accenni. Su la preistoria di Tera nel mito spero di potermi occupare in un futuro saggio.

(2) Quegli Italiani che sono ignari di tedesco san benissimo il titolo del sovrano tedesco: e i più caratteristici termini arabi non sono ignoti al più illetterato colono dell'odierna Tunisia o Tripolitania.

che Batto *re vera balbus fuit*! L'evidenza è tale che parole non ci appulcro.

Ma basti di ciò (1). Abbiamo ritrattato, in polemica, la materia del mito. Spero che non sia vana fatica; ma giovi a mostrare l'importanza di ricerche così fatte, che possono condurre, a seconda dei diversi metodi, e anche presso autori d'indubbio ingegno e dottrina, a tanto gravi conseguenze, e tanto differenti da quelle che ad altri par di sostenere.

---

(1) Chiederò sol più, in fine: Perchè non crede il Pasquali a un'antica colonizzazione nella Cirenaica di un popolo nascosto dal mito sotto il nome degli Antenoridi? Egli ne avrebbe, per coerenza, quasi il dovere, leggendo Pind. *Pit.* V 82-86.

L'Accademico Segretario
R. Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Maggio 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti: il Direttore della Classe D'Ovidio, ed i Soci Naccari, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Grassi, Somigliana e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Parona e Fusari.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Socio Mattirolo pronuncia alcune parole di commemorazione del sommo botanico Van Tieghem, morto a Parigi il 28 aprile scorso. Era Segretario perpetuo dell'"Académie des Sciences"; e com'era grande scienziato, era valente insegnante.

Il Socio straniero Helmert ha inviato in omaggio un suo opuscolo: *Die isostatische Reduktion der Lotrichtungen.*

Il Socio corrispondente Guccia ha inviato ringraziamenti all'Accademia per la parte presa alle onoranze che gli furon tributate in Palermo il 14 aprile scorso. Il resoconto dell'adunanza solenne che fu tenuta in quel giorno, anche a ricordo del 30° anniversario della fondazione del Circolo matematico di Palermo, fu inviato all'Accademia dal Presidente del Circolo e dal Comitato per le onoranze al Prof. Guccia.

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

I. Guareschi, *Cenni storici sulla scoperta della sensibilità dei sali d'argento alla luce.*

G. Negri, *Le unità ecologiche fondamentali in Fitogeografia.* Nota 1ª, dal Socio Mattirolo.

M. Delgrosso, *Sopra alcuni carbonati misti di Traversella*, inviata dal Socio Parona.

L. Camerano, *Osservazioni intorno alla mucosa palatina del Camoscio delle Alpi.*

LETTURE

Cenni storici sulla scoperta della sensibilità dei sali d'argento alla luce.

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI

Recentemente il sig. Dott. Ing. F. Fritz ha pubblicato alcune notizie storiche (1) intorno alla scoperta della sensibilità dei sali d'argento alla luce. Secondo la nota del sig. Fritz, come già J. M. Eder (2), *l'impulso indiretto alla scoperta dei primi processi di fotografia sarebbe stato dato da Homberg.* E, quale prova della scoperta di Homberg, si cita un brano di una relazione storica di J. B. Du Hamel: *Regiae Scientiarum Academiae Historia*, 1 vol. in-4°, Leipzig, 1698, pag. 331, ed ediz. Paris, 1701, pag. 338 (che è l'edizione che ho sott'occhio io ora), in cui è detto che " Homberg, il 4 settembre 1694, prese un piccolo bossolo di osso di bue, lo immerse in acido nitrico diluito nel quale vi era dell'argento disciolto, e poi lo pose al sole, per il che osservò l'annerimento del bossolo stesso „, ossia come testualmente scriveva Du Hamel:

" Homberg, 4 die Septembris. pyxidem ex ossibus bovinis factam exhibuit variis distinctam coloribus. Ossa aquae forti debilitatae, in qua argentum exsolutum fuerat, ante immersa, tum Soli exposita, atro colore inferta et tornata, instar marmoris erant variegata „.

E dopo questo il sig. Fritz conclude:

" Da questa citazione si deve concludere inoppugnabilmente che Homberg fu veramente lo scopritore della sensibilità dei sali d'argento alla luce e che a Schulze colle sue interessanti ricerche non spetta più che il secondo posto „.

---

(1) *Zur Geschichte der Entdeckung der Lichtempfinlichkeit der Silbersalze* in " Chem. Zeitung „, 1914, N. 22, pag. 246, e riprodotta nell' " Industria Chim. e Mineraria „, 1914, N. 3, pag. 69.

(2) Io non ho visto l'opera di J. M. Eder, *Geschichte d. Photographie.*

Tutto ciò mi sembra molto esagerato e non esatto. Io non riesco a capire come in base a questa imperfetta osservazione si possa far risalire ad Homberg la scoperta della sensibilità dei sali d'argento alla luce, e peggio poi quella dei primi processi fotografici.

L'osservazione fatta dall'Homberg ha, secondo il mio parere, pochissima importanza: sia perchè qui si tratta di nitrato d'argento che è in contatto di materia organica, la quale aumenta la facilità a decomporsi del sale d'argento, sia perchè il fatto empirico che i sali d'argento anneriscono alla luce o all'aria è di osservazione antichissima. È un esperimento facile da farsi: basta bagnare un pezzo d'osso ben pulito, d'avorio o materia analoga, con soluzione acida di nitrato d'argento ed anche lasciato all'oscuro si osserva l'annerimento.

Già l'alchimista Alberto Magno (1), del secolo XIII, riporta l'osservazione (benchè, secondo la traduzione francese, in modo non chiaro) che la soluzione dell'argento nell'acqua forte tinge la pelle in nero: " *tingit cutem hominis nigro colore et difficultor mobili* ".

Chissà quante altre volte sarà stato osservato dagli alchimisti l'annerimento dei composti d'argento. Da alcuni (Berthelot) è attribuita l'osservazione già a Georg Fabricius nell'opera: *De metallicis rebus et neminibus observationes variae et eruditae, quibus ea potissimum explicatur quae G. Agricola praeteriit.* Tiguri, 1566 (2).

Che la pietra infernale (nitrato d'argento fuso e colato in istampi) diventi nera (ed anzi in parte anche per ciò si chiamasse infernale) e che la soluzione dell'argento nello spirito di nitro tinga le mani, dando delle macchie molto resistenti, erano fatti conosciuti da molti scrittori dei secoli XVII e XVIII (Glazer, Lemery, Macquer, ecc.).

(1) *Compositum de Compositis* citato in H. Kopp, *Geschichte d. Chem.*, IV, pag. 200; *Le Composé des Composées* d'Albert le Grand, trad. franc. e ristamp., Paris, 1900, pag. 110.

(2) Vedi anche la mia *Storia della Chimica in Italia*, parte I, pag. 384. L'osservazione del Fabricius, che io credo però di poca importanza, come quella di Homberg, era sfuggita all'Hoefer, *Histoire de la Chimie*, 1843-44, ed al grande storico della Chimica H. Kopp, *Geschichte d. Chem.*, 1843-47.

A mio parere, è ben più importante il fatto che del fenomeno dell'annerimento dei sali d'argento, anzi precisamente del cloruro d'argento, o come si diceva *luna cornea*, ne discorre già come notorio il celebre Rob. Boyle nella sua classica opera: *Experiments and Considerations touching Colours*, 1663 (2ª ediz., 1670) (1). Anzi, come osservano l'Hoefer (2) e l'H. Kopp (3), il Boyle attribuisce l'annerimento non alla luce ma bensì all'aria. Hoefer scrive: " *Le chlorure d'argent noircit au contact de la lumière.* Boyle attribuait ce phénomène à l'action de l'air „, e il Kopp: " *Boyle beobachtete die Schwarzung des chlorsilbers, betrachtete aber in seinen* Experimentis et considerationibus de coloribus (1663) *als die Ursache dieser Beränderung nicht das Licht, sondern die Luft* „.

Ai tempi di Boyle l'annerimento dei sali d'argento era dunque un fatto notorio.

Ed era pure conosciuto il fatto che le soluzioni d'argento tingono in nero molte materie organiche, perchè Boyle (*Opera Omnia*, loc. cit., pag. 932) scriveva: *Solutionem argenti tingere crines colore nigro, notum est Experimentum,* ecc., e più avanti osserva come il nitrato d'argento dia delle macchie nere come quelle dell'inchiostro, ma più difficili da togliersi.

Più che l'osservazione di Homberg, posteriore all'opera di Boyle, ha importanza l'osservazione fatta nel 1727 da J. H. Schulze, ricordata da Hans Stobbe in una conferenza letta nel 1907. Nella mia *Storia della Chimica in Italia*, parte I, pag. 383-84, discorrendo dei lavori di J. B. Beccari, ho ricordato Fabricius, Meyer e Schulze come predecessori di Beccari e di Scheele, ma ho fatto notare che molto più importanti sono le ricerche di questi ultimi due chimici.

Io ho dimostrato che J. B. Beccari di Bologna ha fatto una vera serie di ricerche non accidentali, ma apposite, per studiare l'azione della luce sulla luna cornea o cloruro d'argento, nella sua bellissima memoria che tratta dell'azione della luce

---

(1) Vedi anche R. Boyle, *Opera Omnia Experimenta et Considerationes de coloribus.* Venet., 1696, t. I, pag. 882.

(2) *Histoire de la Chimie*, II, pag. 167.

(3) *Geschichte d. Chem.*, IV, pag. 203.

sui colori (*De vi, quam ipsa per se lux habet, non colores modo*, ecc.) (1) pubblicata nel 1757. Questa memoria fu molto lodata dal Senebier nelle sue *Mémoires phys.-chim. sur l'influence de la lumière solaire pour modifier les êtres des trois règnes de la Nature*, 1782, t. III, pag. 186. La memoria del Beccari fu da me ripubblicata in latino colla traduzione italiana a lato. Egli dimostrò che la colorazione violetta poi bruno-nera del cloruro d'argento era dovuta all'azione della luce, e non dell'aria.

E qui mi piace di riprodurre un brano della memoria sui colori di Beccari più sopra accennata:

" Il preparato d'argento, detto comunemente *luna cornea*, " ove sia recente, è bianco leggermente giallognolo e diventa " in seguito violaceo. La quale variazione di colore il Beccari " prima aveva giudicato doversi attribuire all'aria, poscia pren- " dendo a sospettare un pochino della luce, decise di rimettere " la questione agli esperimenti in questo modo. In una camera, " innanzi alla finestra e alla distanza di circa otto passi da " questa, pose della luna cornea racchiusa in vaso di vetro. La " camera era illuminata da una luce moderata penetrante dalla " finestra. Trascorso qualche tempo, il Beccari constatò che la " parte della luna cornea prospiciente la finestra, e quindi meglio " illuminata, era divenuta violacea; non così la parte opposta " meno rischiarata, la quale aveva ritenuto il suo colore natu- " rale. Ciò sembrava dimostrare chiaramente l'esistenza nella " luce di qualche energia capace di cambiare i colori.

" E a persuadersene maggiormente, il Beccari rigirò il vaso, " esponendo verso la finestra quella parte della luna cornea che " riteneva tuttavia il suo pristino colore. E affinchè il giudizio " fosse più certo, applicò a mezzo il vaso, dalla parte rivolta alla " finestra, un foglietto nerissimo che impedisse il passaggio della " luce; bramando vedere che cosa avvenisse là dove la luna cornea " era protetta dal foglio. Rimase così fino al domani, in cui il " Beccari, ritornato al vasetto, rinvenne il cloruro d'argento " tinto completamente in violetto, tranne nel punto da cui il " foglietto aveva tenuto lontano la luce, il quale era, come " suole essere, bianchiccio ". E così l'autore continua con altre

(1) *Comment. Bonon.*, 1757, IV, pagg. 74-87.

esperienze su vari colori vegetali, ecc. Come si vede esperimentava ben diversamente dall'Homberg!

Dopo Beccari viene Scheele, il quale certamente essendo chimico di alto valore fece uno studio del cloruro d'argento che è ammirevole. Dimostrò coi reattivi, come poteva fare egli allora, che il cloruro d'argento alla luce diventato violetto poi imbrunito, erasi decomposto con formazione di acido muriatico deflogisticato (cloro) ed argento metallico. Vide che la parte annerita trattata con acido nitrico fornisce del nitrato d'argento. Oggi noi rappresentiamo la reazione con:

$$2AgCl = Ag^2Cl + Cl$$
$$Ag^2Cl = AgCl + Ag.$$

Dimostrò che la decomposizione è molto più pronta e intensa se sul cloruro d'argento agiscono i raggi di luce violetta (1).

Per la storia della fotografia dunque l'osservazione di Homberg non ha importanza; ma se lo studio dell'annerimento dei sali d'argento, e specialmente del cloruro, ha importanza per la storia della fotografia, allora bisogna risalire a Beccari ed a Scheele.

I primi tentativi di vera fotografia, cioè di riproduzioni fotografiche, debbonsi a Wedgwood, manifatturiere inglese, al fisico Charles e ad H. Davy. Però è indubitato che si debba considerare Joseph Nicéphore Niepce (nato il 7 marzo 1765 a Châlons-sur-Saône e morto il 3 luglio 1833 a Gras) come il primo e vero inventore della fotografia, perchè ottenne delle immagini durevoli; e come giustamente osservarono Barreswill e Davanne, egli pel primo immaginò un fissativo, impiegò l'argento e utilizzò il jodo in vapore. Le sue esperienze datano dal 1814. Nel 1829 vi si associò il Daguerre che realizzò praticamente le ricerche di Niepce e fondò quella tecnica che si disse *Daguerrotipia*.

---

(1) W. Scheele, *Traité de l'air et du feu*, 1777, e trad. franc. del 1781, pag. 134-135.

I veri precursori della fotografia, se si vuol intendere con questo nome coloro che osservarono e studiarono l'azione della luce sui sali d'argento, e specialmente sul cloruro, sono stati: Schulze, J. B. Beccari e W. Scheele, ma specialmente i due ultimi.

Nè dobbiamo dimenticare l'invenzione della *camera nera*, che si deve a G. B. Porta (nato a Napoli nel 1540 e morto nel 1615).

Io non dirò di più, perchè non intendo entrare nella storia della fotografia; a me basta aver provato che ad Homberg devesi nulla di nuovo relativamente all'annerimento dei sali di argento e non si deve affatto considerare come un precursore dell'invenzione della fotografia o della sensibilità dei sali d'argento alla luce.

Torino, R. Università, 20 maggio 1914.

Le unità ecologiche fondamentali in Fitogeografia.

Nota I^a del Dott. GIOVANNI NEGRI

I.

Il Congresso Internazionale di Botanica tenutosi a Bruxelles nel 1910, il quale s'era proposto di *precisare i metodi e le espressioni utilizzate in Geografia Botanica*, ed al quale anzi, allo scopo di sgombrare il terreno dal lavoro preparatorio, era stata presentata una estesa ed imparziale relazione in merito (1), si è sciolto rinunciando a definire le unità fondamentali della Sinecologia, invocando nuovi studi in proposito ed esortando pel momento i singoli studiosi a precisare il senso volta per volta assegnato ai termini adottati pei loro lavori (2).

Ora lo scopo fondamentale e pratico di una qualunque nomenclatura si è quello di porre a disposizione degli studiosi del ramo di scienza corrispondente un numero di termini possibilmente limitato, ma esprimenti concetti l'estensione ed i rapporti dei quali vengano precisati con tutto il rigore possibile. Essi costituiscono la misura comune per gli studiosi, le osservazioni dei quali diventano paragonabili fra di loro appunto perchè eseguite seguendo una traccia unica; perdono quindi qualunque valore quando la loro giustificazione nella realtà non venga universalmente e totalmente riconosciuta.

---

(1) Flahault Ch. et Schröter E., *Nomenclature Phytogéographique. Rapports et propositions au III Congr. int. de Botanique*, Zurich, 1910.

(2) *Actes du III Congrès int. de Botanique*, Bruxelles, 1910, publiés par E. De Wildeman, vol. 1°, " Comptes-Rendus ", p. 126.

Il consiglio del Congresso di Bruxelles ai fitogeografi si risolverebbe quindi in una confessione d'impotenza che nessuno può sentirsi di accettare come definitiva, quando non sottintendesse l'intenzione di raccogliere invece da ogni parte, per le discussioni future, la maggior possibile quantità di materiale critico.

L'accordo sulla complessa questione delle unità fitogeografiche fondamentali e sul metodo della loro distinzione non è però avvenuto neppure in questi ultimi anni; basti citare quali esempi recenti d'inconciliabilità radicale di vedute, la vivace recensione che il Diels (1) ha dato dei concetti informanti il manuale *Types of British Vegetation* redatto sotto la direzione del Tansley e quella non meno serrata di quest'ultimo (2) sulla classificazione delle associazioni vegetali proposta da Brockmann-Jerosch e Rübel.

Su questo argomento essenziale e controverso può quindi tutt'ora giovare l'espressione degli apprezzamenti individuali; ed è a questo pensiero che s'inspira lo studio seguente, il quale vorrebbe sottrarsi all'appunto fatto dal Moss (3) ai lavori consimili, di aver piuttosto discusso criticamente dei termini che delle idee in essi contenute.

Per chi voglia aprirsi una via personale nel folto di sottigliezze e di contraddizioni che ingombrano questa questione così pregiudicata, pare a me che il punto di partenza potrebbe essere dato dalla considerazione che le unità *autecologiche* — stazione del singolo individuo vegetale, individuo considerato nei suoi caratteri relativamente fissi quale membro di una specie, individuo considerato nei suoi caratteri di adattamento all'ambiente quale forma di vegetazione — corrispondono alle unità *sinecologiche* (4) — stazione, associazione, formazione — termine a

(1) Cfr. in " Zeitschr. f. Bot. ", IV (1912), pp 280-82.

(2) Cfr. in " The Journal of Ecology ", I (1913), pp. 27-42.

(3) Moss C. E., *The fundamental Units of vegetation* (" The New Phytologist ", vol. IX, nos. 1, 2, 1910).

(4) *Nomenclature phytogéographique*, l. c., p. 24, prop. 8° f. " Le terme *Oecologie* comprend l'ensemble des relations existant entre les individus végétaux, ou les associations végétales d'une part et la station d'autre part (*οἶκος* = demeure = station = milieu). L'Oecologie comprend l'étude des

termine e secondo un rapporto che è piuttosto quantitativo che qualitativo: e ciò anche prescindendo dall' estensione che si voglia rispettivamente attribuire ai concetti di associazione e di formazione e dai loro eventuali rapporti di dipendenza. Ora, se, per comodità di studio, è opportuno che le unità elementari ed indivisibili della vegetazione vengano raggruppate in categorie di ordine superiore, è implicito che queste ultime per la loro stessa natura di quantità ulteriormente divisibili in entità minori, affini ma non identiche (1), pure fondandosi su di un certo grado di corrispondenza reale e globale ad un gruppo di condizioni generali dell'ambiente che ne determinano la fisionomia caratteristica, contengano una certa quantità di discordanze elementari dalle quali bisognerà fare astrazione; onde l'indole più o meno schematica di tali categorie e la loro natura più o meno soggettiva.

Carattere veramente elementare rivestono invece le unità autecologiche.

Consideriamo infatti la discendenza di un unico seme, caduto sull'area di terreno adatto, necessaria e sufficiente allo sviluppo della pianta ed al disopra della quale incomba un clima parimente propizio durante tutto il tempo che intercede fra il germogliare del seme e la formazione dei nuovi semi maturi. La pianta che si è svolta così nelle migliori condizioni ecologiche possibili e che ha dato origine ad un certo numero di disseminuli pronti a ricominciare il medesimo ciclo vitale quando s'avveri attorno ad essi il medesimo concorso di circostanze favorevoli, si diffonderà tanto più facilmente quanto più accessibili e numerose saranno le stazioni elementari che le posseggono; e, per la ripetizione indefinita di questa vicenda, essa

---

conditions de milieu et de l'adaptation des espèces végétales, soit prises isolément (*Autécologie*), soit réunies en associations (*Synécologie* ou étude des formations) „.

(1) Tutta l'opera di Jaccard, in quanto tende a mettere in evidenza la diversità elementare della distribuzione florale, è una conferma della relatività delle unità sinecologiche (Cfr. *Étude comparative de la distribution florale dans quelques formations terrestres et aquatiques*, " Rev. Gen. de Botanique „, XXVI (1914), n. 301-302, nonchè i lavori precedenti citati in quest'ultimo).

raggiungerà punti sempre più lontani sulla superficie terrestre dal punto in cui si è svolto il primo individuo sino a che — concorrenza vitale delle altre specie pel momento esclusa — gli ostacoli topografici od il mutare dell'ambiente fisico oltre ai suoi limiti di accomodamento non ne arrestino l'espansione o ne escludano la possibilità di riprodursi. E poichè l'individuo vegetale, pure non potendo per lo più spingere la sua risposta alle condizioni ambientali sino all'*adattamento* presenta tuttavia in ogni caso una capacità di *accomodamento* — la distinzione molto opportuna è di Massart (1) — variabile da specie a specie, ma spesso notevole, così è da tenersi conto, in più della tolleranza specifica alle variazioni dell'ambiente non accompagnata da variazioni morfologiche, anche di questa plasticità in riserva, mercè la quale la diffusione può, sino ad un certo punto, continuare oltre i limiti dell'area delle specie ed intensificarsi entro i limiti stessi per mezzo di forme leggermente modificate, la differenziazione delle quali è legata alle cause che l'hanno determinata e non dura più di esse. Così l'osservazione ci mostra attuati in natura i concetti di *specie*, di *stazione elementare* dei suoi individui e di *forma di accomodamento*.

In natura del resto, e per parecchie ragioni, le cose si svolgono in modo più complicato. Anzitutto, in questo schema di diffusione di una specie non è tenuto conto della concorrenza vitale delle altre specie, l'area di distribuzione delle quali interferisce con quella della prima, e che diventano alla lor volta cause modificatrici dell'ambiente, dipendendone e determinandolo ad un tempo. Poi la diffusione non avviene in un ambiente modificantesi uniformemente e gradualmente dal centro alla periferia dell'area geografica, bensì in un ambiente edaficamente, fisiograficamente e quindi anche climaticamente così multiforme che il substrato solo può paragonarsi col Kraus (2) ad un vero

(1) Massart J., *Esquisse de la Géographie Botanique de la Belgique* („ Rec. de l'Inst. Bot. Léo Errera „, tome suppl. VII *bis*, Bruxelles, 1910). „ On pourrait se mettre d'accord pour appeler *adaptation* l'ensemble des caractères héréditaires obtenus par mutation, grâce auxquels l'espèce est en harmonie avec son milieu; et *accomodation* l'ensemble des caractères non héréditaires et plastiques par lesquels l'individu se met en harmonie avec les vicissitudes du milieu „.

(2) Kraus G., *Boden und Klima auf kleinsten Raum* (Jena, 1911), p. 6. "Das Endresultat meiner Bemühungen um den Wellenkalkboden war, das der

mosaico, cosicchè le stazioni favorevoli non vi sono necessariamente contigue. Infine questo stesso *habitat* così multiforme non costituisce un assieme rigido ed immutabile, bensì, come dotato di una vita propria, si mantiene in continua fluttuazione ed evolve col mutar degli agenti che lo determinano, con una influenza sulla vegetazione che l'occupa tanto più complessa in quanto che il gioco dei fattori ecologici si esercita su individui di accomodabilità varia e quindi diversamente armati per la resistenza alle cause fisiche e la concorrenza colle specie più tolleranti.

In ogni modo, sotto l'influenza degli agenti favorevoli e contrari ai quali è soggetta, l'area di diffusione di ogni specie varia infinitamente, in confronto a quella delle specie che l'accompagnano ed anche nei vari tempi in cui noi la prendiamo in esame; come in seno all'area stessa è in continua fluttuazione il grado di densità col quale i suoi individui vi sono distribuiti. Altro fatto questo di cui non può disconoscersi l'importanza quando si studi la frequenza rispettiva con cui le specie componenti entrano in un consorzio vegetale. Ogni specie possiede perciò un'area di possibile diffusione in cui convengono, con maggiore o minore densità, le stazioni elementari atte ad ospitarne un individuo normale in tutto il corso della sua evoluzione vitale. In esse quindi si attua completamente e nella sua forma più elementare il fatto fitogeografico; e l'occupazione è talmente completa che l'individuo vegetale satura per dir così quel tanto di ambiente che gli occorre, con un adattamento molto più stretto ed esclusivo di quello che siamo soliti ad ammettere collettivamente per gl'individui occupanti una delle aree normalmente indicate come stazioni a causa di una uniformità riconosciuta *grosso modo* alle loro superficie; lo fa anzi talmente cosa sua che esso diventa un carattere del sistema risultante e non può più essere pensato separatamente. A questo

---

Natur-(Wild-)-Boden, im Gegensatz zum Kulturboden, nirgends gleichartig, sondern, wie man sich am einfachsten vorstellt, aus einem über jede Erwartung mannigfaltigen Mosaik chemisch und physikalisch verschiedenster Bodenflecke besteht. Es sind, auf kleinstem Raum in der Natur, eine unendliche Mannigfalgkeit chemisch und physikalisch verschiedener gebauter ‘ Standorte ’ gegeben „.

sistema, vera unità chiusa nella rispondenza completa delle sue parti, daremo, per intenderci, il nome di *ecoide*.

Questo è anche il concetto espresso recentemente dal Pavillard (1) scrivendo che " la definizione integrale di una specie, la sua descrizione completa, consta di due parti, la diagnosi sistematica e la diagnosi ecologica: questa risulta a sua volta di due termini, reciprocamente complementari, la forma biologica e la stazione. Stazione è il substrato normale, l'ambiente della specie ". La necessità di questa reciproca integrazione dei tre elementi fondamentali dell'ecologia in un unico termine veramente inscindibile e che sta alla base di ogni concetto fitogeografico, trova del resto la sua giustificazione nell'osservazione di alcuni fatti in cui l'attuazione ne è assolutamente evidente. Così io mi sono altra volta (2) ritenuto autorizzato a spiegare la forma appianata ad ombrello di molte specie arboree dei paesi caldi ed asciutti e quella cupulare di parecchie piante cespugliose delle medesime regioni colle modificazioni favorevoli indotte da queste disposizioni rispettivamente nel terreno e nell'atmosfera che stanno in diretto rapporto colla pianta. Considerazioni analoghe sono fatte da Hauri (3) a proposito della ecologia della disposizione a pulvino così frequente nelle piante deserticole. Così infine, in un caso più complesso, ma riducibile al medesimo fenomeno di autopreparazione dell'ambiente da parte dell'individuo vegetale che l'occupa, si verifica la spopolazione dell'area di terreno invasa dalle radici delle quercie tuberifere da tutta la vegetazione minore, con un equilibrio così sensibile fra sviluppo delle tuberrize e rivestimento erbaceo

---

(1) Pavillard J., *Essai sur la nomenclature phytogéographique* (" Bull. de la Société Languedocienne de Géographie ", XXXV, Montpellier, 1912), p. 2 estr.

(2) Negri G., *Appunti di una escursione botanica nell'Etiopia meridionale* (" Monograf. e rapp. coloniali ", n. 4, Roma, febbraio 1913, Ministero delle Colonie), pp. 59-60.

(3) Hauri H., *Anabasis aretioides Mog. et Con. eine Polsterpflanze der algerischen Sahara. Mit einem Anhang, die Kenntnis der angiospermen Polsterpflanzen überhaupt betreffend* (" Beih. z. Bot. Centralbl. ", XXVIII, 1°, 1912), pp. 323-421

del suolo, che la ricomparsa di questo è l'indice costante dell'esaurimento di quelle (1).

Avrò campo più avanti di mostrare come la nozione di *ecoide* introdotta nella definizione delle unità sinecologiche valga a chiarirne i limiti ed i rapporti. E che nessuna unità intermedia possa, sulla base dei fatti, essere intercalata fra queste e quello, lo prova l'esame dei tentativi fatti per spiegare i fenomeni associativi della vegetazione mediante un'analisi più minuta di quanto non consenta il metodo ormai oltrepassato del rilevamento puramente fisionomico o sia pure ecologico-fisionomico (2), senza scendere sino all'individuo ed al suo ambiente elementare.

Così Oettli (3) fa rimontare il concetto di queste unità di ordine inferiore a Kerner il quale ha già definite come stazioni vegetali i punti limitati di un territorio ove concorrono le condizioni di vita efficace per una determinata specie e pel suo locale mantenersi mediante la discendenza, aggiungendo che questo concetto di stazione (*Standort*) è affatto differente da quello ammesso nel linguaggio comune. E siccome è assai meno opportuno obbligare il discorso usuale ad esprimere un concetto nuovo con un vecchio vocabolo che mutare addirittura questo, così Oettli propone il termine di *Wurzelort per le stazioni occupate da una sola e medesima specie e caratterizzate da qualche carattere peculiare e comune*. In un caso come nell'altro è accennato ad un'unica specie, non ai singoli individui di una determinata specie, cosicchè si può pensare benissimo al *Wurzelort* come dovuto al concorso di un numero indeterminato di *ecoidi* simili e contigui, nel qual caso non è detto che non possano esistere interazioni degl'individui stessi ed il concetto di unità assolutamente elementare ed in sè completa, per quanto abba-

---

(1) Mattirolo O., *I Tartufi. Come si coltivano in Francia. Perchè non si coltivano e come si potrebbero coltivare in Italia* (" Ann. R. Accad. Agricoltura di Torino ", LII (1909), pp. 30-35 estr.).

(2) Brockmann-Jerosch H. und Rübel E., *Die Einteilung der Pflanzengesellschaften nach ökologisch-physionomischen Gesichtpunkten*, Leipzig, 1912.

(3) Oettli Max, *Beiträge zur Oekologie der Felsflora* (" Jahrb. d. St. Gallischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft ", 1903, n. Sep.-Abdr., Zürich, 1905).

stanza avvicinato, non è raggiunto, come non sono evitati gli appunti di schematismo e di soggettività già fatti per le unità ecologiche superiori.

Analogamente si può ragionare pel *Wuchsort* di Hess (1). Posto che il termine di stazione (*Standort*) indica il substrato della vegetazione considerato tanto dal punto fisiografico che da quello pedologico, egli osserva che " la minoranza delle stazioni " è così uniformemente costituita che ogni pianta possa svilup- " parvisi nelle identiche condizioni della vicina: ed indica quindi " come *Wuchsort quella porzione di ambiente colla quale la pianta* " *sta in diretto rapporto spaziale.* E sta il fatto che, mentre " una stazione, per quanto uniforme, contiene tutta una serie " di *Wuchsorte*, tali *Wuchsorte* possono d'altra parte ripetersi " in una quantità di stazioni diverse, naturalmente con diversa " frequenza ". Fin qui il concetto dell'*ecoide* sembrerebbe intravisto ancor più chiaramente che non da Oettli se pure in questo caso non mancasse l'affermazione che il *Wuchsort* deve necessariamente intendersi limitato ad un solo individuo rappresentante una *Wuchsform* corrispondente e ad esso necessariamente accompagnantesi. Senza di essa il concetto di unità fondamentale si sgretola immediatamente nelle mani stesse dell'Autore. " Ma, aggiunge egli infatti, esistono stazioni, quale sarebbe per " esempio un banco di sabbia, che constano di *Wuchsorte* stret- " tamente simili, ed in tal caso colla denominazione di stazione " vengono sufficientemente indicati anche i *Wuchsorte*. Tali " *Wuchsorte, per lo più* (!) *occupati da una sola specie*, corri- " spondono ai *Wurzelorte* di Oettli. In essi, mentre alcune ca- " ratteristiche si mantengono stabilmente, altre qualità variano " determinando la comparsa di forme di adattamento negl'in- " dividui che albergano: e ciascuna di tali forme è l'indice " dell'essersi determinato un *Wuchsort* corrispondente. Così la " esistenza sporadica di specie eterogenee in una formazione " omogenea, dipende dalla eterogeneità delle condizioni di ve- " getazione in corrispondenza di piccolissime aree sporadiche, " eterogeneità che può stare in rapporto sia con alterazioni

(1) Hess C., *Ueber die Wuchsformen der alpinen Geröllpflanzen*, " Beih. z. Bot. Centralbl. ", XXVII, 2°, 1910.

" edafiche localizzate, sia colla limitata permanenza di un tipo " edafico alteratosi in tutto il resto delle superficie della sta- " zione: e queste aree sono da considerarsi come altrettanti " *Wuchsorte* ".

Che l'Hess, pure avvicinandosi molto alla nozione di *ecoide*, non vi sia in definitiva giunto, risulta anche dalla coincidenza rilevata dall'Autore stesso, di queste sue ultime considerazioni col concetto degli *edafoidi* di Sernander (1). Con questo termine questo Autore indica le piccole aree rivestite di vegetazione eterogenea, le quali compaiono in seno alle grandi consociazioni vegetali di origine climatica od edafica, determinate da differenze locali nelle proprietà del suolo. Così, per esempio, egli, studiando le modalità di alterazione delle formazioni in conseguenza di alterazioni climatiche, ha rilevato come le aree di vegetazione che circondano immediatamente la base degli alberi e che presentano un particolare e costante carattere di xerofilia, si possono dilatare durante una stagione od una serie di stagioni eccezionalmente asciutte diventando il punto di partenza della degradazione delle formazioni erbacee che le inglobano. Qui, secondo la definizione che ce ne ha dato il Clements (2), ci troviamo di fronte ad un caso di *alternazione* puro e semplice: non è possibile considerare come una unità ecologica elementare una piccola formazione che non differisce dalla grande formazione che la circonda che in dimensione, e che inoltre, date favorevoli circostanze, è suscettibile di entrare in competizione con essa dilatandosi a sue spese. Siamo in questo caso assai lontani dall'*ecoide*, il quale non può essere inteso più o meno esteso di quanto sia per necessità fisiologica; esso può, tutto al più, ripetersi un numero indefinito di volte in altrettanti *ecoidi* contigui, ma in questo caso costituirà una formazione, pura sino al limite dell'uniformità, ma per definizione non identificabile con un *ecoide*.

---

(1) Sernander R., *Stipa pennata i Västergöttand. En studie öfver den subboreala periodens inflytande på den nordiska vegetationens utvecklingshistorie.* " Rec. in. Bot. Centralbl. ", Bd. 111 (1909, II, p. 148-51).

(2) Clements F., *Research methods in Ecology*, Lincoln (Ne.) 1905, p. 283 e seg.

Bisogna di fatto distinguere la necessità di porre alla base dell'ecologia una unità teorica e di valore *assoluto*, dalla utilità pratica di riconoscere in seno ai consorzi vegetali degli aggruppamenti secondari di valore *relativo*, ciò che, a cominciare dalle differenze di *facies* indicate da Lorenz (1) sino dal 1838, è stato poi tentato con diversa fortuna da un numero abbastanza grande di ecologi. A questo secondo ordine di raggruppamenti, metodicamente importante e sul quale dovrò ritornare più avanti, va ascritta anche l'*associazione elementare* proposta dal Drude (2) come unità fondamentale della sinecologia. A questa unità, malgrado il rispetto per la grande autorità dell'Autore, non può essere risparmiato, come alle precedenti, l'appunto di costituire nulla più che un consorzio minore, e naturalmente precisabile mediante un maggior numero di caratteri, in seno ai consorzi maggiori. Egli chiama *associazione elementare* il complesso delle specie che nell'occupazione del suolo si raccolgono nel minor spazio possibile, tenuto conto dei loro rapporti di reciproca e più o meno determinata dipendenza; la sua stazione deve essere edaficamente uniforme, cioè non presentare alcuna differenza, rilevabile da un occhio ecologicamente esperto, capace d'influenzare l'occupazione del terreno da parte della pianta, e l'associazione rimane quindi limitata ad aree molto piccole le quali sono paragonabili fra di loro nel consorzio vegetale al quale appartengono. Evidentemente gli *edafoidi* di Sernander sopra accennati sono anch'essi delle associazioni elementari e possono quindi essere ripetute a proposito di queste le cose dette sul conto di quelli. Si aggiunga ad entrambi questi termini un'altra limitazione posta dal Tansley a quello di *plant-Society*, presso a poco equivalente, che pei fitogeografi inglesi corrisponde alle aggregazioni più o meno definite di specie caratteristiche o di piccoli gruppi di specie rilevabili in seno alle associazioni. Essi possono essere dovuti sia a locali variazioni dell'*habitat* ed alla locale conservazione di un lembo di formazione alteratasi in tutto il resto della superficie della stazione (cfr. i

(1) Lorenz, *Allgm. Resultate aus d. pflanzengeogr. u. genetisch. Untersuchung d. Moore in pracalp. Hügelland Salzburgs*, " Flora ", Bd. XVI (1838).

(2) Drude O., *Die Oekologie der Pflanzen* (" Die Wissenschaft ", Bd. 50, Braunschweig, 1903, p. 208 e seg.).

Wuchsorte di Hess), sia a causa accidentale pel locale arrivo di una massa di disseminuli o per lo sviluppo in colonia d'una pianta rizomatosa. Il Tansley si chiede se non si giungerebbe ad una concezione molto più logica di queste unità minori distinguendo i due modi di origine e mantenendo il termine di *Society* pel secondo soltanto (1). Nel primo caso non si ha, come ho già detto, che un fatto di *alternazione* od un relitto di formazione precedentemente estesa, incluso nella formazione succedutagli: e questa è pure la condizione tanto delle associazioni elementari come degli *edafoidi*.

La nozione dell'*ecoide* è del resto potenzialmente contenuta in alcune linee scritte dal Flahault (2). " Il termine di Asso-" ciazione vegetale non implica un armonico concorso di ten-" denze diverse verso uno scopo comune di beneficio collettivo, " come in ogni società fondata sulla divisione del lavoro. Esso " si applica ad un concorso di forme specificamente e morfolo-" gicamente estranee le une alle altre diretto al profitto esclu-" sivo di ciascuna di esse; esse vivono le une presso le altre, " in dipendenza della conformità o della diversità di esigenze " che trovano la loro soddisfazione sia nelle condizioni di am-" biente, sia in quelle determinate dalla presenza di altri ve-" getali ". Ed è indubitabile che, fondandosi sul riconoscimento della radicale eterogeneità ecologica e sociale dei consorzi vegetali fisionomicamente più uniformi, essa restringe l'ampiezza della capacità accomodativa richiesta dalle singole specie costituenti di una associazione.

Il Massart (3), osservando che una associazione qualunque può considerarsi come un intarsio, gli elementi molto varii del

---

(1) Types of British Vegetation *by members of the Central Committee for the survey and study of British Vegetation*, edited by A. G. Tansley (Cambridge, 1911, p. 12). Del resto questa è l'opinione espressa dai delegati del Comitato per lo studio della flora inglese al Congresso di Bruxelles: " 5° L'expression groupement local (plant - society) doit être appliquée à une *aggrégation locale d'individus d'une espèce* à l'intérieur d'une association ". *Nomenclature phytogéographique*, l. c., p. 16.

(2) Flahault Ch., *Projet de nomenclature phytogéographique* (Congr. int. de Botanique à Paris (1-10 octobre 1900), p. 15 estr.).

(3) Massart J., l. c., pp. 5-6.

quale provengano dai luoghi più disparati possibili, si pone due domande: quale sia cioè la combinazione di condizioni che ogni stazione deve realizzare per bastare ai bisogni dei vegetali che la popolano, e quale sia d'altra parte esattamente l'ampiezza delle differenze ecologiche tollerabili dalle specie che compongono la florula di una stazione, dato che esse vivono anche in altre stazioni, le condizioni d'esistenza delle quali sono più o meno profondamente differenti. Orbene il concetto di *ecoide* che si concilia con una capacità d'accomodamento molto ristretta, in quanto la forma tipica di una specie ed una qualunque delle sue forme di accomodamento, considerate nelle loro condizioni complete di individui vegetali e di ambienti da esse occupati, costituiscono due entità dal punto di vista fitogeografico, due *ecoidi*, non solo distinti, ma diversi; giustifica l'eterogeneità dei consorzi vegetali, in quanto mostrandone la compagine, sotto l'apparente unità fisionomica, disciolta appunto nel senso della definizione di Flahault sopra riportata, li risolve in tante unità indipendenti quanti sono gl'individui che li compongono. Nota bensì il Pavillard (1) che, dal momento che anche l'individuo vegetale può entrare a far parte di una stazione in condizioni tali da portarvi un elemento nuovo di diversità ambientale, la stazione che, originariamente, comporta la presenza di tutte le specie che le condizioni generali di esistenza realizzate per ciascuna di esse dall'ambiente o dalla loro coesistenza sono impotenti ad eliminare; diventa anche un centro di attrazione — direi piuttosto la sede di una *successione secondaria* — per tutta una serie di forme chiamate a beneficiare delle condizioni mutate, per opera della vegetazione, a favore della vegetazione stessa. Ma neppure in questo caso può dirsi che l'unità dei singoli *ecoidi* convenuti nella stazione si perda in una associazione di elementi necessariamente interdipendenti. L'azione che un *ecoide* od il concorrere di un complesso di *ecoidi* simili od affini (2) più o meno addensati ed interferenti nella loro azione,

(1) Pavillard J., *Éléments de biologie végétale* (Paris, Montpellier, 1901), pp. 563-64.

(2) Bisogna infatti riconoscere questi casi distinti. Si pensi infatti alla *florula epidendra* di un albero isolato, a quella *sciafila* di una foresta costituita di un'unica essenza arborea od *infestante* di una determinata col-

esercita modificando le condizioni fisiche di una stazione diventa, per gli altri *ecoidi* che ne dipendono o ne sono esclusi un fatto puramente ambientale; la specie dominante crea, per dir così, una stazione nella stazione, senza che la sua qualità di *ecoide* distinto venga alterata per l'influenza che in qualunque senso ne possano risentire gli *ecoidi* che con essa contraggono un rapporto ambientale.

A questo proposito però deve essere chiarita una questione. Si è molto studiata in questi ultimi tempi, specialmente per opera dell'Höck, la florula concomitante delle nostre principali essenze forestali, cosicchè è uso, alla descrizione dei consorzi da esse costituiti, aggiungere l'elenco delle piante minori caratteristiche. Quando però si parla, per es., di specie compagne del faggio (1) non bisogna dare al riconoscimento della frequente loro presenza nelle faggete un significato che oltrepassi la constatazione della coincidenza dell'area di distribuzione della specie dominante con quelle delle specie accompagnatrici, e dell'attuazione nei boschi di faggio delle condizioni ambientali particolarmente favorevoli alla vegetazione delle specie subordinate.

Un nesso di questa natura, puramente dovuto al combinare di una coincidenza geografica — comune del resto ad altre specie che ai boschi di faggio non si associano normalmente — e di una coincidenza di esigenze ambientali, non ha evidentemente nulla di contradditorio colla nozione di *ecoide*, rientrando nella categoria delle modificazioni di ambiente determinate dalla vegetazione a pro di una vegetazione subordinata. Che del resto il rapporto fra la vegetazione arborea e quella del sottobosco non oltrepassi il carattere di un puro e semplice commensalismo lo dimostra la facilità colla quale le specie secondarie della fag-

---

tivazione, ed infine a quella *subordinata* di uno dei multiformi boschi tropicali o di un consorzio di graminacee o di ciperacee, colonia di *ecoidi* affini fra di loro, e nell'azione sull'ambiente che creano secondariamente alle piante concomitanti, per la loro convergenza di adattazione morfologica, malgrado l'eterogeneità sistematica.

(1) Höck F. M., *Brandenburger Buchenbegleiter* (" Verhandl. d. Bot. Vereins d. Prov. Brand. „ (1894) XXXVI Jahrg., p. 7 e seg. — Winkler H., *Pflanzengeographische Studien über die Formation des Buchenwaldes.* Inaug. Diss. Breslau, 1901.

geta entrano nella composizione anche di altri consorzi, ed inversamente il fatto della loro conservazione allo stato di associazione subordinata anche quando l'essenza arborea dominante venga sostituita da un'altra capace di mantenere presso a poco immutate le condizioni del sottobosco: particolare quest'ultimo molto interessante poichè il sottobosco viene così ad assumere pel fitogeografo il significato di un relitto (1). Infine, a confermare la natura accidentale e non necessaria della convivenza del sottobosco colla specie sociale che lo protegge, può valere il carattere raccogliticcio di alcuni sottoboschi di recente costituzione, quali quello della robinia ed anche, per la nostra regione prealpina, quello del castagno. La questione del resto se le specie di cui constano le attuali associazioni naturali sieno immigrate collettivamente nelle nostre regioni o se esse associazioni non si sieno costituite secondariamente *in situ* per la riunione di elementi di diversa provenienza, è stata discussa e risolta in questo secondo senso dal Keller (2); e, per quanto riguarda l'associazione del faggio, l'Hegi (3) vi riscontrò una tale eterogeneità di elementi da concludere che, secondo ogni verosimiglianza, essa non ha assunto la sua struttura e fisionomia attuale che dopo il periodo glaciale. Ed anche il fatto della fissazione delle diverse forme di alcune uredinee forestali, rispettivamente su specie dei singoli piani arboreo ed erbaceo della associazione, citato da Neger (4) come la prova più evidente della intimità dei rapporti che la millenaria convivenza induce fra l'essenza dominante ed il suo sottobosco; se pure si accetti l'opinione di Fischer e Dietel (5) dell'originaria plurivorità delle uredinee.

(1) Cfr. Flahault Ch., *Les limites supérieurs de la végétation forestière et les prairies pseudoalpines en France* (" Rev. des Eaux et Forêts ", 1901, p. 131). — Negri G., *La vegetazione della collina di Torino* (" Mem. R. Acc. Scienze di Torino ", ser. 2ª, t. LV, p. 151).

(2) Keller R., *Flora von Winterthur*, II, pp. 46, 50. Cfr. anche Höck F., *Pflanzen d. Schwarzerlenbestände Norddeutschlands* ("Engler's Bot. Jahrb. ecc.", Bd. 22, p. 551).

(3) Hegi G., *Das obere Tösstal, ecc*, " Bull. Herb. Brissier ", II, t. 2 (1902), p. 57.

(4) Neger Fr. W., *Biologie der Pflanzen auf experimenteller Grundlage*, Stuttgard, 1913, pp. 388-89.

(5) Dietel P., *Waren die Rostpilze in früheren Zeiten plurivor?* (" Bot. Centralbl. ", Bd. LXXIX (1899, III), pp. 81 85, 113-17).

l'attuale eterozia delle quali non sarebbe che un adattamento secondario, mi sembra non valga a provare altro che l'antichità di costituzioni del consorzio corrispondente, senza creare alcun rapporto nuovo fra gli *ecoidi* sugl'individui vegetali dei quali s'è fissato il fungo.

Prendendo le mosse dall'*ecoide* nello studio dei fatti associativi della vegetazione si sposta però il punto di vista sotto al quale essi vengono abitualmente considerati, ciò che di primo acchito può urtare il nostro abito mentale di classificarli in base ad alcuni tratti fisionomici ai quali corrispondono termini propri del linguaggio volgare quali *pascolo*, *prateria*, *steppa*, *macchia*, *bosco*, od anche denominazioni locali *gerbido, baraggia, garigue, sibljak, espinal, campo, bush* e simili, che molti fitogeografi, il Flahault (1) pel primo se non erro, hanno proposto si assumano ufficialmente nella nomenclatura scientifica per la determinazione di speciali e localizzati consorzi. Ora bisogna distinguere qui il caso del rilevamento sommario della vegetazione di una regione attraversata rapidamente da un viaggiatore e non ancora studiata, nel quale questi termini possono presentare il valor pratico di notazioni espressive malgrado la loro difficile definibilità; da quello di un'analisi ecologica, la più minuta ed esatta possibile, di un distretto facilmente e ripetutamente accessibile. In questa seconda contingenza diventa indispensabile il riferimento dei fatti associativi ad un numero limitato di categorie coordinate e di adozione generale, alle quali difficilmente possono ridursi i termini popolari sopra accennati, la illimitata molteplicità dei quali è la prova migliore della loro indefinitezza e dell'impossibilità di paragonarli fra di loro.

Che del resto questi termini presentino una imprecisione di limiti assai imbarazzante per chi debba riconoscerli sul terreno, anche indipendentemente dalla diversità floristica elementare rilevabile nei vari casi della loro attuazione, è un fatto di esperienza altrettanto comune quanto il loro stesso riconoscimento. Così nella nostra vegetazione submontana del Piemonte la brughiera (*baraggia*, *vauda*, *praglia*, associazione della *Calluna vulgaris* Salisb.) ed il bosco mesofita di Quercia (*Quercus pedun-*

(1) Flahault Ch., *Projet de Nomenclature phytogéographique*, l. c., p. 12.

culata Ehrh.) sono due consorzi che, distintissimi nella loro composizione floristica e nella loro fisionomia se esaminati allo stato di tipicità, sfumano l'uno nell'altro nelle infinite gradazioni della brughiera boschita (1) e si alternano anche, secondo una rotazione artificiale, nei cedui della regione collinosa e nei pendii prealpini inferiori. Un fatto analogo e come questo in rapporto essenzialmente col variare della proporzione di umidità dell'ambiente si osserva nei paesi tropicali per la formazione di Savana. I così detti *Galleriewälder* infatti si presentano bensì in qualche punto nettamente limitati alle sponde dei corsi d'acqua in modo che, all'esterno della stretta striscia da essi costituita, la vegetazione xerofila della Savana assume il suo più tipico aspetto; ma in altri casi il passaggio da una formazione all'altra avviene per gradazioni insensibili, mentre è interessante rilevare la frequente penetrazione nei boschi mesofiti ed igrofiti di sponda, di specie improntate alla più spiccata xerofilia e invadenti dalle finitime formazioni più o meno aride (2).

Il riconoscere invece, infinitamente ripetuta nel rivestimento vegetale del suolo, una unità come l'*ecoide*, irreducibile, comprendente tutti i momenti del fatto ecologico — ambiente, individuo e reazioni reciproche — vivente con ciò della sua propria vita, implica anzitutto la necessaria corrispondenza di questi tre momenti in qualunque unità d'ordine superiore dovuta all'aggregarsi di un certo numero di *ecoidi* in particolari condizioni di frequenza e con eventuale modificazione dell'ambiente fisico primitivo: nonchè la necessità di prendere le mosse, in qualunque studio di vegetazione, dal presupposto di una fondamentale eterogeneità, salvo a riconoscerne, nel corso dell'analisi, le limitazioni ed a ricercarne le cause. Con ciò la costituzione in consorzio di specie ad esigenze ecologiche affini, raccolte in un ambiente dotato di queste qualità generali e sempre tuttavia abbastanza vario da soddisfare alle esigenze particolari dei singoli individui, cioè in ultima analisi di una colonia più o meno pura e più o meno densa di *ecoidi* simili, sarà stata ricono-

(1) Negri G., *La vegetazione del bosco Lucedio* (" Mem. R. Acc. Scienze di Torino ", ser. 2ª, t. LII (1911), p. 426).

(2) Negri G., *Appunti, ecc.*, l. c. *passim*.

sciuta in dipendenza dei fattori ambientali, non pel rilievo preventivo di affinità o di differenze fisionomiche, sempre molto superficiale nel suo significato e spesso stimolo ad interpretazioni errate. Nulla di più naturale poi che un consorzio, di cui sia stata così rigorosamente rilevata la costituzione, presenti una fisonomia tanto più costante e riconoscibile quanto maggiore è la sua purezza.

Ma un fatto di distribuzione di specie o di aggregazione di forme di vegetazione, in quanto dipende dall'ambiente, deve sempre essere considerato come un fatto essenzialmente geografico, del quale la vegetazione è il sensibilissimo reattivo. È nell'ambiente quindi che la base di sistemazione di tali fenomeni deve essere trovata, per la stessa ragione che il fattore ambientale è quello che rende originariamente possibile la costituzione dell'*ecoide*, qualunque modificazione poi, per un adattamento secondario, l'individuo induca nella porzione di ambiente che s'è accaparrata. In qualunque scala venga considerato, l'ambiente sottintende il tipo di vegetazione che lo occupa in qualunque momento o che può occuparlo nel caso di invasione di un terreno nuovo.

Sopra alcuni carbonati misti di Traversella.

Nota del Dott. MARIO DELGROSSO
Assistente presso l'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

Già in un mio precedente lavoro (1) ebbi occasione di occuparmi della costituzione chimica dei carbonati misti di calcio, magnesio e ferro. In questa mia breve Nota mi propongo di esporre qualche altra considerazione sopra tali carbonati dedotta dallo studio di alcuni di essi provenienti da Traversella.

Come è noto fra i minerali dei giacimenti di Traversella sono frequenti i carbonati misti di calcio e magnesio con quantità variabili di ferro che si presentano ben cristallizzati o in aggregati selliformi e che vengono indicati nella maggior parte dei casi col nome di dolomiti di Traversella. Questa denominazione però non si può sempre ammettere come esatta in senso assoluto essendo rari i casi in cui questi carbonati sono da considerarsi come vere dolomiti.

Essi infatti contengono molto spesso quantità di ferro così notevoli che non possono più essere compresi sotto il nome generico di dolomiti, mà devono più logicamente venir assegnati all'ankerite od alla dolomite ferrifera. Per confermare coi dati di fatto questo modo di considerare tali carbonati, espongo qui appresso i risultati da me ottenuti studiando alcuni campioni scelti appositamente fra quelli più caratteristici indicati col nome di dolomiti; e, come si vede dai detti risultati, anche in alcuni di essi che si presentavano in bei cristalli

(1) *Sopra una dolomite ferrifera del traforo del Sempione*, " Riv. di Mineralogia e Cristallografia Italiana ", vol. XLI, 1912.

perfettamente incolori e in aggregati selliformi bianchissimi che dall'aspetto esteriore lasciavano supporre una grande purezza della sostanza della dolomite, l'analisi svelò una percentuale di ferro notevolmente abbondante. Questi campioni provenienti da punti diversi dei giacimenti di Traversella appartengono al materiale raccolto dal prof. Colomba per i suoi studi sui giacimenti metalliferi di detta località, e da lui ebbi pure i dati riguardanti la loro posizione nel giacimento.

Ciò premesso passo a descrivere gli esemplari da me studiati di cui riferisco i risultati analitici che per semplificazione ho già espressi in carbonati riducendo in ogni caso la somma a 100, cioè non tenendo conto delle piccole quantità di residuo insolubile in essi contenute:

I. Romboedri purissimi grandi provenienti da un esemplare contenente quarzo cristallizzato su carbonato selliforme: fra i cristalli di quarzo e sul carbonato selliforme si avevano cristalli romboedrici, completamente incolori, limpidi e trasparenti di un carbonato indicato come dolomite, il quale era certamente da considerarsi come formatosi posteriormente al carbonato selliforme:

$$\begin{aligned} CaCO_3 &= 52{,}86 \\ MgCO_3 &= 36{,}99 \\ FeCO_3 &= 10{,}15 \\ \hline & \ 100{,}00 \end{aligned}$$

II. Campione costituito da grandi romboedri a facce curve 100 giallicci, però abbastanza trasparenti, impiantati sopra carbonato compatto ricoprente a mo' di coltre una massa costituita da talco-clorite. La tinta gialliccia è però solo superficiale, dovuta cioè ad un principio di limonitizzazione del ferro del carbonato. Questo campione proviene da quelle parti dei carbonati in cui si sono formati silicati idrati di magnesio sotto forma di strati intercalati nei carbonati metamorfici:

$$\begin{aligned} CaCO_3 &= 52{,}11 \\ MgCO_3 &= 35{,}85 \\ FeCO_3 &= 12{,}04 \\ \hline & \ 100{,}00 \end{aligned}$$

III. Romboedro con accrescimento di calcite isoorientata e analogo al campione I in romboedri trasparenti. Questo campione era costituito da un romboedro trasparente portante alla superficie un'incrostazione di calcite in cristalli isoorientati col romboedro sostegno appartenenti a quelli di ultima formazione secondo il SELLA (1), costituiti cioè dal prisma $21\bar{1}$ e dal romboedro 110:

$CaCO_3$	=	55,67
$MgCO_3$	=	34,87
$FeCO_3$	=	9,46
		100,00

IV. Romboedri incolori nitidi associati a quarzo e impiantati sopra una massa di carbonato compatto:

$CaCO_3$	=	52,72
$MgCO_3$	=	34,40
$FeCO_3$	=	12,88
		100,00

V. Cristalli selliformi, bianchi, opachi, associati a quarzo e rappresentanti le parti terminali del carbonato compatto, base del campione:

$CaCO_3$	=	53,42
$MgCO_3$	=	34,40
$FeCO_3$	=	12,18
		100,00

VI. Campione costituito da un frammento di geoda formato da un substrato di un carbonato compatto spatico con sopra aggregati raggiati di cristalli fibrosi di quarzo incoloro

(1) *Studi sulla mineralogia sarda*, " Mem. R. Acc. Sc. Torino " (1856), t. XVII, serie II.

o bianco e con intercalati aggregati selliformi di grandi dimensioni rappresentanti la parte superficiale della massa spatica:

$CaCO_3$	=	54,48
$MgCO_3$	=	33,66
$FeCO_3$	=	11,86
		100,00

VII. Campione formato da un'incrostazione gialliccia esternamente, bianca nell'interno, con quarzo:

$CaCO_3$	=	53,14
$MgCO_3$	=	25,69
$FeCO_3$	=	21,17
		100,00

VIII. Carbonato latteo bianco che forma in molti casi gl'interstrati dove si ha l'alternanza di strati di carbonato e di magnetite; tipo molto comune a Traversella:

$CaCO_3$	=	60,68
$MgCO_3$	=	38,35
$FeCO_3$	=	0,97
		100,00

Da queste mie analisi risulta in modo evidente come nei carbonati misti di Traversella la maggiore o minore ricchezza di ferro non è sempre facilmente riconoscibile dai caratteri esterni perchè, ad esempio, i romboedri purissimi del campione n. I che contengono una quantità notevolissima di carbonato di ferro e dèvono quindi essere compresi nel gruppo delle dolomiti ferrifere o ankeriti, per i caratteri esterni si differenziano assai poco da quelli studiati dal Damour che, come si vede dall'analisi riferita nella tabella a pag. 1111, sono indubbiamente da considerarsi come cristalli di vera e propria dolomite. Di qui ne deriva naturalmente una non rara possibilità di errore nelle determinazioni quando queste si facciano esclu-

sivamente in base ai suddetti caratteri esterni. Ciò può spiegare, almeno in parte, il fatto che attualmente a Traversella si considera la dolomite come un minerale piuttosto abbondante e si ritengono rare l'ankerite e le specie affini, mentre in realtà, sopratutto per quanto riguarda gli esemplari a struttura selliforme, si ha il fatto opposto, perchè si osserva che nella maggior parte dei casi per la loro composizione chimica essi sono da assegnarsi piuttosto al gruppo dell'ankerite che non alla vera dolomite. Ciò non toglie però che la vera dolomite a Traversella debba considerarsi come un minerale di non trascurabile importanza, per cui si deve ammettere che in questa località si abbia una serie completa di termini che, coll'aumento graduale del carbonato di ferro, dalla dolomite tendono all'ankerite. Quest'ultimo fatto che già si può osservare nella serie delle mie analisi, appare poi in modo più evidente se si considerano pure le analisi eseguite da altri autori sui carbonati di Traversella e riportate nella seguente tabella insieme alle mie (1):

---

(1) Queste analisi dei vari autori da me riportate furono tolte dal Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, vol. I, eccetto quelle n. 4 e n. 11 che furono tolte dal Dana, *System of Mineralogy*, ediz. V. Le mie poi nella tabella sono contrassegnate dai numeri romani corrispondenti a quelli dei campioni da cui proveniva il materiale analizzato.

	$CaCO_3$	$MgCO_3$	$FeCO_3$	$MnCO_3$	rapp. molecolari
1. Damour (Dr. p. 364, a. 1) . .	50,21	44,41	0,91	0,55	27:26,5:1
2. Campione n. VIII	60,68	38,35	0,97	—	68:50:1
3. Bentivoglio (Dr. p. 366, a. 39)	55,53	41,26	3,26	—	19:17:1
4. Pellettier (Da. p. 683, a. 15)	51,00	44,32	4,68	—	13:13:1
5. Campione n. III	55,67	34,87	9,46	—	7:5:1
6. Bentivoglio (Dr. p. 377, a. 6)	54,03	36,24	9,85		6,75:5,5:1
7. Campione n. I	52,86	36.99	10,15	—	6:5:1
8. Bentivoglio (Dr. p. 377, a. 3)	53,95	35,61	10,25		6:5:1
9. Bentivoglio (Dr. p. 374, a. 39)	53,12	36,22	10,31	—	6:5:1
10. Eisenhut (Dr. p. 375, a. 49)	52,79	36,74	10,76	—	6:5:1
11. Hirzel (Da. p. 683, a. 20) . .	51,71	33,46	11,13	2,84	4,5:3,3:1
12. Campione n. VI	54,48	33,66	11,86	—	5,5:4:1
13. Campione n. II	52,11	35,85	12.04	—	5:4:1
14. Campione n. V	53,42	34,40	12,18	—	5:4:1
15. Campione n. IV	52,72	34.40	12,88	—	5:4:1
16. Bentivoglio (Dr. p. 374, a. 35)	51,79	30,13	14,56	—	4:3:1
17. Bentivoglio (Dr. p. 377, a. 5)	51,50	29,27	15,39		4:3:1
18. Bentivoglio (Dr. p. 377, a. 4)	53,03	30,13	16,61		3,75:2,5:1
19. Bentivoglio (Dr. p. 374, a. 38)	52,67	30,19	17,37	—	3,5:2,5:1
20. Campione n. VII	53,14	25,69	21,17	—	3:1,5:1

La frequenza dei carbonati misti di calcio e magnesio ricchi di ferro che si nota a Traversella e che è resa evidente dalla soprascritta tabella, non può sorprendere quando si pensi che, data la grandissima diffusione del ferro nei minerali metalliferi, è naturale che anche negli altri minerali che li accompagnano il ferro sia quasi costantemente presente sebbene in quantità variabili. Inoltre si deve tener conto del modo di formazione dei giacimenti di Traversella che, secondo l'ipotesi del Novarese (1) attualmente ammessa da tutti, derivano da fenomeni di metamorfismo compiutisi sopra calcari più o meno ricchi di magnesio nell'aureola di contatto di una massa dioritica intrusiva.

---

(1) *Die Erzlagerstätten von Brosso und Traversella in Piemont,* " Zeitschr. für praktische Geologie ", X Jahrgang, Juni 1902, s. 179.

***

Esposte così queste osservazioni speciali riguardanti i carbonati misti di Traversella, avendo a disposizione buon numero di analisi di essi credo utile fare anche qualche considerazione di indole più generale e cioè studiare i carbonati suddetti dal punto di vista della loro costituzione molecolare.

Le idee dei vari autori sulla costituzione dei carbonati misti di calcio, magnesio e ferro sono già ricordate nel mio precedente lavoro accennato in principio, e più estesamente esposte in un lavoro del Lincio (1). Qui io mi limiterò quindi a richiamare rapidamente le principali ipotesi sulla costituzione dei detti carbonati e le formule proposte per metterla in chiaro. Come è noto, il Boricky (2) che divise i carbonati misti di calcio, magnesio e ferro in *ankeriti* e *parankeriti* assegnò ad essi formule del tipo $\left\{ \begin{matrix} CaFeC_2O_6 \\ xCaMgC_2O_6 \end{matrix} \right\}$, il Rammelsberg (3), il Dana (4) come pure il Naumann (5) dànno invece formule semplici come: $CaCO_3 . (Mg,Fe)CO_3$, il Kobell (6) poi indica come ankerite un composto avente la costituzione $CaCO_3 + FeCO_3$ e il Leitmeier (7), riguardo al modo in cui è contenuto il ferro in questi carbonati misti quali le ankeriti, espone l'ipotesi di due sali doppi aventi le formule $\left\{ \begin{matrix} CaCO_3 \\ MgCO_3 \end{matrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{matrix} CaCO_3 \\ FeCO_3 \end{matrix} \right\}$ che possono unirsi in miscela isomorfa, oppure suppone un possibile isomorfismo fra dolomite e siderite. Esclusa quindi quest'ultima ipotesi del Leitmeier, i singoli autori o ammettono l'esistenza di un carbonato doppio di ferro e calcio, oppure considerano le varietà di ankeriti come dolomiti ferrifere nelle quali il ferro sosti-

(1) *D'una dolomite ferrifera del traforo del Sempione*, " Atti R. Acc. Sc. Torino ", vol. XLVI, 1911.

(2) *Tschermak Min. Petr. Mitteilungen*, 1876, pag. 47.

(3) *Mineralchemie* (Leipzig, 1875), pag. 216.

(4) *A System of Mineralogy* (New York, 1892), pag. 685.

(5) *Elemente der Mineralogie* (Leipzig, 1871), pag. 270.

(6) *Lehrbuch der Mineralogie* (Leipzig, 1871), pag. 241.

(7) *Handbuch der Mineralchemie* del Doelter, vol. I, pag. 379.

tuisce il magnesio ammettendo così una reciprocità di funzione fra questi due elementi.

Ora se nella precedente tabella si osservano i rapporti molecolari fra i carbonati di calcio, di magnesio e di ferro calcolati per ogni campione e da me riportati nell'ultima colonna, si nota che vi è una spiccata tendenza verso la relazione limite $CaCO_3 = MgCO_3 + FeCO_3$ poichè, sebbene questa relazione non si verifichi in modo assolutamente esatto in tutti i casi, le divergenze sono sempre molto piccole. In un solo caso si ha una divergenza notevole e cioè nel campione n. VIII, ma conviene tener conto che le condizioni di giacitura di esso sono molto differenti da quelle degli altri. Inoltre si osserva che nei casi di divergenza questa è per la massima parte dei casi nel senso $CaCO_3 > MgCO_3 + FeCO_3$ e solo in due casi essa è nel senso opposto $CaCO_3 < MgCO_3 + FeCO_3$.

La relazione limite suaccennata non è certamente un fatto nuovo nè è da considerarsi come proprio esclusivamente delle dolomiti di Traversella, ricorrendo invece spesso in questi carbonati misti, come si può vedere esaminando le numerosissime analisi di dolomiti ferrifere di località diverse riferite dal Doelter (1). Nel caso speciale di Traversella però essa acquista evidentemente un'importanza maggiore perchè quivi si verifica in una serie di carbonati che presentano una composizione gradualmente variante che da quella della vera dolomite contenente minime quantità di ferro tende verso quella dell'ankerite tipica mediante una serie di termini che si possono considerare come intermedi fra le due specie. Questi termini inoltre sono collegati fra loro dalla stessa giacitura e certamente dallo stesso modo di formazione, mentre le differenze che si notano nella loro composizione dipendono sopratutto dall'essere contenute in zone più o meno prossime a quella nella quale i fenomeni di metamorfismo acquistarono la massima intensità.

Se ora esaminiamo le già citate formule date per le dolomiti ferrifere e cerchiamo di metterle in accordo colla relazione $CaCO_3 = MgCO_3 + FeCO_3$, vediamo tosto che soltanto le formule date dal Dana, dal Rammelsberg e dal Naumann, quella

(1) *Handbuch der Mineralchemie*, vol. I.

data dal Boricky e quella corrispondente alla prima ipotesi del Leitmeier possono esprimere in modo generale la relazione suddetta. Invece la seconda ipotesi del Leitmeier di un isomorfismo fra dolomite e siderite non ci può dare una spiegazione generale di questo fatto. È evidente infatti che considerando la dolomite come un sale doppio: $CaMgC_2O_6$, e spiegando quindi la costituzione delle dolomiti ferrifere come un fenomeno di miscela isomorfa fra questo sale doppio e il carbonato ferroso $FeCO_3$, essendo nel carbonato doppio $CaMgC_2O_6$ uguali le quantità di $CaCO_3$ e $MgCO_3$, non si può in nessun caso ottenere la relazione $CaCO_3 = MgCO_3 + FeCO_3$.

Limitandoci quindi a gli altri tipi di formule suaccennate, resta a vedere quale di esse abbia in sè maggior probabilità di esattezza.

Il tipo di formula dato dal Boricky e dal Leitmeier presuppone l'esistenza di un carbonato doppio di calcio e di ferro che finora non è stato ancora trovato in natura. Malgrado questo però la possibilità che il carbonato di calcio si associ a quello di ferro indipendentemente dalla presenza di quello di magnesio non è da escludere per ora in modo assoluto, perchè abbiamo un'analisi di una siderite di Altemberg, dovuta a Monheim (1), e che per maggior chiarezza credo utile qui riferire:

$$FeCO_3 = 64{,}04$$
$$CaCO_3 = 20{,}12$$
$$MnCO_3 = 16{,}56$$

in cui, come si vede, il carbonato di ferro è associato a quello di calcio senza traccia di quello di magnesio. Ma a parte il fatto che si tratta di un caso isolato, occorre anche notare che qui è presente pure una quantità notevole di carbonato di manganese. Ora, come osserva il Leitmeier (2), esiste una serie quasi completa di miscele di $CaCO_3$ e $MnCO_3$, mentre altrettanto non si può dire per la coppia $CaCO_3$, $FeCO_3$; si potrebbe quindi dedurre con verosimiglianza che la presenza del $CaCO_3$ nella

(1) Dana, *A System of Mineralogy*, 5ª ediz., pag. 690.
(2) Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, vol. I, pag. 277.

suddetta siderite dipenda da quella del $MnCO_3$, cioè che questo minerale sia da considerarsi piuttosto come un'associazione di siderite pura con un termine della serie accennata di miscele di $CaCO_3$, $MnCO_3$.

Con ciò, senza voler escludere che in determinate condizioni possa formarsi il carbonato doppio di calcio e ferro, osservo che la difficoltà a formarsi di un tale composto trova pure una conferma nel caso appunto dei giacimenti di Traversella, dove non si è mai trovato traccia di tale carbonato quantunque, in causa della grande importanza assunta dal ferro in detto giacimento, non solo abbondino i carbonati misti di calcio, magnesio e ferro ma siano anche presenti carbonati di magnesio e ferro quali la mesitina e pistomesite.

La formula del tipo dato dal Dana di fronte a quelle del tipo del Boricky ha senza dubbio il vantaggio di non presupporre l'esistenza del suaccennato carbonato finora ignoto e ammettere invece una reciprocità di funzione fra magnesio e ferro su cui non esiste alcun dubbio perchè si nota pure in altri minerali, quali ad esempio gli anfiboli in cui si osserva che mentre la quantità di CaO rimane pressochè costante, le quantità di MgO e FeO variano in senso opposto l'una all'altra. Ciò non ostante però, se si tien conto del fatto che per un complesso di caratteri, fra cui principale quello cristallografico della tetartoedria, la dolomite è ora quasi universalmente considerata non più come una semplice miscela isomorfa, ma bensì come un vero e proprio sale doppio, è evidente che la formula del Dana non può dare una spiegazione netta del fenomeno della sostituzione parziale del $MgCO_3$ col $FeCO_3$.

In conseguenza di ciò se si considera la dolomite tipica come un sale doppio e d'altra parte si vuole evitare il presupposto dell'esistenza in natura dell'ancora ignoto carbonato doppio di calcio e ferro, per spiegare la costituzione delle dolomiti ferrifere si potrebbe ammettere l'esistenza di un sale triplo di calcio, magnesio e ferro corrispondente alla formula:

$$Ca_2MgFeC_4O_{12}.$$

Questo sale triplo che per la sua composizione chimica corrisponde precisamente all'*ankerite normale* della classificazione del

Boricky (1), unendosi in miscela isomorfa con quantità variabili del sale doppio della dolomite $CaMgC_2O_6$ darebbe luogo a tutti i termini della serie delle dolomiti ferrifere. Sebbene non si possa per ora dimostrare la reale esistenza di questo sale triplo, tuttavia la probabilità che esso esista e che si possa quindi interpretare la costituzione delle dolomiti ferrifere nel modo suesposto trova un appoggio in natura nel fatto che si conoscono alcuni carbonati aventi una composizione centesimale che è estremamente prossima a quella teoricamente richiesta per il detto sale triplo $Ca_2MgFeC_4O_{12}$, tali sono quello di Zaičov in Boemia (I) analizzato dal Bilek (2) e quello di Phleps nel Missouri (II) analizzato dal Rogers (3) le cui composizioni centesimali sono riferite nella qui sotto riportata tabella unitamente ai valori teorici:

	I	II	comp. teorica
$CaCO_3$ . . .	50,70	50,70	50
$MgCO_3$ . . .	21,66	21,33	21
$FeCO_3$ . . .	29,87	27,77	29
	102,23	99,80	100

Inoltre occorre notare che, come apparisce dai lavori del Bentivoglio (4) e dell'Eisenhut (5), nelle dolomiti ferrifere l'angolo del romboedro presenta variazioni molto piccole mantenendosi sempre molto prossimo a quello del romboedro della dolomite tipica. Ora questo fatto potrebbe trovare una spiegazione abbastanza chiara considerando appunto le dolomiti ferrifere nel modo sopra accennato cioè come miscele isomorfe di dolomite tipica e di ankerite normale per le quali infatti gli

(1) *Tschermak Min. Petr. Mitteilungen*, 1876, pag. 47 e seg.

(2) Ibidem.

(3) *Kansas Univ. Quart.* 8, 183 (1899).

(4) " Atti Soc. Nat. Modena ", 26, pag. 84 (1892).

(5) *Beiträge zür Kenntniss der Bitterspäthe*, " Zeitschr. für Kryst. und Min. ", vol. 53, pag. 582.

autori dànno valori angolari molto prossimi; così il DANA (1) ad esempio per il romboedro della dolomite dà il valore di 73°45′ mentre per l'ankerite dà il valore di 73°48′, cosicchè, anche supponendo che le proporzioni relative dei due carbonati variino entro limiti abbastanza estesi il valore dell'angolo del romboedro non può subire variazioni sensibili.

Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

Maggio 1914.

---

(1) *A System of Mineralogy*, 6ª ediz. (1899), pag. 261.

Osservazioni intorno alla mucosa palatina del Camoscio delle Alpi.

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

(Con una tavola).

Il signor G. Ghidini di Ginevra m'inviava recentemente una serie di mucose palatine di Camosci di varie località, richiamando la mia attenzione sulla conformazione delle *plicae palati*, in ordine ad una loro possibile utilizzazione come caratteri tassonomici, per la separazione di speciali forme di camosci, secondo le diverse località.

Intorno alle *plicae palati* dei mammiferi la scienza possiede una numerosa serie di pubblicazioni a cominciare da quella di G. Cuvier (1) e a venire fino ai recenti lavori di F. Eilhard Schulze (2) e di Jacob Rechs (3) (che ha anche la completa bibliografia dell'argomento). Particolarmente interessante per noi è quello descrittivo di G. Retzius, " Die Gaumenleisten des Menschen und der Thiere „, corredato di 13 bellissime tavole (4).

In nessun lavoro il Camoscio viene preso in considerazione.

(1) *Leçons d'anatomie comparée*, rec. e pub. par M. Duméril, 2ª ed., vol. III, pag. 745 (1845).

(2) *Die Erhebungen auf der Lippen und Wangenschleimhaut der Säugethiere* " Sitz. Königl. Preuss. Akad. Wiss. „, 1912, pag. 510.

(3) *Beiträge zur Kenntnis der makroscopischen und mikroskopischen Anatomie insbesondere der Topographie des elastischen Gewebes des Palatum durum der Mammalia*, " Zeitsch. für Wiss. Zool. „, vol. CIX, fasc. 1, 1914.

(4) *Biologische Untersuchungen* von G. Retzius. " Neue Folge „, XIII, 1906, pag. 117 e segg., tav. XXXV-XLVIII.

Il materiale che ho potuto studiare è così costituito:

Mucose palatine di 2 ♂ adulti di Valsolda (Bacino del Po);
„ „ ♂ di 2 anni, di Passiria (Bacino dell'Adige);
„ „ ♂ di 4 anni di Val Sarentina (Bacino dell'Adige);
„ „ 2 ♂ di Ampezzo (Bacino del Piave);
„ „ ♂ di 6 anni dei Monti di Plezzo (Bacino dell'Isonzo);
„ „ ♂ 2 anni di Rakipnica (Erzegowina) (Bacino del Narenta);
„ „ ♀ 2 anni di Papura (Alta Valle Dämbovita) (Bacino del Danubio);
„ „ ♂ adulto di Papura (Alta Valle Dämbovita) (Bacino del Danubio);
„ „ ♀ adulta Fogaras (Bac. dell'Oetu Ungherese);
„ „ ♀ di 9 anni Fogaras (Bac. dell'Oetu Ungherese);
„ „ ♂ Isére (Delfinato) (Bacino del Rodano);
„ „ 2 ♂ giovani di Tschache (Caucaso) (Ciugusce);
„ „ ♂ adulto „ „ „ „

La mucosa palatina del Camoscio, nella disposizione generale delle sue *plicae* e delle sue papille, si presenta come quella degli Artiodattili Ruminanti e rassomiglia in particolar modo a quella delle Capre, delle Pecore e dei Cervi (confronta Retzius, op. cit.). — Si possono, seguendo il Retzius, considerare in essa due regioni. La regione della *papilla palatina* e la regione delle *plicae palati*.

La regione della papilla palatina è nettamente divisa da un solco longitudinale in due metà che circondano la papilla palatina stessa, che è collocata verso il margine posteriore.

La regione della papilla palatina si prolunga posteriormente e ai lati in due porzioni triangoliformi, più o meno estese e, talvolta, fin quasi alla fine delle due prime *plicae palati*.

Il margine posteriore della regione della papilla palatina è, nel suo insieme, di aspetto variabile. Esso dipende, in parte, dallo sviluppo dei prolungamenti sopradetti e dalla configura-

zione dei margini interni di essi. Nel materiale sopradetto ho trovato le principali forme seguenti:

1° La porzione mediana del margine posteriore della regione della papilla palatina è rettilineo e rettilinei sono pure i margini interni dei prolungamenti triangoliformi, in guisa che l'intiero margine assume una spiccata forma poligonale;

2° La porzione rettilinea mediana è assai breve e i margini interni dei prolungamenti triangoliformi sono fortemente arcuati:

3° I margini interni dei prolungamenti triangoliformi, sono in forma di arco, largo e si continuano fra loro nella parte mediana, in modo che l'intiero margine posteriore della regione della papilla palatina ha la forma di un arco poco convesso;

4° I margini interni dei prolungamenti triangoliformi, invece di essere rettilinei, come nella 1ª forma, o arcuati come nella 2ª e nella 3ª, sono fortemente convessi; la porzione mediana del margine posteriore è rettilineo, ma con intaccature che vi determinano come dei larghi lobi, poco sporgenti.

La prima forma si trova in esemplari ♂ di Valsolda, di Val Sarentina, di Papura (Bac. del Danubio), di Rakipnica (Bac. del Narenta) e di Isère (Bac. del Rodano).

La seconda forma l'ho osservata in una ♀ di Ampezzo.

La terza forma si trova in 1 maschio di Plezzo (Bac. dell'Isonzo).

La quarta forma si osserva in una ♀ di Ampezzo e in una ♀ di Fogaras (Bac. dell'Oetu Ungherese).

Fra l'una e l'altra delle forme sopradette si trovano conformazioni intermedie.

Il margine posteriore della regione della papilla palatina si presenta ora liscio, cioè senza piccoli tubercoli, ovvero è con tubercoli piccoli, quasi in tutta la sua lunghezza, ovvero, verso i lati, oppure solo verso il mezzo.

Ho osservato i tubercoli in esemplari ♂ di Papura, di Plezzo, di Passiria.

Tubercoli si osservano pure talvolta (Isonzo, Valsolda) sulla parte allargata della regione della papilla palatina, sopratutto verso la regione mediana, nei suoi due terzi posteriori.

Variabile è pure la forma della *papilla palatina*.

Più frequentemente (Valsolda, Plezzo, Rakipnica, Fogaras, Ampezzo), essa è a contorno piriforme coll'apice più assottigliato

verso la parte anteriore. Talvolta l'aspetto piriforme è appena accennato, tanto che essa appare come quasi rotondeggiante (Val Sarentina, Isère, Passiria). In altri casi tende ad essere più o meno ovale, con una parte più assottigliata rivolta posteriormente (Ampezzo, Papura).

Dietro il margine posteriore della regione della papilla palatina e lungo ad esso vi è una serie di papille tuberculiformi, che ora sono spiccatamente piccole e numerose (Papura), ora relativamente grosse e poco numerose (Valsolda). — Negli altri esemplari variano di grossezza e di numero fra i due estremi ora indicati.

La regione delle *plicae palati* è divisa in due metà da un solco palatino longitudinale, mediano, che è molto spiccato nei due terzi anteriori e poi va facendosi meno ampio e profondo col diminuire di altezza delle *plicae*.

La prima plica è non raramente assimmetrica. Si può trovare nella metà sinistra e mancare a destra (♂ di Valsolda) oppure se ne trova una a destra e a sinistra manca, o è assai piccola (Fogaras, Val Sarentina, Plezzo) ovvero a sinistra è grande e a destra è appena sviluppata (♀ di Fogaras).

La seconda, e talvolta la 3ª e la 4ª, non si corrispondono fra loro esattamente, essendo quelle di una metà un po' più alte di quelle dell'altra metà. Le sette od otto *plicae* seguenti possono essere sensibilmente eguali nelle due metà, corrispondendo fra loro per la posizione rispettiva, ovvero alcune di esse possono essere più o meno spostate in alto o in basso nelle due metà. Queste variazioni hanno al tutto carattere individuale. La larghezza delle pieghe va, nel loro complesso, facendosi più ampia dalle anteriori alle posteriori e così pure la sporgenza del loro margine libero. Le pieghe collocate nella parte posteriore sono talvolta appena accennate da una serie di tubercoli di altezza decrescente, che incomincia ai lati e si estende, talvolta, per breve tratto verso la regione mediana, senza raggiungerla. Le irregolarità assimmetriche di conformazione delle pieghe, non sono rare, sopratutto in quelle posteriori.

Il margine libero delle pieghe palatine è variabile nella sua forma: ora è rettilineo, ora è regolarmente concavo, ora infine è concavo convesso, cioè per un tratto è concavo e per l'altro è più o meno spiccatamente convesso.

Nella mucosa palatina dello stesso animale si possono nelle varie pieghe trovare riunite tutte queste conformazioni.

Il margine libero delle *plicae palati* presenta una serie di papille tubercoliformi, più o meno sviluppate e numerose.

Le ho trovate relativamente ben sviluppate, regolari e numerose negli esemplari di Valsolda, Ampezzo, Papura; piccole, numerose e regolari in quelli di Passiria, Val Sarentina, di Fogaras; poco numerose e distanti fra loro in esemplari di Ampezzo, Papura, Rakipnica, Plezzo, e in un esemplare di Fogaras.

Il numero di paia di *plicae palati* (tenendo conto anche delle posteriori, più o meno sviluppate) varia nel modo seguente: 10 in ♂ 2 anni di Papura; 11 in ♂ di 4 anni di Val Sarentina, in ♂ di 2 anni di Papura, in ♂ di 2 anni di Isère, in ♀ di 9 anni di Fogaras; 12 in ♂ adulto di Papura, in una ♀ adulta di Fogaras, in due ♀ di 4 anni di Ampezzo; 13 in un ♂ adulto di Valsolda, in un ♂ adulto di Plezzo; 14 in un ♂ di 2 anni di Passiria; 15 in un ♂ adulto di Valsolda.

Nei casi in cui le *plicae* sono più numerose, soltanto 11 o 12, sono in generale le più sviluppate.

Fra le due metà del palato vi può essere la differenza di 1 nel numero delle *plicae* per le ragioni sopra dette relative alla prima *plica*.

Nelle mucose palatine degli esemplari del Caucaso, sopra menzionati, ho osservato: in un ♂ giovane il margine posteriore della regione della papilla palatina conformato come nella forma 2ª sopradetta e nell'altro ♂ giovane, il margine stesso come nella forma 4ª. Nel ♂ adulto è come nella forma 1ª.

La papilla palatina in uno dei ♂ giovani è piriforme, coll'apice dalla parte posteriore nell'altro; esemplare, è grossolanamente ovale con una parte più assottigliata posteriormente. Questa conformazione si osserva pure nel ♂ adulto.

Le due mucose palatine dei giovani non sono complete posteriormente e perciò non si può vedere quale era il numero totale delle *plicae*. Nel ♂ adulto esse sono in numero di 14.

Come appare dalle cose sopra esposte, la regione della papilla palatina, la papilla palatina stessa, e le *plicae palati* variano sensibilmente nel Camoscio delle Alpi, senza tuttavia che le variazioni conducano a deviazioni notevoli dal piano generale di conformazione proprio di questa forma.

1

2

3

4

5

6

Officina Fototecnica Ing. Molfese. Torino

Dal materiale studiato, pare a me, non si possa trarre alcun dato sicuro per utilizzare le dette variazioni come caratteri differenziali di sottospecie o varietà locali.

Pare a me che le dette variazioni abbiano, più che altro, carattere di variazioni individuali che si presentano parallelamente negli individui delle diverse località. Credo, ad ogni modo, che sarebbe utile estendere le osservazioni sopra un materiale più numeroso proveniente dalle singole località abitate dal Camoscio.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

(Le figure sono di grandezza naturale).

Fig. 1. Camoscio ♂ adulto di Valsolda.
„ 2. „ ♂ „ di Papura (Rumenia).
„ 3. „ ♀ di 4 anni di Ampezzo.
„ 4. „ ♂ „ di Val Sarentina.
„ 5. „ ♂ adulto di Valsolda.
„ 6. „ ♂ „ di Plezzo (Bac. dell'Isonzo).

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Il 31 maggio, tenendosi nei locali dell'Accademia la solenne commemorazione dell' illustre Ascanio Sobrero, che fu Segretario perpetuo dell'Accademia, la Classe deliberò che in quel giorno l'adunanza fosse soppressa.

L'Accademico Segretario
R. Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Giugno 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio ed i Soci Salvadori, Naccari, Peano, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente partecipa la morte, avvenuta il 6 corrente a Vienna, del Socio corrispondente Lieben, che apparteneva alla Classe dal 15 maggio 1892. Furono inviate le condoglianze alla famiglia.

L'Accademia delle Scienze di Vienna ha ringraziato per la parte presa al lutto di lei per la morte del suo Presidente Edoardo Suess.

Il Socio Guareschi offre in omaggio un suo opuscolo *Sulla legge della dilatazione dei gas di* Volta. *Notizie storiche.* In esso l'Autore, basandosi su documenti ed affermazioni d'illustri fisici e chimici, dimostra che la legge della dilatazione dei gas deve portare il nome di Volta, perchè a lui veramente è dovuta.

Lo stesso Socio Guareschi presenta in omaggio, a nome del Comitato per le onoranze ad A. Sobrero, il volume delle *Memorie scelte* di questo scienziato e una medaglia commemo-

rativa, insieme ad una copia a parte del proprio *Discorso storico-critico preliminare* al detto volume di *Memorie*.

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

E. Perucca, *Il potere rotatorio dei cristalli misti* $NaClO_3$ — $AgClO_3$, dal Socio Naccari;

A. Pensa, *Alcune applicazioni delle formole di Frenet*, dal Socio Peano;

G. A. Favaro, *Istrumento dei passaggi Heyde del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino*, con prefazione del Socio Jadanza, inviato da questo Socio;

G. Negri, *Le unità ecologiche fondamentali in Fitogeografia*, Nota 2ª, dal Socio Mattirolo;

L. Casale e Maria Casale-Sacchi, *Su alcuni amino-azocomposti*, dal Socio Fileti.

LETTURE

Il potere rotatorio dei cristalli misti $NaClO_3$-$AgClO_3$.

Nota di ELIGIO PERUCCA.

(Con una tavola).

Il clorato di sodio forma facilmente dei bei cristalli misti col clorato di argento. Tali cristalli monometrici, il più spesso tabulari a base quadrata, ottenuti e studiati dapprima dal Retgers (1), sono stati oggetto, più tardi, di un nuovo studio da parte del Foote (2).

Quest'ultimo riprende le esperienze di Retgers per mostrare che i cristalli monometrici di $NaClO_3$-$AgClO_3$ possono contenere fino alle seguenti percentuali:

fino al	24 %	(15 %	molecolare)	alla temperatura di	12°
„	31 %	(20 %	„)	„	25°
„	36 %	(23 %	„)	„	35°
„	45 %	(31 %	„)	„	50°.

Cioè la percentuale massima di $AgClO_3$ cresce fortemente con la temperatura.

Infine il Foote trova che non è più possibile separare, con ripetute cristallizzazioni, il $NaClO_3$ puro dai cristalli misti.

Da sua parte, molti anni prima, il Retgers ha ottenuto cristalli misti monometrici, aventi al più 18 % di $AgClO_3$, ha misurato il peso specifico del $AgClO_3$ cubico, che risultò circa 4,21; e infine ha notato come i cristalli, non molto grandi, limpidi

(1) J. W. Retgers, *Beiträge zur Kenntnis des Isomorphismus*, II, " ZS. für Phys. Chem. „, **5**, 436, 1890.

(2) H. W. Foote, *Mixed Crystals of silver and sodium clorate*, " Am. Ch. Journal „, **27**, 315, 1902.

appena ottenuti, intorbidiscono all'aria col tempo, e immediatamente a contatto con l'acqua, quando contengano più del 5 o 6 % di $AgClO_3$. Limpidi, essi mostrano al polarimetro anomalie ottiche: i cristalli si mostrano divisi in settori come il lato posteriore di una busta, e sono lievemente birifrangenti, a causa di tensioni interne. Infine il Retgers dice che verosimilmente tali cristalli misti sono attivi, si potrebbe anzi tentare su di essi una verifica della legge di Bodländer (1) sulla relazione tra potere rotatorio e composizione chimica delle miscele isomorfe, e si potrebbe anche giungere a una misura del potere rotatorio del clorato di argento.

Nè il Retgers, nè il Foote, nè altri hanno meglio studiato le proprietà ottiche, in particolare il potere rotatorio di tali cristalli misti.

Ciò io mi sono proposto; le esperienze hanno confermato la previsione del Retgers, e qui desidero esporne i risultati.

***

Dal Kahlbaum mi sono fornito di $AgClO_3$ purissimo; ho ottenuto il $NaClO_3$ ricristallizzando quello commerciale. Fatte soluzioni acquose concentrate dei due sali, e riunitene proporzioni diverse facevo cristallizzare per lentissimo raffreddamento, o, più spesso, per evaporazione. Nessuna regola esatta può seguirsi per ottenere cristalli aventi un certo % di $AgClO_3$, perchè piccole variazioni nelle concentrazioni dei due sali o nelle condizioni di cristallizzazione, producono forti variazioni nella composizione dei cristalli misti.

Scelti i cristalli più belli di ciascuna cristallizzazione, ne serbavo parte per la misura della percentuale di $AgClO_3$, parte per le misure al polarimetro.

La determinazione del % in $AgClO_3$ veniva fatta, come già dal Retgers e dal Foote, mediante una soluzione titolata

(1) G. Bodländer, *Ueber das Optisches Drehungsvermögen isomorpher Mischungen aus den Dithionaten des Bleies und Strontiums,* " Inaug. Diss. Breslau „, 1882. — " Beibl. „, 7, 396, 1883.

di NH_4SCN e l'indicatore di Volhard (1) (soluzione concentrata di allume ferro-ammoniacale, decolorata con alcune gocce di acido nitrico puro).

La titolazione della soluzione di NH_4SCN venne eseguita da me sia con NaCl purissimo e $AgNO_3$, sia, direttamente, con una soluzione titolata di $AgClO_3$ Kahlbaum accuratamente essiccato. Quest'ultimo metodo, molto più comodo del precedente, è risultato precisissimo, certamente in virtù della purezza dell'$AgClO_3$ adoperato.

A causa della scarsezza dei cristalli belli ottenuti da ogni cristallizzazione, poche volte ho potuto misurare il $^0/_0$ in $AgClO_3$ con una precisione vicina o eguale a quella raggiunta dal Retgers, cioè del 0,01 $^0/_0$; in media la precisione da me ottenuta fu del 0,1 $^0/_0$ e al mio scopo sufficientissima.

Del resto ho trovato che il $^0/_0$ in $AgClO_3$ può variare fino a circa l'1 $^0/_0$ da cristallo a cristallo di una stessa cristallizzazione. E poichè è ben di rado possibile ottenere cristalli belli tanto grossi che basti uno solo per la determinazione del potere rotatorio e poi della composizione, occorre fare numerose determinazioni al polarimetro, e ottenere, con una sola misura, il $^0/_0$ medio in $AgClO_3$ di tutti i cristalli.

Per ciò che riguarda i cristalli destinati alle esperienze polarimetriche, ne misuravo lo spessore con un buon palmer ($\pm$ 0,005 mm.), li masticiavo con balsamo del Canadà tra due vetrini coprioggetto, poi ancora li inceravo tutt'attorno, in modo da impedirne il contatto con l'aria.

Così preparati, li montavo su di un cerchio graduato posto tra i nicol del polarimetro. Potevo così esaminarli in ogni azimut. Per le osservazioni ho sempre usato la luce gialla di un arco ricco di vapori di sodio, monocromatizzata da un prisma a deviazione costante. Il baricentro luminoso è quindi molto prossimo a 589.3 $\mu\mu$.

La temperatura si mantenne sempre tra 17° e 19°.

I cristalli misti monometrici, così esaminati, presentano sempre visibilissime e sistematiche anomalie ottiche, la cui gravità cresce con continuità al crescere del $^0/_0$ in $AgClO_3$.

---

(1) V., ad es., Treadwell, *Kurzes Lehrbuch der Anal. Chemie*, vol. II, pag. 534.

Nella tavola unita a questo lavoro ho disegnato l'aspetto caratteristico dei cristalli misti (esemplare contenente circa il 7 % di $AgClO_3$, base quadrata 8 × 8 mm., spessore 1,99 mm.).

Si distinguono sempre quattro settori principali 1; 2; 3 e 4; 5 e 6, separati dalle diagonali del quadrato base; queste diagonali sono qualche volta sostituite da linee spezzate, come ad es. il tratto che separa le zone 1 e 5.

Dei quattro quadranti fondamentali così formati, due, opposti al vertice, sono più birifrangenti, gli altri due lo sono meno. I due quadranti più birifrangenti (in figura: 1 e 2) sono divisi non molto nettamente da una larga linea *ab* la quale attraversa il cristallo in tutta la sua larghezza solo se il % in $AgClO_3$ è piuttosto forte (8-9 % almeno); altrimenti, come in figura, svanisce prima di giungere ai bordi del cristallo. La birifrangenza di questi quadranti è sensibile anche nei cristalli misti più poveri di $AgClO_3$ che io ho esaminato (1,59 %).

Gli altri due quadranti appaiono, qualunque sia il % in $AgClO_3$ del cristallo, attraversati completamente da una finissima linea *cd*, la quale ben di rado è una retta, più spesso è una spezzata che presenta una o più insenature trapezoidali caratteristiche. Questi quadranti sono quasi monorifrangenti, finchè il % in $AgClO_2$ è inferiore a 5 circa, poi, al crescere del %, van presentando anch'essi una birifrangenza sempre più forte.

Se il % in $AgClO_3$ è 3 o 4 al più, tutti e quattro i quadranti hanno sensibilmente assi ottici paralleli; poi (4 ad 8 % di $AgClO_3$) sono paralleli gli assi ottici dei quadranti 1 e 2 e quelli delle zone 3, 4, 5, 6, ma questi ultimi sono ad angolo con i primi; più tardi (9-12 % di $AgClO_3$) non sono più paralleli gli assi ottici delle zone 1 e 2, nè 3 e 4, nè 5 e 6; infine (dal 12-14 % in su), nemmeno tutti i punti di una sola delle 8 zone in cui allora compare diviso il cristallo, hanno assi ottici paralleli; ma l'asse ottico varia in ogni zona in modo tale da assumere forse tutti gli azimut possibili.

Sulla probabile origine di queste anomalie ottiche dirò qualche parola più oltre.

Passiamo al potere rotatorio dei cristalli misti.

Tra nicol incrociati, il cristallo che si esamina ristabilisce

la luce qualunque sia il suo azimut. Ma se si bada ad una sola delle zone in cui appare diviso il cristallo, si può, con una rotazione opportuna α dell'analizzatore, ottenere l'estinzione completa per quattro azimut del cristallo sensibilmente ad angolo retto. In questi casi, cioè, la vibrazione rettilinea incidente esce ancora sensibilmente rettilinea, ma ruotata di un angolo α. Ciò mostra che il cristallo non è soltanto birifrangente, ma è anche dotato di potere rotatorio.

Tralascio le considerazioni elementari sull'effetto della birifrangenza e del potere rotatorio su di una vibrazione incidente polarizzata in un piano, che esca, dalla lamina in istudio, ancor polarizzata in un piano. Da queste considerazioni si deduce facilmente che: se la birifrangenza del cristallo è lieve, come fu quasi sempre per le zone 3, 4, 5, 6, l'angolo α misurato nel modo suddetto rappresenta con grande approssimazione la rotazione del piano di polarizzazione dovuta al cristallo. Ma se la birifrangenza del cristallo è molto sensibile (settori 1 e 2 per 4-5 $^0/_0$ di $AgClO_3$; settori 3 e 4; 5 e 6 per 12-14 $^0/_0$ di $AgClO_3$) l'angolo α è sensibilmente maggiore dell'angolo di rotazione dovuto al potere rotatorio.

Ho sempre curato che la birifrangenza delle zone in cui misuravo il potere rotatorio, fosse molto piccola, non più di $\frac{1}{30}\lambda$. Partendo dalle formule che dànno l'azimut dell'asse maggiore dell'ellisse risultante da due vibrazioni rettilinee sinusoidali ad angolo retto, presentanti una differenza di fase $\leq 12^o$, si trova che, quando α è di qualche grado, come è sempre stato nelle mie misure, l'angolo di rotazione misurato sorpassa di qualche minuto primo (al più 4′ o 5′) il vero angolo di rotazione che la lamina presenterebbe se fosse monorifrangente.

Ho eseguito numerose misure su cristalli, il cui $^0/_0$ in $AgClO_3$ ha variato da 1,59 a 16,7. Per ogni $^0/_0$ ho esaminato numerosi cristalli, di ciascuno di essi ho calcolato il potere rotatorio specifico $[\alpha]$. I valori di $[\alpha]$ così ottenuti presentano quasi sempre delle differenze molto sensibili, che si devono ascrivere alla composizione variabile da cristallo a cristallo. Ma in ciascuna serie di valori di $[\alpha]$ è evidente il loro condensarsi attorno al valore medio. Specialmente penose, ma anche più numerose furono le osservazioni nei cristalli più ricchi di $AgClO_3$. Varie

misure, fatte nelle zone più birifrangenti, hanno costantemente dato per $[\alpha]$ valori più forti di quelli ottenuti dalle zone meno birifrangenti.

I valori medi ottenuti, sono i seguenti:

% in $AgClO_3$	media delle $[\alpha]_D$
0	3,118°
1,55	3,20°
2,6	3,26°
3,23	3,30°
3,91	3,33°
4,2	3,345°
5,61	3,44°
6,90	3,515°
7,65	3,53°
8,55	3,60°
9,9	3,70°
12,2	3,81°
13,1	3,88°
14,3	3,95°
16,7	4,10

Con percentuali maggiori di $AgClO_3$ non mi sono state possibili misure di qualche precisione, ma ho trovato segni sicuri di potere rotatorio in cristalli misti aventi perfino il 33 % di $AgClO_3$.

Il modo più semplice di interpretare questi risultati è di ritenere che l'$AgClO_3$ cubico sia anch'esso attivo, anzi sia più attivo del $NaClO_3$. Questa interpretazione è anche rafforzata dalle osservazioni seguenti.

Retgers ha misurato il peso specifico di cristalli misti aventi il 16,7 fino al 18 % di $AgClO_3$, e ne ha dedotto il peso specifico del $AgClO_3$ monometrico che è risultato 4,21, cioè sensibilmente diverso dal peso specifico 4,40 del clorato di argento dimetrico. Poichè le osservazioni del Retgers sono state fatte con percentuali poco varie, ho fatto nuove determinazioni del peso specifico dei cristalli misti per dedurne quello del $AgClO_3$ monometrico. È risultato per quest'ultimo:

%	15,1 ± 0,1	peso specifico	4,14 ± 0,2
%	13,87 ± 0,05	„	4,21 ± 0,05
%	12,65 ± 0,08	„	4,18 ± 0,06
%	5,18 ± 0,04	„	4,14 ± 0,1

La precisione delle misure non ha potuto essere migliore a causa della piccolezza dei cristalli disponibili.

Si può quindi concludere che il $AgClO_3$ che fa parte dei cristalli misti monometrici si trova in una forma definita e costante. La birifrangenza regolarmente maggiore in due settori del cristallo, e continuamente crescente al crescere del % in $AgClO_3$, non si può ritenere accidentale, ma deve avere una causa ben determinata. Diventa così probabile che la birifrangenza sia dovuta alla presenza nei cristalli misti di una certa quantità di aggregati molecolari di $AgClO_3$ a struttura cristallina dimetrica, frammista a molto $AgClO_3$ monometrico. Tale interpretazione della birifrangenza osservata è la sola che mi si presenti, essa è confermata dalla estrema fragilità dei cristalli misti (quelli contenenti più del 14-16 % di $AgClO_3$ non possono venir toccati senza che si rompano) e dalla misura del % in $AgClO_3$ fatta separatamente nei settori più birifrangenti e in quelli meno birifrangenti. Nei primi ho ottenuto sempre un % lievemente maggiore (fino a 0.65 % di differenza per un % medio di 15,3).

Infine se l'$AgClO_3$ monometrico è otticamente attivo se ne potrà dedurre il potere rotatorio ritenendo (è questa la legge di Bodländer) che la rotazione dovuta al cristallo misto sia la somma delle rotazioni dovute ai due componenti. Se c indica il % in $AgClO_3$; P_{Ag} e P_{Na} i pesi specifici del $AgClO_3$ e del $NaClO_3$ rispettivamente; $[\alpha]_{Ag}$, $[\alpha]_{Na}$ i poteri rotatori specifici corrispondenti; e $[\alpha]_c$ il potere rotatorio specifico del cristallo misto, la legge di Bodländer può esprimersi mediante la formula:

$$[\alpha]_c = \frac{P_{Na}[\alpha]_{Ag} + \frac{100-c}{c}[\alpha]_{Na} P_{Ag}}{P_{Na} + \frac{100-c}{c} P_{Ag}}$$

Mediante i valori sperimentali:

$c = 16,7$; $[\alpha]_{16.7} = 4,10°$; $[\alpha]_{Na} = 3,118°$; $P_{Na} = 2,490$; $P_{Ag} = 4,2$

la formula precedente dà

$$[\alpha]_{Ag} = 12,65°.$$

Si possono allora calcolare, in base a questo numero, i valori di $[\alpha]_c$, ho così ottenuto la curva della tavola (ascisse $\equiv c$; ordinate $\equiv [\alpha]_c$). Sulla stessa grafica ho riportato, mediante crocette, i valori di $[\alpha]_c$ ottenuti sperimentalmente (v. pag. 1132).

La curva accorda ottimamente con i punti sperimentali, e si ha così una conferma sia dell'attività del $AgClO_3$ monometrico, sia della legge di Bodländer.

Un accordo migliore tra curva e punti sperimentali non sarebbe sperabile, ciononostante il valore $[\alpha]_{Ag} = 12.65°$ è soltanto approssimativo, perchè lo si ottiene, in ultima analisi, mediante una estrapolazione enorme.

Ripeto ancora che un accordo così buono tra la curva e i punti sperimentali si è ottenuto soltanto perchè questi ultimi rappresentano la media di numerose osservazioni. Queste osservazioni prese singolarmente sarebbero molto spesso rappresentate da punti molto più in alto o molto più in basso della curva. L'incertezza dell'esatto $^0/_0$ in $AgClO_3$ di ogni cristallo esaminato, più che tutti gli altri errori di osservazione, è la causa di tali divergenze.

Concludendo:

Ho trovato che la composizione dei cristalli misti varia sensibilmente da cristallo a cristallo di una stessa cristallizzazione e anche da settore a settore di uno stesso cristallo.

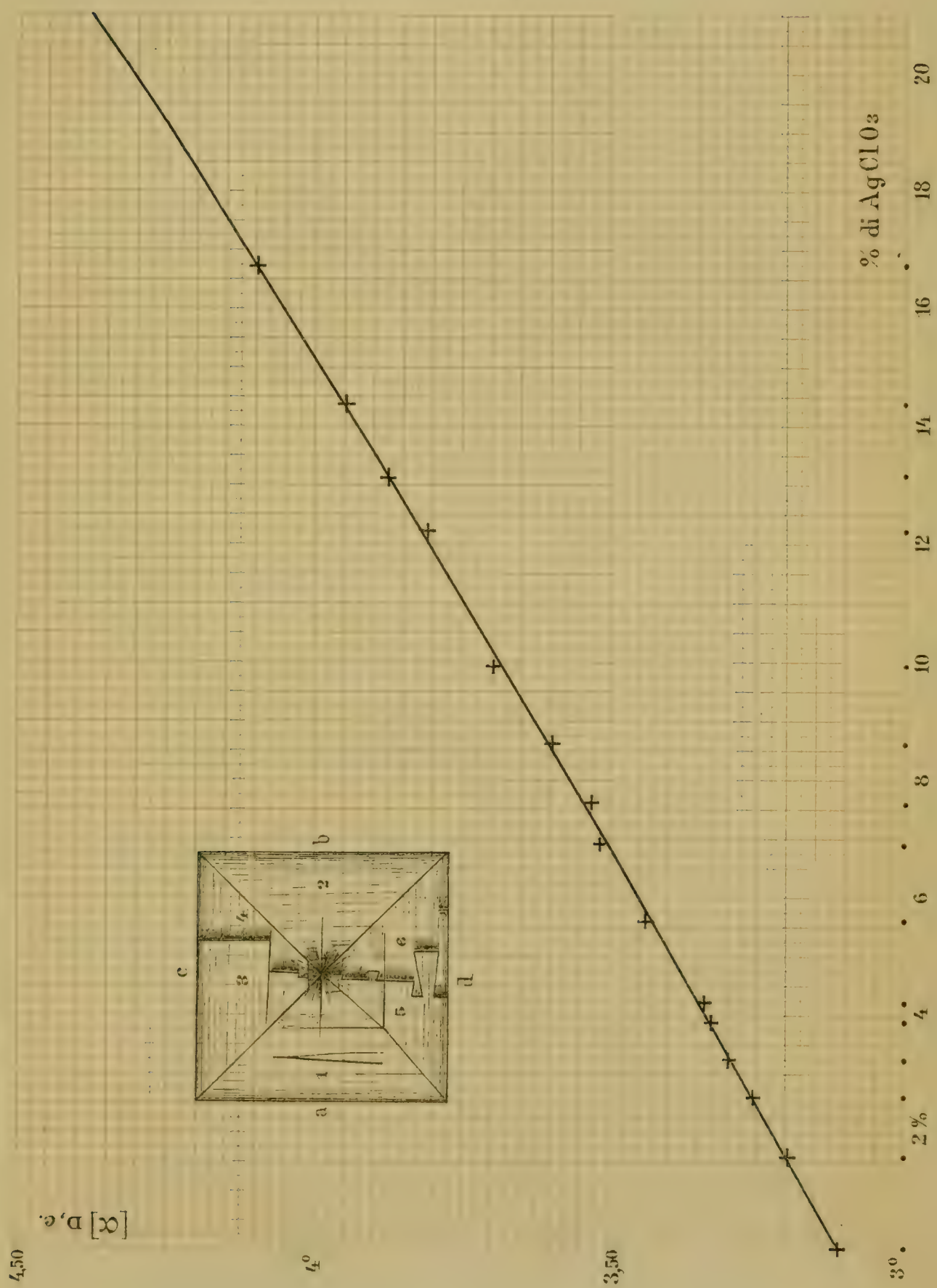
Ho descritto le anomalie ottiche dei cristalli misti $AgClO_3$ — $NaClO_3$, e ne ho dato una possibile spiegazione.

Ho misurato il potere rotatorio di tali cristalli misti e ne ho dedotto l'attività ottica del $AgClO_3$ monometrico, attività che è risultata circa quadrupla rispetto a quella del $NaClO_3$.

Ho trovato che la legge di Bodländer si accorda molto bene con le misure eseguite.

Incidentalmente ho eseguito alcune misure che mi hanno permesso di concludere che il $AgClO_3$ monometrico ha un peso specifico prossimo a 4,20, qualunque sia il $^0/_0$ col quale entra a far parte dei cristalli misti.

R. Istituto Fisico di Torino, 8 giugno 1914.


[α] D, e.
4,50
4°
3,50
3°
2 %
4
6
8
10
12
14
16
18
20
% di AgClO3
a
b
c
d
1
2
3
4
5
6
7
8

Alcune applicazioni delle formole di Frenet.

Nota di ANGELO PENSA

Applicheremo le formole di Frenet, sotto forma vettoriale [1], a trattare le questioni qui sotto accennate.

Nel § I, fissata una sezione retta di un cilindro, e imposto ad un punto di muoversi su questo in modo che uno dei vettori fondamentali $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, della curva da esso descritta, faccia angolo costante con uno degli analoghi vettori della sezione retta, si considerano le varie specie di curve che ne risultano.

Nel § II si tratta della *curva di inseguimento* (*Verfolgungscurve*), o *curva di caccia*, nel caso che la curva fondamentale sia qualunque, piana o sghemba.

Nei §§ III e IV sono infine considerate le concoidi e le cissoidi di linee sghembe, e, per la prima volta, a quanto mi consta, la *antievolvente* di una curva data.

§ I.

Curve tracciate sopra un cilindro e loro trasformate piane.

1. — Si consideri una sezione retta di un cilindro; sia P il punto generico e s l'arco di tale sezione. Siano $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$ $(=\boldsymbol{b})$ i soliti [2] tre vettori unitari, rispettivamente paralleli alla tangente, alla normale principale, alla binormale in P alla curva considerata. Il vettore $\boldsymbol{k}$ è costante, e parallelo alle generatrici del cilindro.

---

[1] Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel* (Paris, Hermann et fils, 1910), pag. 87, formole [3].

[2] Per la esatta definizione di questi tre vettori $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$ si veda a pag. 86 degli *Éléments de calcul vectoriel*, citati alla nota [1].

Sia ancora ρ (positivo) il raggio di curvatura, in P, della curva da questo descritta: per essa è $\tau = \infty$ (raggio di torsione). Perciò le formole di Frenet [3] dànno:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t}.$$

Consideriamo, sullo stesso cilindro, una curva descritta dal punto:

$$P_1 = P + y\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

con y funzione arbitraria di s.

Qualunque sia y, abbiamo, indicando con gli apici le derivate rispetto all'arco s della linea P:

$$P_1' = \boldsymbol{t} + y'\boldsymbol{k} \tag{2}$$

$$P_1'' = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n} + y''\boldsymbol{k} \tag{3}$$

$$P_1''' = -\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{t} - \frac{\rho'}{\rho^2}\boldsymbol{n} + y'''\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Da queste si ricava immediatamente la direzione della binormale $\boldsymbol{b}_1$:

$$P_1' \wedge P_1'' = -\frac{y'}{\rho}\boldsymbol{t} - y''\boldsymbol{n} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{k} \tag{5}$$

e quella della normale principale $\boldsymbol{n}_1$:

$$(P_1' \wedge P_1'') \wedge P_1' = y'y''\boldsymbol{t} - \frac{1+y'^2}{\rho}\boldsymbol{n} - y''\boldsymbol{k}. \tag{6}$$

Si ha inoltre:

$$(P_1' \wedge P_1'') \times P_1''' = \frac{y' + \rho\rho' y'' + \rho^2 y'''}{\rho^3}. \tag{7}$$

E chiamando ρ_1 e τ_1 i raggi di curvatura e di torsione in P_1, della curva descritta dal punto P_1 stesso, si hanno le formole [4]:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\operatorname{mod}(P_1' \wedge P_1'')}{(\operatorname{mod} P_1')^3}; \qquad \frac{1}{\tau_1} = -\frac{(P_1' \wedge P_1'') \times P_1'''}{(P_1' \wedge P_1'')^2}, \tag{8}$$

---

[3] Cfr. nota [1].

[4] Cfr. loc. cit. [1], pag. 88.

da cui, nel caso nostro:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{y'^2 + \rho^2 y''^2 + 1}}{\rho (1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\tau_1} = -\frac{y' + \rho\rho' y'' + \rho^2 y'''}{\rho (y'^2 + \rho^2 y''^2 + 1)}. \tag{9'}$$

Queste formole dànno tutti gli elementi fondamentali della linea P_1.

2. — Sviluppiamo il cilindro su un piano. Sia O un punto fisso di questo, $\boldsymbol{a}$ un vettore unitario, costante, parallelo al piano.

Distendiamo la curva descritta da P, sulla retta $O\boldsymbol{a}$, con l'origine dell'arco s in O.

Il punto P_1 verrà nella posizione:

$$P_2 = O + s\boldsymbol{a} + y i \boldsymbol{a}. \tag{10}$$

E chiamando s_2 l'arco descritto da P_2, corrispondente all'arco s descritto da P sulla sezione retta del cilindro, e ρ_2 il raggio di curvatura in P_2, avremo, come è ben noto [5]:

$$s_2 = \int \sqrt{1 + y'^2}\, ds; \qquad \frac{1}{\rho_2} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

3. — *Supporremo ora che al variare di P, e quindi di P_1, uno dei vettori della terna $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ faccia angolo costante con uno dei vettori $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$, e cercheremo di determinare la natura della curva descritta allora da P_1 (o quella della sua sviluppata piana).*

I casi in cui $\boldsymbol{b}_1$ od $\boldsymbol{n}_1$ sono costantemente normali ad $\boldsymbol{n}$ o $\boldsymbol{k}$, rispettivamente, ci dànno, come curva P_1, un'*elica* [6].

Così pure abbiamo un'*elica*, come curva P_1, in ciascuno dei casi in cui sia costante, e diversa da $\frac{\pi}{2}$, l'inclinazione di $\boldsymbol{t}_1$ su $\boldsymbol{t}$ o su $\boldsymbol{k}$, oppure quella di $\boldsymbol{b}_1$ su $\boldsymbol{k}$.

---

[5] Cfr. C. Burali-Forti, *Corso di Geometria analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1912), pagg. 71, 73 (n^i 100, 103).

[6] Cfr. loc. cit. [5], pag. 117 (n. 148).

Restano da considerare i casi in cui $\boldsymbol{b}_1$ faccia angolo costante, non retto, con $\boldsymbol{n}$ o con $\boldsymbol{t}$, e quelli in cui $\boldsymbol{n}_1$ faccia angolo costante, non retto, con $\boldsymbol{t}$ od $\boldsymbol{n}$ o $\boldsymbol{k}$.

4. — Volendo che $\boldsymbol{b}_1$ faccia angolo costante (non retto) con $\boldsymbol{n}$, basta porre:

$$\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{n} = \text{cost}\ (\neq 0)$$

od anche (ciò che è equivalente, perchè $\boldsymbol{t}_1$, complanare con $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{k}$, è sempre normale ad $\boldsymbol{n}$):

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n} = \text{cost}\ (\neq 0).$$

La prima equivale a porre $\left(\text{con } \theta \text{ costante e diverso da } \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{P_1' \wedge P_1'' \times \boldsymbol{n}}{\text{mod}\,(P_1' \wedge P_1'')} = \cos\theta.$$

Allora, per la (5), sarà:

$$\frac{-y''}{\sqrt{y''^2 + \frac{1}{\rho^2}(1+y'^2)}} = \cos\theta.$$

E ponendo $\text{cotg}\,\theta = -m$, avremo:

$$(11) \qquad \frac{y''}{\frac{1}{\rho}\sqrt{1+y'^2}} = m\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = m\,\frac{ds}{\rho}\,.$$

Indicando con φ l'angolo che $\boldsymbol{t}$ fa con un vettore unitario e fisso $\boldsymbol{i}$ del piano della sezione retta, potremo porre:

$$\boldsymbol{t} = e^{i\varphi}\boldsymbol{i}\,,$$

e quindi, per la prima delle formole di Frenet [7]:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad \text{ossia} \qquad d\varphi = \frac{ds}{\rho}\,.$$

[7] Cfr. loc. cit. [1], pag. 87.

La seconda delle (11) diventa allora:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = m d\varphi,$$

da cui integrando, e includendo in φ la costante d'integrazione:

$$\log(y' + \sqrt{1+y'^2}) = m\varphi.$$

Di qui risulta infine:

$$(12) \qquad y' = \operatorname{senh}(m\varphi) \quad \text{e quindi} \quad y = \int \operatorname{senh}(m\varphi)\, ds.$$

5. — La (12) ci permette di calcolare il raggio di curvatura ρ_1, e quello di torsione τ_1 della curva descritta da P_1. Si ha infatti:

$$y' = \operatorname{senh}(m\varphi); \qquad y'' = \frac{m}{\rho}\cosh(m\varphi);$$

$$y''' = -\frac{m\rho'}{\rho^2}\cosh(m\varphi) + \frac{m^2}{\rho^2}\operatorname{senh}(m\varphi)$$

e per le (8) e (9):

$$(13) \qquad \rho_1 = \frac{\cosh^2(m\varphi)}{\sqrt{1+m^2}}\rho; \qquad \tau_1 = -\frac{\cosh^2(m\varphi)}{\operatorname{senh}(m\varphi)}\rho.$$

E per la curva descritta da P_2, cioè per la sviluppata piana della curva descritta da P_1, si ha:

$$(14) \qquad \rho_2 = \frac{\cosh^2(m\varphi)}{m}\rho.$$

Da questa e dalla (13) risulta subito che *il rapporto fra i due raggi di curvatura* ρ_1 *e* ρ_2 *è costante:*

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = -\cos\theta \qquad \text{(Teor. di Catalan).}$$

Per questa sviluppata piana si ha ancora (cfr. n. 2):

$$(15) \qquad s_2 = \int\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(m\varphi)}\, ds = \int\cosh(m\varphi)\, ds.$$

Se da (14) e (15), ricordando che $\varphi = \int \frac{ds}{\rho}$, si potrà eliminare φ, si otterrà un'equazione implicita fra s_2 e ρ_2, cioè l'*equazione intrinseca* della curva descritta da P_2.

6. — Supponiamo, ad es., che P descriva una circonferenza:

$$\rho = \text{cost.},$$

allora:

$$\varphi = \frac{s}{\rho},$$

e la (12) dà:

$$y = \int \operatorname{senh}\left(m \frac{s}{\rho}\right) ds = \frac{\rho}{m} \cosh\left(\frac{m}{\rho} s\right)$$

e quindi:

$$P_1 = P + \frac{\rho}{m} \cosh\left(\frac{m}{\rho} s\right) \boldsymbol{k}.$$

Per la sviluppata piana, descritta dal punto P_2, dato dalla (10), interpretando s ed y come coordinate cartesiane x ed y, si ottiene l'equazione cartesiana:

$$y = \frac{\rho}{2m}\left(e^{\frac{\rho x}{m}} + e^{-\frac{\rho x}{m}}\right)$$

che è l'equazione di una *catenaria* (8).

7. — Passiamo al caso in cui $\boldsymbol{b}_1$ e $\boldsymbol{t}$ facciano angolo costante θ $\left(\text{diverso da } \frac{\pi}{2}\right)$.

(8) Cfr. G. Vivanti, *Esercizi di Analisi infinitesimale* (Pavia, Mattei e C., 1913), pag. 347, § 459.

Si può osservare che per questa sviluppata piana si ha:

$$s_2 = \frac{\rho}{m} \operatorname{senh}\left(\frac{m}{\rho} s\right)$$

$$\rho_2 = \frac{\rho}{m} \cosh^2\left(\frac{m}{\rho} s\right).$$

Di qui, eliminando s, si ottiene l'equazione intrinseca di una *catenaria* (m e ρ essendo costanti):

$$\rho_2 - \frac{m}{\rho} s^2 = \frac{\rho}{m}.$$

Sarà allora:

$$\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{t} = \cos\theta .$$

E ricordando le (5) avremo:

$$\frac{\dfrac{y'^2}{\rho^2}}{\dfrac{y'^2}{\rho^2} + y''^2 + \dfrac{1}{\rho}} = \cos^2\theta,$$

da cui:

$$\frac{y''}{\sqrt{y'^2 - \cot^2\theta}} = \frac{1}{\rho}\operatorname{tang}\theta ,$$

ossia

$$\frac{dy'}{\sqrt{y'^2 - \cot^2\theta}} = \frac{ds}{\rho}\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\theta\, d\varphi .$$

Integrando, e ponendo $\operatorname{tang}\theta = m$, si ottiene:

(16) $\quad y' = \dfrac{1}{m}\cosh(m\varphi)$ e quindi $y = \dfrac{1}{m}\int \cosh(m\varphi)\, ds$.

Si hanno anche subito i raggi ρ_1 e τ_1 di curvatura e di torsioned ella curva descritta da P_1:

$$\rho_1 = \frac{[m^2 + \cosh^2(m\varphi)]^{3/2}}{m^2\sqrt{1+m^2}\,.\cosh(m\varphi)}\,\rho\ ; \quad \tau_1 = -\frac{(m^2+1)\cosh(m\varphi)}{m(m+1)}\,\rho .$$

8. — Se $\rho = \text{cost.}$, si ha $\varphi = \frac{s}{\rho}$, e quindi dalle (16):

$$y = \frac{1}{m}\int \cosh\left(\frac{m}{\rho}s\right) ds = \frac{\rho}{m^2}\operatorname{senh}\left(\frac{m}{\rho}s\right).$$

Ed il punto P_1 è allora espresso da:

$$P_1 = P + \frac{\rho}{m^2}\operatorname{senh}\left(\frac{m}{\rho}s\right)\boldsymbol{k},$$

espressione analoga a quella trovata al n. 6.

9. — Supponiamo ora che sia:

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{t} = \text{cost} = \cos\theta\,,$$

essendo θ (costante) diverso da $\frac{\pi}{2}$.

Per la (6) questa condizione equivale alla seguente:

$$\frac{(y'y'')^2}{(y'y'')^2 + \left(\frac{1+y'^2}{\rho}\right)^2 + y''^2} = \cos^2\theta\,.$$

E questa, ponendo $\operatorname{cotg}\theta = h$, diventa:

$$\frac{(y'y'')^2}{\left(\frac{1+y'^2}{\rho}\right)^2 + y''^2} = h^2,$$

da cui:

$$y'' = \frac{h\,(1+y'^2)}{\rho\sqrt{y'^2 - h^2}}\,.$$

Da questa equazione differenziale dipende l'espressione di y in funzione di s, e quindi, per la (1), quella di P_1.

10. — L'ultimo caso che ci resta da considerare, cioè:

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{k} = \text{cost.},$$

può scindersi in due: la costante, qui considerata, può essere nulla, e allora:

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{k} = 0\,,$$

e la curva descritta da P_1 è in questo caso un'*elica*; se invece

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{k} = \text{cost.}\ (\neq 0),$$

potremo porre:

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{k} = \cos\theta \qquad \left(\text{con}\ \ \theta \neq \frac{\pi}{2}\right).$$

Per la (6) si ha di qui:

$$\frac{y''^2}{y''^2 + (y'y'')^2 + \left(\frac{1+y'^2}{\rho}\right)^2} = \cos^2\theta\,.$$

E ponendo $\cot g\,\theta = h$, risulta:

$$\frac{y''^2}{(y'y'')^2 + \left(\frac{1+y'^2}{\rho}\right)^2} = h^2,$$

da cui:

$$y'' = \frac{h\,(1+y'^2)}{\rho\sqrt{1-y'^2 h^2}}\,.$$

Integrando questa equazione differenziale, si avrà y in funzione di s, e quindi, dalla (1), l'espressione del punto P_1.

§ II.

Curva di inseguimento o linea di caccia.

11. — La *curva di inseguimento* [9] si può ottenere in modo generale come segue:

Un punto P descrive una linea *data*, piana o gobba, di arco s: un punto P_1 descriverà una " *curva di inseguimento* (*di arco* s_1), *o linea di caccia, rispetto alla linea descritta da* P *e al numero positivo costante e non nullo* m ", quando il rapporto degli elementi di arco in P_1 e P è m, e inoltre $\frac{dP_1}{ds_1}$ è un vettore diretto da P_1 a P.

Si ha, per dato:

$$\frac{ds_1}{ds} = m\,. \tag{1}$$

Se poniamo:

$$r = \mathrm{mod}\,(P - P_1)$$

si avrà pure, per dato:

$$\frac{dP_1}{ds_1} = \frac{P - P_1}{r}\,. \tag{2}$$

---

[9] Cfr. R. Marcolongo, *Theoretische Mechanik* (Leipzig, G. B. Teubner), Bd. 1 (1911), pag. 67; G. Loria, *Spezielle algebraische und transcendente Ebene Curven* (Leipzig, B. G. Teubner, 1902), pagg. 607-614; Salmon-Fiedler, *Analytische Geom. der höheren ebenen Curven* (Leipzig, B. G. Teubner, 1882), II^te Aufl., pagg. 378-379.

Dalle (1) e (2) segue che l'*equazione differenziale* del sistema delle linee P_1 è:

$$\frac{dP_1}{ds} = m\,\frac{P - P_1}{r}\,. \tag{3}$$

Derivando si ha:

$$\frac{d^2P_1}{ds^2} = \frac{d\,\frac{m}{r}}{ds}\,(P - P_1) + \frac{m}{r}\left(\frac{dP}{ds} - \frac{dP_1}{ds}\right),$$

ossia, per la (2):

$$\frac{d^2P_1}{ds^2} = \frac{d\,\frac{m}{r}}{ds}\,(P - P_1) + \frac{m}{r}\left[\boldsymbol{t} - \frac{m}{r}\,(P - P_1)\right]. \tag{3'}$$

Moltiplicando, a sinistra, per la (3):

$$\frac{dP_1}{ds} \wedge \frac{d^2P_1}{ds^2} = \left(\frac{m}{r}\right)^2 . (P - P_1) \wedge \boldsymbol{t} = \frac{m^2}{r}\,\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}\,, \tag{4}$$

da cui si ha che " *il piano osculatore in P_1, alla curva descritta da questo punto, passa per la tangente in P alla curva descritta da P* ".

12. — Siano ρ_1 e τ_1 i raggi di curvatura e di torsione della curva P_1. Avremo, tenendo presenti le espressioni trovate (2) e (3') di P_1' e P_1'':

$$P_1' \wedge P_1'' = \frac{m^2}{r} \cdot \frac{P - P_1}{r} \wedge \boldsymbol{t}$$

e quindi, indicando con φ l'angolo di $P_1 - P$ con $\boldsymbol{t}$, avremo:

$$\operatorname{mod}(P_1' \wedge P_1'') = \frac{m^2}{r}\,\operatorname{sen}\varphi\,;$$

e poichè $\operatorname{mod} P_1' = m$, sarà, per le (8) del § I:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{rm}$$

$$\frac{1}{\tau_1} = -\frac{\left(\frac{m}{r}\right)^3 . \frac{1}{\rho}\,(P - P_1) \wedge \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}}{\left[\left(\frac{m}{r}\right)^2 (P - P_1) \wedge \boldsymbol{t}\right]^2} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}}{\operatorname{sen}^2\varphi} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{m}\,\frac{\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{b}}{\operatorname{sen}^2\varphi}\,.$$

13. — Nel caso in cui la traiettoria di P sia piana (e t sia il tempo), posto

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \boldsymbol{t} = \frac{dP}{ds}, \tag{5}$$

e quindi

$$P' = v\boldsymbol{t},$$

potremo porre:

$$P_1 = P + r e^{i\varphi} \boldsymbol{t}, \tag{6}$$

ed r e φ risulteranno funzioni di t.

Poichè, come risulta dalla prima formola di Frenet,

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} i\boldsymbol{t},$$

derivando la (6) si avrà:

$$P_1' = (v + r' e^{i\varphi}) \boldsymbol{t} + \left(r\varphi' + \frac{rv}{\rho}\right) e^{i\varphi} i\boldsymbol{t}. \tag{7}$$

La velocità di P_1 è diretta verso P solo quando:

$$P_1' \times e^{i\varphi} i\boldsymbol{t} = 0,$$

cioè, per la (7), solo quando:

$$v \operatorname{sen} \varphi = r\varphi' + \frac{rv}{\rho}. \tag{8}$$

In virtù di questa, la (7) diviene:

$$P_1' = (v + r' e^{i\varphi}) \boldsymbol{t} + v \operatorname{sen} \varphi \, e^{i\varphi} i\boldsymbol{t},$$

che si trasforma subito nella seguente:

$$P_1' = (v \cos \varphi + r') e^{i\varphi} \boldsymbol{t}. \tag{9}$$

E poichè supponiamo che la grandezza della velocità di P_1 sia costante, indicando con u questa quantità costante, avremo, dando ad u un segno conveniente:

$$v \cos \varphi + r' = u. \tag{10}$$

Le (8) e (10) sono le equazioni differenziali dalle quali (poichè ρ è in generale funzione di t) si devono ricavare r e φ in funzione di t.

14. Raggio di curvatura ρ_1 in P_1. — Ponendo mod $P_1' = w$, si ha:

$$P_1' = -w e^{i\varphi} \boldsymbol{t},$$

da cui:

$$P_1'' = -w\varphi' e^{i\varphi} i\boldsymbol{t} - \frac{wv}{\rho} e^{i\varphi} i\boldsymbol{t} = -w\left(\varphi' + \frac{v}{\rho}\right) e^{i\varphi} i\boldsymbol{t}$$

e per la (8):

$$P_1'' = -w \frac{v}{r} \operatorname{sen}\varphi\, e^{i\varphi} i\boldsymbol{t},$$

$$iP_1'' = \frac{wv}{r} \operatorname{sen}\varphi\, e^{i\varphi} \boldsymbol{t},$$

e quindi:

$$P_1' \times iP_1'' = -\frac{w^2 v}{r} \operatorname{sen}\varphi.$$

Ma è noto che [10]:

$$\rho_1 = -\frac{(\text{mod } P_1')^3}{P_1' \times iP_1''}.$$

Quindi:

$$\rho_1 = \frac{w^3}{\frac{w^2 v}{r} \operatorname{sen}\varphi} = \frac{w}{v} \cdot \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Tenendo conto della (8) si ha ancora:

$$\rho_1 = \frac{w}{\varphi' + \frac{v}{\rho}}$$

che dà ρ_1 in funzione di φ e non di r.

15. Caso di $\frac{1}{\rho} = 0$. — Eliminando dt dalle (8) e (10) si ha:

$$v\left(\operatorname{sen}\varphi - \frac{r}{\rho}\right) dr = r\,(u - v\cos\varphi)\, d\varphi. \tag{11}$$

[10] Cfr. loc. cit. [1], pag. 94, *a*).

Se supponiamo $\frac{1}{\rho} = 0$, il punto P descriverà una retta, e dalla (11) si avrà:

$$\frac{dr}{r} = \frac{u - v\cos\varphi}{v\,\mathrm{sen}\,\varphi}\,d\varphi\,,$$

da cui, integrando (e indicando con r_0 la costante di integrazione):

$$\log\frac{r}{r_0} = \frac{u}{v}\log\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - \log\mathrm{sen}\,\varphi = \log\frac{\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{\mathrm{sen}\,\varphi}\,,$$

e quindi:

$$r = r_0\,.\,\frac{\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{\mathrm{sen}\,\varphi}\,, \tag{12}$$

od anche:

$$r = \frac{r_0}{2}\,.\,\frac{\left(\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u-v}{v}}}{\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u+v}{v}}}\,. \tag{12'}$$

Sostituendo nella (8), si ha, se $\frac{1}{\rho} = 0$:

$$v\,\mathrm{sen}\,\varphi = r_0\,\frac{\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{\mathrm{sen}\,\varphi}\,.\,\frac{d\varphi}{dt}\,,$$

da cui:

$$dt = r_0\,\frac{\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{\mathrm{sen}^2\,\varphi}\,d\varphi = \frac{r_0}{2}\,\frac{\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}}}{\mathrm{sen}^2\,\frac{\varphi}{2}}\,.\,d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,,$$

cioè:

$$dt = \frac{r_0}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}\right)\left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v}-2}.\,d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,,$$

e

$$t - t_0 = \frac{r_0 v}{2} \left\{ \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v} - 1}}{u - v} + \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{u}{v} + 1}}{u + v} \right\},$$

ove t_0 è una costante ([11]).

§ III.

Sulle concoidi e cissoidi di linee gobbe.

16. — Il punto P descriva una curva di arco s, e sia Q un punto della tangente in P, cioè:

$$Q = P + u\boldsymbol{t},$$

con u funzione di s.

Si ha, indicando con ρ il raggio di curvatura in P:

Teorema. — *I piani normali in P e Q si tagliano secondo una retta parallela alla binormale in P, e che passa per il punto $P + \rho(1 + u')\boldsymbol{n}$ della normale principale in P.*

Dim. — Si ha:

$$Q' = (1 + u')\boldsymbol{t} + \frac{u}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

Il piano normale in P alla curva descritta da P è normale a $\boldsymbol{t}$: il piano normale in Q, alla curva descritta da Q, è normale a $Q' = (1 + u')\boldsymbol{t} + \frac{u}{\rho}\boldsymbol{n}$. Quindi i due piani si tagliano secondo una retta h parallela a $\boldsymbol{b}$.

Detto H il punto d'intersezione di tale retta colla normale principale in P, si può porre (indicando con x un numero reale):

$$H = P + x\boldsymbol{n}.$$

Si dovrà perciò avere:

$$(H - Q) \times Q' = 0,$$

da cui:

$$(x\boldsymbol{n} - u\boldsymbol{t}) \times \left[(1 + u')\boldsymbol{t} + \frac{u}{\rho}\boldsymbol{n}\right] = 0,$$

([11]) Cfr. R. Marcolongo, *Theoretische Mechanik*, loc. cit. ([9]).

ossia:

$$x \frac{u}{\rho} - u(1 + u') = 0 ,$$

e quindi:

$$x = \rho(1 + u').$$

Sarà dunque:

$$H = P + \rho(1 + u')\boldsymbol{n} \qquad \text{c. v. d.}$$

La retta h ora considerata corrisponde all' *estremo della sottonormale polare* per le curve piane (al *polo* è sostituita la linea P).

17. — Se poniamo $Q_1 = Q + v\boldsymbol{t}$, con v funzione di s, e consideriamo per la curva Q_1 la nuova retta h, questa coinciderà colla precedente solo se

$$\rho(1 + u') = \rho(1 + v') ,$$

ossia quando $u' = v'$, cioè:

$$u - v = \text{cost.}$$

Nell'ipotesi $u - v = \text{cost.}$, *la curva* Q_1 *può chiamarsi concoide della linea* Q *rispetto alla linea* P.

18. — Se poniamo:

$$H = P + \rho(1 + u')\boldsymbol{n} ,$$

si ha:

$$H' = -u'\boldsymbol{t} + [\rho(1 + u')]'\boldsymbol{n} - \frac{\rho}{\tau}(1 + u')\boldsymbol{b} .$$

La retta h, cioè la $H\boldsymbol{b}$ descrive una rigata.

La giacitura del suo piano *assintotico* è normale a $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}'$ [12], cioè (ricordando la 2ª formola di Frenet) a $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$. Quindi:

Il piano assintotico della rigata descritta da h *è il piano normale in* P.

Il piano centrale di h *è dunque il piano uscente da* H *e parallelo al piano rettificante in* P.

---

[12] Cfr. loc. cit. [5], pagg. 140-141 (n. 164).

19. — Troviamo ora il *punto centrale*, cioè il punto K che descrive la *linea di stringimento* della rigata generata da h (o lo *spigolo di regresso*, se la rigata è sviluppabile).

Si ha:

$$K = H + x\boldsymbol{b},$$

con la condizione che il vettore:

$$\frac{\partial K}{\partial s} \wedge \frac{\partial K}{\partial x}$$

sia parallelo a $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{b}$, cioè ad $\boldsymbol{n}$.

Ora si ha:

$$\frac{\partial K}{\partial s} \wedge \frac{\partial K}{\partial x} = \left(H' + \frac{x}{\tau}\boldsymbol{n}\right) \wedge \boldsymbol{b} = -u'\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{b} +$$
$$+ [\rho(1+u')]'\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{b} + \frac{x}{\tau}\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Deve dunque essere:

$$x = -\tau[\rho(1+u')]'.$$

Si ha quindi [13]:

$$K = P + \rho(1+u')\boldsymbol{n} - \tau[\rho(1+u')]'\boldsymbol{b}.$$

Se per brevità si pone $\mu = \rho(1+u')$, si ha:

$$K = P + \mu\boldsymbol{n} - \tau\mu'\boldsymbol{b},$$

e quindi:

$$K' = \left(1 - \frac{\mu}{\rho}\right)\boldsymbol{t} - \left[\frac{\mu}{\tau} + (\tau\mu')'\right]\boldsymbol{b}.$$

La rigata descritta da h è *sviluppabile* solo quando K' è parallelo a $\boldsymbol{b}$ [14], cioè solo quando:

$$1 - \frac{\mu}{\rho} = 0 \qquad \text{ossia} \qquad 1 - \frac{\rho(1+u')}{\rho} = 0,$$

[13] L'espressione del punto K è analoga a quella che dà il centro C della sfera osculatrice in P, cioè [cfr. Burali-Forti, *Corso di Geometria analitico-proiettiva*, 1912, pag. 114]:

$$C = P + \rho\boldsymbol{n} - \tau\frac{d\rho}{ds}\boldsymbol{b}.$$

[14] Cfr. loc. cit. [5], pagg. 141-142 (n. 167).

cioè:

$$u' = 0\,, \qquad \text{da cui} \qquad u = \text{cost.}$$

Quindi: *La rigata descritta da h è sviluppabile solo quando la curva Q è una concoide di P rispetto a P* (cfr. n. 17). *In tal caso K è il centro della sfera osculatrice in P.*

20. — Da quanto precede si ha che:

La tangente in Q è la perpendicolare ad HQ, uscente da Q e giacente nel piano osculatore in P alla curva descritta da questo punto.

Questa proprietà si può anche dimostrare così:

Si è trovato $Q' = (1 + u')\,\boldsymbol{t} + \frac{u}{\rho}\,\boldsymbol{n}$; ciò prova che la tangente in Q sta nel piano osculatore in P.

Che sia perpendicolare ad HQ si vede osservando che:

$$(H - Q) \times Q' = \{P + \rho(1 + u')\,\boldsymbol{n} - P - u\boldsymbol{t}\} \times \{(1 + u')\,\boldsymbol{t} + \frac{u}{\rho}\,\boldsymbol{t}\} =$$

$$= \{-u\boldsymbol{t} + \rho(1 + u')\,\boldsymbol{n}\} \times \{(1 + u')\,\boldsymbol{t} + \frac{u}{\rho}\,\boldsymbol{n}\} =$$

$$= -u(1 + u') + u(1 + u') = 0 \ (^{15}). \qquad \text{c. d. d.}$$

Segue che: *Tutte le concoidi Q_1 di Q rispetto a P hanno le tangenti nel piano osculatore in P e sono normali alle rette Q_1H.*

21. — Per $u = -s$, la curva Q è una *evolvente* della curva P, ed i punti H e K coincidono con P.

Se P descrive una *linea piana* sussistono le proprietà precedenti, e HQ è la normale in Q.

---

(15) Si può dimostrare direttamente questa seconda parte del teorema come segue. Nel piano osculatore in P sia $\boldsymbol{i}$ l'operatore tale che $\boldsymbol{i}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}$. Allora:

$$Q' = \frac{1}{\rho}\{\rho(1 + u')\,\boldsymbol{t} + u\boldsymbol{n}\}.$$

$$\boldsymbol{i}Q' = \frac{1}{\rho}\{\rho(1 + u')\,\boldsymbol{n} - u\boldsymbol{t}\} = \frac{1}{\rho}\{H - P - (Q - P)\} = \frac{1}{\rho}\{H - Q\}.$$

Operando con $\boldsymbol{i}$:

$$Q' = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{i}(Q - H). \qquad \text{c. d. d.}$$

22. — Si ponga ora:

$$Q_r = P + u_r \boldsymbol{t}\,,$$
$$H_r = P + \rho\,(1 + u_r')\,\boldsymbol{n}\,, \qquad \text{per } r = 1, 2, \ldots n.$$

Indichiamo con m_r dei numeri costanti, e tali che sia $m = \Sigma m_r \neq 0$, e poniamo:

$$Q = \frac{\Sigma m_r Q_r}{m}\,.$$

Avremo allora:

$$Q = P + \frac{\Sigma m_r u_r}{m}\,\boldsymbol{t}\,,$$

e per espressione del relativo punto H si ha:

$$H = P + \rho\left(1 + \frac{\Sigma m_r u_r'}{m}\right)\boldsymbol{n}\,.$$

Come per le *cissoidi ordinarie*, vale la proprietà:

$$\frac{\Sigma m_r H_r}{m} = H\,.$$

Si ha infatti:

$$\frac{\Sigma m_r H_r}{m} = P + \frac{\Sigma m_r \rho\,(1 + u_r')}{m}\,\boldsymbol{n} = P + \left(\rho + \frac{\Sigma m_r u_r'}{m}\right)\boldsymbol{n}\,. \qquad \text{c. d. d.}$$

23. — Più in generale, si consideri una rigata Φ, sviluppabile o no, e su di essa un punto P descriva una linea. Sarà P funzione dell'arco s di tale linea.

Sia $\boldsymbol{u}$ un vettore unitario funzione di s, parallelo alla generatrice di Φ uscente da P, e si ponga:

$$Q = P + a\boldsymbol{u}$$

essendo a costante.

Il punto Q così definito descrive una *concoide* di P rispetto a Φ.

E si ha:

Teorema. — *I piani normali in P e Q si tagliano secondo una retta indipendente da a (retta che corrisponde all'estremo della sottonormale polare per le concoidi di curve piane).*

La retta comune ai piani normali in P e Q è:

$$\begin{aligned} P\,\boldsymbol{t}\,.\,Q|Q' &= P|\boldsymbol{t}\,.\,(P+a\boldsymbol{u})|(\boldsymbol{t}+a\boldsymbol{u}') = \\ &= P|\boldsymbol{t}\,.\,(P\,\boldsymbol{t}+aP|\boldsymbol{u}'+a\boldsymbol{u}|\boldsymbol{t}) = \\ &= aP|\boldsymbol{t}\,.\,(P|\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}|\boldsymbol{t}). \qquad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

La stessa cosa si può dimostrare anche così:

Sia in generale:

$$Q = P + x\boldsymbol{u},$$

con x funzione di s. Si ha allora:

$$\begin{aligned} P|\boldsymbol{t}\,.\,Q|Q' &= P|\boldsymbol{t}\,.\,(P+x\boldsymbol{u})|(\boldsymbol{t}+x'\boldsymbol{u}+x\boldsymbol{u}') = \\ &= P|\boldsymbol{t}\,.\,(P|\boldsymbol{t}+x'P|\boldsymbol{u}+xP|\boldsymbol{u}'+x\boldsymbol{u}|\boldsymbol{t}+xx'\Omega) = \\ &= xP|\boldsymbol{t}\,.\,(P|\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}|\boldsymbol{t})+xx'.\,P|\boldsymbol{t}\,.\,\Omega. \end{aligned}$$

Affinchè questa retta sia indipendente da x occorre che sia $xx' = 0$, cioè $(x^2)' = 0$, ossia, indicando con a una *costante*:

$$x = a \text{ (cost.)}.$$

24. — La retta h comune ai piani normali in P e Q è, a meno di un fattore costante (cfr. n. 23):

$$P|\boldsymbol{t}\,.\,(P|\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}|\boldsymbol{t}).$$

Il punto H in cui la retta h incontra la $P\boldsymbol{n}$ è anche il punto in cui il piano normale in Q incontra la $P\boldsymbol{n}$, e quindi per avere H basta sviluppare il prodotto regressivo:

$$P\boldsymbol{n}\,.\,(Q|Q').$$

Si ottiene così il punto:

$$H = P + \frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{n}.$$

Infine, osservando che la retta h è parallela al vettore $|(\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}')$ si potrà porre questa retta sotto la forma:

$$\left(P + \frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{n}\right)|(\boldsymbol{t}\boldsymbol{u}').$$

L'espressione del punto che descrive la linea di stringimento della rigata h si otterrà applicando la 1ª formola di pag. 148 della *Geom. analitico-proiettiva* di C. Burali-Forti ([16]).

§ IV.

Sulla *antievolvente* di una curva data.

25. — Il punto Q descriva una linea di arco σ. Allora il punto:

$$R = Q - \sigma T$$

descrive una *evolvente* di Q. Ed il punto:

$$P = Q + \sigma T,$$

simmetrico di R rispetto a Q, descrive anch'esso una curva, che potremo chiamare *antievolvente* di Q.

Data la Q è nota la curva R, e anche la curva P; così, data R, sono note le curve Q e P.

Risolviamo ora il problema:

Data la linea P trovare la linea Q (e in conseguenza anche R).

26. — Indicando con s l'arco della curva P, conservando a $\boldsymbol{t}$ il solito significato, poniamo $\varphi = \operatorname{ang}(\boldsymbol{t}, Q - P)$, e consideriamo i punti:

$$(14) \qquad \begin{cases} Q = P + r\boldsymbol{u} \\ R = P + 2r\boldsymbol{u}. \end{cases}$$

Dovremo determinare r ed $\boldsymbol{u}$, che sono funzioni di s, in modo da soddisfare alle condizioni:

$$(15) \qquad Q' \wedge \boldsymbol{u} = 0, \qquad R' \times \boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{u}^2 = 1.$$

Dalle (14) si ha:

$$(a) \qquad Q' = \boldsymbol{t} + r'\boldsymbol{u} + r\boldsymbol{u}', \qquad R' = \boldsymbol{t} + 2r'\boldsymbol{u} + 2r\boldsymbol{u}'$$

([16]) Cfr. nota ([5]).

e le (15) divengono:

$$(15') \quad (\boldsymbol{t} + r\boldsymbol{u}') \wedge \boldsymbol{u} = 0\,, \qquad \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u} + 2r' = 0\,, \qquad \boldsymbol{u}^2 = 1.$$

La prima di queste dice che $\boldsymbol{t} + r\boldsymbol{u}' = m\boldsymbol{u}$, con m reale, e poichè $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' = 0$, si avrà $m = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u}$, e per la seconda delle (15'), $m = -2r'$. Vale a dire, la prima e la seconda delle (15') equivalgono a

$$(b) \qquad \boldsymbol{t} + r\boldsymbol{u}' + 2r'\boldsymbol{u} = 0\,.$$

Perciò le condizioni (15) o (15') divengono:

$$(16) \qquad \boldsymbol{u}' = -\frac{2r'}{r}\boldsymbol{u} - \frac{1}{r}\boldsymbol{t}\,,$$

$$(16') \qquad \boldsymbol{u}^2 = 1\,.$$

27. — Dalla (16') si ha, derivando:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' = 0\,,$$

perciò dalla (16) si trae:

$$(17) \qquad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t} = -2r'\,;$$

derivando, e ricordando le formole di Frenet, si ha:

$$\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{t} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = -2r''\,,$$

cioè, per la (16):

$$(18) \qquad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = \frac{\rho}{r}(1 - 4r'^2 - 2rr'') = \frac{\rho}{r^2}\left[r - \frac{2}{3}(r^3)''\right].$$

Derivando questa, si ha:

$$\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{u} \times \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t} + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}\right) = \left[\frac{\rho}{r}(1 - 4r'^2 - 2rr'')\right]',$$

(indicando, nel secondo membro, coll'apice posto alla parentesi quadra, la derivata dell'espressione che essa racchiude).

Per le (16) e (17) si ottiene, dall'ultima eguaglianza scritta:

$$(19)\quad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}=-\tau\left[\frac{\rho}{r}(1-4r'^2-2rr'')\right]'-\frac{2\rho\tau r'}{r^2}[1-4r'^2-2rr'']+\frac{2\tau r'}{\rho}=$$

$$=-\tau\left\{\frac{[\rho(1-4r'^2-2rr'')]'r-\rho r'(1-4r'^2-2rr'')}{r^2}+\frac{2\rho r'[1-4r'^2-2rr'']}{r^2}-\frac{2r'}{\rho}\right\}=$$

$$=-\tau\left\{\frac{[\rho r(1-4r'^2-2rr'')]'}{r^2}-\frac{2r'}{\rho}\right\}.$$

Ora, dalla identità:

$$(20)\qquad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{t}\,.\,\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{n}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}\,.\,\boldsymbol{b},$$

si ricava:

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{t})^2+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n})^2+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b})^2=1.$$

Di qui, per le (17), (18), (19), si ha:

$$(21)\quad 4r'^2+\frac{\rho^2}{r^2}(1-4r'^2-2rr'')^2+\tau^2\left\{\frac{[\rho r(1-4r'^2-2rr'')]'}{r^2}-\frac{2r'}{\rho}\right\}=1.$$

Da questa equazione differenziale di 3° ordine si ricava r in funzione di s. Le (17), (18), (19), (20) daranno, in conseguenza, $\boldsymbol{u}$ in funzione di s.

28. — Dalle (a) e (b) del n. 26 si ha ancora:

$$Q'=r'\boldsymbol{u}-2r'\boldsymbol{u}=-r'\boldsymbol{u}$$

e quindi:

$$(22)\qquad \begin{cases} Q'=-r'\boldsymbol{u} \\ Q''=-r''\boldsymbol{u}-r'\boldsymbol{u}' \\ Q'''=-r'''\boldsymbol{u}-2r''\boldsymbol{u}'-r'\boldsymbol{u}''. \end{cases}$$

Avremo quindi la direzione della *binormale* in Q:

$$Q'\wedge Q''=r'^2\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'$$

e quella della *normale principale* in Q:

$$(Q'\wedge Q'')\wedge Q'=-r'^3\boldsymbol{u}'.$$

Si ottiene inoltre:

$$Q' \wedge Q'' \times Q''' = -r'^3 \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}''.$$

E quindi chiamando ρ_1 e τ_1 i raggi di curvatura e di torsione in Q:

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{r'^2 . \operatorname{mod} \boldsymbol{u}'}{r'^3} = \pm \frac{\operatorname{mod} \boldsymbol{u}'}{r'},$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{r'^3 \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}''}{r'^4 . \boldsymbol{u}'^2} = \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}' \wedge \boldsymbol{u}''}{r' . \boldsymbol{u}'^2}.$$

Dalla (16) calcolando anche $\boldsymbol{u}''$ si ha subito:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' = -\frac{1}{r} \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{t}; \qquad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{u}'' = \frac{1}{r^2 \rho} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b}.$$

Ricordando che per la (17):

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t} = -2r',$$

si avrà, pure dalla (16):

$$\boldsymbol{u}'^2 = \frac{1 - 4r'^2}{r^2}.$$

Quindi, le espressioni di $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\tau_1}$ divengono:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{1 - 4r'^2}}{rr'}; \qquad \frac{1}{\tau_1} = \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b}}{\rho r' (1 - 4r'^2)}, \tag{23}$$

ricordando che il valore di $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b}$ è dato dalla (19).

29. — Le espressioni (14) di Q ed R dànno:

$$\left\{ \begin{aligned} Q' &= \boldsymbol{t} + r' e^{i\varphi} \boldsymbol{t} + r \left(\varphi' + \frac{1}{\rho}\right) e^{i\varphi} i\boldsymbol{t}, \\ R' &= \boldsymbol{t} + 2r' e^{i\varphi} \boldsymbol{t} + 2r \left(\varphi' + \frac{1}{\rho}\right) e^{i\varphi} i\boldsymbol{t}, \end{aligned} \right. \tag{24}$$

e le prime due condizioni (15), cioè:

$$Q' \times e^{i\varphi} i\boldsymbol{t} = 0, \qquad R' \times e^{i\varphi} \boldsymbol{t} = 0,$$

diventano:

$$(25) \qquad -\operatorname{sen}\varphi + r\left(\varphi' + \frac{1}{\rho}\right) = 0\,,$$

$$(26) \qquad \cos\varphi + 2r' = 0\,.$$

Inoltre, dalla prima delle (24) si ha, tenendo conto delle (25), (26):

$$Q' = \frac{1}{2}\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{t}\,,$$

da cui:

$$Q'' = -\frac{1}{2}\varphi'\operatorname{sen}\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{t} + \frac{1}{2}\varphi'\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{i}\boldsymbol{t} + \frac{1}{2\rho}\cos\varphi\, e^{i\varphi}\boldsymbol{i}\boldsymbol{t}.$$

E quindi:

$$Q'^2 = \frac{1}{4}\cos^2\varphi$$

$$Q' \times iQ'' = -\frac{1}{4}\varphi'\cos^2\varphi - \frac{1}{4\rho}\cos^2\varphi = -\frac{1}{4}\cos^2\varphi\left(\varphi' + \frac{1}{\rho}\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos^2\varphi\,.\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\,.$$

Se C_1 è il centro di curvatura in Q, si ha:

$$C_1 = Q + \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi}\, iQ' = Q + \frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi\,.\,e^{i\varphi}\boldsymbol{i}\boldsymbol{t}\,.$$

E quindi se s_1 e ρ_1 sono l'*arco* ed il *raggio di curvatura* in Q, si ha:

$$(27) \qquad ds_1 = \frac{1}{2}\cos\varphi\,.\,ds\,, \qquad \rho_1 = -\frac{r}{2}\operatorname{cotg}\varphi\,.$$

Si otterrà l'equazione intrinseca della curva Q, in funzione di ρ ed s della curva di P, eliminando r e φ tra le (25), (26), (27).

30. — Il caso più semplice, cioè quello in cui la curva P è una retta, si otterrebbe ponendo $\frac{1}{\rho} = 0$ e $\frac{1}{\tau} = 0$ nelle formole precedenti, ma si può facilmente trattare in modo diretto considerando i due punti:

$$Q = O + w\boldsymbol{i} + re^{i\varphi}\boldsymbol{i}\,,$$
$$R = O + w\boldsymbol{i} + 2re^{i\varphi}\boldsymbol{i}\,.$$

essendo $\boldsymbol{i}$ un vettore unitario parallelo alla retta su cui si muove P, e w un numero reale.

In questo caso le (25) e (26) divengono:

$$r = w' \operatorname{sen} \varphi \,; \qquad w' \cos \varphi + 2r' = 0 \,. \tag{28}$$

Eliminando w' tra queste, si ha:

$$r \cos \varphi + 2r' \operatorname{sen} \varphi = 0 \,,$$

ossia:

$$\frac{2r'}{r} = -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \,,$$

e integrando (e indicando con a una costante):

$$2 \log \frac{r}{a} = -\log \operatorname{sen} \varphi \,,$$

da cui:

$$r = \frac{a}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi}} \,. \tag{29}$$

Sostituendo nella prima delle (28), si ha:

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{a}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \varphi} \,,$$

da cui:

$$w = a \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \varphi} \,. \tag{30}$$

Le (29) e (30) determinano la linea Q cercata.

31. — È facile trovare la relazione fra r e l'arco s della linea descritta da P, nel caso attuale, cioè per $\frac{1}{\rho} = 0$.

Per $\rho \neq 0$ la (18) si può scrivere:

$$\frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}}{\rho} = \frac{1}{r^2} \left[r - \frac{2}{3} (r^3)'' \right] .$$

Se in questa poniamo $\frac{1}{\rho} = 0$, abbiamo:

$$\frac{d^2 r^3}{ds^2} = \frac{3}{2} r \tag{31}$$

Per integrare questa equazione, poniamo $r^3 = y$. Avremo:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{3}{2}\, y^{\frac{1}{3}}.$$

Moltiplicando i due membri per $2\,\frac{dy}{ds}$, si ha:

$$2\,\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} = 3\,y^{\frac{1}{3}}.\,\frac{dy}{ds}, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 3\,y^{\frac{1}{3}}.\,\frac{dy}{ds}.$$

Integrando, e indicando con C una costante, risulta:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{9}{4}\,[y^{\frac{4}{3}} + C].$$

E di qui, dopo aver rimesso r^3 al posto di y:

$$\frac{dr^3}{ds} = \frac{3}{2}\sqrt{r^4 + C}.$$

da cui:

$$ds = \frac{dr^3}{\frac{3}{2}\sqrt{r^4 + C}}.$$

Integrando, e indicando con s_0 una nuova costante, si ottiene:

$$s - s_0 = 2\int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{r^4 + C}},$$

che è la relazione cercata fra r ed s.

32. — Nel caso attuale, in cui P descrive una retta, si può facilmente trovare l'equazione intrinseca della curva Q.

Si ha, essendo s variabile indipendente:

$$P = Q + s\boldsymbol{t}.$$

Affinchè P descriva una retta deve essere ([17]):

$$P' \wedge P'' = 0,$$

([17]) Loc. cit. ([1]), pag. 94.

ovvero:

$$P' \times iP'' = 0.$$

Ora, si ha:

$$P' = 2\boldsymbol{t} + \frac{s}{\rho} i\boldsymbol{t},$$

$$P'' = \frac{2}{\rho} i\boldsymbol{t} + \frac{\rho - s\rho'}{\rho^2} i\boldsymbol{t} - \frac{s}{\rho^2} \boldsymbol{t},$$

$$iP'' = -\frac{3\rho - s\rho'}{\rho^2} \boldsymbol{t} - \frac{s}{\rho^2} i\boldsymbol{t}.$$

E quindi:

$$-P' \times iP'' = 2\frac{3\rho - s\rho'}{\rho^2} + \frac{s^2}{\rho^3} = 0,$$

ossia:

(32) $$6\rho^2 + s^2 = 2s\rho\rho'.$$

Posto in questa $\rho^2 = \xi$, si ha:

$$s\xi' = 6\xi + s^2$$

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{6}{s}\xi + s$$

il cui integrale generale è (ritornando a porre ρ^2 al posto di ξ):

(33) $$\rho^2 = \frac{s^6}{a^4} - \frac{1}{4}s^2$$

essendo a una costante arbitraria. Questa è l'equazione intrinseca cercata.

Torino, 12 giugno 1914.

L'Istrumento dei passaggi « Heyde » del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino.

Nota di G. A. FAVARO
con Prefazione del Prof. N. Jadanza.

(Con 1 Tavola)

PREFAZIONE.

Al Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino è annessa una terrazza con un pilastro che poggia su di un solido muro maestro. Tale pilastro è essenzialmente destinato ad addestrare gli allievi al maneggio degli strumenti ed è indicato col simbolo G. G.

Per la determinazione del tempo si è adoperato fino ad ora un teodolite di 1° ordine (altazimut) che si portava sul pilastro G. G. tutte le volte che bisognava fare le osservazioni astronomiche. Ma tale procedimento era certamente incomodo, oltre al possibile guasto dell'altazimut per il continuo trasporto sul pilastro G. G.

Avendo avuto occasione di acquistare un cannocchiale dei passaggi trasportabile del costruttore Heyde, pensai di metterlo stabilmente in un posto di facile accesso, in modo che la determinazione del tempo riuscisse la più comoda possibile. Ciò si ottenne costruendo una piccola stanzuccia sulla volta del porticato del secondo piano della R. Università a cui si accede dal corridoio di accesso alle diverse aule della Facoltà di Scienze, mediante una porticina a muro. Nel mezzo di tale stanzuccia si è costruito un pilastro in muratura su cui è stato posto il cannocchiale dei passaggi di Heyde.

Per la posa dello strumento in meridiano e per la determinazione delle costanti, pregai il Dott. Favaro astronomo dell'Osservatorio di Torino. Egli accolse benevolmente la mia preghiera ed in questo scritto è esposto quanto egli ha fatto. Di tutto io lo ringrazio cordialmente.

Il cannocchiale dello strumento Heyde ha l'apertura libera di 47 millimetri e la distanza focale di 55 centimetri. La livella è sospesa all'asse di rotazione del cannocchiale.

Nella tavola annessa che rappresenta la pianta del Gabinetto di Geodesia si vede in P la posizione del nuovo strumento Heyde, come pure la proiezione del pilastro G. G. a cui si accede mediante una scala a chiocciola.

Si vede anche un terzo pilastro Q che si trova sul davanzale di una finestra sovrapposta a quella che figura in pianta. A questo pilastro si accede mediante un'altra scala a chiocciola.

N. JADANZA.

Determinazione delle distanze dei fili del reticolo.

Avuto dal Chiar.mo Prof. Jadanza, Direttore del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino, il gradito incarico di determinare le distanze dei fili del reticolo dell'istrumento dei passaggi " Heyde ", con permesso del sig. Direttore dell'Osservatorio (1), ho fatto portare l'istrumento nella sala meridiana del R. Osservatorio Astronomico, dove mi riusciva più facile l'orientamento, dove poteva osservare stelle quanto vicine al polo era necessario (2), e dove aveva a mia disposizione e a più comoda portata il pendolo e il cronografo a secco.

---

(1) Mentre ringrazio qui il Prof. Boccardi per questo piccolo favore, sono dolente di non poterlo ringraziare per avermi negato un altro grande favore, quello di permettermi ch'io studiassi il *Telescopio zenitale* dello stesso Gabinetto di Geodesia, impedendomi in tal modo di farmi un ottimo titolo e di rendere un segnalato servizio al detto Gabinetto ed al suo ottimo Direttore, il Comm. Prof. Jadanza.

Il dubbio, espresso dal Boccardi, che io volessi fare una latitudine di Palazzo Madama, anche se avesse avuto ragione di sussistere, sarebbe stato, a parer mio, una ragione di più per permettermi il lavoro, perchè in Lui stesso dovea essere il desiderio che possibilmente fossero tolti i dubbi che esistono sulle passate determinazioni di quella latitudine.

(2) Dal posto destinato all'istrumento presso il Gabinetto di Geodesia si può arrivare ad osservare soltanto stelle di declinazione inferiore a circa $+60°$.

Messo l'istrumento sopra un solido tavolino di legno a tre piedi, ed assicuratomi della stabilità sufficiente, nel collocarlo in meridiano mi curai, allo scopo prefisso, che le stelle attraversassero il campo perpendicolarmente ai fili orari e parallelamente quindi ai due fili orizzontali.

Avendo quindi l'avvertenza di non produrre neanche il più piccolo movimento durante l'osservazione di ogni stella, osservai il passaggio di tre stelle: *3 Draconis* ($\delta = +67°13'$), *14 H.' Draconis* ($+77°24'$) e *4 H. Draconis* ($+78°6'$).

Le distanze dei fili del reticolo dal filo di mezzo — tenendo presente che i fili orari sono 12, così che da una parte del filo centrale ne esistono 5 e dall'altra 6, e che la numerazione è fatta a partire dalla parte dei 5 e propriamente in ordine di tempo con cerchio ad W — risultarono come segue:

Fili	3 Draconis ($+67°13'$)	14 H.' Draconis ($+77°24'$)	4 H. Draconis ($+78°6'$)
1mo	$20^s.28$	$20^s.44$	$20^s.39$
2	15 .29	15 .45	15. 40
3	10 .53	10 .65	10 .56
4	7 .55	7 .81	7 .71
5	5 .15	5 .24	5 .13
6	—	—	—
7	4 .80	4 .82	4 .82
8	7 .55	7 .42	7 .46
9	10 .26	10 .08	10 .14
10	15 .33	15 .23	15 .22
11	20 .16	19 .99	20 .06
12	25 .46	25 .24	25 .38

Nel fare la media ho tenuto conto soltanto delle ultime due stelle, sia perchè osservate in migliori condizioni, sia perchè di più opportuna declinazione, così che si possono usare come distanze filari i seguenti valori:

Filo	Distanza filare
1mo	20s.41
2	15 .42
3	10 .60
4	7 .76
5	5 .18
6	—
7	4 .82
8	7 .44
9	10 .11
10	15 .22
11	20 .03
12	25 .31

Per semplificare e facilitare le riduzioni al filo centrale, qualora una stella sia stata osservata a tutti i primi 11 fili (escluso quindi il filo 12mo) si potrà usare la tabelletta seguente, la quale dà appunto per declinazioni comprese fra 0° e 60° la correzione alla media degli 11 appulsi per ridurla al filo di mezzo, tenendo presente che la detta correzione sarà *positiva* per cerchio ad W e *negativa* per cerchio ad E:

Declinazione	Riduzione al filo di mezzo
0°	± 0s.16
16	.17
26	.18
30	.19
35	.20
39	.21
43	.22
45	.23
47	.24
50	.25
52	.26
53	.27
54	.28
56	.29
58	.30
60	.31

Determinazione delle costanti e del tempo.

L'istrumento venne poscia collocato al posto ad esso destinato presso il Gabinetto di Geodesia.

Per le correzioni d'azimut e di collimazione venne fissata una *scala graduata* alla distanza di circa m. 29 verso sud [1].

Non potendo l'istrumento essere invertito durante l'osservazione d'una stella, occorre fare le osservazioni col cerchio sempre da una stessa parte, e quindi le riduzioni vanno eseguite secondo la solita formola valevole per i passaggi superiori (cfr. ALBRECHT, *Formeln und Hilfstafeln*, 1908, pag. 19):

$$\alpha = u + U + i\,\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + k\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + c\sec\delta$$

dove α è l'ascensione retta della stella corretta dall'aberrazione diurna [2], u lo stato dell'orologio, U la media dei passaggi ridotta al filo di mezzo, i l'inclinazione dell'asse dell'istrumento, k l'azimut del cerchio massimo istrumentale, c la collimazione, φ la latitudine del luogo e δ la declinazione della stella.

Da essa, notando che avendosi i direttamente dalla livellazione può essere portata fra le quantità note, si ha:

$$\alpha - U - i\,\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} = u + k\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + c\sec\delta\,,$$

---

[1] Venne in seguito sostituita da un collimatore alla distanza di m. 8.57, che può essere illuminato elettricamente dallo stesso luogo di osservazione, così che ora è possibile controllare anche di notte azimut e collimazione istrumentali.

[2] La correzione per la *aberrazione diurna*, secondo la formola

$$\Delta\alpha = +\,0^s{,}0213\cos\varphi\sec\delta = +\,0^s{,}015\sec\delta\,,$$

si può avere per le diverse declinazioni dalla seguente tabelletta:

$\delta =$ 0°	+ 0s.015
15	.016
30	.017
40	.020
50	.023
54	.026
63	.034.

la quale con le osservazioni di tre stelle (una polare, una equatoriale ed una zenitale per avere le migliori condizioni) ci dà le tre incognite u, k e c.

Ridotti opportunamente azimut e collimazione per mezzo di puntate fatte di giorno alla scala graduata e con la determinazione delle costanti istrumentali fatta la sera del 7 giugno 1913, fu eseguita una prima determinazione di tempo la sera del 9 giugno con le stelle κ *Virginis* ($\delta = -9°52'$), λ *Bootis* ($+46°29'$), ϑ *Bootis* ($+52°15'$) e ζ *Bootis* ($+14°6'$), la quale diede per

azimut	—	$4^s.27$
collimazione	—	1 .22
correzione orologio .	—	$2^m.46$ .59

Ritoccati un po' azimut e collimazione, una seconda determinazione di tempo, eseguita la sera del 28 giugno con le stelle β *Bootis* ($\delta = +40°44'$), ψ *Bootis* ($+27°17'$), ι *Draconis* ($+59°16'$), ν *Bootis* ($+41°8'$), α *Coronae bor.* ($+27°1'$) ed α *Serpentis* ($+6°42'$), ha dato:

azimut	—	$1^s.87$
collimazione	—	0 .13
correzione orologio .	—	$2^m.56$ .76

Per maggiore comodità di chi dovrà in seguito adoperare l'istrumento dei passaggi, riporto qui alquanto dettagliatamente la determinazione di tempo fatta la sera del 28 giugno 1913.

Se nell'ultima equazione indichiamo con N il termine noto, cioè:

$$N = \alpha - U - Ii$$

dove:

$$I = \cos(\varphi - \delta) \sec\delta = \text{coefficiente d'inclinazione}$$

e poniamo:

$$K = \operatorname{sen}(\varphi - \delta) \sec\delta = \quad \text{„} \quad \text{d'azimut}$$
$$C = \sec\delta = \quad \text{„} \quad \text{di collimazione}$$

i quali coefficienti I, K, C si possono avere per facile interpolazione dalle *Formeln und Hilfstafeln* di Albrecht (tab. 18, 19 e 17), ci riduciamo alla forma:

$$N = u + Kk + Cc$$

per ogni stella.

E se contrassegniamo con gli indici 1, 2, 3 gli elementi relativi o alle tre *equazioni normali* se si adopera il metodo dei minimi quadrati o alle tre equazioni date da tre stelle (la prima equatoriale, la seconda zenitale, la terza la più boreale possibile), avremo da risolvere le tre equazioni:

$$N_1 = u + K_1 k + C_1 c$$
$$N_2 = u + K_2 k + C_2 c$$
$$N_3 = u + K_3 k + C_3 c$$

le quali, posto:

$$a_2 = \frac{N_1 - N_2}{K_1 - K_2} \qquad a_3 = \frac{N_1 - N_3}{K_1 - K_3}$$
$$b_2 = \frac{C_1 - C_2}{K_1 - K_2} \qquad b_3 = \frac{C_1 - C_3}{K_1 - K_3}$$

dànno i valori delle incognite:

$$c = \frac{a_2 - a_3}{b_2 - b_3} \qquad k = a_2 - b_2 c = a_3 - b_3 c$$
$$u = N_1 - K_1 k - C_1 c = N_2 - K_2 k - C_2 c = N_3 - K_3 k - C_3 c.$$

Qualora non si segua il metodo dei minimi quadrati, come nel seguente esempio, si adotteranno per tutte le stelle osservate i valori trovati di k e c, se ne ricaveranno i valori di u che uniti in media semplice o pesata daranno il cercato stato dell'orologio.

28 Giugno 1913 — *Cerchio ad W* — Osserv. Favaro.

Livellazione precedente:

$+14^p.7$	$+35^p.0$	medie	$+24^p.85$	
$-15\ .2$	$-35\ .5$		$--25\ .35$	$i = -0^p.250$
			$-\ \ 0\ .50$	

Livellazione susseguente:

$-14^p.4$	$-35^p.9$	medie	$-25^p.15$	
$+13\ .6$	$+35\ .4$		$+24\ .50$	$i = -0^p.325$
			$-\ \ 0\ .65$	

media $i = -0^p.287$ ($p = 3''.35 = 0^s.223$) $i_s = i\ .\ p. = -0^s.064$.

1. — β *Bootis* ($\delta = +40^\circ\,44'$).

Fili	Appulsi	Fili	Appulsi		Somme
1mo	$15^h.1^m.13^s.1$	11mo	$2^m.\ 6^s.8$		$15^h.1^m.79^s.9$
2	19 .6	10	59 .9		79 .5
3	26 .0	9	53 .7	$\left[\frac{438^s.1 : 11\ (^1)}{39^s.83}\right.$	79 .7
4	29 .8	8	49 .8		79 .6
5	33 .1	7	$1^m.46\ .3$	$\left.+.21\ (^2)\right]$	79 .4
6	40 .0				40 .0

$U = 15^h.\ 1^m.40^s.04$

$Ii = -\ \ 0\ .08$

$\alpha = 14\ .58\ .42\ .77$

$N = -\ \ 2\ .57\ .19$

$-(Kk + Cc) = +\ \ .36$

$u = -\ \ 2\ .56\ .83$

$I = +1.31$

$K = +0.10$ $\quad Kk = -0^s.19$

$C = +1.32$ $\quad Cc = -0\ .17$

(1) Media dei secondi.

(2) Riduzione al filo medio.

2. — ψ *Bootis* (+ 27° 17′).

$15^h.3^m.20^s.2$	$4^m.\ 6^s.0$		$15^h.\ 3^m.86^s.2$
26 .1	4 . 0 .3		86 .4
31 .3	54 .8	$\left[\begin{matrix} 43^s.17 \\ +\ 0\ .18 \end{matrix}\right]$	86 .1
34 .7	51 .9		86 .6
37 .4	3 .48 .9		86 .3
43 .3			43 .3

$U = 15^h.\ 3^m.43^s.35$

$I = +\ 1.07$ $\qquad Ii = -\ 0\ .07$

$K = +\ 0.34$ $\qquad Kk = -\ 0^s.64$ $\qquad \alpha = 15\ .\ 0\ .45\ .55$

$C = +\ 1.12$ $\qquad Cc = -\ 0\ .15$

$N = -\ 2\ .57\ .73$

$-\ 0\ .79$ $\qquad -(Kk + Cc) = +\ 0\ .79$

$u = -\ 2\ .56\ .94$

3. — ι *Draconis* (+ 59° 16′).

(III)	$15^h.25^m.18^s.7$	$26^m.38^s.2$		$15^h.25^m.116^s.9$
	29 .0	28 .7		117 .7
	38 .1	18 .5	$\left[\begin{matrix} 58^s.55 \\ +\ 0\ .31 \end{matrix}\right]$	116 .6
	43 .9	13 .4		117 .3
	48 .4	26 . 8 .3		116 .7
	58 .8			58 .8

$U = 15^h.25^m.58^s.86$

$I = +\ 1.89$ $\qquad Ii = -\ 0\ .12$

$K = -\ 0.50$ $\qquad Kk = +\ 0^s.93$ $\qquad \alpha = 15\ .22\ .62\ .74$

$C = +\ 1.96$ $\qquad Cc = -\ 0\ .25$

$N = -\ 2\ .56\ .00$

$-(Kk + Cc) = -\ 0\ .68$

$u = -\ 2\ .56\ .68$

4. — ν *Bootis* (+ 41°8′).

(II)	$15^h.30^m.20^s.3$	$31^m.15^s.3$		$15^h.30^m.95^s.6$
	27 .6	8 .3		95 .9
	34 .4	31 . 1 .4	[47s.86 + 0 .22]	95 .8
	38 .0	57 .7		95 .7
	41 .0	30 .54 .5		95 .5
	48 .0			48 .0

$U = 15^h.30^m.48^s.08$

$Ii = -\quad 0 .08$

$\alpha = 15 .27 .50 .96$

$N = -\quad 2 .57 .04$

$-(Kk + Cc) = +\quad 0 .36$

$u = -\quad 2 .56 .68$

$I = +1.32$

$K = +0.10 \qquad Kk = -0^s.19$

$C = +1.33 \qquad Cc = -0 .17$

5. — α *Coronae bor.* (+ 27°1′).

$15^h.33^m.37^s.3$	$34^m.23^s.2$		$15^h.34^m.\ 0^s.5$
43 .1	17 .4		0 .5
48 .8	11 .9	[0s.31 + 0 .18]	0 .7
51 .7	9 .0		0 .7
54 .6	34 . 6 .0		0 .6
34 . 0 .4			0 .4

$U = 15^h.34^m.\ 0^s.49$

$Ii = -\quad 0 .07$

$\alpha = 15 .30 .62 .84$

$N = -\quad 2 .57 .58$

$-(Kk + Cc) = +\quad 0 .80$

$u = -\quad 2 .56 .78$

$I = +1.07$

$K = +0.35 \qquad Kk = -0^s.65$

$C = +1.12 \qquad Cc = -0 .15$

6. — α *Serpentis* (+ 6° 42′).

(I)	$15^h.42^m.39^s.4$	$43^m.20^s.3$		$15^h.42^m.119^s.7$
	44 .6	15 .2		119 .8
	49 .5	10 .2	$\left[\begin{array}{r} 59^s.34 \\ +\ 0\ .16 \end{array}\right]$	119 .7
	52 .0	7 .4		119 .4
	54 .6	43 . 4 .7		119 .3
	59 .8			59 .8

$$U = 15^h.42^m.59^s.50$$
$$Ii = -\quad 0\ .05$$
$$\alpha = 15\ .41\ .\ 1\ .48$$
$$N = -\ 2\ .57\ 97$$
$$-(Kk + Cc) = +\quad 1\ .29$$
$$u = -\ 2\ .56\ .68$$

$$I = +0.78$$
$$K = +0.62 \qquad Kk = -1^s.16$$
$$C = +1.01 \qquad Cc = -0\ .13$$

Dalle tre stelle contrassegnate a fianco dai numeri (I), (II) e (III) (equatoriale, zenitale e boreale), applicando rispettivamente gli indici 1, 2, 3 alle varie lettere, si ha:

$$N_1 = -2^m.57^s.97 \qquad K_1 = +0^s.62 \qquad C_1 = +1^s.01$$
$$N_2 = -2\ .57\ .04 \qquad K_2 = +0\ .10 \qquad C_2 = +1\ .33$$
$$N_3 = -2\ .56\ .00 \qquad K_3 = -0\ .50 \qquad C_3 = +1\ .96$$

$$N_1 - N_2 = -0^s.93 \qquad N_1 - N_3 = -1^s.97$$
$$K_1 - K_2 = +0\ .52 \qquad K_1 - K_3 = +1\ .12$$
$$a_2 = -1\ .79 \qquad a_3 = -1\ .76$$

$$C_1 - C_2 = -0^s.32 \qquad C_1 - C_3 = -0^s.95$$
$$K_1 - K_2 = +0\ .52 \qquad K_1 - K_3 = +1\ .12$$
$$b_2 = -0\ .62 \qquad b_3 = -0\ .85$$

Gabinetto di Geodesia
G.G

$$a_2 - a_3 = -0^s.03 \qquad b_2 c = +0^s.08 \qquad b_3 c = +0^s.11$$
$$b_2 - b_3 = +0.23 \qquad a_2 = -1^s.79 \qquad a_3 = -1^s.76$$
$$c = -0^s.13 \qquad k = -1^s.87 \; = \; k = -1^s.87$$

Con questi valori di c e di k sono stati ricavati dai valori di N di ogni stella i valori dei rispettivi u, la media dei quali dà la correzione media dell'orologio $-2^m.56^s.76$ che è stata più sopra riportata.

Torino, Maggio 1914

Le unità ecologiche fondamentali in Fitogeografia.

Nota IIª del Dott. GIOVANNI NEGRI

II.

Nelle pagine precedenti ho cercato di mostrare come uno studio delle condizioni nelle quali il rivestimento vegetale della superficie terrestre raggiunge quegli stati di temporaneo equilibrio che sono le formazioni stabilizzate e che noi ci abituiamo a distinguere, anche all'infuori dell'analisi scientifica, nei lineamenti generali del paesaggio sotto forma di un numero limitato di consorzii a fisonomia presso a poco uniforme, debba necessariamente muovere dal riconoscimento del meccanismo elementare di una tale occupazione di spazio da parte della vegetazione. Il sottile strato che, con varia continuità ed anzi talora con vaste lacune, s'interpone, alla superficie delle terre emerse, fra atmosfera e litosfera e che, colle sue mutazioni più o meno varie e più o meno lente, in ogni caso continue, ne esprime come un reattivo sensibilissimo le interazioni, si risolve in una colonia di unità omologhe, spesso addensate in dipendenza di affinità più o meno strette, non mai identiche, gli *ecoidi*, espressione ciascuna della soddisfazione delle esigenze ambientali di un organismo vegetale verificantesi su di un substrato che, primariamente il clima e l'individuo stesso, secondariamente, ma non necessariamente, la presenza di altri organismi o dei loro prodotti, hanno preparato a spese della crosta minerale del globo. È superfluo ripetere che ad ogni area elementare di terreno corrisponde un clima particolare, tanto che il Kraus ha potuto parlare di un involucro di calore proprio alla pianta e studiarne le variazioni.

La semplice constatazione però delle esigenze ambientali proprie ai singoli individui non permette di spiegare il ravvicinamento di forme ecologicamente molto discordanti, così frequente ad osservarsi nei consorzi empiricamente distinguibili pel loro *facies* generale in seno alla vegetazione: ho anzi rilevato più addietro come essa ci conduca al riconoscimento di una fondamentale eterogeneità. È appunto merito del Cowles (1) di aver invece fra i primi fondata la sua classificazione delle formazioni vegetali sulle condizioni ambientali, prendendo le mosse dalla tendenza generale che si riscontra in natura alla costituzione od al costante ritorno ad un mezzo ambientale uniforme; fatto che trova la sua corrispondenza fisiografica nel processo di incessante demolizione meteorica delle terre emerse, mercè il quale ogni altopiano tende ad un penepiano attraverso una successione di pendii, alla denudazione che avviene in corrispondenza delle quote più elevate corrispondendo la deposizione del materiale residuo nelle bassure e l'eventuale colmata delle depressioni.

Espressione della condizione ecologica di una data porzione della superficie terrestre potrebbe essere considerata la somma dalle modificazioni che il clima solare subisce da parte di cause topografiche, edafiche e biotiche; modificazioni tanto più spiccate quanto più ristretto è il campo che vien preso in esame. Ma noi siamo ancora troppo lontani dal poter dare in tal modo l'equazione dell'ambiente, e l'accertamento di una condizione ecologica, anche espressa da un numero ristretto di fattori, ma che possa in ogni caso riconoscersi nella regione in esame come il limite al quale teoricamente essa tende in tutta la sua estensione, quando sia lasciato libero il gioco delle forze naturali, rappresenta già un passo notevole verso una classificazione razionale dei consorzi vegetali attuati nella regione stessa, in quanto essi vengono posti in dipendenza genetica delle note leggi del modellamento superficiale del suolo.

È a questo processo del resto, continuato sino in corrispon-

---

(1) Cowles Henry C., *The Physiographic Ecology of Chicago and Vicinity: a Study of the Origin, Development and Classification of Plant Societies* („ Bot. Gazette „, XXXI, 73-108; 145-182, 1901).

denza di aree estremamente piccole, che noi siamo debitori delle ultime differenze di dettaglio intercedenti fra le aree dei singoli *ecoidi*. Ammessa anche, per una limitata area, l'uniformità litologica e l'identità dell'azione che gli agenti meteorici vi esercitano, nonchè l'assenza di qualunque modificazione secondaria dovuta all'esistenza alla sua superficie di materiale organico, rimarranno sempre da computare quelle variazioni edafiche, e conseguentemente climatiche, che il Gola (1) ha rilevato in rapporto colla topografia anche su minima scala ed alle quali non può sottrarsi nessun substrato che non sia isolato dagli agenti atmosferici. Per esse " la superficie del suolo può " essere distinta in tre categorie, che potremo chiamare di " *scorrimento* quando l'inclinazione e la poca permeabilità del " suolo provocano lo scorrimento della massima parte dell'acqua " che vi cade e quindi un dilavamento degli strati affatto su- " perficiali, mentre quelli situati a minima profondità non ne " risentono quasi; di *filtrazione* quando la scarsa o nulla incli- " nazione fa sì che l'acqua di pioggia venga in gran parte o " tutta assorbita dal suolo, onde si verifica un dilavamento delle " particelle terrose; ed infine una di *raccoglimento* nella quale " oltre all'acqua di pioggia si raccolgono le acque più o meno " mineralizzate risultanti dallo scorrimento sulle superfici più " elevate o dalla filtrazione attraverso strati pure più elevati ".

La stabilità edafica richiesta dallo sviluppo di un individuo vegetale pone nell'area corrispondente un limite a questo differenziamento topografico del suolo; e questa appunto, cioè la costituzione dell'*ecoide*, è la base dell'azione ritardatrice opposta dalla vegetazione agli effetti dell'erosione meteorica; e nello stesso tempo del formarsi dei consorzi vegetali quando, moltiplicandosi per via vegetativa o per semi, il primo individuo stabilitosi in stazione giunge ad occupare coi suoi disseminuli le aree prossime ed adatte, ed a costituire così una colonia di *ecoidi* simili. Iniziatasi dall'*ecoide*, la reazione della vegetazione alla trasformazione fisica dell'ambiente, tende, attraverso gli episodi svariatissimi di una serie di successioni, al limite della

(1) Gola G., *Saggio di una teoria osmotica dell'edafismo* (" Annali di Botanica ", vol. VIII (Roma, 1910), p. 58-59).

stabilizzazione, per tutta la durata della quale l'azione meteorica rimane annullata dal rivestimento vegetale chiuso della stazione; mentre, estendendosi essa ad aree relativamente vaste della superficie terrestre, possono venirne modificate condizioni climatiche che, per l'ampiezza della superficie del globo che esse interessano, noi dobbiamo considerare come generali.

A giustificare del resto la costante eterogeneità biologica che, anche nelle formazioni più caratteristiche, troviamo mascherata da alcuni tratti fisionomici comuni e perciò dominanti, vale per una parte la già accennata limitata adattabilità dell'individuo vegetale, il quale molte volte anzichè accomodarsi a condizioni generali realmente sfavorevoli di stazione, vi si mantiene ad onta di esse pel compenso che trova nella limitata area su cui si costituisce l'*ecoide*; nozione senza la quale non sarebbero spiegabili, nè la frequenza di specie relitte conservatesi da tempo immemorabile in mezzo a formazioni discordanti, nè la facilità di invasione di alcune specie in formazioni apparentemente stabilizzate; e alla quale mi pare sia dovuto il fatto opposto e più frequente della difficile penetrazione di nuove specie in un territorio di antica popolazione piuttosto che ad un assetto definitivo della sua flora (1), tanto meno agevole da

(1) Il Béguinot, accennando a questa spiegazione (*Osservazioni e documenti sulla disseminazione a distanza.* " Atti dell'Acc. Sc. Veneto-Trentino-Istriana „), trae motivo per una giudiziosa riserva sull'opportunità di parlare di bilancio chiuso per la vegetazione di un distretto anche isolato. dalla supposizione del suo possibile inquinamento — prescindendo dall'azione antropica — da parte di disseminuli trasportati a distanza con mezzi naturali di disseminazione. L'indipendenza ecologica delle singole unità del rivestimento vegetale sembrerebbe facilitare l'accoglimento di questo concetto se, in diretta opposizione con esso, non stessero la scarsità o meglio la rara accidentalità dei casi accertati di spontanea disseminazione longinqua; e d'altra parte la complessità dei fattori, il concorso dei quali rende possibile la costituzione di un *ecoide* e quindi la difficoltà dell'ecesi, quand'anche l'invasione sia avvenuta da parte di un individuo la lontana provenienza del quale poco si concilia colla supposizione di un'identità di esigenze ambientali; o per lo meno di una sufficiente accomodabilità. Se le condizioni del rivestimento vegetale sono in continua fluttuazione e se di bilancio chiuso non si può parlare per nessun distretto, nè tampoco per nessuna formazione stabilizzata, ciò mi sembra dipendere, molto più che da ipotetiche invasioni di disseminuli trasportati a distanza, dalla natura necessariamente

ammettersi in quanto la stessa fase di stabilizzazione della formazione più omogenea non può essere considerata che come un momento del suo ciclo evolutivo.

D'altra parte allo stesso risultato giunge pure la considerazione che alla composizione floristica di ogni formazione, la quale non rappresenta che una percentuale assai bassa delle specie che potrebbero vivere nella stazione, concorre un importante elemento aleatorio, rappresentato dalla diversa capacità di diffusione di queste specie e dalle circostanze in cui questa si esercita, il quale regola la loro comparsa o la loro assenza nelle stazioni, indipendentemente da qualunque fenomeno di concorrenza ecologica.

Sono molto interessanti sotto questo rapporto gli studi recentemente e minuziosamente compiuti sulla diffusione dei disseminuli per piccole tappe, in seno alla vegetazione occupante il suolo. Così Clements ha potuto sperimentalmente stabilire che, data un'area denudata, la vegetazione contigua fornisce il 75-90 % delle specie costituenti la formazione che vi si stabilisce, aggiungendo che nelle regioni montane, dove l'influenza della disseminazione antropica è minore, la percentuale della vegetazione prossimiore occupante il terreno nuovo è ancora più grande. L'invasione attraverso la vegetazione intermedia, se non è del tutto impossibile, è tanto lenta che gli scarsi disseminuli che riescono a compierla trovano sempre l'area già occupata da elementi della vegetazione attigua, a meno che la denudazione non ne abbia talmente mutate le proprietà ecologiche da escludere la sua invasione da parte degli elementi prossimiori (1). Anche fra tali stazioni, che si vanno più lentamente popolando mediante le specie adatte che vi giungono per piccole tappe da stazioni affini attraverso gl'intervalli sui quali si è mantenuta la vegetazione primitiva, intercedono del resto notevoli diffe-

transitoria di qualunque stabilizzazione, dal lento, ma incessante rimescolio al quale soggiace l'intero rivestimento vegetale del globo per opera di cause ancora parzialmente indeterminate, ma tuttavia abbastanza note per permetterci di pensare che dalla loro traccia poca deviazione rappresenterebbe anche la prova raggiunta della maggior parte dei casi, ancora assai problematici, di disseminazione longinqua.

(1) Clements F. E., *Research Methods ecc.*, p. 227.

renze floristiche, quantunque tutte attingano la loro popolazione dalle riserve di specie adatte esistenti nella regione; cito come esempio la diversità rilevata dal Beauverd (1) nella florula dei *Points de Sable* della pianura ginevrina e quella che io stesso ho potuto osservare fra le piccole stazioni di vegetazione alofitica del Monferrato e della pianura Pavese (2). Anche Gallemäerts e Jaccard (3) del resto hanno recentemente dimostrato, con ricerche dirette sul terreno, che la composizione della florula di una data stazione dipende essenzialmente dalla prossimità del territorio di alimentazione e dalla frequenza relativa delle specie che vi crescono.

In questo trasporto della spiegazione dell'eterogeneità di composizione della vegetazione, dall'ammissione di una ipotetica accomodabilità, all'utilizzazione della riconosciuta specializzazione dell'ambiente (4), sta la giustificazione del concetto di for-

---

(1) Beauverd G., *La florule des " Points de sable " du Bassin de Genève* (" Bull. Herb. Boissier. ", Ser. II, VI, 1906, p. 969, e *Compléments*, p. 1017.

(2) Negri G., *Colonie di Fanerogame alofile dell'alta pianura padana* (" Bull. Soc. Bot. Ital. ", 1912, p. 202).

(3) Gallemäerts V., *Sur les phanérogames épiphytes de la partie poldérienne du Veurne-Ambacht et des bords de l'Escaut* (" Rec. de l'Inst. bot. Léo Errera ", VIII (1909), Bruxelles — Jaccard P., l. c., p. 73).

(4) A questo proposito non è superfluo insistere su di un possibile equivoco. È infatti fuori discussione la capacità di accomodamento, probabile in qualche caso quella di adattamento, mediante le quali l'organismo vegetale è suscettibile di far fronte, ad una certa latitudine di variazioni ambientali, segnalando l'azione subita da parte dell'ambiente coll'assunzione di alcuni caratteri secondari: il fenomeno è frequente e non v'è alcuno che ne disconosca l'importanza. Dal punto di vista ecologico però, una specie e le sue varietà danno luogo ad *ecoidi* eterogenei, la variazione morfologica raggiunta essendo l'indice di una mutazione di rapporto fra l'individuo ed il suo ambiente elementare. Interessa invece qui accennare ai casi in cui, con sensibile pregiudizio dell'apprezzamento della struttura della formazione, viene ammessa, in organismi che non presentano nessuna reazione morfologica, una larga accomodabilità alle condizioni ecologiche, accomodabilità difficilmente conciliabile con una quantità di fatti di invasioni e di ecesi, tutti concordi nel provare il contrario. Così lo Jaccard (l. c., p. 71) ha potuto scrivere che il numero delle specie, l'espansione delle quali è legata a condizioni stazionali strettamente determinate, è relativamente piccolo: ciò che può ammettersi soltanto quando l'individuo si ponga in confronto colle condizioni *complessive* della stazione occupata dalla for-

mazione vegetale sostenuto al Congresso di Bruxelles dai delegati del Comitato per lo studio della flora inglese, concetto condannato forse troppo sollecitamente dalla maggior parte dei fitogeografi d'Europa (1). Per esso la formazione vegetale, unità fondamentale della fitogeografia, è determinata dalle unità fisiografiche della superficie del globo, corrisponde, termine a termine, alla sua stazione, nei limiti di una zona o regione possedente condizioni climatiche approssimativamente costanti; comprende la serie completa delle fasi naturali di vegetazione succedentisi nella stazione che essa ricopre e, come tale, riassume la composizione floristica totale della vegetazione che l'occupa e può quindi essere definita in base alla stazione stessa.

Questo concetto è così logico, che può dirsi col Moss (2) che è stata necessaria tutta la grande autorità del Warming

mazione alla quale esso appartiene, e che possono essere molto modificate in corrispondenza della sua stazione elementare. Pare a me che l'equivoco risieda appunto nel non essersi tenuto conto della larga parte che, la diversa combinazione ed efficacia dei fattori delle stazioni elementari, può avere nel rendere possibile la completa evoluzione vitale di una specie anche in condizioni generali di stazione avverse, grazie alla correzione che esse subiscono in corrispondenza dell'area elementare direttamente occupata.

Un caso caratteristico ne è la dipendenza, dimostrata del Wiesner, del bisogno di luce delle singole specie vegetali dalla latitudine e dall'altezza sul livello del mare della loro stazione (Wiesner J., *Der Lichtgenuss der Pflanzen*, Leipzig, 1907, p. 182-204). Anche Massart del resto (*Le rôle de l'expérimentation en Géographie botanique.* " Rec. de l'Inst. bot. Léo Errera ", 1913, p. 73-74) si avvicina al concetto sopra esposto, in quanto osserva che, nel caso in cui uno stesso vegetale abita stazioni molto diverse senza mutare nè nel suo aspetto esterno, nè nei suoi caratteri anatomici, se sarebbe interessante ricercare sperimentalmente se non si tratti talora di razze fisiologiche paragonabili a quelle ammesse pei funghi parassiti, in altri casi è più probabile che il clima aiuti l'individuo vegetale a sormontare la difficoltà delle condizioni edafiche.

(1) *Nomenclature Phytogéographique*, l. c. *Propositions des Rapporteurs.*

(2) Moss C. E., *The fundamental Units*, l. c. Vedasi anche dello stesso Autore la memoria: *Geographical distribution of vegetation in Somerset, Bath and Bridgwater District* (Royal Geogr. Soc., London, 1907), nella quale (p. 12) è originariamente esposto il suo concetto, che la formazione vegetale consti della serie completa delle fasi naturali di vegetazione succedentisi nella stazione corrispondente; nonchè il recentissimo lavoro: *Vegetation of the Peak District* (Cambridge University Press, 1913), ove lo stesso concetto è largamente svolto ed applicato.

per sostituirvi il criterio di distinzione delle formazioni in base alle forme di vegetazione attuate in esse e farlo prevalere nel Congresso di Bruxelles ove esso ha avuto la maggioranza malgrado le contraddizioni implicite che esso contiene e che i delegati del *British Committee* avevano messe in evidenza; e quantunque il Warming stesso nella sua opera, che è il manuale di ogni fitogeografo moderno (1), avesse scritto che " l'ordinare le " forme di vegetazione in un sistema genetico è un compito " intricato, data la loro straordinaria diversità e gli stadi in- " termedi esistenti fra l'una e l'altra, nonchè la difficoltà di " adottare criteri veramente naturali ". I fitogeografi della scuola del Moss tuttavia si sono mantenuti fedeli alla sua interpretazione della formazione vegetale ad onta delle obiezioni mosse loro anche dopo il 1910 e che possono ridursi a tre essenziali: il concetto di stazione viene ristretto dai naturalisti inglesi sino ad esprimere quasi esclusivamente il carattere edafico; l'unità della stazione si perde nel corso delle fasi evolutive della formazione che l'occupa; la geografia-botanica, scienza biologica, deve fondare le sue categorie su dati puramente biologici, ed è quindi opportuno che la formazione sia definita piuttosto in base alle forme di vegetazione che la costituiscono, che alla natura delle cause ecologiche che ne hanno determinata la costituzione.

Esaminando partitamente queste tre affermazioni, rilevo anzitutto che il concetto di stazione, quale è inteso dagli ecologi americani nel senso di *habitat* completo, non mi pare affatto ridotto dai naturalisti inglesi ad esprimere esclusivamente il carattere edafico. Per citare uno dei loro lavori più recenti e più noti, il manuale *Types of British Vegetation* del Tansley, il quale è redatto secondo le tendenze che fanno capo al *British Committee*, specifica nettamente nell'introduzione (p. 4 e 5) la distinzione dei fattori ecologici in climatici ed edafici. D'altra parte, in studi affatto recenti, il Crampton (2),

---

(1) Warming E., *Oecology of Plants*. Oxford, 1909, p. 6–7.

(2) Crampton C. B., *The vegetation of Caithness considered in relation to the geology*. Edinburgh, 1911 (Estr. in " Bot. Centralblatt ", 119 (1912), p. 111); Id., *The geological relations of stable and migratory plant formations* (" Scottish Bot. Review ", I (1912). Estr. in " Journ. of Ecology " I (1913) p. 47-50);

sviluppando il noto concetto dei cicli di vegetazione quale ci appare nella trattazione che ne ha dato il Cowles (1), insiste appunto sull'importanza preponderante, nell'apprezzamento della distribuzione della vegetazione in una determinata contrada, del criterio fisiografico, di un concetto cioè ecologicamente molto più largo e comprensivo, non soltanto di una nuda analisi pedologica, ma della stessa definizione di stazione proposta dai relatori al Congresso di Bruxelles: " E. d. La *stazione* (*Station*; *Standort*) comprende l'assieme dei fattori agenti su di una località determinata, nella misura in cui essi influiscono sulla vegetazione „; in quanto che con esso la stazione viene definita da un punto di vista genetico, che comprende, come vedremo più avanti, tanto la sua differenziazione morfologica, quanto la costituzione di un substrato più o meno abbondante e più o meno discontinuo direttamente appropriato alla vita vegetale.

D'altra parte, trattandosi di condizioni stazionali, l'attribuire un'importanza primaria e preponderante alle condizioni del terreno, è riconosciuto legittimo da numerosi ecologi anche perfettamente estranei alla scuola del Moss.

Già lo Schimper (2) aveva riconosciuta l'esistenza *di formazioni edafiche o formazioni stazionali* determinate in prima linea dalla costituzione del terreno; ed affatto recentemente il Gola (3) insisteva sull'importanza dei fattori climatici locali nel determinare il carattere delle stazioni, pure costituitesi sulla traccia delle condizioni edafiche, ed il Kraus (4) nel lavoro al quale mi sono già riferito più indietro, rilevava come il concetto delle costituzioni del terreno naturale da parte di una quantità di

Id. e MacGregor M., *The plant ecology of Ben Armine Sutherlandshire* (" Scottish Geogr. Magazine „ 29 (1913), pp. 169-192; 256-266. Estr. in " Journ. of Ecology „, I (1913), pp. 219-229).

(1) Cowles C. H., *The fundamental causes of succession among Plant associations* (" Rep. brit. Ass. Sc. Winnipeg. Sect. K. „, p. 668-670. " Rec. Bot. Centralbl.„, 116, p. 217-18); Id., *The causes of vegetation cycles* (" Bot. Gaz.„, L 1, p. 161-184, Mich., 1911. " Rec. in Bot. Centralbl. „, 117, p. 69-70).

(2) Schimper W. O., *Pflanzengeographie auf physiol. Grundlage*. Leipzig, 1898, p. 175.

(3) Gola G., *Saggio ecc.*, l. c., p. 55.

(4) Kraus G., *Boden und Klima ecc.*, l. c.

aree ristrette e contrastanti fra di loro, fornisse, nella sua forma più semplice, l'interpretazione delle condizioni ecologiche elementari. Infatti, per una catena di cause e di effetti, ciascuno di questi distinti lembi di terreno acquista un clima suo proprio; in corrispondenza di essi si ripete lo stesso processo che, nel caso di estese regioni, dà luogo alla costituzione del clima fisico o reale, per modificazione del clima solare. Del resto che le condizioni stazionali stieno in diretta dipendenza delle condizioni pedologiche ho già altra volta (1) cercato di mettere in evidenza nel tentare l'applicazione della classificazione geofisica dei climi proposta qualche anno fa dal Penck (2) ai climi stazionali, sviluppando le idee espresse dall'autore stesso sui distretti climatici, per dir così, eterotopici, provocato dall'esistenza di fiumi alloctoni o dalla costituzione di aree pseudoaride.

Rimane a vedere come si concilii il concetto di stazione vegetale dipendente dalle differenziazioni morfogenetiche del suolo col riconoscimento di questo illimitato frammentarsi delle condizioni edafiche e della fondamentale eterogeneità del rivestimento vegetale che ne consegue. Se noi seguiamo il processo pel quale un terreno nuovo invaso dalla vegetazione viene a rivestirsi in definitiva di una coltre vegetale stabilizzata, vediamo come, lungo tutti gli stadi intermedi della successione, nulla contrasti la libera costituzione degli *ecoidi*, e come, ogni individuo stabilendosi o rimanendo escluso in dipendenza dei soli agenti fisici, l'incoerenza della popolazione vegetale sia la regola costante: essa risponde infatti alla minuta specializzazione del terreno vergine della stazione in una moltitudine di aree piccolissime e rappresentanti tipi edafici assai diversi. È soltanto negli stadi più avanzati, quale sintomo della stabilizzazione che si va effettuando, che, accentuandosi la moltiplicazione di alcuni *ecoidi*, favorita dalla particolare frequenza di stazioni elementari adatte e dal trattarsi di specie particolarmente diffusibili, avviene una modificazione generale dell'ambiente stazionale da parte di questi ultimi, con eliminazione di una

(1) Negri G., *Appunti ecc.*, l. c.

(2) Penck A., *Versuch einer Klimaklassification auf physiographischer Grundlage* (" Sitzber. d. K. Preuss. Ak. d. Wissensch. Math. Naturwiss. Klasse ", (1910), XII).

parte degli *ecoidi* primitivi, insofferente delle novissime condizioni ecologiche, e consecutiva riduzione della ricchezza floristica a profitto di poche forme biologiche divenute dominanti. Ma se, a stabilizzazione prossima o compiuta, la rispondenza della formazione alla sua stazione appare più netta, quale riflesso di condizioni ambientali meno numerose e più generalmente agenti, ciò non è che una prova di più dell'azione determinante dell'ambiente sul consorzio vegetale che lo riveste, in quanto, durante il processo di stabilizzazione, anche le condizioni ecologiche sono sostanzialmente mutate. Sul suolo infatti l'accumulo del materiale di degradazione, sempre più difficilmente asportabile coll'addensarsi del rivestimento vegetale, ha determinato per una parte il rallentamento dell'azione meteorica e la conseguente differenziazione edafica crescente, e, colla colmata delle cavità di erosione già esistenti, una riduzione ulteriore della varietà morfologica del terreno; mentre d'altra parte lo sfatticcio accentuava, in proporzione del suo accumulo, le sue qualità peculiari, diverse da quelle della roccia madre sottostante e veniva inoltre modificato a sua volta secondariamente dall'inquinamento progressivo ed eustatizzante da parte dei materiali organici abbandonati dalla vegetazione. Si confronti, per rendersi ragione di ciò, il rivestimento vegetale di due morene, l'una fresca e l'altra ferretizzata, o le florule erbacee di una fustaia, rispettivamente a sviluppo completo ed immediatamente dopo il taglio. In conclusione l'arresto della degradazione del substrato da parte degli agenti meteorici viene attuata dal ripetersi, sino alla saturazione dello spazio disponibile, di un limitato numero di specie, gli *ecoidi* delle quali, specificamente corrispondenti alle condizioni di stabilizzazione, si sono mantenuti e moltiplicati a spese di altri entrati in sofferenza pel preponderare dei primi. Il numero di questi è poi tanto più ristretto in quanto una buona parte della florula occupante le stazioni è dovuta ad una invasione secondaria alla stabilizzazione della formazione e vive in dipendenza delle condizioni create da un ristretto numero di *ecoidi* simili e dominanti, i quali, come ho già detto più addietro, determinano colla loro presenza, ed affatto passivamente, una stazione nella stazione. Si potrebbe anzi andar più oltre dicendo che l'occupazione, attuata sempre, allo stato di stabilizzazione, da parte di

una serie di *ecoidi* simili (boschi di un'unica essenza dei paesi temperati) o strettamente omologhi (gramineti, cipereti, calluneti, ecc.), rappresenta per approssimazione il rivestimento che teoricamente finirebbe collo stabilizzarsi su di un substrato assolutamente uniforme. Ora se, praticamente, quando si studia uno di tali consorzi prendendo per base le condizioni ecologiche della forma di vegetazione dominante, si considera tale limite come raggiunto, salvo poi a riconoscere le eccezioni singole che la presenza di *ecoidi* discordanti introduce nel regime ecologico; esso non potrà mai essere espresso assolutamente da tale forma di vegetazione, per l'irreducibilità già ripetutamente affermata delle esigenze individuali, che mantengono, in seno alla collettività, aperta la via ad una evoluzione ulteriore, sia pure regressiva. Se poi in natura una colonia assolutamente pura e definitivamente stabilizzata non può darsi, ciò dipende anzitutto dalla degradazione ininterrotta, anche se, in confronto a quella dovuta al libero gioco degli agenti meteorici, essa appare estremamente rallentata, che la vegetazione stessa esercita sull'ambiente e gli effetti della quale finiscono col dare l'attacco, in seno a qualunque formazione, a successioni secondarie. In secondo luogo dall'accennata invadibilità secondaria delle formazioni stabilizzate, che diventa essa pure una causa degradatrice, ed il cui materiale non può stabilizzarsi a sua volta, in quanto il fattore biologico, dal quale dipende il suo speciale ambiente, soggiace ad una continua evoluzione, naturalmente non contemporanea, nè identica negli elementi singoli di cui consta. Infine dai fenomeni di zonazione più o meno accentuati in tutte le formazioni, quale reazione al variare quantitativo nella distribuzione dei fattori ambientali (Clements) determinati dalla struttura stessa della formazione stabilizzata, che fa sì che gli individui si dispongano in zone di densità progressivamente crescenti o decrescenti attorno al punto di massima attività di ogni singolo fattore. Così, malgrado la stabilizzazione, rimane sempre a giustificare la convivenza di *ecoidi* distinti, una diversità biologica: diversità che può essere seguìta sino al limite delle differenze individuali e che escluderebbe che, anche la colonia di *ecoidi* simili teoricamente supposta più sopra, potesse considerarsi come assolutamente omogenea.

L'individuo, la colonia dei discendenti da un unico progenitore e legati quindi da affinità specifica, il consorzio legato ad una modificazione della stazione dovuta alla sua precedente occupazione da parte di individui vegetali che vi perdurano, l'associazione adattata all'anteriore costituzione di uno speciale terreno, o ad un'unità fisiografica, o ad un distretto climatico, formano tutta una scala di categorie insensibilmente sfumanti l'una nell'altra od alla quale invece manca talora qualche termine.

Così, come s'è veduto, l'azione dell'elemento biologico sull'ambiente stazionale manca sempre negli stati iniziali e spesso negli intermediari perchè i singoli *ecoidi* vi sono ancora troppo disgiunti e diversi per esercitare un'influenza collettiva: mentre diventa costante col procedere della stabilizzazione verso i suoi ultimi gradi. Similmente il suolo non può esercitare un'azione uniformante col favorire il predominio di *ecoidi* simili e contigui, ogniqualvolta, in dipendenza di cause fisiche la cui azione si mantenga più attiva di quella delle cause biologiche, diventi impossibile la permanenza dello sfatticcio d'erosione alla superficie delle aree erose o del materiale di trasporto grossolanamente frammentario. Il primo fatto geomorfologico che troviamo costantemente alla base della distribuzione dei vegetali è la forma del terreno, la quale costituisce non soltanto l'unità elementare del paesaggio fisico, ma anche quella della fisonomia botanica, in quanto, corrispondentemente al suo mutare, in piccolo od in grande, il manto vegetale vi si modella sopra pel variare delle condizioni a cui sono soggetti i suoi elementi, od anche s'interrompe quando l'ecesi, e tanto più l'accomodazione, diventi impossibile non soltanto per questa o quella specie, ma addirittura per la vita vegetale. Tutti i gradi di diradamento o di addensamento sono naturalmente attendibili in tale rivestimento, con anticipo o ritardo della costituzione della fase di equilibrio, con acceleramento od arresto di una degradazione iniziata; e se la stabilizzazione di una formazione deve riguardarsi come uno stato di equilibrio in definitiva instabile, pel numeroso concorso di circostanze che la sua manutenzione richiede e pel fatto che essa stessa possiede in sè le cause della sua degradazione, l'indipendenza degli *ecoidi* spiega la notevole resistenza che le formazioni in genere oppongono ad una definitiva degradazione ed in ultimo la frequente conservazione dei loro relitti in mezzo alle

formazioni che le hanno sostituite. Così, finchè l'unità fisiografica rimane immutata e la conservazione del terreno vegetale alla sua superficie dimostra che lo stato della vegetazione è ancora tale da contrastare attivamente l'azione degli agenti meteorici immutati, la sospensione della causa degradatrice della formazione, riconduce la vegetazione al tipo primitivo e caratteristico della stazione. È per aver rilevata una costante inerzia nella riproduzione delle formazioni forestali, che il Chevalier (1) è giunto alla convinzione che la degradazione delle selve dell'Africa tropicale, quantunque accelerata dall'opera devastatrice dell'uomo, risponde essenzialmente ad una evoluzione del clima verso un tipo più continentale dell'attuale: conclusione alla quale le mie osservazioni mi permettono di sottoscrivere.

In questa costante dipendenza della costituzione delle unità associative della vegetazione dalla configurazione del suolo, trova la sua giustificazione la scelta, come unità di stazione sinecologica, della forma del terreno: di un'area cioè in corrispondenza della quale si è stabilito un equilibrio più o meno durevole fra l'azione delle forze fisiche che l'hanno determinata e quella della vegetazione che ne contrasta la progressiva demolizione. Noi chiamiamo formazione questa vegetazione considerata nel complesso delle sue attitudini biologiche, non nella sua composizione floristica; ed intesa nella totalità dei suoi individui ed in tutte le variazioni secondarie di composizione, di raggruppamento e di frequenza che essa subisce durante la permanenza sull'unità fisiografica di condizioni edafiche sensibilmente immutate (2).

---

(1) Chevalier A., *L'extension et la régression de la forêt vierge* (" C. R. Ac. Sciences ", Paris, CIL, pp. 458-61). Cfr. anche Negri G., *Appunti di una escursione botanica nell'Etiopia Meridionale*, l. c., p. 46-48, nota.

(2) Dall'esame di questa definizione appare subito che, in quanto il raggruppamento della vegetazione in unità sinecologiche riposa nella evoluzione morfologica della superficie terrestre, rimarrebbero esclusi dalla classificazione delle formazioni, sia il complesso delle idrofite che la totalità della vegetazione epidendra ed epizoa, nonchè quella stabilita su manufatti umani, od in corrispondenza di aree della superficie terrestre così modificate a scopo culturale da rappresentare un substrato assolutamente artificiale e per necessità legato ad una continua azione conservatrice da parte dell'uomo. Effettivamente la distribuzione geografica delle idrofite ripete la sua origine da condizioni geografiche troppo speciali per non

Neppure mi sembra, che l'unità della stazione si perda nel corso delle fasi evolutive della formazione: almeno a provare ciò non vale l'esempio citato dal Diels (1) " se su di un terreno " costituito da *lehm* il querceto trapassa regressivamente nel- " l'erbario, anche l'*habitat* è diventato necessariamente un altro " ed il carattere edafico può tuttavia mantenersi ". Quando ciò fosse anche i vari stadi della brughiera boschita, che s'intercalano fra l'associazione della quercia e quella di brughiera, do-

essere trattata a parte; e l'intrusione nelle formazioni di specie od aggruppamenti di specie vegetali in condizione di simbiosi — includendo in questo termine anche il parassitismo — cogli individui del consorzio, se può modificare entro certi limiti la fisionomia di quest'ultimo, in quanto non ne induce il deperimento, non ne altera il carattere. Non si tratta in fondo che di un caso particolare d'invasione di quella speciale stazione che risulta dall'aggiungersi all'ambiente fisico l'elemento vegetale di prima occupazione: fatto che come ho già detto non menoma l'indipendenza ecologica degli *ecoidi* di primaria invasione. Le piante epizoe poi rientrano completamente nel dominio della parassitologia. Infine l'interferenza della vegetazione sinantropica con quelle delle formazioni naturali, data l'importanza generale del fenomeno in sè stesso e della sua azione sulla evoluzione generale della vegetazione, è giustamente studiata come un fatto di sovrapposizione e quindi secondario alla vegetazione preesistente, della quale importa determinare, nella misura del possibile, i limiti ed i caratteri naturali. Le stazioni direttamente create dall'uomo trovano del resto i loro equivalenti nelle stazioni naturali; un muro, un tetto di stoppie, di tegole o di lastre di pietra, un terreno ruderale fortemente aloide, un'area coltivata, rappresentano bensì altrettanti substrati indipendenti nelle loro origini dalla evoluzione morfologica della regione in cui li consideriamo: ma l'introduzione e l'attecchimento su di essi di specie diffusesi per contiguità, o migratevi per piccole tappe, o direttamente importatevi dall'uomo e pur sempre subordinate alle condizioni climatiche locali, come la possibilità di scambi floristici fra queste stazioni neoformate e le stazioni naturali circostanti, dipende dal grado maggiore o minore di affinità che intercede fra di esse, tanto che una stazione antropica diventa il luogo di rifugio, di conservazione e persino di ridiffusione di specie che, nella vegetazione naturale, non avevano che il rango di relitto di formazioni ormai irreparabilmente degradate. La natura stessa del resto ci offre esempi di stazioni che, pel loro carattere edafico, si differenziano profondamente dall'ambiente circostante e sono affatto indipendenti dalla sua evoluzione fisiografica: tale, per esempio, l'acquitrino salso che si determina per lo sgorgare di una sorgente ricca di sali minerali e lontana dal littorale marino.

(1) Diels L., Recensione citata, p. 282.

vrebbero valere come altrettanti consorzi distinti, coll'alternativa, qualora questa conclusione sembrasse eccessiva, di adottare l'opposta, l'identità cioè dei consorzi estremi, ciò che parimente è inconciliabile con quanto si osserva in natura. — Che invece, sotto l'azione di determinate circostanze, in corrispondenza di una certa superficie di terreno, sensibilmente riducibile ad unità topografica, si vadano raccogliendo con un addensamento progressivo, gli *ecoidi* che determineranno collettivamente, allo stato di stabilizzazione, una formazione chiusa di querceto, è un fatto unico nei rispetti tanto della stazione che della formazione, e tale rimane sino a che la degradazione sia a tal punto da rendere impossibile una ricostituzione autonoma anche quando cessino le cause lesive che l'avevano determinata. Nelle condizioni generali di eterogeneità del rivestimento vegetale, la stazione, intesa come unità fisiografica è anzi la sola base sulla quale sia possibile fondarsi per stabilire praticamente una categoria associativa, in quando appunto essa è il luogo di concorso di *ecoidi* simili e viene, a rivestimento compiuto, ad assumere anche quell'unità fisionomica, che, se è insufficiente come carattere di classificazione, può avere però un certo valore di controllo. Invece non sarebbe giustificabile il scegliere come rappresentante della stazione uno qualunque dei momenti di tale successione e tanto meno il considerare ognuno di essi come una formazione distinta.

Neppure l'unità della stazione e della formazione così intesa è alterata da quelle variazioni di dettaglio che, come è stato detto più addietro, si riscontrano con uguale frequenza nell'una come nell'altra, anzi appunto si corrispondono in esse. Se per noi l'eterogeneità dei concorsi vegetali non ha altro limite che l'individuo, quella dell'ambiente, l'ambiente elementare, i raggruppamenti secondari di *ecoidi* che si fanno in seno alla stazione ed alla formazione che vi corrisponde — non rappresentano che un fatto assai naturale, un raggruppamento subordinato al consorzio d'ordine superiore, come subordinate ne sono le cause rispettive. In una scala più vasta le regioni geografiche ed i tipi climatici di vegetazione di Schimper e di Köppen non sono altro che categorie di grande comprensività in cui rispettivamente rientrano la stazione, unità topografica — e la formazione corrispondente. Ho già accennato a questa graduatoria

di cause naturali influenti sulla vegetazione e di categorie associative che vi corrispondono ed al merito del Cowles di avervi da tempo insistito, dimostrando in parecchie pubblicazioni, come l'andamento generale della distribuzione della vegetazione terrestre, si attui secondo una serie di cicli di estensione progressivamente decrescente ed all'azione dei quali corrisponde un differenziamento sempre più intimo del rivestimento vegetale. Orbene l'evoluzione individuale in seno all'*ecoide* è il limite inferiore della scala, ma è da tenersi sempre presente che la sua breve durata è contemporanea ad un tratto progressivamente e proporzionalmente sempre minore di tutti i cicli subordinati secondo cui si svolge in un'unica armonia la vita della vegetazione terrestre.

Che tuttavia in questa serie di cicli, rispettivamente compresi l'uno nell'altro, la stazione, unità topografica, e la formazione che la riveste rappresentino due termini la facile definizione dei quali ha una particolare importanza pratica e che quindi, a preferenza di altri debbono essere scelti quali unità sinecologiche, risulta, oltre che dalle considerazioni sopra esposte, anche da altre osservazioni.

Prescindendo dal fatto che, anche empiricamente, si fonda su di essi la nozione che noi abbiamo dal paesaggio, in quanto il ciclo topografico è il più vasto che rientri ancora nell'esperienza diretta di una vita umana o di un numero limitato di generazioni, è da notarsi che esso rappresenta anche il limite di azione di numerose cause minori modificatrici incessanti del rivestimento vegetale del globo, veri cicli interferenti colla regolare evoluzione del ciclo topografico. Così nei limiti della stazione rimane circoscritta l'azione di numerose cause fisiche in dipendenza delle quali riesce possibile o non avviene la stabilizzazione della formazione corrispondente. Su quest'ordine di fatti vertono appunto le osservazioni già citate del Crampton (1), concludenti alla sua classificazione delle formazioni in *stabili* e *migratorie*. Ho per parte mia già in altra occasione insistito (2) sull'importanza di connettere lo studio delle formazioni colla determinazione della data in cui avvennero gli ultimi rivolgi-

(1) Crampton C. B., *The geological relations, ecc.*, l. c.

(2) Negri G., *La vegetazione del bosco Lucedio*, l. c., *passim*.

menti del suolo sul quale esse si sono costituite e che è supponibile averle albergate in seguito in condizioni ecologiche pressochè immutate. È però interessante il rilevare che quando ci troviamo di fronte ad una causa fisica perturbatrice del substrato vegetale di una continuità alla quale non possiamo mettere limite nel tempo, il circoscrivere nello spazio, cioè topograficamente, l'azione di questa causa corrisponde all'identificare una vera e propria stazione vegetale, tutte le volte che la sua attività non è così contrastante colla vita vegetale da escluderla completamente dall'area in cui essa si manifesta. La formazione corrispondente alle stazioni di tal natura avrà senza dubbio una fisionomia caratteristica data la peculiare accomodabilità richiesta dai suoi individui, una notevole varietà floristica a causa degli svariatissimi *ecoidi* che possono costituirsi su di un substrato in continuo rinnovamento: e presenterà insomma la più tipica dipendenza dalle condizioni ambientali le quali sole saranno in grado di definirla. Si pensi, per esempio, alla vegetazione di un'alluvione recente o di una duna mobile. Analogamente l'opera dell'uomo, la estesa e profonda importanza della quale il fitogeografo deve aver costantemente presente nello studio della vegetazione dei paesi intensamente popolati, si esercita modificando la compagine della vegetazione sino alla formazione inclusiva: è raro infatti, o per lo meno ridotto a casi particolari, che la sua influenza oltrepassi, *immutata*, l'ambito della stazione. Egli modifica infatti per lo più le stazioni naturali a profitto di una vegetazione selezionata nel senso del suo vantaggio economico: oppure facilita indirettamente il lavoro di demolizione degli agenti meteorici, alterando i consorzi vegetali che ne contrastano l'azione. In ogni caso egli riapre e moltiplica, nelle formazioni naturali stabilizzate, le successioni secondarie, favorendo l'aumentata costituzione di *ecoidi* eterogenei, sia a spese di materiali la cui recente immigrazione esso stesso ha facilitata attivamente o passivamente, sia rimettendo a disposizione di relitti di vegetazioni degradate, nuove aree elementari occupabili. Si può infatti pensare, scrive il Thellung (1), che al-

(1) Thellung A., *La flore adventice de Montpellier* (" Mitth. aus d. bot. Mus. d. Univ. Zürich ", LVIII (1912), p. 597).

cune specie che s'incontrano oggidì quasi esclusivamente nei campi, abbiano precedentemente abitato stazioni naturali, distrutte poi dalle culture, e che esse si siano rifugiate nella *steppa culturale* — come i campi sono stati chiamati — che presenta condizioni ecologiche non troppo differenti da quelle delle stazioni primitive. Similmente Braun e Furrer (1) osservano che, quantunque l'uomo sia riuscito a scompaginare la vegetazione naturale, delle associazioni definite si costituiscono a spese delle popolazioni incoerenti aggregatesi per opera sua: trasformazione che si compie per dir così sotto ai nostri occhi.

Quanto alla terza obiezione, i delegati del *British Committee* hanno già dimostrato al Congresso di Bruxelles, che il sistema di definire la formazione per mezzo delle sue forme di vegetazione, anzichè in base a quei caratteri ambientali dai quali le une e le altre dipendono, è riuscito insufficiente allo stesso Warming, il quale è stato obbligato, a parecchie riprese, ad applicare simultaneamente i due criteri classificativi. Il criterio di Warming potrebbe valere alla stessa stregua di quello ecologico, quando tutte le forme di vegetazioni corrispondessero esattamente alle condizioni generali di stazione. Ma, data la diversità elementare degli *ecoidi* e le speciali condizioni di ambiente attuate in ciascuno di essi e di cui l'individuo vegetale è rispettivamente il riflesso, non è affatto illogico l'ammettere che, in corrispondenza di una parte delle aree elementari, le condizioni stazionali risultino così modificate da giustificare la presenza nella formazione di forme di vegetazione anche più o meno discordanti da quella che dovrebbe essere la reazione biologica ad un ambiente uniforme in tutta la sua estensione. E questo appunto è quanto avviene in natura ed appare nella eterogeneità delle forme di vegetazione che troviamo rappresentate nelle formazioni a primo aspetto più omogenee.

Sarebbe però un equivoco l'intendere che l'aver messo il criterio stazionale alla base della classificazione delle formazioni equivalga al disconoscere la necessità per l'ecologo dello studio delle forme di vegetazione. Nelle formazioni stabilizzate

(1) Braun J. et Furrer E., *Sur l'étude des associations* (" Bull. de la Société languedocienne de Géographie ", XXXVI (1913), p. 5-6 estr.).

anzi — come ho già detto — troviamo la più gran parte dello spazio disponibile accaparrato da una sola forma, spesso addirittura da una sola specie, che, diventando uno degli elementi modificatori delle condizioni fisiche estese all'intera stazione, viene a formare come l'impalcatura del consorzio che la riveste. Ora l'importanza dello studio biologico di un tale fattore è evidente. Una conoscenza più intima del consorzio vegetale in esame non potrà poi essere raggiunta che distribuendo l'intera florula della stazione nelle categorie biologiche in essa rappresentate e computando, colla maggiore precisione possibile, la proporzione secondo la quale le varie forme di vegetazione così messe in evidenza, entrano a costituire la formazione, nonchè i loro rapporti colle variazioni ecologiche secondarie verificabili entro i limiti della stazione. Con questo procedimento verranno chiariti e disposti secondo l'importanza rispettiva quei raggruppamenti secondari sui quali mi sono diffusamente trattenuto discutendo le proposte degli Autori che hanno voluto attribuir loro l'importanza di unità sinecologiche elementari.

Il non accettare tali apprezzamenti non include che di questi concentramenti secondari di *ecoidi*, ad affinità più strette di quelle che determinano la costituzione dell'intera formazione, non debba essere tenuto conto (1). Ma con tutto ciò il concetto ge-

(1) Senza entrare in dettagli tecnici troppo minuti, ricordo l'importanza che i nuovi metodi di rilevamento della vegetazione, proposti dal Raunkiaër, possono assumere, quando siano adottati su larga scala, non solo a causa della loro sufficiente precisione, ma anche per la rapida applicabilità che essi presentano in confronto ai sistemi proposti prima, quale quelli del quadrato, della zona trasversale e simili (cfr. *Clements Research Methods*, ecc., p. 161 e seg.). La sommarietà apparente dei loro risultati cessa di sembrar tale quando si rifletta alla possibilità di aumentare, a seconda delle esigenze di qualunque ricerca, il numero dei campi rilevati e di disciplinarne la distribuzione sul terreno in modo da escludere del tutto l'elemento soggettivo, anche inconscio, nella loro scelta, spaziandoli regolarmente secondo una proporzione paragonabile poi nei vari rilevamenti, e di tener conto della frequenza colla quale gli spazi vuoti sono intercalati nelle formazioni aperte fra gli spazi rivestiti da vegetazione. In questo senso sono già stati fatti dei tentativi dal Vahl (*Les types biologiques dans quelques formations végétales de la Scandinavie*, " Bull. Ac. Sc. et Lettr. Danemark „, 5, p. 319-393, Copenhague, 1911) e mi propongo di pubblicare il risultato di ricerche personali già iniziate ed in via di completamento (Raunkiaer C.,

netico della formazione, che s'impone a tutto rigore quando s'intenda quest'ultima determinata dalla stazione in tutto lo spazio e lungo tutto il tempo che essa dura immutata, conduce a comprendere nella medesima unità, come s'è visto, una serie troppo estesa di variazioni locali secondarie e di stadi evolutivi, perchè qualunque di essi valga a caratterizzarla: mentre ognuna di esse e tutte nel loro complesso possono mettersi in rapporto colle condizioni stazionali generali, mantenentesi sensibilmente immutate.

Ancora infine può dirsi che l'indicazione di una stazione caratteristica per una data formazione costituisce come un punto di repere per designare un certo raggruppamento di *ecoidi* rispondente ad un certo concorso di fattori ecologici. Oltre i limiti dell'unità topografica ed edafica essi si dissociano entrando nelle composizioni di altri e diversi consorzi, a seconda della frequenza colla quale, nelle stazioni corrispondenti, si ripetono le aree elementari soddisfacenti alle esigenze loro. Lo stabilire oltre all'area di distribuzione delle singole specie, la frequenza delle aree elementari capaci di ospitarne gli individui, ed il modo di addensamento di tali aree in dipendenza delle forme del terreno, cioè delle stazioni sinecologiche possibili, ha una importanza evidente, sia per stabilire il grado di importanza attuale di ogni specie nella regione in studio, sia per computare la tendenza maggiore o minore delle singole formazioni e dell'intera vegetazione della contrada ad avvicinarsi o ad allontanarsi da quella condizione ecologica media e per dir così tipica della determinazione della quale il Cowles ha dimostrato l'importanza fondamentale.

Una questione rimane ancora a trattare: quella dell'estensione da assegnarsi al termine *associazione vegetale* così largamente usato dai fitogeografi.

Pei relatori del Congresso di Bruxelles, l'associazione, consorzio di composizione floristica definita, sviluppatosi con fisonomia uniforme in condizioni stazionali pure uniformi, è l'unità

Formations undersögelse og Formations statistik, " Bot. Tidsskr. ,, 30 (1909) p. 110, fig. 20; Id., *Measuring apparatus for statistical investigations of plant, formations*, Ibid., 33 (1912), p. 45-48 e fig. 1).

fondamentale della sinecologia. Noi le vediamo quindi attribuite una quantità delle caratteristiche che più addietro sono state ritenute proprie della formazione: è unità ecologica in quanto è determinata dalla stazione, è caratterizzata floristicamente dalla lista delle specie che la compongono, mentre la sua fisonomia dipende dalla frequenza relativa delle forme di vegetazioni che dette specie assumono; è suscettibile di zonazione, di mutamenti stazionali di fisonomia, di *facies* secondarie, per raggruppamenti più intimi di una parte dei suoi elementi: finalmente è limitata geograficamente dall'estensione delle specie che la costituiscono e specialmente delle specie dominanti e può essere considerata come uno stadio di una successione. I relatori ricusano invece la loro adesione alla tendenza espressa dal Comitato per la flora Inglese, di applicare il termine di associazione alle prime suddivisioni della formazione, separate nello spazio o nel tempo.

Ora, con una definizione dell'associazione quale è quella sopra esposta ed in cui, alla nozione puramente e semplicemente floristica, si assomma una serie di dati ecologici che non possono separarsi dalla nozione biologica della formazione, il porre l'associazione alle dipendenze della formazione diventa possibile, malgrado l'assurdo logico di subordinare l'una all'altra due entità stabilite su criteri sostanzialmente diversi. Ciò è stato talmente sentito, che i relatori del Congresso di Bruxelles (1), hanno dovuto riassumere distintamente in proposito le più discordi opinioni dei più noti Autori: pareri oscillanti fra la completa assimilazione delle due unità sinecologiche, con abbandono di uno dei due termini; la subordinazione dell'uno all'altro con maggiori o minori riserve; e la loro conservazione, sotto forma di unità indipendenti e corrispondenti, partito espresso anche ultimamente da Pavillard, ritenendo che *la formazione sia l'espressione fisionomica ed ecologica dell'associazione, come la forma biologica è l'espressione fisionomica ed ecologica della specie* (2). Pare a me, in accordo con tutte le considerazioni svolte, che secondo quest'ultimo criterio i due termini conservino

(1) *Nomenclature phytogéographique*, l. c. p.
(2) Pavillard J., l. c. p.

ciascuno un valore proprio e si corrispondano nel determinare una diversa disposizione dell'osservatore nell'apprezzamento del medesimo fatto, cioè il rivestimento di una determinata forma di terreno da parte della vegetazione. Limitazione che ci dà della associazione una espressione distinta e concreta.

Conseguentemente mi sembra eccessiva l'estensione data dalla relazione citata al concetto di associazione ed ammessa, quale amplificazione teorica della nozione precisa sopra riferita, anche dal Pavillard, pel quale l'associazione vegetale s'identifica attraverso il tempo e lo spazio colla somma totale dei suoi individui presenti, passati e futuri. Il criterio assai più modesto adottato non esclude che, in una ricerca di fitogeografia storica, si raggruppino gli elementi delle associazioni a seconda delle affinità presentate dalle loro aree di distribuzione: è anzi quanto si fa normalmente e con risultati interessanti, quando non si dimentichi che, aree di distribuzione attualmente coincidenti possono aver raggiunto la loro estensione e configurazione attraverso vicende molto diverse ed essere quindi l'espressione di elementi anche storicamente assai eterogenei. Anche la formazione del resto, entro i limiti delle maggiori regioni climatiche, si ripete ogni qualvolta una medesima condizione fisiografica rinnova a suo favore l'ambiente adatto e probabilmente gli studi avvenire permetteranno di precisare maggiormente l'estensione di unità superiori alla formazione ed all'associazione, continuantesi parallelamente al di sopra di esse; le *Climax formations* dei fitogeografi inglesi ed americani sono l'esempio di un tentativo già in corso in questo indirizzo (1). Invece un concetto puramente speculativo dell'associazione non mi pare adatto a chiarire la già troppo intricata nomenclatura dei consorzi vegetali.

Similmente poco persuasivo, quando non s'identifichi con quello di specie dominante, mi sembra il concetto di specie caratteristica quale è sostenuto da Braun e Furrer (2). Per rimanere nell'esempio citato da questi Autori, una palude montana non sarà meno completa dal punto di vista ecologico per la

(1) Cfr. Cooper William S., *The Climax Forest of Isle Royale, Lake Superior and its Development* (" Bot. Gaz. ", LV (1913), 1-4, 115-140, 141-235).

(2) Braun J. et Fürrer E., l. c., p. 4.

mancanza di una o di tutte le varie specie che, pure essendo strettamente legate alle condizioni di stabilizzazione della formazione stessa, non hanno sulla sua comparsa e sulla sua durata la minima influenza. Floristicamente d'altra parte quando, come nel caso citato, si tratti di specie di reperto assolutamente sporadico, noi avremo da rilevare nell'associazione in studio il fatto geograficamente e storicamente interessante della loro presenza: potremo anche trarne le più logiche deduzioni sul passato o sull'avvenire della vegetazione locale; ma avremo pur sempre a che fare con *ecoidi* isolati, sentinelle avanzate di una immigrazione o relitti di una vegetazione pregressa, indici preziosi di qualche interessante particolarità climatica, ma, per dir tutto in una parola, estranei al ciclo topografico dal quale ripete la sua origine l'associazione. Differente è la questione nel caso in cui la specie caratteristica sia nello stesso tempo una specie dominante; chè, in questo caso, essa ha un valore ecologico generale in quanto rappresenta, come forma di vegetazione, la reazione a condizioni generali della stazione.

Concludendo è necessario, che nel corso di qualunque studio dei consorzi vegetali ed in genere del rivestimento vegetale del globo, sia tenuto presente il principio della irreducibile autonomia ecologica dell'elemento fondamentale — l'*ecoide*; intendendo come tale il sistema rappresentato dall'individuo vegetale e dal suo ambiente elementare.

Il lavorìo incessante di modellamento delle terre emerse da parte degli agenti fisici, fraziona la superficie terrestre in aree ben delimitate topograficamente e presentanti, entro i loro limiti un certo numero di caratteri ecologici uniformemente distribuiti, tanto da diventare il luogo di concentramento di *ecoidi* simili.

In rapporto dunque colla geomorfogenesi, alla quale dobbiamo, in generale, la fisonomia del paesaggio, si costituiscono in particolare le stazioni e le formazioni vegetali corrispondenti: è quindi naturale che la *stazione* caratterizzi la *formazione* che ha determinata in tutti i momenti della sua evoluzione, dall'invasione alla stabilizzazione, da questa alla degradazione estrema; e che la formazione vi assuma certe forme di vegetazione incapaci tuttavia di darne l'espressione completa, a causa della sua

fondamentale eterogeneità ecologica, del variare delle successioni che vi si verificano e d'altra parte per le differenze specifiche ed individuali di tolleranza e di accomodabilità dei suoi elementi. Il rilevamento delle forme di vegetazione tuttavia, se è male adatto a distinguere le singole formazioni nel complesso della vegetazione regionale, è invece indispensabile per lo studio di dettaglio della struttura e della fisonomia delle stesse formazioni e deve essere eseguito mettendo in evidenza i rapporti proporzionali secondo i quali i singoli elementi entrano a costituire i singoli consorzi.

Alla *formazione — termine biologico* — corrisponde esattamente l'*associazione — termine floristico*. L'una e l'altra caratterizzate dal complesso degli individui che entrano a comporle considerati, nel primo caso come forme di vegetazione, nel secondo come entità sistematiche: convenuti su di una certa area in seguito alla soddisfazione delle loro esigenze ecologiche che vi si verifica ed in dipendenza dei loro attuali mezzi di diffusione o dei precedenti storici della loro distribuzione sulla superficie del globo.

Fra le specie dell'associazione la qualità di *caratteristiche* si confonde con quella di *dominanti*, vale a dire, sta in dipendenza delle condizioni ecologiche attuali. Mancando questa corrispondenza, l'interesse anche grandissimo per la storia della vegetazione o per l'apprezzamento di condizioni di ambiente secondarie alla stabilizzazione di un elemento raro e costituente o conservante il suo *ecoide* in seno alla formazione stabilizzata nella sua stazione caratteristica, è subordinato, dal punto di vista della sistemazione ecologica, a quello rappresentato dagli elementi che, costituendo la compagine o gli accessori costanti del consorzio, si debbono considerare quale l'espressione degli adattamenti che — finchè la stazione dura immutata — esprimono più generalmente la rispondenza della sua vegetazione all'ambiente.

Torino, R. Istituto Botanico, Maggio-Giugno 1914.

Su alcuni aminoazocomposti.

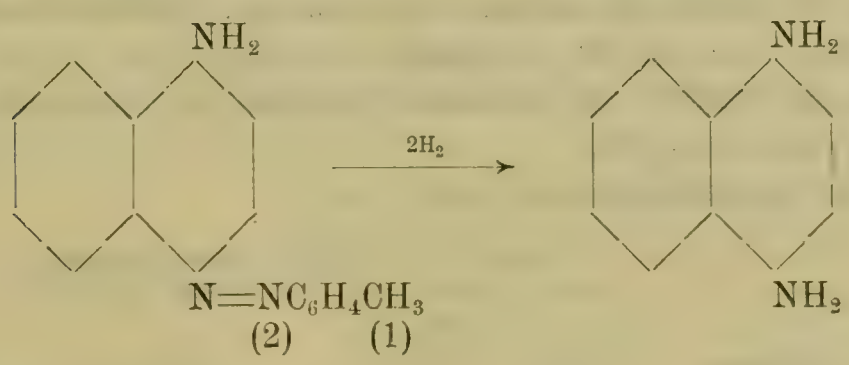
Nota di L. CASALE e MARIA CASALE-SACCHI

Gli aminoazocomposti derivanti dall'α-naftilamina si ottengono trattando questa base con un sale di diazonio

$$C_6H_5N_2Cl + C_{10}H_7NH_2 = C_6H_5N_2C_{10}H_6NH_2 . HCl.$$

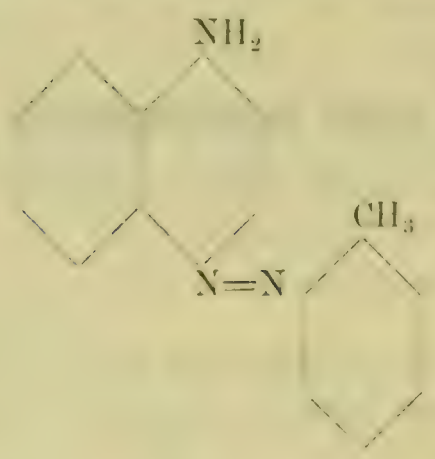
Dopo Griess [1], che fece agire sull'α-naftilamina il nitrato di fenildiazonio, preparando il primo termine della serie, la benzolazo-α-naftilamina, numerosi altri derivati furono ottenuti per l'azione di diversi sali di diazonio provenienti da aniline sostituite in posizione para o meta. Abbiamo voluto colmare la lacuna copulando coll'α-naftilamina i sali di diazonio ottenuti da alcune aniline sostituite in posizione orto.

Come gli aminoazocomposti di questa serie già conosciuti, anche quelli da noi preparati formano cogli acidi sali ben cristallizzati e discretamente stabili. Inoltre anche in questi l'azogruppo si trova in posizione para rispetto al gruppo aminico della naftalina, giacchè la 4-o-tolilazo 1-naftilamina diede, per riduzione, la p-naftilendiamina



[1] Griess *A.* *137*, 60.

4-o-tolilazo-1-naftilamina.



Si ottiene il cloridrato di questa sostanza trattando l'α-naftilamina, sciolta in alcool, col cloridrato di o-tolildiazonio. Il miscuglio colorato intensamente si rapprende quasi subito in una densa poltiglia cristallina dai riflessi bleu acciaio. Dopo un riposo di qualche ora si filtra alla pompa e si lava prima con alcool al 40 % poi con acqua, dove è insolubile, si scalda a b. m. con soluzione diluita di idrato sodico per mettere in libertà la base (rendimento oltre il 90 %), e si cristallizza quest'ultima da alcool diluito, dal quale si separa in lunghi aghi sericei color rosso vivo. La 4-o-tolilazo-1-naftilamina si fonde a 95°; è solubilissima in etere, è molto solubile in cloroformio, benzolo, alcool con colorazione rosso sangue; in acido acetico si scioglie con colorazione intensamente violetta. Traccie di essa colorano in rosso l'acido solforico concentrato, in violetto l'acido solforico diluito.

I. Gr. 0,2105 di sostanza fornirono gr. 0,6015 di anidride carbonica e gr. 0,1096 di acqua.

II. Gr. 0,0818 di sostanza fornirono cc. 11,6 di azoto ($H_0 = 742,8$; $t = 18°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{15}N_3$
	I	II	
Carbonio	77,93	—	78,12
Idrogeno	5,83	—	5,79
Azoto	—	16,16	16,10

Nella diazotazione dell'o-toluidina bisogna evitare un eccesso di nitrito sodico, perchè l'acido nitroso presente nella soluzione del sale di diazonio fa abbassare il rendimento dell'aminoazocomposto dando luogo alla formazione secondaria di un composto solubile negli alcali e di altri prodotti resinosi che rendono difficile la purificazione del prodotto principale. La sostanza solubile negli alcali precipita per la neutralizzazione con acido acetico sotto forma di una polvere rossa cristallina, che, raccolta e lavata, cristallizza dall'alcool in aghi rossi lucenti che si fondono a 143°-144°. Traccie di questa sostanza colorano l'acido solforico conc. in azzurro indaco. Da questi caratteri e dall'analisi la sostanza fu riconosciuta per

4-o-tolilazo-1-naftol $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OH\\(4)N{=}N(2)C_6H_4(1)CH_3\end{cases}$ preparato da Zincke e Rathgen [1].

Gr. 0,0928 di sostanza diedero cc. 8,8 di azoto ($H_0 = 731$ $t = 18°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O$
Azoto	10,55	10,69

Il rendimento in ossiazocomposto non supera il 2 %. Dell'ossiazocomposto preparammo anche l'etere metilico col metodo di Charrier e Ferreri [2].

Etere metilico $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OCH_3\\(4)N{=}N(2)C_6H_4(1)CH_3\end{cases}$. — Già descritto da Zincke e Rathgen. Cristallizza dall'alcool in aghi di color rosso cupo fondenti a 92°-93°.

Gr. 0,0612 di sostanza diedero cc. 5,4 di azoto ($H_0 = 729$; $t = 17°$).

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O$
Azoto	9,9	10,15

---

(1) *B. 19*, 2488.
(2) *G. 42*, II, 117.

Monoacetilderivato della 4-o-tolilazo-1-naftilamina $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)NH(CH_3CO) \\ (4)N_2.C_6H_4.CH_3 \end{cases}$. — Si prepara scaldando leggermente la 4-o-tolilazo-1-naftilamina con anidride acetica, si lava il prodotto con acqua bollente, si cristallizza dall'acido acetico e poi dall'alcool. Si presenta in aghi color rosso ranciato P. F. 215°. Solubile in acido acetico, in alcool, in benzolo, in cloroformio, è meno solubile in solfuro di carbonio.

Gr. 0,1331 di sostanza, diedero cc. 16,1 di azoto ($H_0 = 730,7$; $t = 18°,5$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{17}N_3O$
Azoto	13,45	13,86

Diacetilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)N(CH_3CO)_2 \\ (4)N{=}N.C_6H_4CH_3 \end{cases}$. — Si ottiene facendo bollire la 4-o-tolilazo-1-naftilamina con un eccesso di anidride acetica. Cristallizza dall'alcool in tavolette prismatiche color rosso mattone fondenti a 136°.

È solubile in alcool, alquanto in acido acetico, in benzolo e in toluene, poco solubile in etere e in solfuro di carbonio.

Gr. 0,0928 di sostanza diedero cc. 9,8 di azoto ($H_0 = 732$; $t = 17°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{21}H_{19}N_3O_2$
Azoto	11,83	12,18

Benzoilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)NH(C_6H_5{-}CO) \\ (4)N{=}N.C_6H_4.CH_3 \end{cases}$. — Si prepara col metodo Schotten-Baumann e cristallizza dall'acido acetico da cui si deposita in aghi fini e lunghi color giallo chiaro fondenti a 200°. Solubile in acido acetico, in benzolo, in toluene, poco solubile in alcool ed in etere.

Gr. 0,0725 di sostanza fornirono cc. 7,5 di azoto ($H_0 = 732$; $t = 17°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{24}H_{19}N_3O$
Azoto	11,58	11,51

La 4-o-tolilazo-1-naftilamina forma cogli acidi sali ben cristallizzati e stabili, solubili in alcool, acido acetico, insolubili in etere: nell'acqua, dove sono quasi insolubili, subiscono una parziale dissociazione idrolitica. Ma lo studio di questi sali e di quelli degli aminoazocomposti di questa serie sarà fatto più ampiamente da uno di noi in una nota di prossima pubblicazione.

Riduzione della 4-o-tolilazo-1-naftilamina.

Si sospende l'azocomposto in acido acetico al 20 %, si scalda all'ebollizione e si tratta con polvere di zinco in piccole porzioni fino a che il liquido si scolori. Filtrando in acido solforico diluito e freddo, si separa il solfato in begli aghi bianchi splendenti. Da questi si libera la base trattando con idrato sodico in imbuto separatore in presenza di etere; si dissecca la soluzione eterea, si distilla l'eccesso di solvente e si lascia evaporare la soluzione così concentrata nel vuoto secco. La p-naftilendiamina si deposita sotto forma di cristalli splendenti leggermente verdastri, che all'aria imbruniscono lentamente, e che si fondono a 118°-119°.

Gr. 0,0728 di sostanza diedero cc. 11,3 di azoto ($H_0 = 736,6$; $t = 20°,6$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{10}H_{10}N_2$
Azoto	17,29	17,72

Solfato di p-naftilendiamina $C_{10}H_{10}N_2.H_2SO_4$. — Cristallizza da acido solforico diluito in begli aghi bianchi che dopo 250° imbruniscono senza fondersi.

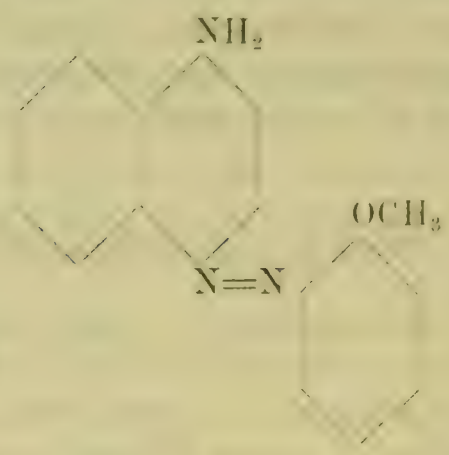
I. Gr. 0,5834 di sostanza diedero gr. 0,5232 di solfato di bario.

II. Gr. 0,4533 di sostanza diedero gr. 0,404 di solfato di bario.

Cioè su cento parti in peso di sostanza

	trovato		calcolato
	I	II	
Acido solforico	37,68	37,53	38,3

4-o-anisilazo-1-naftilamina.



Trattando l'α-naftilamina sciolta in alcool con il solfato di o-anisildiazonio si ottiene una densa poltiglia cristallina di un bleu mare intenso con riflessi verdi, costituita dal solfato della base, dal quale, per trattamento cogli alcali, si mette in libertà la base, che si purifica per cristallizzazione dall'alcool. La 4-o-anisilazo-1-naftilamina è solubilissima in cloroformio, discretamente solubile in alcool ed in etere con colorazione rossa intensa, solubilissima in acido acetico glaciale con colorazione intensamente violetta; cristallizza bene dal benzolo in brevi ciuffetti di aghi di un bel rosso cremisi. Si fonde a 184°-185°. Rendimento circa il 95 %.

I. Gr. 0,2 di sostanza fornirono gr. 0,5383 di anidride carbonica e gr. 0,1012 di acqua.

II. Gr. 0,1202 di sostanza diedero cc. 16,2 di azoto ($H_0 = 736,9$; $t = 17°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{15}N_3O$
	I	II	
Carbonio	73,4	—	73,6
Idrogeno	5,66	—	5,45
Azoto	—	15,2	15,18

Anche qui l'impiego di un eccesso di nitrito sodico nella preparazione del sale di diazonio provoca un forte abbassamento nel rendimento dell'aminoazocomposto, mentre si forma, insieme

a prodotti resinosi, una piccola quantità (non più del 2 %) di un composto solubile negli alcali da cui si precipita con acido acetico. Questa sostanza colora in azzurro indaco l'ac. solforico conc. e cristallizza da alcool diluito in pagliette rosse dorate fondenti a 173°. Questi caratteri e l'analisi dimostrarono trattarsi del

4-o-anisilazo-1-naftol $C_{10}H_6\begin{cases}(1)OH\\(4)N{=}N(2)C_6H_4(1)OCH_3\end{cases}$ già descritto da Charrier e Casale [1].

Gr. 0,0733 di sostanza diedero cc. 6,5 di azoto ($H_0 = 727,8$; $t = 18°,5$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
Azoto	9,81	10,07

Benzoilderivato $C_{10}H_6\begin{cases}(1)O.(C_6H_5CO)\\(4)N{=}N(2)C_6H_4(1)OCH_3\end{cases}$. — Già descritto da Charrier e Casale.

Cristallizzato dall'acido acetico si fonde a 140°.

Gr. 0,1240 di sostanza fornirono cc. 6,4 di azoto ($H_0 = 732,6$; $t = 20°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{24}H_{18}N_2O_3$
Azoto	7,19	7,33

Acetilderivato della 4-o-anisilazo-1-naftilamina $C_{10}H_6\begin{cases}(1)NH(CH_3CO)\\(4)N{=}N(2)C_6H_4(1)OCH_3\end{cases}$. — Ottenuto scaldando l'azocomposto con anidride acetica e lavato con acqua bollente. Cristallizzato da acido acetico e ricristallizzato da alcool diluito si presenta in aghetti splendenti color rosso granato fondenti 203°-204°.

Gr. 0,0757 di sostanza diedero cc. 9,0 di azoto ($H_0 = 736,5$; $t = 20°,6$).

---

[1] " Atti R. Acc. Scienze di Torino ", vol. *49*, 485.

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{17}N_3O_2$
Azoto	13,24	13,17

Benzoilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)NH(C_6H_5-CO) \\ (4)N=N(2)C_6H_4(1)OCH_3 \end{cases}$. — Fu ottenuto col metodo Shotten-Baumann.

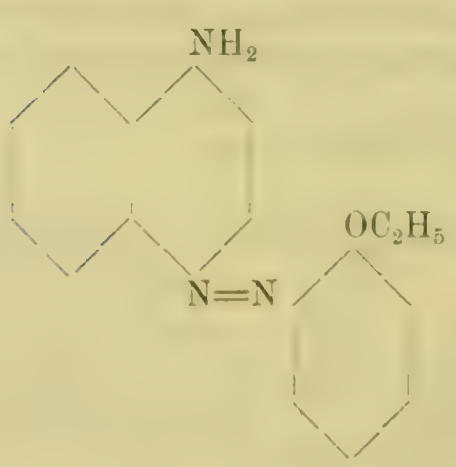
Cristallizza dall'acido acetico in begli aghi rosso ranciati fusibili a 182°.

Gr. 0,1986 di sostanza diedero cc. 19,2 ($H_0 = 733,7$; $t = 19°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{24}H_{19}N_3O_2$
Azoto	10,77	11,02

4-o-fenetilazo-1-naftilamina.



Versando la soluzione acquosa di cloridrato di o-fenetildiazonio in una soluzione alcoolica di α-naftilamina, si separa a poco a poco una massa finamente cristallina di color violetto a riflessi azzurri, che dopo qualche ora prende una colorazione verde scuro; allora si filtra, si lava con alcool al 40 % poi con acqua, in cui è insolubile, e si scalda a b. m. con soluzione diluita di idrato sodico per mettere in libertà la base che si purifica cristallizzandola dall'alcool (Rendimento 90 %).

La 4-o-fenetilazo-1-naftilamina è solubile in alcool e benzolo, è solubilissima in cloroformio ed in etere; si presenta in aggruppamenti cristallini di color rosso vermiglio fondenti a 169°.

I. Gr. 0,0714 di sostanza diedero cc. 9,2 di azoto ($H_0 = 741$; $t = 21°$).

II. Gr. 0,2068 di sostanza fornirono gr. 0,5609 di anidride carbonica e gr. 0,1097 di acqua.

Cioè su cento parti in peso

	trovato		calcolato per $C_{18}H_{17}N_3O$
	I	II	
Azoto	—	14,37	14,43
Carbonio	73,98	—	74,18
Idrogeno	5,95	—	5,89

Acetilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)NH(CH_3CO) \\ (4)N{=}N(2)C_6H_4(1)OC_2H_5 \end{cases}$. — Si prepara come i precedenti. Si cristallizza dall'alcool, ed i cristalli, che si fondono a 191°, hanno l'aspetto di corti aghi prismatici rossi e lucenti. È solubile in alcool, cloroformio, benzolo e toluene, meno in solfuro di carbonio, quasi insolubile in etere.

Gr. 0,0701 di sostanza diedero cc. 8 di azoto ($H_0 = 737,3$; $t = 22°5$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{19}N_3O_2$
Azoto	12,56	12,61

Benzoilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)NH(C_6H_5CO) \\ (4)N{=}N(2)C_6H_4(1)OC_2H_5 \end{cases}$. — Si scioglie con colorazione violetta in alcool, da cui si deposita in ciuffetti di aghi sericei di color verdastro fondenti a 180°.

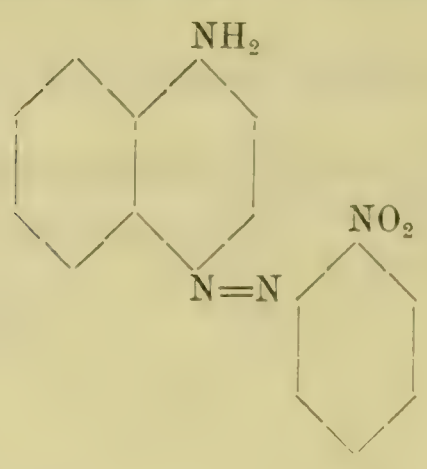
È insolubile in etere, poco solubile in solfuro di carbonio, discretamente in benzolo, solubilissimo in cloroformio.

Gr. 0,0782 di sostanza diedero cc. 7,6 di azoto ($H_0 = 731,7$; $t = 19°3$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{25}H_{21}N_3O_2$
Azoto	10,77	10,64

4-o-nitrofenilazo-1-naftilamina.



Trattando l'α-naftilamina sciolta in alcool col cloridrato di o-nitrofenildiazonio si ottiene una densa poltiglia cristallina di color rosso bruno con riflessi violacei, costituita dal cloridrato dell'aminoazocomposto, dal quale, cogli alcali, si mette in libertà la base, che si purifica per cristallizzazione dall'alcool diluito (Rendimento circa il 75 %). La 4-o-nitrofenilazo-1-naftilamina è molto solubile in alcool, benzolo, cloroformio, etere con colorazione rossa intensa, e, cristallizzata, si presenta in belle pagliette lucenti di color verde smeraldo, fondenti a 174°-175°.

I. Gr. 0,2194 di sostanza fornirono gr. 0,527 di anidride carbonica e gr. 0,0873 di acqua.

II. Gr. 0,0843 di sostanza fornirono cc. 14,4 di azoto ($H_0 = 731,2$; $t = 19°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato		calcolato per $C_{16}H_{12}N_4O_2$
	I	II	
Carbonio	65,52	—	65,73
Idrogeno	4,45	—	4,14
Azoto	—	18,95	19,18

Acetilderivato $C_{10}H_6\begin{cases}(1)NH(CH_3CO)\\(4)N{=}N(2)C_6H_4(1)NO_2\end{cases}$. — Si prepara come i precedenti. È solubile in alcool ed in cloroformio, poco solubile negli altri comuni solventi organici. Cristallizzato

dall'alcool, si presenta in ciuffetti di brevi aghi lucenti, di color verde chiaro, che si fondono a 200°.

Gr. 0,0999 di sostanza fornirono cc. 14,9 di azoto ($H_0 = 727,7$; $t = 19°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{14}N_4O_3$
Azoto	16,46	16,77

Benzoilderivato $C_{10}H_6 \begin{cases} (1)NH(C_6H_5CO) \\ (4)N{=}N(2)C_6H_4(1)NO_2 \end{cases}$. — Cristallizzato dall'alcool si presenta in aghetti lucenti e neri con riflessi rossi che si fondono a 185°. È solubile in cloroformio, in alcool, in benzolo, poco solubile in etere.

Gr. 0,1074 di sostanza fornirono cc. 13,5 di azoto ($H_0 = 727,7$; $t = 19°$).

Cioè su cento parti in peso

	trovato	calcolato per $C_{23}H_{16}N_4O_3$
Azoto	13,98	14,24

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Giugno, 1914.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 21 Giugno 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: D'Ovidio, Salvadori, Naccari, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari e Segre, Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Carle, Cipolla, Renier, De Sanctis, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e Schiaparelli.

Scusano l'assenza il Presidente Boselli ed i Soci D'Ercole, Foà e Somigliana.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 18 gennaio 1914.

Il Presidente ricorda le onoranze tributate ad Ascanio Sobrero il 31 maggio scorso per iniziativa dell'Associazione Chimica Industriale: in particolare la commemorazione di quel nostro Scienziato fatta la mattina, nell'Aula dell'Accademia, alla presenza di Sua Altezza Reale il Conte di Torino, del Ministro dell'Istruzione Pubblica S. E. Daneo, delle Autorità cittadine e di numerosissimi scienziati. Fra i discorsi tenuti in quell'occasione va segnalato principalmente quello del Socio Guareschi, che analizzò ed illustrò nel modo più ampio l'opera insigne del Sobrero.

Si procede alla votazione per la nomina del rappresentante dell'Accademia nel Consiglio di Amministrazione del Consorzio Universitario, essendo scaduto da detta carica triennale il Socio D'Ovidio. Riesce eletto per un nuovo triennio il Socio D'Ovidio.

Il Socio Tesoriere Einaudi, invitato dal Presidente, dà lettura del conto consuntivo dell'esercizio 1913, del bilancio preventivo pel 1914 e dei conti relativi ai fondi dei premi. Questi bilanci e conti vengono approvati ad unanimità.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Giugno 1914.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Carle, Cipolla, De Sanctis, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Renier Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli e dei Soci Manno e D'Ercole.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 17 maggio 1914.

Il Presidente, dopo aver salutato il Socio Cipolla, che è lieto di rivedere, fa dare lettura delle lettere con le quali ringraziano per la loro nomina a Soci corrispondenti dell'Accademia i signori Bergson, Davidsohn, Gentile, Jannaccone, Meyer, Montalcini.

Presentazione di libri:

1° il Socio Ruffini offre il suo volumetto *Camillo di Cavour e Mélanie Waldor*, Torino, Bocca, 1914, rilevando gli accertamenti di fatto che se ne guadagnano, mentre il Socio Renier fa notare lo speciale valore che questa indagine fortunata ha per la migliore conoscenza della vita sentimentale e del carattere intimo del Conte di Cavour;

2° il Segretario Renier presenta il volume giubilare *A Paolo Boselli*, Savona, tipogr. editrice Bertolotto, 1913, com-

pilato per omaggio dal Comitato Savonese costituito per onorare S. E. Boselli. Egli propone che la Classe colga quest'occasione per inviare al Presidente dell'Accademia i suoi rallegramenti e gli auguri per una serie ancor lunga di anni operosi, tutti dedicati al pubblico bene. Il Presidente e la Classe accolgono la proposta, incaricando il Segretario di scrivere la lettera di rallegramento e d'augurio.

Il Socio Renier annuncia di aver regalato alla biblioteca dell'Accademia i primi quindici volumi (Pistoia, 1899-1913) del *Bullettino storico pistoiese* ed i primi venti volumi (Torino, 1894-1914) del *Bollettino di filologia classica*, impegnandosi di regalare il seguito delle suddette pubblicazioni, ad annata chiusa di ognuna di esse. — Il Presidente Camerano porge per questi doni i ringraziamenti della Classe e dell'Accademia intera, le cui collezioni scientifiche ne vengono arricchite.

Per la inserzione negli *Atti* vengono presentati i seguenti manoscritti:

1° dal Socio Cipolla una sua nota su *La data della morte di Dante secondo Ferreto dei Ferreti;*

2° dal Socio De Sanctis alcuni suoi nuovi *Contributi alla storia dell'impero seleucidico;*

3° dal medesimo Socio De Sanctis un breve lavoro del Dott. Olivetti, *I figli dell'imperatrice Fausta.*

Su questi scritti i Soci Cipolla e De Sanctis danno ampie spiegazioni, e quindi il Socio Sforza espone il contenuto di una sua monografia, *Un poeta estemporaneo del secolo XVIII (Giovacchino Salvioni),* che destina alle *Memorie* accademiche.

La memoria del Socio Sforza è accolta con pienezza di voti segreti, astenendosi dalla votazione il Presidente Camerano ed il Socio proponente.

L'adunanza è tolta, non senza che il Presidente abbia augurato felici vacanze ai Soci presenti.

LETTURE

La data della morte di Dante secondo Ferreto dei Ferreti.

Nota del Socio CARLO CIPOLLA.

Di solito, rispetto alla data della morte di Dante Alighieri noi pendiamo incerti fra la data proposta da Giovanni Villani, e quella sostenuta da Giovanni Boccaccio e da Benvenuto Rambaldi da Imola.

Ma siccome poi non abbiamo una sicura edizione della Cronaca del Villani, così non possiamo citarla con piena fiducia. L'Istituto storico italiano ne aveva intrapresa l'edizione affidandola ad un valentissimo giovane, Vittorio Lami, che presto morì, avendo appena iniziato la raccolta del materiale. Per la *rubrica dantesca del Villani* abbiamo per buona sorte la monografia ben nota di Vittorio Imbriani (1).

L'Imbriani si giova sopratutto della edizione fatta di quella Cronaca nei *Rerum Italicarum Scriptores* XIII nel 1728, la quale è condotta sopra un manoscritto di G. B. Recanati patrizio veneziano, e sopra un codice della biblioteca ambrosiana. L'Imbriani raccolse poi le lezioni di molti manoscritti.

La maggior parte dei codici pone che Dante morì " nel detto anno MCCCXXI del mese di luglio ", ma alcuni lo fanno morire " lo dì di Santo Michele a dì XXVIIIJ ". E finalmente il codice Recanati, che l'Imbriani segnala come esistente oggi a Venezia, ha una specie di preambolo là dove vien detto che Dante morì nel 1321 " del mese di settembre il dì di Santa Croce ", il che vuol dire il giorno 14.

Nella numerazione dei capitoli adottata dal Muratori, la rubrica dantesca è il cap. 139 del libro IX.

---

(1) Tale monografia fu ristampata da F. Tocco, *Studi danteschi di* Vittorio Imbriani, Firenze, 1891, p. 25 sgg.

Le testimonianze in favore della seconda data furono raccolte da Fr X. Kraus, *Dante, sein Leben und sein Werk*, Berlin 1897, p. 116. Secondo il Boccaccio l'Alighieri morì adunque " del mese di settembre, nel giorno di Santa Croce ". E secondo Benvenuto " mortuus est in MCCCXXI de mense septembris, in festo Sancte Crucis ". E il Kraus avverte che bisogna distinguere la Invenzione della S. Croce, dalla Esaltazione della S. Croce: quella festa scade il 3 maggio, e questa invece il 14 settembre.

Nicola Zingarelli (1) raccoglie anch'egli la testimonianza del Boccaccio, che nella *Vita* di Dante scrisse: " del mese di settembre negli anni di Cristo MCCCXXI, nel dì che la Esaltazione della Santa Croce si celebra dalla Chiesa ". E la circonda con quanto si legge nei due epitaffi, l'uno di Giovanni del Virgilio e l'altro del Mezzani, che pongono la morte sotto il 13 settembre " septembris idibus " (2). Ne deduce lo Zingarelli che l'Alighieri morisse tra il 13 e il 14.

---

(1) *Dante*, Milano, Vallardi, pp. 344-5.

(2) La questione che si riferisce all'epigramma di Giovanni del Virgilio e a quella di Menghino. Mezzani, specie per rispetto al testo, è un tantino involuta, secondo le notizie raccolte da Carlo del Balzo, *Poesie di mille autori intorno a Dante*, Roma 1889, II, 264-5, 269. Il Mezzani visse in stretta relazione col circolo del Boccaccio e anche l'epigramma di Giovanni del Virgilio ci venne per mezzo del Boccaccio.

Il famoso epigramma *Theologus Dantes nullius dogmatis expers* si compone di sette distici, l'ultimo dei quali, la cui intonazione forse si stacca un poco da quella dei distici precedenti, contiene la data, agli idi di settembre. La nostra fonte per questo epigramma consiste nella *Vita di Dante* scritta da Giovanni Boccaccio, il quale accennando alle molte poesie fatte in occasione della morte di Dante, dice di accontentarsi di riferire i soli versi di Giovanni del Virgilio *li qual sono quelli apresso scritti*. Da nessuna altra parte tali versi ci pervennero. Dall'edizione critica che dell'operetta del Boccaccio fece F. Macrì-Leone (Torino, 1888, pp. 33-4) apparisce che non tutti i codici hanno tale epigramma; un tempo si riteneva che questo fosse stato inciso sulla tomba di Dante, ma C. Ricci (*L'ultimo rifugio di Dante*, Milano, 1891, p. 252 sgg.) lo nega, mentre avverte che la *Vita* del Boccaccio non fu compilata anteriormente al 1363.

Anche Ph. H. Wicksteed e F. G. Gardner, *Dante and Giovanni Del Virgilio*, Westminster, 1902, non fanno altro che riprodurre il testo fissato dal Macrì-Leone, dal quale dipende anche il Ricci (p. 250).

Per la condizione critica dell'epigramma di G. del Virgilio noi siamo

Corrado Ricci (1) che intorno all'ultimo rifugio di Dante più volte scrisse, ammette anche ora che egli morì " nella notte del 13 settembre, venendo il 14 ".

Wicksteed e Gardner, l'ultimo verso del carme attribuito a Giovanni del Virgilio, dove si parla delle idi di settembre, interpretano per il 14 settembre. Nel 1913 G. Lodònnici stette per il 14-15 settembre, ma senza spiegare i motivi di tale interpretazione (2).

T. Casini (3), basandosi su di un documento del Maggior Consiglio di Venezia del giorno 11 agosto 1321 deduce che prima d'allora c'era stato un tentativo d'accordo fra Venezia e Ravenna; attribuisce ciò al viaggio di Dante, che ascrive non all'agosto, ma alla fine di luglio. E pone la morte di Dante nella notte fra il 13 e il 14 settembre.

Ma non credo che alcuno raccolga, sebbene pubblicata da due secoli e mezzo, l'attestazione di Ferreto dei Ferreti, che ebbe con Dante e colle sue opere una attinenza che non possiamo completamente e precisamente valutare, ma che fu certo assai forte. E non solo con Dante ma con tutta la corrente fiorentina ha il Ferreti legatissima relazione.

Al poeta vicentino dobbiamo non solo parecchi carmi funebri in onore di Benvenuto Campesani, ma pure l'inizio di uno in onore di Dante.

Di G. B. Pagliarini, cronista vicentino, abbiamo a stampa (4) la versione italiana di una assai interessante compilazione storica, che fu scritta da lui intorno al 1460. Questa data mi fu

---

risospinti alla seconda metà avanzata del sec. XIV e all'atmosfera respirata dal Boccaccio e dal Rambaldi.

Il Macrì-Leone non parla dell'epigramma *Theologus Dantes* nel suo volume *La bucolica latina nella letteratura italiana del sec. XIV*, Torino, 1887, pur dove parla delle congeneri produzioni poetiche di Del Virgilio.

(1) *I rifugi dell'esule*, Firenze, 1914, p. 21.

(2) *La corrispondenza poetica di Giovanni del Virgilio*, in " Giorn. Dantesco ", XXI, 232.

(3) *L'ultimo rifugio di Dante*, in " Scritti danteschi ", Città di Castello, 1913, p. 139 sgg., 158, 161.

(4) *Cronache di Vicenza di* Battista Pagliarini ... *divise in libri sei, date in luce da* Giorgio Giacomo Alcuini, Vicenza, 1663.

comunicata da Mons. B. Bortolan, bibliotecario della Comunale di Vicenza e nella storia della sua città versatissimo.

Nella biblioteca Vicentina si conservano parecchi manoscritti del testo latino delle Cronache del Pagliarini, oltre a qualche manoscritto della versione. Il Pagliarini dedica una rubrica sul Ferreti, inserendovi gli inizi di vari suoi carmi. Quasi tutti i carmi indicati dal Pagliarini, sono oggi perduti (1). Per l'opposto conservaronsi i carmi funebri in onore del Campesani, che leggiamo nel testo (2).

Fra i carmi allegati dal Pagliarini, come scritti dal Ferreti, uno ce n'era sulla morte di Dante.

" Scripsit de morte Dantis poete florentini, sunt autem versus centum et decem, sic incipiunt:

Idibus atra dies Augusti Cesaris ibat
Tertia nec pleno fulgebat Delia cornu
Pressaque Nemei totis (3) Sol terga Leonis
Liquerat et medio flagrabat Virginis alvo

et cetera ".

Negli ultimi tempi di sua vita, Dante fu adoperato dai signori da Polenta in una ambascieria a Venezia. Delle questioni dei Ravennati con Venezia abbiamo qualche notizia anche altrove; ma non si tratta di indicazioni così precise che possano aiutarci per quanto riguarda la morte di Dante (4). Che Dante morisse ritornando da Venezia, lo dice il Villani.

L'*atra dies* non può essere che quella emortuale di Dante. Se può essere utile, cito l'analogia offertaci dal carme per la morte di Benvenuto Campesani, la cui data è parimenti esposta con lusso di dati astronomici. Dante dunque morì addì 11 agosto 1321, essendo la luna quasi piena, e il sole trovandosi nel passaggio dal segno di Leone a quello di Vergine; se vogliamo prestar fede al Ferreto.

---

(1) Fa eccezione il carme *Tristis ab etherea*, che abbiamo presso il Muratori, *Rerum Ital. Script.*, IX, 1187-8.

(2) Murat., IX, 1183-6.

(3) Forse *totus*.

(4) Zingarelli, op. cit., p. 344-5.

Per intendere il pensiero del Ferreto, feci ricorso alla dottrina e alla cortesia di un illustre astronomo, cioè del professore E. Millosevich, e dalla sua risposta appare che le indicazioni del Ferreti sono sostanzialmente esatte.

Egli mi avverte che l'8 agosto 1321 fu plenilunio. Perciò il giorno 11 appena da 3 dì era passato il plenilunio, donde giusta la frase che la luna non era piena.

Sostanzialmente vero è quanto Ferreto dice nei versi 3-4, giacchè il sole entrò nel *segno* di Vergine il 15 agosto verso 2^h 1/2 pom.

La data meglio quotata dai critici, quella del 13 o del 14 settembre, corrisponderebbe approssimativamente coll'ingresso del sole nella costellazione di Vergine, per la differenza di un mese in causa della precessione degli equinozi. Ma allora la luna non era piena da un pezzo.

Il Ferreto è una grande autorità, perchè contemporaneo, e perchè astronomo. Lascio ai dantisti lo stabilire se la sua testimonianza sia tale da decidere la questione, poichè si trattava, anche prima d'ora, di una data controversa, dacchè la rubrica dantesca del Villani parla di luglio, scostandosi dalla data del settembre.

Nel poema sugli Scaligeri (l. II, v. 206-7) il Ferreto accenna alla metà circa di luglio 1290, come data del concepimento di Cangrande, e parla del trapasso del sole da Cancro a Vergine:

> Phebe, Cleoneum, Cancro fugiente, Leonem
> Tunc ingressus eras.

Se Cangrande nacque il 9 marzo 1291, come dice la tradizione cronografica, il Ferreti nei versi citati accenna piuttosto al segno che alla costellazione di Leone, considerando il tempo del suo concepimento. Il Sole infatti entrò nel luglio nel segno di Leone, e nell'agosto fu nella costellazione di Leone, quando trovavasi nel segno di Vergine. Dato il tempo della nascita infatti ci accosteremo più al segno di Leone, nel luglio, che non alla costellazione di Leone in agosto. Non si dimentichino le controversie sulla data della nascita di Cangrande, che rendono necessariamente incerti tali calcoli.

Dante (1) fin dal principio del suo viaggio simbolico discorre delle stelle che montano col Sole all'inizio della primavera e indica il Montone (2) come proprio dell'anno che si apre. E i commentatori (3) spiegano del *segno* dell'Ariete nel quale il Sole trovavasi. Parlano di segno, non di costellazione. Ciò sembra significativo per noi.

Nella serie delle testimonianze sulla morte di Dante meriterebbe il primo posto il bolognese Giovanni Bentivoglio, che fu amicissimo a Dante; nel 1321 fu professore a Bologna, pure sempre in vicinanza relativa a Ravenna; ma il tramite per il quale la sua testimonianza passò, ci dà da pensare.

Minor valore, ma non disprezzabile, ha la testimonianza di Menghino Mezzani o da Mezzano.

Noi siamo sempre in collegànza o in contemporaneità col Boccaccio, la cui *Vita di Dante* è posteriore d'oltre quarant'anni alla morte del Poeta. I testi legati al Boccaccio parlano del 13-14 settembre.

Più antica è la testimonianza del Villani che morì nel 1348; ed egli propone il luglio.

Del Ferreti sappiamo che morì avanti il 13 aprile 1337 (4). Senza levare la riserva già fatta, si potrebbe accettare la testimonianza di lui quale la più antica, così come indubitatamente è la più precisa, giacchè presso di lui la data del giorno 11 agosto (1321) è corroborata da osservazioni astronomiche.

---

(1) *Inf.*, I, 1. 38. 45.
(2) *Purg.*, VIII, 134.
(3) Rimando al *Commento* di Tommaso Casini, Firenze, 1903, pp. 3-6.
(4) Vigna, *Zibaldone* (nella Biblioteca Comunale di Vicenza), VII, 230.

Contributi alla storia dell'impero seleucidico [1]

Nota del Socio GAETANO DE SANCTIS

IV.

Per la storia di Mileto.

1.

Quando, nel 315 av. Cr., Tolemeo, Seleuco, Lisimaco e Cassandro mossero concordemente la guerra ad Antigono, il Lagide, che giusto allora, sull'esempio de' suoi avversarî Antigono e Polisperconte, aveva proclamato la liberazione delle città greche, trovò in Asandro, il satrape di Caria, un alleato " potente (dice Diodoro XIX 62, 2) e avente dominio in non poche città "; e, perchè riuscisse meglio a difendersi contro gli attacchi di Polemeo, nepote e generale d'Antigono, gli fece pervenire in soccorso un corpo di mercenarî. Altri soccorsi spedì più tardi in quella regione Cassandro " avendo saputo che erano guerreggiate le città di Caria quante avevano alleanza con Tolemeo e Seleuco " (Diod. XIX 68, 2). Con tutto ciò, sullo scorcio del 314, Polemeo in un luogo di Caria detto Caprima, sorprese e costrinse alla resa l'esercito avversario (c. 68, 7). Allora, per compiere la sottomissione dell'Asia Minore, Antigono, che s'era impadronito di Tiro, passò egli stesso il Tauro ad autunno avanzato del 314 e prese i quartieri d'inverno a Celene. Asandro, ridotto così senza difesa dinanzi alle forze preponderanti del nemico, dovette chieder pace — fu, pare, nella primavera del 313 — adattandosi alle gravi condizioni imposte dal vincitore: cedergli l'esercito, lasciar libere le città greche (c. 75, 1), serbando, ma come luogotenente d'Antigono, il governo della Caria. Senonchè

(1) Cfr. gli " Atti " di questa R. Acc., XLVII (1911-2) p. 793 segg., 957 segg.

il satrape sconfitto voleva, sembra, guadagnar solo un po' di tempo, fiducioso d'aver dagli alleati nuovo soccorso alla buona stagione; e quando vide che Antigono non si appagava di parole, rifiutò d'eseguire i patti e invocò i vecchi alleati alla riscossa. Ma Antigono non diede ad essi il tempo d'intervenire. I suoi generali " giunti presso la città dei Milesi chiamarono i cittadini a libertà e, avendo preso d'assalto il castello, custodito da un presidio, le restituirono autonomia d'ordinamenti " (c. 75, 4). Poco dopo anche Tralle, Cauno ed Iaso caddero in mano d'Antigono; e con esse, senza dubbio, tutta la Caria; poichè d'Asandro, ucciso od espulso, dopo d'allora non è più parola nella storia.

Spargono qualche luce intorno a questi fatti alcune delle importantissime iscrizioni milesie che ha di recente pubblicate con ampio e dotto commentario A. Rehm (*Milet, Ergebnisse der Ausgrabungen und Untersuchungen seit dem Jahre 1899 herausg. von* Th. Wiegand. Heft III: *Das Delphinion von* G. Kawerau u. A. Rehm. Berlin 1914). E prima di tutto la seconda delle grandi liste degli eponimi milesi, gli stefanefori (nr. 123 p. 259), che comincia così:

οἵδε μολπῶν ἠισύμνησαν·
Ἱππόμαχος Θήρωνος· ἐπὶ τούτου ἡ πόλις
ἐλευθέρα καὶ αὐτόνομος ἐγένετο ὑπὸ
Ἀντιγόνου καὶ ἡ δημοκρατία ἀπεδόθη.

Codesto Ippomaco fu dunque l'eponimo dell'anno milesio 314/3 o del 313/2. Di questi due anni, stando al racconto di Diodoro, gli si attribuirebbe volentieri il 314/3 se fosse certo, come il Rehm suppone, che l'anno milesio cominciava allora in autunno. La presa di Mileto e tutta la conquista della Caria che le tenne dietro paiono infatti in Diodoro conseguenze quasi immediate della rotta autunnale sofferta da Asandro. E però il Beloch non a torto riferiva questi fatti alla prima metà del 313 (*Gr. G.* III 1 p. 128): anche per lasciar posto nel corso di quell'anno agli avvenimenti che seguirono. Dopo la conquista delle città di Caria Antigono si recò, narra Diodoro, nell'Ellesponto, per avervi un colloquio con Cassandro intorno alla pace. Questo colloquio non avendo approdato a nulla, Cassandro con trenta navi pose l'assedio ad Oreo. Ma al soccorso della città mosse

dal Peloponneso Telesforo, dall'Asia Medio, l'ammiraglio che aveva comandato l'armata nella spedizione di Caria. E tra costoro e Cassandro si combattè ad Oreo ripetutamente, con varia fortuna, ancora senza dubbio in quell'anno.

E tuttavia è preferibile riferire col Rehm lo stefaneforo Ippomaco al 312/2. Non per la ragione (p. 242) che " precede (alla presa di Mileto) la diversione contro Lisimaco (Diod. XIX 73, 6), operata dall'esercito di Antigono "; perchè Diodoro premette gli avvenimenti del principio di quella campagna in Europa (v. 73-74) agli avvenimenti d'Asia (75, 1-6) senza voler certo indicare che i primi precedessero i secondi: la successione nel suo racconto è topografica (*κατὰ δὲ τὴν Ἀσίαν*), non cronologica; e le fila si riuniscono, cronologicamente, solo col colloquio tra Antigono e Cassandro; nè, certo, le truppe inviate contro Lisimaco a Callati erano, come s'è detto, quelle di cui poi si servì Antigono in Caria: egli non era davvero tanto destituito di forze da lasciare ad Asandro agio di riaversi dalla rotta toccata con spedir via i soldati che poteva usare contro di lui. Ma la lista degli eponimi milesi precedente all'altra di cui ho trascritto il principio ha indotto giustamente l'editore a prescegliere la data del 313/2. Infatti in quella prima lista dopo Alessandro Magno, *Ἀλέξανδρος Φιλίππου*, sono registrati venti eponimi. Ora Alessandro occupò Mileto nella state avanzata del 334; e fu quindi stefaneforo al più presto nel 334/3. Al più presto e anche al più tardi; perchè solo se il grande Macedone fu eponimo nel 334/3 e Ippomaco nel 313/2 e le due liste si continuano immediatamente l'una con l'altra, riusciamo a trovar posto ai venti eponimi annui che chiudono la prima di esse. — Si potrebbe, è vero, congetturare che l'ultimo eponimo della prima lista e il primo della seconda spettassero allo stesso anno milesio e, solo, quello fosse l'eponimo dell'antico ordinamento, questo l'eponimo sostituitogli pei cinque o sei mesi restanti quando s'instaurò la libertà. Ma sarebbe ipotesi priva di verisimiglianza, da ricorrervi solo in caso di necessità assoluta, che non è il caso nostro. Per la seconda parte quindi della prima lista d'eponimi e per tutta la seconda son da accettarsi senza esitare le date proposte dal Rehm, e conviene adattarvi la nostra tradizione storica. Il che nel caso nostro può farsi senza alcuno sforzo, solo che si supponga — e nulla c'impedisce di

supporlo — che, come i suoi successori del III secolo e a differenza de' suoi predecessori dell'età di Alessandro, Ippomaco sia entrato in carica a primavera anzichè ad autunno. E appunto la liberazione di Mileto per parte d'Antigono e il nuovo assetto, che ne procedette, degli ordini civili, possono essere stati la causa dello spostamento che il Rehm crede d'aver rilevato (p. 234 segg.), nel principio dell'anno milesio, dall'autunno alla primavera: e può assai bene con quello spostamento coincidere l'inizio della nuova lista d'eponimi.

L'anno innanzi ad Ippomaco, cioè secondo questa cronologia il 314/3, fu in carica l'ultimo stefaneforo registrato nella prima lista *Ἄσανδρος Ἀγάθ[ω]νος*, il satrape della Caria. Il quale, sebbene i fasti milesî datino dall'intervento d'Antigono la libertà, aveva, è da credere, in qualche parte ottemperato al rescritto per la liberazione delle città greche emesso dal suo potente protettore, Tolemeo di Lago; e, pur tenendo occupata la rocca di Mileto, aveva serbato alla vecchia e illustre città una parvenza d'autonomia. Non è, questa, una congettura campata in aria. Ho già addotto il passo di Diodoro ricordante *τὰς ἐν Καρίᾳ πόλεις ὅσαι συνεμάχουν τοῖς περὶ Πτολεμαῖον καὶ Σέλευκον*. Ad esso un commento mi par che fornisca un'altra delle iscrizioni edite dal Rehm non in tutto, forse, per questa parte intesa dall'editore (nr. 139). È un documento dei tempi di re Tolemeo Filadelfo, che contiene una lettera del re ai Milesî con la risposta indirizzatagli dal popolo. Il re afferma d'aver sempre avuto pei Milesî grande benevolenza,

ὡς προσῆκον ἦν
διὰ τὸ καὶ τὸμ πατέρα τὸν ἡμέτερον ὁρᾶν οἰκείως τε πρὸς τὴν πόλιν δια-
5. *κείμενον καὶ πολλῶν ἀγαθῶν παραίτιον ὑμῖν γενόμενον καὶ φόρων τε*
σκληρῶν καὶ χαλεπῶν ἀπολύσαντα καὶ παραγωγίων παρ' ὑμῖν ἅ τινες
τῶμ βασιλέων κατέστησαν.

E il popolo rispondendo ricorda che

τοῦ δήμου καὶ πρότερον ἐλ[ο]-
μένου τὴμ φιλίαν καὶ τὴν συμμαχίαν τὴμ πρὸς τὸν θεὸν καὶ σωτῆρ[α]
25. *Πτολεμαῖον συνέβη τήν τε πό[λιν] εἰς εὐδαιμονίαν καὶ ἐπιφάνειαν ἐλθεῖν καὶ τ[ὸν]*
δῆμον πολλῶν καὶ μεγάλων ἀγαθῶν ἀξιωθῆναι, δι' ἃς αἰτίας ἐτίμησεν
αὐτὸν ὁ δῆμος ταῖς μεγίσταις καὶ καλλίσταις τιμαῖς.

A quale momento si riferisce codesta alleanza di Mileto con Tolemeo Sotere e codesta abolizione dei tributi e dei dazi (*παραγώγια*) imposti da " alcuni dei re „? Mileto dal 313 rimase in potere d'Antigono e poi di Demetrio Poliorcete anche dopo la battaglia d'Ipso, fino almeno al 295/4, anno in cui vi compare nei fasti come eponimo *Δημήτριος Ἀντιγόνου*. In tutto questo tempo, nonostante la breve pace o piuttosto tregua del 311 e il momentaneo ravvicinamento tra Tolemeo e il Poliorcete del 299 circa, l'influsso di Tolemeo nelle città che, sia pure nominalmente libere, erano nell'alleanza d'Antigono e del figlio non può però essere stato tale che esse — senza aperta ribellione — si permettessero di stringere una alleanza con lui, e poniamo anche un'alleanza con la clausola che non valesse contro Antigono; e ad ogni modo da simili trattative coi loro rivali che dovevano parer rasentare il tradimento, non potevano certo essere indotti Antigono o Demetrio a larghezza di concessioni; senza dire che i tributi e i dazi assai probabilmente, se non prima, erano stati appunto aboliti dal 313 da Antigono nell'atto di proclamare Mileto città libera. Tosto dopo il 295/4 Mileto cadde in mano di Lisimaco. Di ciò, veramente, aveva dubitato il Beloch (*Gr. G.* II 2, 272); ma ne fa prova il decreto del *κοινόν* delle tredici città ioniche per lo stratego di quel re, Ippostrato milesio (Dittenberger *Syllogᵉ* 189, integrato dall'altro esemplare edito in " Athen. Mitt. „ 1900 p. 100 segg. e in *Milet.* H. II nr. 10; intorno al significato del documento v. P. Ghione *Note sul regno di Lisimaco* negli " Atti „ di questa R. Accademia XXXIX 1903/4 p. 619 segg.): decreto che spetta all'anno dell'eponimo Telesia, ossia, secondo i fasti milesi, al 289/8. Nel 287

infine, Demetrio sbarcato in Asia ricuperò la città, che perdette di nuovo poco dopo quando la sua impresa volse a rovina. E allora alla città poco fedele Lisimaco impose una contribuzione per cui i Milesî nel 282, dovendo provvedere al secondo versamento (*δευτέρα καταβολή*), ebbero a cercar denari in prestito dai loro amici di Cnido, come mostra un'altra epigrafe edita dal Rehm (nr. 138). Non spetta dunque l'alleanza con Tolemeo Sotere e la remissione dei tributi a questo ultimo periodo in cui Lisimaco gravò la mano sui ribelli; ed è assai difficile che risalga ai primi anni del suo dominio quando da un lato egli affermava saldamente l'autorità sua nella Ionia governandola per mezzo d'uno stratego, *στρατηγὸς ἐπὶ τῶν πόλεων τῶν Ἰάδων*, dall'altro l'autorità dei Tolemei nell'Egeo era ridotta al nulla; e, troppo abusata, aveva perduto alquanto della sua virtù la magica parola di libertà con cui i Diadochi prima della battaglia d'Ipso avevano cercato di contendersi l'un l'altro l'amicizia delle città greche.

Resta, mi pare, che l'alleanza tra Mileto e Tolemeo di Lago fu conclusa nel 315 o 314, quando appunto Diodoro ci parla di città di Caria che erano confederate (*συνεμάχουν*) con lui e con Seleuco; quando alleato di Tolemeo era Asandro, che teneva presidio nella rocca di Mileto; il quale dalla sua stessa debolezza e dal bisogno di soccorsi era obbligato ad ottemperare ai desiderî ed ai consigli del suo valido alleato e ad aver molto riguardo alle aspirazioni autonomistiche delle città greche suddite, rinfocolate dal proclama liberale d'Antigono non meno che da quello contrappostovi di Tolemeo. Nè vale a ribattere questa congettura l'opinione comune che Asandro aveva privato proprio lui i Milesî della libertà e della immunità concesse loro da Alessandro. Perchè è opinione infondata. Dopo la resistenza accanita di Mileto nel 334 è dubbio se Alessandro facesse liberi i Milesî nel senso di esentarli da presidî e da tributo. Ciò non asserisce punto Arriano (*Anab.* I 19, 6), il solo che dia in tal proposito qualche particolare. Il quale, detto che Alessandro obbligò i mercenarî presidianti Mileto a prender servizio fra le sue truppe, aggiunge: *αὐτοὺς δὲ Μιλησίους, ὅσοι μὴ ἐν τῇ καταλήψει τῆς πόλεως ἔπεσον, ἀφῆκεν καὶ ἐλευθέρους εἶναι ἔδωκεν*; dove, se pure si tratta, come pensa p. e. l'Haussoullier (*Études sur l'hist. de Milet et du Didymeion* p. 7), di libertà politica, è incerto che

vi si comprendano quelle esenzioni; e il precedente *ἀφῆκεν* fa dubitare che, invece di libertà politica, si tratti di libertà personale; presa infatti Mileto d'assalto, i superstiti, secondo l'usuale diritto di guerra, ripetevano la libertà solo dalla clemenza del vincitore. Quanto poi ai tributi, sebbene i propositi d'Alessandro in generale, per rispetto alle città greche dell'Asia Minore, fossero assai liberali (Arriano *Anab.* I 18, 2: *τὰς μὲν ὀλιγαρχίας πανταχοῦ καταλύειν..... δημοκρατίας δὲ ἐγκαθιστάναι καὶ τοὺς νόμους τοὺς σφῶν ἑκάστοις ἀποδοῦναι καὶ τοὺς φόρους ἀνεῖναι ὅσους τοῖς βαρβάροις ἀπέφερον*), a questi propositi egli fece tuttavia qualche eccezione; e in particolare per Mileto l'Haussoullier (op. cit. p. 7) osservava: " j'ai peine à croire qu'il ait exempté Milet de tout tribut „ — già prima che la nostra epigrafe ci informasse dei *φόροι σκληροὶ καὶ χαλεποί* e dei *παραγώγια* a cui Mileto era tenuta sino ai tempi di Tolemeo Sotere, impostile da *τινὲς τῶν βασιλέων*, alcuni, deve intendersi dei re di Persia o anche dei dinasti di Caria; e conservati, giova credere, da Alessandro e, sul principio, dai successori.

Le forme usuali dell'autonomia riebbe a ogni modo Mileto da Alessandro. Ciò provano a sufficienza varî documenti del IV secolo e più precisamente dell'età all'incirca d'Alessandro stesso (*Milet* p. 293), anche se, come io penso, non debba escludersi che alcuni di quelli riferiti dal Rehm ai tempi d'Alessandro spettino al periodo del governo d'Asandro o persino ai primi anni dopo la libertà restituita per opera d'Antigono. Ma alle forme dell'autonomia non è detto che attentasse punto Asandro; se pure, che del resto non è dimostrato, egli per primo presidiò la rocca di Mileto. Vero è che secondo A. Rehm (p. 260) il permesso dato ad Asandro in un decreto ateniese in suo onore dei primi mesi del 313 (*IA.* ed. minor I 1 nr. 450) di innalzare la sua statua equestre nell'agora, ma non presso le statue d'Armodio e d'Aristogitone (*ἐν ἀγορᾶι ὅπου ἂν βούληται πλὴν παρ' Ἁρμόδιον καὶ Ἀριστογείτονα*) ci ammonisce all'evidenza " dass wir in Asander ein Gewaltherrscher und Feind des Demos vor uns haben „. Ma se Asandro tra le linee del decreto ateniese avesse letto quel che vi legge il Rehm, che cioè gli si dava una patente di tiranno, avrebbe probabilmente mandato al diavolo il decreto e chi lo aveva votato. In realtà quella interpretazione è arbitraria. Anche nel decreto ateniese dell'anno di

Nicostrato, il 295/4, in onore di Erodoro (su cui vedi i miei *Contributi alla storia ateniese* p. 27 n. 4 e p. 45), si offre ad Erodoro d'innalzare la sua statua dove voglia *πλὴν παρ' Ἁρμόδιον καὶ Ἀριστογείτονα*. Eppure Erodoro non vien davvero rappresentato nè come un tiranno nè come un nemico della democrazia; anzi si vanta l'opera da lui prestata *ὅπως ἂν ὁ δῆμο[ς ἀπαλλαγεὶς το]ῦ πολέμου τὴν ταχίστ[ην καὶ κομισάμε]νος τὸ ἄστυ δημοκρατ[ίαν διατελῇ ἔχ]ων*. E nello stesso decreto in onore dell'oratore Licurgo, *Vitae X orat.* p. 852 *d*, era una clausola del medesimo significato, sebbene neanche all'avversario più accanito di Licurgo potesse cadere in mente di vituperarlo come nemico della democrazia: *στῆσαι αὐτοῦ τὸν δῆμον χαλκῆν εἰκόνα ἐν ἀγορᾷ πλὴν εἴ που ὁ νόμος ἀπαγορεύει μὴ ἱστάναι*. Gli è semplicemente che nelle onorificenze ateniesi si distinguevano varî gradi e che l'erezione d'una statua presso quelle dei tirannicidi era una onorificenza massima che non poteva sancirsi con un *ψήφισμα*, ma con un'apposita legge e che si conferiva solo in casi eccezionalissimi, cioè, per quanto sappiamo, ad Antigono e Demetrio prima (Diod. XX 46), a Bruto e Cassio poi (Cass. Dio XLII 21; cfr. Wachsmuth *Stadt Athen* II 398). In sostanza non si ha nessuna ragione per ritenere Asandro un 'tiranno' o un 'avventuriere'; o, per dir meglio, per ritenerlo più tiranno o più avventuriere degli altri satrapi suoi colleghi; e l'amicizia sua con Cassandro può tanto poco allegarsi per ciò quanto per farne un eroe di libertà la sua amicizia col 'salvatore' Tolemeo.

2.

Come Efeso, così Mileto per effetto della guerra con Lisimaco venne in mano di Seleuco e dopo di lui del suo successore Antioco Sotere. Nella primavera del 282, vedemmo or ora, la città doveva versare la seconda quota d'una contribuzione imposta da Lisimaco. Non sappiamo se la versasse in effetto. Certo mutò padrone quell'anno stesso, prima o dopo la battaglia di Corupedio (per la cui data, l'agosto o settembre del 282, v. la mia *Storia dei Romani* II p. 390 n. 2), passando a Seleuco. E rimase fedele al figlio di lui fra i torbidi che tennero dietro all'assassinio del padre. Infatti non appena fu possibile (chè per l'anno 281/0 l'eponimo doveva essere nominato da tempo nel

marzo-aprile del 281, quando Seleuco morì), cioè per l'anno 280/79, si fece omaggio della dignità di stefaneforo in Mileto al nuovo sovrano.

Qualcosa di più per la storia di Mileto in questi anni si trae dal già citato documento milesio concernente Tolemeo Filadelfo (nr. 139). Ivi nella sua lettera il re, subito dopo i saluti d'uso, ricorda (v. 2-3):

καὶ πρότερον τὴν πᾶσαν ἐποιούμην σπουδὴν ὑπὲρ τῆς πόλεως ὑμῶν
καὶ χώραν διδοὺς καὶ ἐν τοῖς λοιποῖς ἐπιμελόμενος ὡς προσῆκον ἦν.

E fatto qui l'accenno già sopra illustrato intorno ai meriti del padre, continua:

νυνί τε ὑμῶν τὴμ πόλιν καὶ τὴμ πρὸς ἡ-
μᾶς φ[ι]λίαν καὶ συμμαχίαν οἰκείως διατετηρηκότων — γέγραφεν γ[άρ
μοι ὅ τε υἱὸς καὶ Καλλικράτης καὶ οἱ ἄλλοι φίλοι οἱ παρ' ὑμῖν ὄντες ἣν ἀ-
10. *πόδειξιν πεποίησθε τῆς πρὸς ἡμᾶς εὐνοίας — καὶ αὐτοὶ παρακολουθοῦν-*
τες ἐπαινοῦμεν ὡς ἔνι μάλιστα καὶ πειρασόμεθα ἀ[μ]ύνε-σθαι (1) *τὸν δῆ-*
μον εὐεργετοῦντες, παρακαλοῦμεν δὲ καὶ εἰς τὸν λοιπὸν χρόνον τὴν αὐ-
τὴν ἔχειν αἵρεσιν πρὸς ἡμᾶς, ἵνα καὶ ἡμεῖς τοιούτων ὑμῶν ὄντων ἐπὶ πλέον
τὴν ἐπιμέλειαν τῆς πόλεως ποιώμεθα.

Degli stessi avvenimenti si discorre poi nella risposta del popolo, vantate le benemerenze del padre, Tolemeo Sotere:

(1) È forse superfluo notare che qui *ἀμύνεσθαι*, come *ἀμυνεῖσθαι* al v. 38 vuol dire semplicemente 'ricambiare', *ἀμείβεσθαι τοῖς ὁμοίοις*; e non deve quindi ricavarsene che Mileto fosse esposta in questo momento ad un attacco nemico.

διαδεξάμενός τε
τὴμ βασιλείαν ὁ υἱὸς αὐτοῦ Πτολεμαῖος καὶ ἀνανεωσάμενος
τήν τε φιλίαν καὶ συμμαχίαν τὴμ πρὸς τὴμ πόλιν πᾶσαν πεποίηται
30. *σπουδὴν ὑπὲρ τῶν συμφερόντων πᾶσι Μιλησίοις χώραν τε ἐπιδιδοὺς καὶ*
τὴν εἰρήνην παρασκευάζων τῶι δήμωι καὶ τῶν ἄλλων ἀγαθῶν πα-
ρ]αίτιος γενόμενος τῆι πόλει, καὶ νῦμ πολέμων καταλα-βόντων πολλῶ[ν
καὶ μεγάλων ἡμᾶς καὶ κατὰ γῆν καὶ κατά θάλασσαν καὶ τῶν [ἐ]ναντίων ἐ[πι
πλευσάντων ἐπὶ τὴν πόλιν πυθόμενος ὁ βασιλεὺς τὸν δῆμον εὐγε-
35. *νῶς ἐμμεμενηκότα τῆι πρὸς αὐτὸν φιλίαι καὶ συμμαχίαι ἀποστείλας*
γράμματα καὶ πρεσβευτὴν Ἡγήστρατον ἐπαινεῖ τὸν δῆμον ἐπὶ τῆι αἱρέσει
καὶ ἐπαγγέλλεται τὴμ πᾶσαν ἐπιμέλειαν ποιεῖσθαι τῆς πόλεως καὶ ἀ[μυ]-
νεῖσθαι ταῖς εὐεργεσίαις ἐπὶ πλεῖον κτλ.

Or qui, com'è chiaro, circa le relazioni di Mileto col Lagide si distinguono due momenti: l'uno di alleanza effettiva o, se vuolsi, di effettiva dipendenza di Mileto dal potente alleato, che s'inizia poco prima del tempo in cui la lettera fu scritta, dunque, e si vedrà meglio poi, nel 262 circa; l'altro, anteriore, di relazioni amichevoli, più antiche perfino della donazione territoriale onde qui è parola, donazione che spetta — sarà chiarito anche questo tra breve — al 279/8. Tali relazioni amichevoli, che naturalmente l'autore del decreto, partigiano di Tolemeo, ha cercato di esagerare, possono assai bene risalire all'atto dell'assunzione del Filadelfo al regno, come l'epigrafe stessa par suggerire con quel *διαδεξάμενος τὴν βασιλείαν* con cui ne introduce il ricordo — dove, se la buona amicizia non si fosse iniziata, tosto che Tolemeo salì sul trono, si aspetterebbe qualche frase più generica come *ἀκολούθως τῇ τοῦ πατρὸς προαιρέσει* o simili.

E storicamente le relazioni cordiali di Tolemeo detto poi Filadelfo circa il 285 con Mileto dominata da Lisimaco si spiegano assai bene. Tolemeo Filadelfo, figlio di Tolemeo Sotere e di Berenice, destinato dal padre al trono a pregiudizio del figlio primogenito avuto da Euridice. Tolemeo Cerauno, trovava un amico naturale nel cognato Lisimaco, marito d'Arsinoe, figlia di Berenice; e quest'amicizia rinsaldò, sul principio appunto del suo regno, mercè il matrimonio con una figlia di Lisimaco, di nome anch'essa Arsinoe (1). Che se nell'occasione di queste nozze il Filadelfo riprese le vecchie relazioni strette nel 315 dal padre suo con Mileto, egli conciliava assai bene l'interesse che aveva atteggiandosi ad amico delle città greche col riguardo verso il signore di Mileto e della Ionia, il suo suocero e cognato Lisimaco, di cui era ormai, ben dice il Droysen (*Hist. de l'Hellénisme*, trad. franç. II p. 609, cfr. W. Hünerwadel *Forschungen zur Geschichte des Königs Lysimachos*, Zürich 1900, Diss. p. 97), quasi alleato.

Si pronunziò in occasione di questa rinnovata amicizia tra l'Egitto e i Milesî la parola symmachia; o solo proletticamente ve la riferirono i cittadini nel loro decreto del 262 circa, mettendo quei fatti del passato nella luce che meglio giovava agl'interessi del presente? L'una ipotesi è plausibile non meno dell'altra. Era infatti, se mai, un rinnovamento di quell'alleanza conclusa quando il popolo milesio aveva un padrone di cui essa doveva in qualche modo guarentire i diritti, e poteva benissimo quindi conciliarsi anche col dominio effettivo di Lisimaco. Ma può darsi altresì che le antiche relazioni amichevoli si riallacciassero

(1) Qui io avrei anche qualcosa a dire circa Filotera. Ma di questa 'regina' tratterò in altro contesto: e cercherò allora di additare la ragione (non recondita per vero) che ha indotto Callimaco a trasportarla in Enna e in Samotrace. Qui mi basterà avvertire che la dedica del popolo dei Milesî in onore della *βασίλισσα Φιλωτέρα βασιλέως Πτολεμαίου* potrebbe assai bene riferirsi al 285 circa e documentare l'amicizia fra Lisimaco e Tolemeo II e le relazioni cordiali allora rinnovate tra l'Egitto e Mileto. Altre ipotesi son certo possibili. Ma non è più possibile tenere quella iscrizione come documento del dominio tolemaico nella Ionia circa gli ultimi anni del regno di Antioco I (Beloch III 2 p. 271-273), perchè Filotera, come sappiamo ora da Callimaco, premorì ad Arsinoe Filadelfo (m. 270).

senza troppo precisare, perchè si sottintendeva che non importavano alcun onere effettivo nè per l'uno nè per l'altro contraente. Non si badava in queste cose tanto pel sottile tra Greci usi a pascersi assai volentieri di parole, per la bellezza delle frasi dimenticando la realtà delle cose. Un esempio alquanto comico di tale trascuratezza, che contrasta con la rigida precisione romana, l'abbiamo in Polibio (XXII 9) nel suo racconto d'una synodos acaica del 186. Allora, per rinnovare la vecchia alleanza coi Tolemei, si presentò agli Achei radunati, con una ambasceria acaica reduce dall'Egito, un legato di Tolemeo V Epifane. Ma, nel momento in cui stavano tutti concordemente per giurare, li fece rimanere di sasso la domanda semplicissima dello stratego acheo Aristone, quale era l'alleanza che si rinnovava, perchè di trattati coi Tolemei se n'eran conclusi parecchi e assai diversi; e non riuscirono tra tutti insieme, compreso il padre dello storico Polibio, Licorta, che era stato membro dell'ambasceria achea, a trovare una parola di risposta.

Comunque, dell'amicizia riallacciata sui primordî del regno di Tolemeo II, se anche non s'accompagnava col rinnovamento effettivo e consapevole d'un trattato, potè parere prova più valida delle parole d'un documento la donazione di territorio da lui fatta ai Milesî. La quale spetta, ho già detto, al 279/8. Infatti sotto *Ἀντήνωρ Ξενάρους*, stefaneforo nel 279/8, successore in quell'ufficio di Antioco Sotere, i fasti civici recano questa nota — la sola che nella parte a noi conservata vi compaia, oltre la notizia sulla libertà restituita nel 313/2 —: *ἐπὶ τούτου ἐδόθη ἡ χώρα τῶι δήμωι ὑπὸ τοῦ βασιλέως Πτολεμαίου*. Da ciò conclude il Rehm che tosto dopo il 280/79 le relazioni di Mileto con Antioco Sotere 'reissen jählings ab' (p. 263). E vede in queste espressioni la prima conferma documentale che Tolemeo II subito alla morte di Lisimaco (o fors'anche di Seleuco) aveva steso la mano alla terraferma dell'Asia Minore. In realtà che (prescindendo dalla Caria) qualche tratto sia pure piccolo della terraferma ionica Tolemeo possedesse poteva dirsi già accertato. Samo era già circa il 280 in possesso di lui (*IG*. XII 506 = Dittenberger *Sylloge*[2] 202: per la retta interpretazione della epigrafe cfr. Pozzi nelle "Memorie" di questa R. Accad. LXIII 1911/12 p. 323 n. 1): e con Samo è ovvio che fosse sua la perea samia: nulla almeno nei frammenti della grande iscrizione con-

tenente la storia della vertenza fra Samo e Priene (*Inschriften von Priene* 37) induce a credere che l'isola in questo periodo rimanesse priva de' suoi dominî nel continente.

In possesso di Samo e della sua perea e fors'anche fin d'allora — che non sappiamo di sicuro — di qualche parte della costa di Caria (Beloch III 2 p. 266 seg.), non è meraviglia che Tolemeo potesse donar territorio ai Milesî con cui aveva sempre nutrito relazioni amichevoli. Era anche il modo di regolare dignitosamente con Antioco Sotere, che aveva raffermata allora la sua autorità nell'Asia Minore, le controversie intorno ai confini. Quando infatti dopo i subbugli che tennero dietro alla morte di Seleuco, Antioco, assicurato il suo dominio in Siria, passò il Tauro e anche a nord del Tauro, così dicono in un decreto onorario gl'Iliensi, ristabilì la pace e allargò l'impero (*παραγενόμενος ἐπὶ τοὺς τόπους τοὺς ἐπὶ τάδε τοῦ Ταύρου μετὰ πάσης σπουδῆς καὶ φιλοτιμίας ἅμα καὶ ταῖς πόλεσιν τὴν εἰρήνην κατεσκεύασεν καὶ τὰ πράγματα καὶ τὴμ βασιλείαν εἰς μείζω καὶ λαμπροτέραν διάθεσιν ἀγήγοχε*, Dittenberger *OGI.* I 219); in quel tempo, è da credere, dovette concludersi un *modus vivendi* tra lui e Tolemeo Filadelfo in ordine ai possessi dal Lagide acquistati circa il tempo della battaglia di Corupedio. Furono, appunto, il 279 e il 278 gli anni in cui si combattè in Asia tra Antioco ed Antigono Gonata. Guerra, questa, di cui sappiamo poco (Memn. 16. 18 = *FHG.* III 535. Trog. *prol.* 24. Iustin. XXIV 1, 1). Ma ne sappiamo abbastanza per ricavare *ex silentio* dalle notizie in proposito che Tolemeo non v'ebbe parte. E la pace che la chiuse (278 o 277), a cui a buon diritto il Droysen riferisce la frase sopra citata della iscrizione di Ilio (*Hist. de l'Hell.* III p. 249 n. 2), segna, a giudicare appunto da quella epigrafe, un breve periodo di tranquillità e di speranza per le città greche dell'Asia Minore. Brevissimo, anzi. Chè passati in Asia nel 278/7 (Paus. X 23, 14), non importa qui determinare se prima o dopo la pace stessa, i Galli, si affrettarono a mettere a ferro e a fuoco i territorî delle città, comprese quelle della Eolide (Liv. XXXVIII 16): se pure le notizie che abbiamo d'un assalto ad Ilio per costituirsene una base fortificata (*δεόμενοι ἐρύματος*, Strab. XIII p. 594), qui riferite dal Droysen (III p. 184 n. 2) seguìto dall'Haussoullier (p. 81 seg.) e dallo Stähelin (*Geschichte der kleinas. Galater*[2] p. 8 n. 4), vadano

invece evidentemente collegate col fatto molto posteriore di cui è parola in Polyb. V 111 4 (Stähelin p. 36 n. 1); col passaggio cioè dei Galli Egosagi in Asia nel 218, attraverso l'Ellesponto, ad invito di Attalo I di Pergamo.

Ma, fatta pur la debita parte alla esagerazione adulatoria, la epigrafe d'Ilio rende assai difficile ammettere che proprio in quegli anni Tolemeo Filadelfo estendesse la sua autorità nella Ionia. E però, se Mileto nel 280/79 apparteneva ad Antioco, gli apparteneva egualmente nel 279/8, quando ebbe da Tolemeo il dono territoriale. Si trattava ad ogni modo d'un dono importante, come prova non tanto la iscrizione del 262 quanto la menzione speciale del fatto nella lista degli eponimi. Dove e che cosa era questo territorio che in quella lista è indicato quasi come territorio per eccellenza, *ἡ χώρα*? Suppone il Rehm (p. 200 seg.) che si trattasse del territorio di Miunte; e non è certo impossibile. Ma molto verisimile non sembra. E mentre può ammettersi senza difficoltà che nel III secolo Miunte dipendesse in qualche modo da Mileto (cfr. *Milet* III nr. 33 *e*, v. 12, dove il supplemento *Μυο*[*υσίων*] se non è sicuro, è almeno ingegnoso), improbabile è però che una delle tredici città ioniche quale appare ancora nel 289 Miunte (cfr. il citato decreto Dittenberger *Sylloge*² 189: *ἔδοξε Ἰώνων τῶι κοινῶι τῶν τρε*[*ισκαί*]*δεκα πόλεων*), fosse considerata come territorio di Mileto e designata senz'altro con le parole *ἡ χώρα*. Assai migliore è invece la ipotesi del Wilamowitz (" Gött. gel. Anzeiger „ 1914 p. 84): il quale osservando che nel decreto milesio del 262 al territorio donato si accenna con la frase *χώραν ἀποδιδούς*, " worin liegt, dass Milet nach seiner Meinung alte Ansprüche auf das Land hatte, das in der Eponymenliste den bestimmten Artikel trägt „, esclude che si tratti di guadagno fatto a spese di altri, e pensa piuttosto a demanio regio (*βασιλικὴ χώρα*) che, acquistato dai Persiani nel 494 in quel di Mileto, Tolemeo avrebbe restituito agli antichi possessori. Ipotesi certo assai attraente, se pur da accettarsi solo con una lieve modificazione; perchè la epigrafe del 262, stando al testo pubblicato dal Rehm, ha non *χώραν ἀποδιδούς*, ma *ἐπιδιδούς*. L'articolo dunque nella lista degli eponimi sta ad indicare non che era quello *il* territorio carpito ai Milesi da Dario ed ora restituito; ma *la χώρα βασιλική*, cioè *tutto* il demanio regio di Tolemeo Filadelfo sulla

costa ionica. Qualche distretto, io penso, appartenente alla distrutta Melia tra il promontorio di Micale ed Efeso, dove anche i Milesì avevano ottenuto possessi in occasione della remota guerra meliaca. Ivi essi possedevano un tempo, secondo la testimonianza del resto per sè sola non molto fededegna (ma confermata in parte dalle scoperte epigrafiche) del preteso Meandrio di Samo, Tebe e Marathesion (*Inschriften von Priene* 37, 57 seg.; cfr. per Tebe possesso milesio al nr. 363); ed ivi a una data non precisamente determinabile (fine del IV o principio del III sec., *Milet*, nr. 142), avevano concluso un trattato d'isopolitia con la minuscola Phygela, la quale invece, secondo la testimonianza concorde degli storici (*Inschriften von Priene* 37, 120 seg.), sarebbe stata attribuita in origine ai Samî. Posto ciò, si capisce benissimo come, in tutto o in parte, il demanio regio esistente in quella regione, donato forse da Lisimaco ad Arsinoe II, sia venuto in mano di Tolemeo insieme con Samo, e come il rassodarsi dell'autorità seleucidica nell'Asia Minore abbia indotto il Lagide ad alienare un territorio che poteva essergli contestato conciliando il proprio decoro col riguardo agli interessi di Mileto e alle pretese del signore di Mileto, Antioco. Riguardo che tanto più s'imponeva in quanto, finchè vigeva la potenza marittima di Antigono Gonata e durava la rivalità tra costui e il Seleucide, in Antioco poteva trovare Tolemeo un punto d'appoggio contro il tenace avversario della sua egemonia nelle Cicladi e in generale nell'Egeo. In questo senso Tolemeo è lodato nel decreto quale apportatore di pace a Mileto (*τὴν εἰρήνην παρασκευάζων τῶι δήμωι*), pel periodo anteriore, beninteso, ai torbidi che precedono immediatamente il decreto in onor suo; per l'appunto come, già vedemmo, nella iscrizione di Ilio si vanta quale apportatore di pace Antioco.

La conquista della Macedonia per parte d'Antigono, lo spostarsi verso la penisola balcanica del centro di gravità degli interessi di lui, che prima era piuttosto nelle isole e nelle sponde dell'Egeo, mutò la situazione e contribuì probabilmente ad affrettare la così detta prima guerra di Siria (c^{a} 274-270), inizio di una serie di lotte tra Seleucidi e Lagidi, che si protrassero finchè durò la potenza delle case di Seleuco e di Tolemeo. Anche dopo quella prima guerra un documento della lega delle città ioniche (*OGI.* 222) posteriore al 268, in cui, mentre si decretano ono-

ranze al re Antioco I, lo si prega a un tempo di assicurare alle città ioniche libertà, autonomia e democrazia (v. 15 segg.: [*πᾶσαν ἐπιμ*]*έλειαν ποιεῖσθαι τῶν πόλε*[*ων τῶν Ἰάδων ὅπως ἂν τὸ λοιπ*]*ὸν ἐλεύθεραι οὖσαι καὶ δημο*[*κρατούμεναι βεβαίως ἤδη πολι*]*τεύωνται κατὰ τοὺς πατρί*[*ους νόμους*]), mostra che la federazione ionica sussisteva tuttora sotto il suo dominio come, qualche tempo prima, sotto quello di Lisimaco. Certo in sè non è impossibile che la Ionia o le principali almeno delle città ioniche fossero state da Antioco perdute dopo il 280/79 e poi ricuperate di nuovo per riperderle, come vedremo, sullo scorcio del regno. Ma la ipotesi più semplice, e quindi quella a cui dobbiamo provvisoriamente attenerci, posto che essa spiega bene tutti i fatti noti, è che la terraferma della Ionia sia in massima rimasta in potere della casa di Seleuco dalla guerra con Lisimaco allo stremo del regno di Antioco Sotere; ipotesi confermata da quanto sappiamo o possiamo congetturare circa le vicende di Eritre (cfr. le mie osservazioni in questi "Atti" vol. XLVII 1911/12 p. 793 segg.). Del rimanente della terraferma ionica dobbiamo presumere sino a prova in contrario che seguisse le sorti Mileto; e certo il decreto su citato del *κοινόν* ionico fa ritenere che il Panionio, e Mileto con esso, fosse tuttora dopo il 268 sotto l'alto dominio dei Seleucidi. Non va però taciuto che di siffatto dominio manca tuttora una prova positiva. Onde la ipotesi che Mileto, occupata nella prima guerra di Siria, rimanesse per più di un decennio in mano di Tolemeo Filadelfo è, allo stato presente delle nostre informazioni, inverisimile, ma non è assurda. Anzi il solo indizio documentale che pareva si avesse del dominio seleucidico in Mileto tra il 280/79 e il 258, la iscrizione in onore d'una regina Apame che l'Haussoullier riteneva (*Milet* p. 60) la figlia d'Antioco I andata circa il 274 sposa al re Maga di Cirene, è venuto meno, assodato che quella iscrizione può almeno altrettanto bene riferirsi ad un'altra Apama, la consorte di Seleuco I (Beloch III 2, 272; Rehm p. 262).

3.

Venuto al potere nel marzo-aprile del 281, Antioco Sotere morì dopo 19 anni di regno, nel 262. Poco prima, nel 263 o 262, Eumene, successore a Pergamo di Filetero, nel tentativo di francarsi in libertà dal predominio siriaco, aveva vinto quel re in battaglia (Strab. XIII 624). Questa lotta scosse nell'Asia Minore l'autorità dei Seleucidi. Forse già prima della battaglia, per l'alleanza che avrebbe concluso con Eumene Tolemeo Filadelfo (Beloch *Gr. G.* III 1, 614 n. 1), o forse subito dopo, per l'effetto esiziale di quella sconfitta sul credito dei re siriaci, Mileto passò con Efeso ai Tolemei. Sappiamo peraltro che sul principio del suo regno Antioco II rivendicò Mileto a libertà abbattendone il 'tiranno' Timarco e n'ebbe in premio il titolo di Theos (App. *Syr.* 65, cfr. *OGI.* 226); e che questo Timarco era stato compagno alla defezione del figlio di Tolemeo dal padre (Trog. *prol.* 26); il quale figlio di Tolemeo, di nome anch'esso Tolemeo, comandava allora in Efeso il presidio egiziano (Athen. XII p. 593 *b*: *Πτολεμαῖος ὁ τὴν ἐν Ἐφέσῳ διέπων φρουρὰν υἱὸς ὢν τοῦ Φιλαδέλφου βασιλέως*), e fu poi ucciso colà nel sacrario di Artemide in una sollevazione dei mercenarî traci.

Qualche informazione nuova, sia pure scarsa, porgono su questi fatti le nuove iscrizioni milesie. E ne dirò brevemente, sebbene tutto quel che è essenziale sia stato già visto qui dal Rehm. — Con la presa di possesso della città per parte di Tolemeo Filadelfo si collega il comparire al 262/1 nella lista degli eponimi d'un personaggio dal nome egiziano, *Τάχως Γογγύλου*, un funzionario verisimilmente del re, la cui assunzione allo stefaneforato è tanto significativa quanto quella di Alessandro Magno nel 334/3 o di Antioco Sotere nel 280/79. Inoltre il successore di costui nell'eponimia *Πειθένους Θαρσαγόρα* è il proponente del decreto in onore di Tolemeo Filadelfo, che pertanto l'editore ha ben ragione di riferire al 262-260 circa. E il 'figlio' menzionato nella lettera di Tolemeo, il quale dice d'averne notizia della fedeltà dei Milesi, è per l'appunto il Tolemeo di Efeso. E Callicrate ivi pur menzionato è il figlio di Boisco, Samio, che

fu navarco tolemaico, come si sa da varie iscrizioni. Non è da tacere peraltro che di qui sorge a prima vista contro la data proposta dal Rehm una grave difficoltà che al Rehm è sfuggita, e su cui ha richiamato la mia attenzione il mio scolaro ed amico A. Rostagni. Infatti la dedica *ὑπὲρ βασιλέως Πτολεμαίου καὶ βασιλίσσης Ἀρσινόης* di *Καλλικράτης Βοΐσκου Σάμιος ναυαρχῶν* edita dal Breccia " Bulletin de la Soc. arch. d'Alexandrie „ n° 8 (1905) p. 110 sembra dimostrare definitivamente, come bene ha messo in luce W. Tarn nel suo eccellente saggio *Nesiarch and navarch* (" Journ. of hell. Studies „ XXXI 1911 p. 254 segg.), che Callicrate fu navarco prima di Patroclo, il quale com'è noto fu alla sua volta navarco negli anni della guerra di Cremonide. Ne seguirebbe che la iscrizione ove Callicrate è menzionato subito dopo il figlio di Tolemeo risale non al 262, sì agli anni all'incirca della prima guerra di Siria. Ma la difficoltà parmi lieve, messa a riscontro con gli indizî che ci riportano al 262. E anzitutto, che il navarco fosse allora il capo supremo di tutte le armate egiziane, un solo dunque, e stabile, non eletto per un'impresa singola o per un periodo di tempo determinato, è ipotesi del Tarn acuta sì, ma non tale che gli scarsi documenti conservati di quell'età ci permettano di dimostrarla. Mentre i documenti un po' posteriori non mi paiono favorirla molto, p. e. una iscrizione (*IG.* XII 3, 1291) ove [*Ἑρμάφιλο*]*ς Φιλοστράτου Ῥαύκιο*[*ς*] è detto *ἀποσ*[*ταλεὶς ὑ*]*πὸ τοῦ βασιλέως Πτολ*[*εμ*]*αίου* [*ναύαρ*]*χος καὶ στραταγὸς τᾶ*[*ς πό*]*λιος* (Tera), e men che mai le epigrafi ove il governatore di Cipro *Σέλευκος Βίθυος Ῥόδιος* ha titolo di *στρατηγὸς τῶν κατὰ Κύπρον καὶ ναύαρχος καὶ ἀρχιερεύς* (*Or. Gr. Inscr.* 151) o *στρατηγὸς καὶ ναύαρχος καὶ ἀρχιερεὺς τῶν κατὰ τὴν νῆσον* (*Or. Gr. I.* 155), per le quali può vedersi D. Cohen *De magistratibus Aegyptiis externas Lagidarum regni provincias administrantibus* ('s-Gravenhage, 1912 p. 32 seg.). Che se pur la ipotesi del Tarn sui navarchi è vera in tutto, non v'è nessuna difficoltà a pensare che, lasciata, forse per ragione d'età, la carica di navarco, il fedele Samio con titolo di stratego o altro simile rimanesse uno dei maggiori rappresentanti dell'autorità di Tolemeo in Samo o nella vicina paralia ionica. Men verisimile d'assai, parmi, benchè neppur questo sia assurdo, che Tolemeo *ὁ υἱός* fosse già in quelle regioni circa, poniamo, il 270 e poi, tornata Efeso ai Seleucidi, se ne allontanasse per

ripresentarvisi quando intorno al 262 la città fu ricuperata dai Tolemei; tanto men verisimile in quanto, se supponiamo che a Mileto toccasse la sorte stessa che ad Efeso, anche *Πειθένους Θαρσαγόρα*, il proponente del decreto ed eponimo del 261, avrebbe dovuto avere la stessa vicenda di potere e d'esilio di Tolemeo il figlio del re.

Rispetto al quale ultimo del resto assai bene ha visto il Rehm che il modo della menzione nella lettera e il tacersene nel decreto dà una confutazione documentale alla ipotesi del von Prott, del Wilhelm e del Beloch (III 2 p. 130 seg.) sulla identità di questo Tolemeo col Tolemeo coreggente del Filadelfo ricordato nei documenti egiziani tra il 267/6 e il 259/8. Sicchè era nel vero combattendo quella ipotesi nelle "Memorie" di questa Accademia il mio compianto discepolo E. Pozzi (t. LXIII p. 342 seg. Cfr. G. A. Levi "Atti" XXXIX 1903/4 p. 629 segg.). Il Tolemeo di Efeso può essere quindi soltanto un figlio spurio del Filadelfo; e il Tolemeo coreggente — non potendosi riprendere col Rehm la tesi che sia l'Evergete, privato poi a un certo punto, chi sa perchè, della coreggenza: siffatte coreggenze terminano, di regola, con la vita — deve ritenersi (lasciando altre congetture o troppo inverisimili o troppo ardite) un figlio primogenito di Tolemeo e di Arsinoe I premorto al padre, come io già da tempo ho sostenuto. E quando non si voglia ammettere una dimenticanza o una inesattezza nel testo dello scoliasta di Teocrito (XVII 128) che tace di questo Tolemeo tra i figli di Arsinoe e di Tolemeo Filadelfo, può correggersi senza difficoltà quel testo al modo che ho da lungo tempo suggerito nella nota citata di G. A. Levi.

Cade con ciò il *terminus ante quem* del 258/7, proposto da coloro che accettano la ipotesi ora sfatata, per la ribellione di Tolemeo, che precedette di poco, è da credere, la catastrofe del dominio tolemaico nella Ionia. Ma di non molto posteriore è quello che (lievemente correggendo il Rehm p. 303 n. 1) può ricavarsi dalla epigrafe sulla vendita di territorio fatta da Antioco II a Laodice (*OGI.* 225, integrata nella VI relazione su Mileto p. 36 in "Abhandl. der Berliner Akad." 1908). Infatti nella lettera al satrape Metrofane Antioco prescrive di registrare la vendita stessa in cinque stele, da deporre nel tempio di Atena in Ilio, in quello di Samotrace, nell'Artemisio di Efeso, nel

Didimeo di Mileto e nell'Artemisio di Sardi. E poichè quella vendita importa soprattutto per la casa reale di Siria e pei limiti della *βασιλικὴ χώρα*, è chiaro che i cinque tempî son tutti in territorio ove nell'atto in cui la lettera fu scritta s'estende il predominio seleucidico. E la lettera può approssimativamente datarsi. Dagli stessi ordini regi che vi son contenuti si ricava che è anteriore all'Audnaios, il terzo mese, del 60° anno dell'era seleucidica (253/2). Anteriore di qualche tempo, perchè il satrape Metrofane scrivendo per la esecuzione di quegli ordini data la propria lettera dal Daisios, l'ottavo mese: l'ottavo deve intendersi dell'anno 59° (254/3), il maggio all'incirca del 253. Dunque già allora Mileto era ricuperata ai Seleucidi. Da lungo tempo? Non sappiamo con sicurezza. Pel momento la ipotesi più plausibile è quella presentata dubitativamente dal Rehm (p. 304 n. 4), che la seconda lista degli stefanefori a noi conservata sia interrotta appunto, benchè posto non mancasse nella pietra, perchè si volle, come la seconda con la libertà ottenuta da Antigono, così cominciare la terza lista, smarrita, con l'anno della libertà ricuperata per opera d'Antioco, che sarebbe dunque il 259/8. Pertanto se anche il riacquisto della Ionia per parte di Antioco II si collega con la lotta tra la Macedonia e l'Egitto pel predominio delle Cicladi, non deve però raccostarsi al fatto di guerra che, a quanto pare nel 253, ne fece piegare le sorti a favore della Macedonia (cfr. le mie osservazioni nella " Riv. internaz. di scienze sociali „ IV 1894 p. 52 n. 3 e Pozzi Mem. cit. p. 336 segg.), la battaglia di Cos. Che se la data di quella battaglia non è sicurissima, sarebbe a ogni modo, penso, arbitrario trascurare gli indizî che la fanno collocare in quell'anno (cfr. anche Swoboda " Berliner phil. Woch. „ 1914 nr. 13 p. 401) e propendere col Rehm a rialzarne la data pel solo motivo che al 259/8 s'attribuisce in via congetturale il ricupero d'Efeso e di Mileto per parte d'Antioco. E a questo proposito è bene notare che la frase della nostra epigrafe con cui s'accenna a guerra navale attorno a Mileto, *τῶν ἐναντίων ἐπιπλευσάντων ἐπὶ τὴν πόλιν*, quanto e più che a un assalto macedonico, può riferirsi a un assalto dell'armata seleucidica o della rodia. Che i Rodii osassero assalire per mare i tolemaici e sapessero anche vincerli è noto dalla battaglia d'Efeso (Polyaen. V 18): battaglia, sia detto qui tra parentesi, con troppa sicurezza dal Niese (*Geschichte der*

griech. u. mak. Staaten II 135), seguìto dal Beloch (*Gr. G.* III 1, 618), riportata ai primi anni di Antioco II; e che avessero una guerra con Tolemeo Filadelfo è sicuro dalla cronica del tempio lindio edita dal Blinkenberg (C 99 seg.). Quanto poi all'essere nell'Egeo una armata siriaca, sebbene dimenticato in generale dai critici, può argomentarsi dalla iscrizione di Eritre, spettante appunto a questi anni, edita nella " Ἀθηνᾶ " XX (1908) p. 195, su cui v. questi " Atti " XLVII (1911/2) p. 799 segg.

***

Riassumo. Mileto ottenne da Alessandro Magno nel 334 una parziale autonomia, che le permise, circa il 314, sotto gli auspici del governatore di Caria e signore della città Asandro, di concludere un'alleanza con Tolemeo di Lago. Quest'alleanza le fruttò da Asandro, in omaggio al proclama liberale di Tolemeo, l'abolizione dei tributi e dei balzelli cui era sottoposta. Caduta poi in potere di Antigono nella primavera del 313, la città ne riebbe nominalmente autonomia e democrazia; rimanendo, in compenso, fedele a lui e al figlio Demetrio dal 313 al 295/4 almeno. Poco dopo passò a Lisimaco, che la tenne — il preteso dominio di Euridice par favola moderna — fino al 287. Ripresa allora da Demetrio Poliorcete, fu da questo principe riperduta assai presto. Lisimaco, che la riebbe, se fece sentire alla città poco fida con alquanta durezza la rinnovata signoria, permise però che riallacciasse le relazioni amichevoli con l'Egitto, circa il tempo in cui saliva sul trono egiziano Tolemeo Filadelfo di cui il signore di Tracia era amicissimo e quasi alleato.

La battaglia di Corupedio diede Mileto nel 282 a Seleuco, che, morendo assassinato, trasmise il possesso al figlio Antioco Sotere. Suddita, pare, ad Antioco, nel 279/8, in un momento in cui Tolemeo Filadelfo era legato con Antioco dalla comune avversione ad Antigono Gonata, la città ricevette da Tolemeo il dono del demanio regio che il Lagide poco prima aveva acquistato, forse presso la perea samia, sulla costa ionica. Poi, nel periodo in cui cominciarono a turbarsi le relazioni tra Tolemeo ed Antioco, ogni certezza durante parecchi anni manca. Certo nel 262 Mileto era in potere del Filadelfo, passata a lui, pare,

quell'anno stesso o poco prima. Nè risulta finora che il predominio seleucidico sulla terraferma ionica fosse mai scosso prima del 263/2, prima cioè che insorgesse contro Antioco Cumene di Pergamo.

Questo in breve ciò che sulla storia di Mileto da Alessandro alla morte di Antioco Sotere può dirsi integrando il già noto coi documenti nuovi. Poco, purtroppo. Ma se ne delinea sempre meglio il quadro delle lotte in cui le città greche, in parte assillate dalla brama d'autonomia, in parte trascinate dalle rivalità tra i diadochi, sciupavano le forze proprie e quelle dei loro signori; e preparavano l'asservimento di tutti al dominio straniero.

I figli della imperatrice Fausta.

Nota di ALBERTO OLIVETTI.

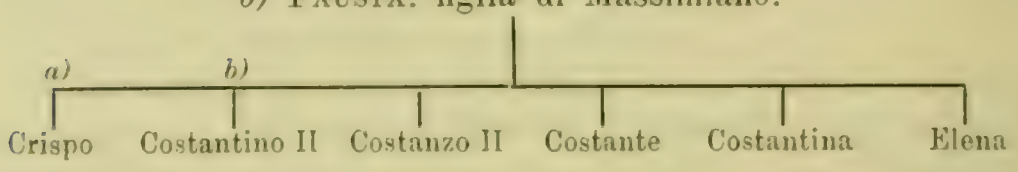
Una delle questioni più singolari, connesse con la storia dei figli di Costantino, è quella che riguarda la personalità della madre di questi principi.

Su tale " ricerca della maternità „ esiste ormai una piccola letteratura ed io riassumerò, con una certa larghezza, le trattazioni degli studiosi che mi hanno preceduto, prima di spiegare perchè dissenta dalle teorie innovatrici recentemente svolte e sia condotto a sostenere un'opinione, diciamo così, conservatrice.

Fino a una trentina di anni fa tutti gli storici del basso Impero, dal Tillemont al Duruy, dal De Broglie al Burckhardt, accettavano senza discussione la genealogia tradizionale di Costantino, quale è data dal seguente prospetto:

COSTANTINO

a) Minervina, concubina,
b) Fausta, figlia di Massimiano.



Nessun dubbio esisteva circa la nascita di Crispo da Minervina ritenuta prima moglie legittima, poi, più ragionevolmente, concubina di Costantino. E nessun dubbio esiste nemmeno ora. Come osservò giustamente il Ferrero (1), ci dànno

(1) *Mogli e figli di Costantino*, " Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino „, XXXIII (1897-8), p. 376 segg.

sicuro affidamento su questo punto i passi dell'Epitome *de Caesaribus* (1) e di Zosimo (2), ed è pure probabile che Crispo nascesse assai prima del matrimonio di Costantino e di Fausta (307), dal momento che lo troviamo a combattere contro i Franchi nel 320 e lo troviamo già padre nel 322 (3). Quanto alla madre degli altri tre figli di Costantino, passi di storici ed iscrizioni — che vedremo più tardi — affermavano esser stata Fausta. Unica voce discorde era quella di Zosimo. Egli infatti, dopo aver riferita la notizia della morte di Costantino, prosegue: *διαδεξαμένων δὲ τὴν βασιλείαν τῶν αὐτοῦ παίδων ὄντων τριῶν (ἐτέχθησαν δὲ οὗτοι οὐκ ἀπὸ Φαύστης τῆς τοῦ Ἡρκουλίου Μαξιμιανοῦ θυγατρός, ἀλλ' ἐξ ἄλλης, ᾗ μοιχείας ἐπαγαγὼν μέμψιν ἀπέκτεινεν) κτλ.* (4). Però la fama di storico oscuro e confusionario attribuita a Zosimo fece sì che questa notizia non fosse presa troppo sul serio.

Le cose erano a questo punto, quando nel X° volume del *Corpus Inscriptionum Latinarum* (N° 678) comparve una iscrizione trovata a Sorrento e conservata ancora in quel Museo (5). L'iscrizione era mutila: però si leggevano chiaramente queste parole:

PIISSIMAE AC VENERAVI
LI DN FAVSTAE AVG
. . . . . .
VXORI D N MAXIMI
. . . . .
VICTORIS AVG
CONSTANTINI
/ / / / / / / / / / DDD NNN
. . . . . CONSTANTINI
CONSTANTI BAEA
TISSIMORUM . . . . . .
. . S P. S . . . . . OR

(1) 41, 4: *filiumque suum Crispum nomine, ex Minervina concubina susceptum...*

(2) Zosimo, II 20, 2: *Κωνσταντῖνος μὲν καθίστησι Καίσαρα Κρίσπον ἐκ παλλακῆς αὐτῷ γεγονότα Μινερβίνης ὄνομα.*

(3) *Cod. Theod.*, IX, 38, 1.

(4) Zosimo, II, 39, 1.

(5) Riprodotta in Dessau, *Inscr. Lat. sel.*, I, 710.

Il Mommsen, che pubblicò tale iscrizione, lesse facilmente al r. 2 la parola *Faustae* e al r. 3 la parola *uxori* che erano state erase, forse dopo la tragica morte dell'imperatrice. Al r. 5, dove gli parve che della parola primitiva si vedesse ancora la lettera *o* completò *novercae* e al r. 7 lesse, in principio, la parola *Crispi* supponendo giustamente che, come il nome di Fausta, così fosse fatto sparire il nome del primogenito di Costantino, dopo la fosca tragedia del 326. Completò poi la lacuna alla fine del r. 9 con la parola *Caesarum* e lesse al r. 10: *res p(ublica) Surrentinor(um)*. Il Mommsen, colpito naturalmente dal titolo di *noverca* dato a Fausta, non soltanto rispetto a Crispo, ma anche rispetto a Costantino II e a Costanzo II, i quali fino allora erano ritenuti concordemente figli legittimi della moglie di Costantino, fu condotto a ripensare al passo di Zosimo, fino allora trascurato, e a trovare nella iscrizione una conferma di questo. E per spiegare la condizione giuridica di Fausta rispetto ai figli di Costantino generati da un'altra donna, rievocò il precedente di Valeria, moglie dell'imperatore Galerio, la quale, priva di prole, adottò Candidiano procreato al marito da un'altra donna.

Fin qui il Mommsen. Però dei passi degli scrittori, che parlavano della prole di Costantino uno almeno pareva non potesse venir trascurato tanto facilmente: il passo di Giuliano, il quale, nel panegirico primo di Costanzo accenna a chiari termini alla madre dell'imperatore (1) e, dopo averla paragonata a Parisatide che fu figlia, sorella, madre, moglie di re, dice che il caso della madre di Costanzo fu anche più singolare, perchè mentre la condizione di quella fu facilitata dal fatto che i Persiani potevano sposare le loro sorelle, questa, pur seguendo le pure costumanze romane, potè essere anch'essa figlia, sorella, moglie di imperatori e madre non di uno solo, ma di parecchi. « Dei quali — aggiunge Giuliano — uno aiutò il padre nella guerra contro i tiranni; l'altro, dopo aver combattuto con le armi contro i Geti, ottenne la pace; il terzo rese inaccessibile il proprio territorio ai nemici, combattendo egli stesso più volte contro di loro finchè questi, poco tempo dopo, si rivoltarono

(1) *Opera* ed. Hertlein, *oratio*, I, 9 B-C.

contro di lui, facendogli pagare il fio delle sue imprese „. Quali si siano i figli di Costantino, ai quali si accenna con queste parole, appare evidente e inconfutabile che la " figlia, moglie, sorella, madre... di imperatori non possa essere che Fausta, figlia di Massimiano, moglie di Costantino, sorella di Massenzio, madre di Costantino II, Costanzo e Costante „. E si osservi che chi scrive è un membro della famiglia imperiale: pareva molto strano che egli avesse potuto far confusioni in fatti, che dovevano, al contrario, essergli notissimi.

Dopo la pubblicazione dell'iscrizione sorrentina lo Schiller esaminava la questione in una breve nota (1) e, dopo aver ricordato tanto il passo di Zosimo che l'iscrizione, concludeva: " La notizia di Zosimo è però isolata e l'integrazione del Mommsen non è tanto sicura che si possa, in base a quella, risolvere la questione. Singolare è però che Fausta sia rimasta quasi per 8 anni senza figli, se fu il suo primo figlio Costantino II che è nato nel 315/6. Poco dopo la vittoria su Massenzio un panegirista (IX, 26) dice: *Et adhuc speretur futura numerosior posteritas*, Giuliano all'incontro cita Fausta come la vera madre „. Le riserve dello Schiller sono più che giustificate: priva di fondamento è invece l'osservazione circa il lungo tempo trascorso tra il matrimonio di Costantino e la nascita del suo primo figlio: non si potrebbero citare a diecine gli esempi di figli nati dopo 8 e magari dopo 10 o 12 anni dalla celebrazione delle nozze?

La questione fu esaminata poi *ex professo* da E. Ferrero nella nota già citata sulle *Mogli e figli di Costantino*. Il Ferrero cita il passo di Zosimo e quello di Giuliano e si trattiene poi sull'iscrizione pubblicata dal Mommsen. Accetta pienamente le conclusioni di quest'ultimo e osserva come veramente la condizione giuridica dei figli di Costantino dovesse essere quella di " spurii „ essendo nati da un concubinato, durante il matrimonio del padre. Ma — opina il Ferrero — la condizione di essi — almeno abusivamente — sarà stata quella di " liberi naturales „ nonostante la legge di Costantino del 326, nella quale si proibiva di tenere una concubina durante il matrimonio (2). Il Ferrero spiega poi il passo di Giuliano con questa

(1) *Geschichte der röm. Kaiserzeit*, II, p. 234, n. 5.
(2) *Cod. Theod.*, 6, 2.

ipotesi, che, ufficialmente, Fausta sia stata considerata madre di tutti i figli di Costantino e che Giuliano, scrivendo il panegirico di Costanzo, abbia dovuto seguire il linguaggio ufficiale e non abbia potuto preoccuparsi della nascita illegittima dei suoi imperiali cugini. Pure emanazione del linguaggio ufficiale sarebbero per il Ferrero le iscrizioni pubblicate nel *C. I. L.* II 4742, 4844, 6209 III 3705, 13392 III 5207, 5208 e altre, nelle quali Costanzo e i fratelli appaiono designati quali *nipoti di Massimiano*: il che è quanto dire figli di Fausta. E qui vien fatto al Ferrero di domandarsi come mai nella iscrizione sorrentina, che pure è di carattere ufficiale, Fausta sia detta *noverca Caesarum* anzichè *genetrix Caesarum*. Il Ferrero suppone che l'iscrizione, la quale, essendo posteriore alla elevazione di Costanzo a Cesare e anteriore alla morte di Crispo, si può ragionevolmente datare tra il novembre 323 e la metà del 326, sia stata dedicata all'imperatrice prima che essa avesse ufficialmente adottati i figli di Costantino. Questo spiegherebbe come per Crispo non ricorra mai la qualifica di *nipote di Massimiano*. E osservando come questo titolo, per i figli di Costantino ancora Cesari, non ricorra che due sole volte (1) suppone che esso sia stato interrotto dopo la morte di Fausta e non sia stato ripreso che quando i figli divennero Augusti.

Una nuova ipotesi sulla discendenza di Costantino, esposta dal Seeck in uno studio intitolato *Zu den Festmünzen Constantins und seiner Familie* (2), fu poi da lui ripetuta e riconfermata in tutti gli articoli della " Real Enc. „ che riguardano la famiglia di Costantino e, più recentemente, nel quarto volume della sua *Geschichte des Untergangs der antiken Welt* (3). Il Seeck, osservando che Costanzo, nato il 7 agosto 317 (4),

(1) *C. I. L.*, IV, 5207, 5208.

(2) " Zeitschrift für Numismatik „, XXI (1898), p. 17-65.

(3) Appendice, pag. 377.

(4) Il giorno e il mese di tale data si desumono dai fasti di Filocalo (*C. I. L.*, I, 1², p. 268 — VII ID. AVG. N. CONSTANTII). L'anno si ricava dai dati di Ammiano Marcellino (XXI 15, 3) e di Eutropio (X 15, 2). — In queste autorevoli fonti si legge infatti che Costanzo morì a 44 anni compiuti. Siccome la morte di Costanzo avvenne il 3 novembre 361 siamo ricondotti precisamente al 317.

non poteva esser stato generato dalla stessa donna, che aveva dato alla luce Costantino II, del quale l'epitome *de Caesaribus* e Zosimo ci dicono che fosse nato " pochi giorni „ prima della sua elevazione a Cesare avvenuta il 1° marzo 317, giunge a questa conclusione: Costantino II è figlio illegittimo di Costantino il grande ed è nato probabilmente da una donna che l'imperatore conobbe ad Arelate nel 316: Costanzo invece è il primo legittimo di Fausta. Quanto all'iscrizione di Sorrento egli così la spiega: Fausta, come matrigna di Crispo e di Costantino II, fu per sette anni designata quale *noverca Caesarum*: non vi è nulla di strano che ricorra per lei tale appellativo pochi giorni dopo l'assunzione a Cesare del suo primo figlio legittimo " in una remota città della Campania „. Nel passo di Giuliano il Seeck non trova che la conferma della nascita di Costanzo da Fausta, dimenticando che Giuliano accenna, con ogni probabilità, anche a Crispo e lo pone tra i figli di Fausta: quindi la sua testimonianza, nonostante la sua stretta parentela con la famiglia imperiale, non ci può servire a sostenere nè la legittimità, nè la illegittimità della nascita di Costanzo da Fausta. Il Seeck cita inoltre le fonti nelle quali Costanzo appare come " nipote di Massimiano „ cioè le epigrafi già ricordate e tre passi di Atanasio (1).

Alle osservazioni contenute nell'articolo del Seeck rispose nuovamente il Ferrero (2). Egli osserva che non si possono prendere alla lettera i " pochi giorni „ che Zosimo e l'epitome *de Caesaribus* dicono essere trascorsi tra la nascita di Costantino II e la sua elezione a Cesare e che perciò scompare la impossibilità che una stessa donna abbia generato Costantino II e Costanzo. Del resto il Seeck, per non cadere in una difficoltà — diciamo così — fisiologica, incappa in un'altra difficoltà fisiologica ancora più grave, perchè, supponendo Costantino II nato da una donna di Arelate nel febbraio 317 lo deve supporre concepito, al più tardi, nel giugno o nel luglio 317, mentre noi sappiamo che Costantino non si trovò ad Arelate che nel-

(1) *De synodis* 18. — *Historia Arian. ad Monachos* 44-64.

(2) *Ancora dei figli di Costantino*, negli " Atti dell'Accad. Reale delle Scienze di Torino „, XXXIV (1898-9), p. 131 segg.

l'agosto 316. Quanto alla famosa iscrizione, il Ferrero trova strano che si chiami " remota città " un municipio della Campania quale era Sorrento, posto a poca distanza da Roma, che era ancora, almeno ufficialmente, la capitale dell'impero. Conclude riaffermando la sua opinione: che gli ultimi tre figli di Costantino, e probabilmente anche le figlie, siano nati da una stessa donna, concubina dell'imperatore.

Come si vede, dopo questi ultimi studi, la *vexata quaestio* della intiera e piena legittimità di Costantino II, di Costanzo e di Costante è lungi dall'esser risolta.

Scartiamo intanto l'ipotesi del Seeck. È una teoria, che vorrebbe essere conciliativa ed è invece priva di ogni fondamento. Le fonti, che, secondo il Seeck, provano la nascita di Costanzo da Fausta, attestano non meno chiaramente la completa legittimità di Costantino II. Abbiamo già osservato come dal passo di Giuliano non si possa ricavare alcuna esatta informazione nè in un senso, nè nell'altro e non sappiamo neppure ora risolvere la questione, già prospettata dal Tillemont, sull'incongruenza che Giuliano commette assegnando, come figlio, a Fausta anche Crispo nato notoriamente da una concubina (1). Ma, in ogni modo, il panegirista non fa alcuna differenza tra Costantino II e Costanzo II: quindi, dato e non concesso che le parole di Giuliano abbiano un qualche valore, non si potrà accettare metà della sua testimonianza e respingere l'altra metà. Lo stesso si dica delle iscrizioni: il titolo di *nepos Maximiani* che il Seeck ammette solo per Costanzo, appare invece anche per Costantino II (2). Anche il mezzo escogitato dall'illustre storico tedesco per spiegare come mai Faûsta venga detta *noverca* anche di Costanzo è piuttosto puerile e le osservazioni del Ferrero, a questo riguardo, sono più che ragionevoli. Ed è strano che il Seeck, ritornando sullo stesso argomento a di-

(1) A Crispo allude chiaramente Giuliano *Or.* I 90, con queste parole: *ὧν* (cioè: dei figli di Fausta) *ὁ μέν τις τῷ πατρὶ συγκατειργάσατο τὸν πρὸς τοὺς τυράννους πόλεμον.*

(2) *C. I. L.*, III, 5207: *D. N. Fl. Cl. Constantino* | *Nobilissimo Caes* | *Filio D. N. Constan* | *tini maximi victori* | *osissimi semper Aug* | *Nepoti M. Aureli Ma* | *ximiani* etc.

stanza di 13 anni (1) mostri di non conoscere e, perciò, non si curi di ribattere le obiezioni mossegli dal Ferrero.

Resta dunque l'altra ipotesi, più radicale, del Mommsen e del Ferrero. Osserviamo intanto come neppure il Ferrero abbia risolta in modo soddisfacente la difficoltà che ci presenta il passo di Giuliano. Egli opina che anche Crispo sia stato adottato da Fausta e possa perciò esser stato designato, nel linguaggio ufficiale, come figlio legittimo di questa imperatrice. Ma siccome nella iscrizione sorrentina Fausta appare certamente indicata come *noverca* di Crispo e siccome nelle iscrizioni di questo principe non compare mai il titolo di *Nepos Maximiani* dovremmo ammettere una adozione avvenuta nell'ultimo anno della vita di Crispo, cosa che ci apparisce quanto mai strana e inverosimile. E del resto ci potremmo domandare se, *a priori*, non ci sembrerebbe strano che l'adozione da parte di Fausta degli altri figli di Costantino, fosse avvenuta solo dopo il 324, come vorrebbe il Ferrero. Dato e non concesso che a tale formalità giuridica si fosse creduto opportuno di ricorrere, per salvare le apparenze, perchè si sarebbe atteso tanto tempo?

Ma esaminiamo meglio ora i due argomenti veramente positivi posti avanti dal Mommsen e dal Ferrero: il passo di Zosimo e l'iscrizione sorrentina. Quanto al passo di Zosimo, il Mendelssohn suppone, nella sua eccellente edizione, pag. 97, che della frase incriminata: " *ἐτέχθησαν δὲ οὗτοι* [*οὐκ*] *ἀπὸ Φαύστης τῆς τοῦ Ἕρκ. Μαξιμ. θυγατρὸς* [*ἀλλ' ἐξ ἄλλης*] *ᾗ μοιχείας ἐπαγαγὼν μέμψιν ἀπέκτεινεν*, siano state interpolate le parole poste tra parentesi e che quindi anche da Zosimo venga confermata la genealogia tradizionale. Ma anche senza di ciò è chiaro che quel passo, da solo, non ha autorità sufficiente per scalzare la opinione tradizionale.

Rimane la iscrizione. Mi preme di far notare che il Mommsen lasciò lacunoso il principio del r. 6, subito dopo la parola *novercae*. Ora esaminando attentamente questo punto dell'iscrizione credo di essere nel vero, affermando che questo spazio si può

---

(1) L'articolo citato fu pubblicato nel 1898: il IV volume della " Geschichte „ è del 1911.

completare con le parole *et matri*. Le traccie dell'E e del T al principio del rigo sono evidenti e, sia pure con qualche difficoltà, si riconoscono anche le quattro gambe della M. Il supplemento che propongo, risponde pienamente anche alla logica, la quale non ammette che si possano su un documento ufficiale chiamare figliastri di Fausta quegli stessi personaggi che su altre iscrizioni vengono indicati come nipoti di Massimiano cioè come figli di Fausta.

Non saprei vedere del resto in qual modo si possa più ragionevolmente completare la lacuna. Finchè, dunque, non mi siano state portate forti ragioni contro questa mia congettura e non mi sia stato dimostrato che l'intiera iscrizione non si possa leggere nel modo seguente:

PIISSIMAE AC VENERAVI
LI D N FAVSTAE AVG
. . . . . .
VXORI DN MAXIMI
. . . . .
VICTORIS AVG
CONSTANTINI nOvercae
ET Matri DDD NNN
crispi CONSTANTINI
CONSTANTI BAEA
TISSIMORVM caesarum
re S P. SurrentinOR

io non mi persuaderò che l'iscrizione sorrentina sia argomento che basti per farci respingere la genealogia tradizionale.

Ma non voglio tacere un altro argomento che mi pare assai efficace, contro la teoria del Mommsen e del Ferrero. Come già abbiamo ricordato, Costantino II fu creato Cesare a pochi giorni di età insieme a Crispo, laddove Licinio, collega nell'impero a Costantino, non elesse contemporaneamente che un solo Cesare: il figlio Liciniano. Ora non si potrebbe spiegare questa nomina tanto affrettata di Costantino II col desiderio, molto comprensibile in Costantino, di dar subito una dignità al suo primo figlio legittimo? Si potrebbe obiettare che

Costantino, avendo due figli, stimò opportuno di eleggerli tutti e due Cesari, senza tener conto della loro legittimità. Ma, quando vinse Licinio, egli aveva pure due figli non insigniti di tale titolo: eppure non elesse Cesare che il solo Costanzo. E Costante non sarà eletto Cesare, neppure dopo la morte di Crispo. Ciò significa, a parer mio, che la nomina di Costantino II ebbe un valore eccezionale.

Possiamo quindi, dopo quanto siamo venuti fin qui esponendo, concludere, contro le teorie innovatrici del Mommsen, del Ferrero e del Seeck, che non esiste alcuna seria ragione per negare che Fausta fu la legittima madre non solo di Costanzo II, del quale più particolarmente ci occupiamo, ma anche di Costantino II e di Costante.

L'Accademico Segretario.
RODOLFO RENIER.

INDICE

DEL VOLUME XLIX

Elenco degli Accademici residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 Dicembre 1913 . . . . . *Pag.* III

Pubblicazioni periodiche ricevute dall'Accademia dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1913 . . . . . „ XXV

Adunanze.

Sunti degli Atti verbali delle Adunanze a Classi Unite . *Pag.* 315, 370, 1210.

Sunti degli Atti verbali delle adunanze della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . „ 1, 81, 177, 267, 382, 399, 453. 575, 623, 699, 755, 823, 957, 1081, 1125.

Sunti degli Atti verbali delle adunanze della Classe di scienze morali, storiche e filologiche . . . . . „ 55, 172, 263, 304, 375, 452, 508, 599, 640, 727, 803, 879, 1016, 1212.

Elezioni:

Elezione del Socio Tesoriere . . . . . „ 315

— del rappresentante l'Accademia nel Consiglio amministrativo del Consorzio Universitario. . . . . „ 1212

Elezioni a cariche accademiche di Soci della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

— del Segretario di Classe . . . . . „ 3

— del Direttore di Classe . . . . . „ 454

— di un Socio nella Commissione per la biblioteca . . „ 454

Elezioni a cariche accademiche di Soci della Classe di scienze morali, storiche e filologiche:
— di due Soci a delegati nel Consiglio di Amministrazione dell'Accademia . . . . . *Pag.* 472

Onoranze a:
Guccia (Gio. Batta) . . . . . „ 1081
Sobrero (Ascanio) . . . . . „ 1210

Premio Bressa:
Relazione della 2ª Giunta per il XVIII premio (1909-1912) . „ 317
Conferimento del premio . . . . . „ 370
Nomina della 1ª Giunta per il XIX premio (1911-1914) . „ 371

Premio di fondazione Gautieri:
Relazione della Commissione dei premi Gautieri, triennio 1910-1912 (Storia) . . . . . „ 327
Conferimento del premio . . . . . „ 371
Avviso pel premio del triennio 1911-1913 (Letteratura) . „ 397
Nomina della Commissione dei premi Gautieri, triennio 1911-1913 . . . . . „ 452

Premio di fondazione Pollini:
Rinnovazione del bando . . . . . „ 265
Schiarimenti sulle disposizioni del Concorso . . . . „ 264

Albenga (Giuseppe) — Su di alcune teorie approssimate della lastra piana . . . . . „ 150
— La cerchiatura delle condotte forzate . . . . . „ 333
Albertario (Emilio). — Nuove osservazioni sulla trasmissibilità del " iudicium operarum „ dell'erede estraneo . . . . „ 728
Allievo (Giuseppe). — V. Boselli (P.).
Baudi di Vesme (Alessandro). — Baldassare Mathieu, pittore di Anversa (Con una tavola) . . . . . „ 1018
Bompiani (E.) — Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica . . . . . „ 83
Boselli (P.). — Commemora il defunto Socio Giuseppe Allievo . „ 55
Bottasso (Matteo). — Sulla determinazione del tasso di una rendita temporanea, variabile e continua . . . . . „ 268
— Sopra alcune estensioni dei teoremi di Guldino . . . . „ 576

Buraggi (Gian Carlo) — I Giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento. — I. – Signorino Omodei . . . *Pag.* 57
— I Giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento. — II. – Giacomino da San Giorgio . . . . . „ 510
Camerano (Lorenzo). — Osservazioni intorno al lacrimale e al nasale bipartiti nel Camoscio . . . . . „ 700
— Alberto Günther – Commemorazione . . . . . „ 825
— Osservazioni intorno alla mucosa palatina del Camoscio delle Alpi (Con una tavola) . . . . . „ 1118
Casale (Luigi) e Casale-Sacchi (Maria). — Su alcuni aminoazocomposti . . . . . „ 1199
Charrier (Gaetano) e Casale (Luigi). — Sugli ortoossiazocomposti derivanti dall'α-naftol . . . . . „ 477
Cherubino (Salvatore). — Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè e sui loro moduli algebrici „ 705
Chinaglia (Leopoldo). — Contributo allo studio delle anomalie dei Lumbricidi . . . . . „ 195
Cipolla (C.). — La resistenza dei Bresciani contro Enrico VII giudicata a Firenze . . . . . „ 310
— Sulle tradizioni anti-bonifaciane rispetto a Guido da Montefeltro e alla guerra dei Colonna . . . . . „ 805
— La data della morte di Dante secondo Ferreto dei Ferreti . „ 1214
Colomba (Luigi). — Speziaite, nuovo anfibolo di Traversella „ 625
Colonnetti (Gustavo) — L'estensimetro di Cambridge . . „ 135
Cortese (Adele). — Le origini di Taranto . . . . . „ 1037
Costanzi (Vincenzo). — *Ζεὺς Ἄφριος* e il nome *Ἀφροδίτη* . „ 905
Debenedetti (Santorre) — Due ballate del " Sollazzo „ di Simone Prudenzani . . . . . „ 65
Delgrosso (Mario). — Sopra alcuni carbonati di Traversella . „ 1106
De Sanctis (G.) e Ruffini (F.). — Relazione della Commissione dei Premi Gautieri, triennio 1910-1912 (Storia) . . . „ 327
— Note di epigrafia ellenistica . . . . . „ 680
— Contributi alla storia dell'Impero Seleucideo . . . „ 1220
Dezani (S.). — Ricerche sulla tossicità del succo spremuto da semi germinanti . . . . . „ 425
D'Ovidio (E.). — Eletto alla carica triennale di Direttore della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . „ 454
— Nominato rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del Consorzio Universitario . . . . . „ 1211

Einaudi (Luigi) — Relazione intorno alla Memoria del Prof. Carlo Contessa, intitolata: *Aspirazioni commerciali intrecciate ad alleanze politiche della Casa di Savoia coll'Inghilterra nei secoli XVII e XVIII* . . . . . *Pag.* 399, 173
— Relazione sulla Memoria del Prof. Giuseppe Prato, *Un capitolo della vita di Giovanni Law* . . . . . „ 952
— Eletto alla carica di Tesoriere . . . . . „ 315
— Esposizione finanziaria del passato esercizio 1913, bilancio preventivo per l'anno 1914 e gestione dei lasciti Bressa, Gautieri e Vallauri . . . . . „ 1211
Favaro (Giuseppe A.). — Istrumento dei passaggi Heyde del Gabinetto di Geodesia della R. Università, con prefazione del Socio professore N. Jadanza . . . . . „ 1162
Ferrabino (Aldo). — Ancora Cirene mitica . . . . . „ 1063
Ferreri (Giulio). — Su alcuni eteri di naftilen-n-ossifeniltriazoli „ 497
Fiorini (Vittorio). — Gli è conferito il premio Bressa (1909-1912) „ 370
— Ringrazia pel premio conferitogli . . . . . „ 452
Foà (Carlo). — Nuove ricerche sulla funzione della ghiandola pineale „ 859
Foà (Pio). — Relazione sulla Memoria del Prof. Dr. Ferruccio Vanzetti: *Meningo-encefalite sifilitica sperimentale* . . . „ 170
— Relazione sulla Memoria del Dott. Mario Sapegno, *Contributo all'istologia normale e patologica del fegato* . . . . . „ 1013
Fraccaro (Plinio). — La procedura del voto nei comizi tributi romani . . . . . „ 600
Fubini (Guido). — Definizione proiettivo-differenziale di una superficie . . . . . „ 786
Fusari (Romeo). — Relazione sulla Memoria del Dr Alfonso Bovero, *Sulla fine struttura e sulle connessioni del ganglio vestibolare del nervo acustico* . . . . . „ 261
Gastaldi (Enrico). — Cenni sopra alcuni minerali e roccie della Cina . . . . . „ 415
Gola (Giuseppe). — Epatiche del Kashmir raccolte dalla Spedizione Piacenza (con una tavola) . . . . . „ 757
Guareschi (Icilio) — Ricerca dei bromuri in presenza dei solfocianati e dei ferrocianuri; azione dell'acido cromico sul bromuro di cianogeno; Nota VI . . . . . „ 15
— Sulla ricerca dei gas e dei vapori bromurati; Nota VII . „ 401
— Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con $2H^2O$; Nota I . . . . . „ 455

Guareschi (Icilio). — Nuove ricerche sui bromuri metallici — Nota VIII . . . . . *Pag.* 834

— Cenni storici sulla scoperta della sensibilità dei sali d'argento alla luce . . . . . „ 1083

Jadanza (Nicodemo) — Relazione sulla Memoria del Dr. G. A. Favaro: *Declinazioni di 121 stelle di riferimento per il Catalogo Astrofotografico di Catania* (Zona da + 46° a + 48°) *osservate al Cerchio meridiano Reichenbach di Torino* . . . . . „ 168

— V. Favaro (G. A.).

Laura (Ernesto) — Sopra le deformazioni per distorsione dei solidi elastici, isotropi di rivoluzione . . . . . „ 32

Levi (Attilio). — Etimologie piemontesi . . . . . „ 532

Manacorda (Giuseppe). — Un testo di grammatica latino-veneta del secolo XIII . . . . . „ 689

Mattirolo (Oreste). — Comunica lo scambio attuatosi coll'Università di Sassari dei materiali dell'erbario Re, *Flora Segusina* e *Flora Torinese*, coi doppi della *Flora Sardoa* del Moris . „ 624

— Relazione sulla Memoria presentata dal Professore Achille Terracciano dal titolo: *La "Flora Sardoa" di Michele Antonio Plazza redatta sui suoi manoscritti* . . . . . „ 637

— Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. Giuseppe Gola dal titolo: *Epatiche della Regione del Kenia* (Africa orientale) . „ 873

— Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. Enrico Mussa dal titolo: *La Flora dell' Agro Torinese dopo i lavori di J. B. Balbis e di G. F. Re e considerazioni sull'indigenato di talune specie* „ 875

Merlo (Clemente). — Note di fonetica italiana meridionale . „ 881

Naccari (A.). — Relazione della seconda Giunta per il XVIII premio Bressa . . . . . „ 317

Negri (Giovanni). — Le unità ecologiche fondamentali in Fitogeografia: Nota I^a e II^a 1089, 1174

Neri (Ferdinando). — La canzone di quattro rime . . . . „ 305

Olivetti (A.). — I figli dell'imperatrice Fausta . . . . . „ 1242

Parona (C. F.). — Edoardo Suess. — Cenni commemorativi . „ 959

Passamonti (Eugenio). — Un memoriale inedito di Prospero Balbo nel dicembre del 1799 . . . . . „ 912

Peano (G.) — Relazione sulla Memoria del Dr. Vincenzo Mago: *Teoria degli ordini* . . . . . „ 169

Pensa (Angelo). — Sulla risoluzione di equazioni vettoriali ed omografiche . . . . . *Pag.* 987
— Alcune applicazioni delle formole di Frenet . . . . . „ 1135
Perucca (Eligio). — Il potere rotatorio dei cristalli misti $NaClO_3$–$AgClO_3$ . . . . . „ 1127
Poli (Cino) — Sulla dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue . . . . . „ 132
— Sugli integrali estesi al contorno di un campo qualunque . „ 248
Pozzi (Emilio). — Studi sulla guerra civile Sillana . . . . „ 641
Regè (Rosina) — Ricerche anatomiche sui tessuti corticali del rizoma di alcune Iris . . . . . „ 22
Ricci (Carlo Luigi) — Dell'attrito nei freni e nei perni (con figure nel testo); Nota I^a e II^a 762, 967
Rostagni (Augusto). — La vita e l'opera di Pitagora secondo Timeo „ 376
— Le vicende della scuola pitagorica secondo Timeo . . . „ 554
Ruffini (Francesco) e De Sanctis (Gaetano). — Relazione della Commissione dei premi Gautieri, triennio 1910-1912 (Storia). „ 327
Salvadori (T.) — Philip Lutley Sclater (Commemorazione) . . „ 164
— Intorno ad un lavoro del Principe Carlo Luciano Bonaparte „ 447
Sclater (Filippo). — V. Salvadori (T.).
Segre (Corrado). — Rieletto per un secondo triennio alla carica di Segretario . . . . . „ 3
— Sulle congruenze rettilinee *W*, di cui una od ambe le falde focali sono rigate . . . . . „ 291
Silva (Pietro). — Gli è conferita una metà del premio Gautieri, triennio 1910-1912 (Storia) . . . . . „ 371
— Ringrazia pel premio conferitogli 399, 452
Somigliana (C.) — Enrico Poincaré (Commemorazione) . . „ 45
— Relazione sulla Memoria del Dott. Gustavo Sannia: *Caratteristiche multiple delle equazioni lineari alle derivate parziali in due variabili* . . . . . „ 635
— Relazione sulla Memoria del Dott. Ernesto Laura: *Sul problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi* . . „ 879
Suess (Edoardo). — V. Parona (C. F.).
Tamassia (Nino). — Gli è conferita una metà del premio Gautieri, triennio 1910-1912 (Storia) . . . . . „ 371
— Ringrazia pel premio conferitogli 399, 452
Terracini (Alessandro). — Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà; Nota I . . . . . „ 215

Tonelli (Leonida) — Sul valore di un certo ragionamento . *Pag.* 4
Torelli (Ruggiero). — Un criterio d'equivalenza per le curve di una superficie algebrica . . . . . „ 845
Vercelli (Francesco). — Sul gradiente termico alla superficie dei pianeti e sulla loro temperatura interna . . . . „ 342
Vogliano (Achille). — Una iscrizione greco latina . , . „ 1027
Zublena (Silvio). — Dosamento rapido dello zinco nei suoi minerali (Applicazione diretta del metodo Frary all'analisi dei minerali) „ 177

ACADEMY OF SCIENCES.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 1ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1913-914

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1913 - 16 Novembre	1913 - 23 Novembre
» - 30 »	» - 7 Dicembre
» - 14 Dicembre	» - 21 »
» - 28 »	1914 - 4 Gennaio
1914 - 11 Gennaio	» - 18 »
» - 25 »	» - 1 Febbraio
» - 8 Febbraio	» - 15 »
» - 22 »	» - 1 Marzo
» - 8 Marzo	» - 15 »
» - 22 »	» - 29 »
» - 5 Aprile	» - 19 Aprile
» - 26 »	» - 3 Maggio
» - 10 Maggio	» - 17 »
» - 24 »	» - 31 »
» - 14 Giugno	» - 21 Giugno

Tip. Vincenzo Bona - Torino (69277)

SOMMARIO

Elenco degli Accademici residenti, nazionali non residenti, stranieri e corrispondenti al 31 Dicembre 1913 . . . . . *Pag.* III

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 16 Novembre 1913 . *Pag.* 1

Tonelli (Leonida) — Sul valore di un certo ragionamento . „ 4

Guareschi (Icilio) — Ricerca dei bromuri in presenza dei solfocianati e dei ferrocianuri; azione dell'acido cromico sul bromuro di cianogeno; Nota VI . . . . . „ 15

Regè (Rosina) — Ricerche anatomiche sui tessuti corticali del rizoma di alcune Iris . . . . . „ 22

Laura (Ernesto) — Sopra le deformazioni per distorsione dei solidi elastici, isotropi di rivoluzione . . . . . „ 32

Somigliana (C.) — Enrico Poincaré (Commemorazione) . . . . „ 45

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 23 Novembre 1913 . *Pag.* 55

Buraggi (Gian Carlo) — I Giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento. — I. – Signorino Omodei . . . . . „ 57

Debenedetti (Santorre) — Due ballate del "Sollazzo" di Simone Prudenzani . . . . . „ 65

Tip. Vincenzo Bona – Torino

THE NEW YORK
ACADEMY OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 2ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *L* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 30 Novembre 1913 . *Pag.* 81

Bompiani (E.) — Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica . . . . . „ 83

Poli (Cino) — Sulla dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue . . . . . „ 132

Colonnetti (Gustavo) — L'estensimetro di Cambridge . . . . „ 135

Albenga (Giuseppe) — Su di alcune teorie approssimate alla lastra piana . . . . . „ 150

Salvadori (T.) — Philip Lutley Sclater (Commemorazione) . . . „ 164

Jadanza (N.) — Relazione sulla Memoria del Dr. G. A. Favaro: *Declinazioni di 121 stelle di riferimento per il Cataloyo Astrofotografico di Catania* (Zona da + 46° a + 48°) *osservate al Cerchio meridiano di Reichenbach di Torino* . . . . . „ 168

Peano (G.) — Relazione sulla Memoria del Dr. Vincenzo Mago: *Teoria degli ordini* . . . . . „ 169

Fusari (V.) — Relazione sulla Memoria del Prof. Dr. Ferruccio Vanzetti: *Meningo-encefalite sifilitica sperimentale* . . . . „ 170

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 7 Dicembre 1913 . *Pag.* 172

Einaudi (Luigi) — Relazione intorno alla Memoria del Sig. Prof. Carlo Contessa, intitolata: *Aspirazioni commerciali intrecciate ad alleanze politiche della Casa di Savoia coll'Inghilterra nei secoli XVII e XVIII* . . . . . „ 173

Tip. Vincenzo Bona — Torino

THE NEW YORK
ACADEMY OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 3ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *L* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 14 Dicembre 1913 . *Pag.* 177

ZUBLENA (Silvio). — Dosamento rapido dello zinco nei suoi minerali [Applicazione diretta del metodo FRARY all'analisi dei minerali] „ 178

CHINAGLIA (Leopoldo). — Contributo allo studio delle anomalie dei Lumbricidi . . . . . „ 195

TERRACINI (Alessandro). — Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà; Nota I . . . . . „ 214

POLI (Cino). — Sugli integrali estesi al contorno di un campo qualunque . . . . . „ 248

FUSARI (R.). — Relazione sulla Memoria del Dr ALFONSO BOVERO, *Sulla fine struttura e sulle connessioni del ganglio vestibolare del nervo acustico* . . . . . „ 261

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 21 Dicembre 1913 . „ 263

Premio di fondazione POLLINI . . . . . „ 265

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX. Disp. 4ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *L* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 28 Dicembre 1913 *Pag.* 267

Borrasso (Matteo). — Sulla determinazione del tasso di una rendita temporanea, variabile e continua . . . . . „ 268

Segre (C.). — Sulle congruenze rettilinee *W*, di cui una od ambe le falde focali sono rigate . . . . . „ 291

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 4 Gennaio 1914 . *Pag.* 304

Neri (Ferdinando). — La canzone di quattro rime . . . . . „ 305

Cipolla (C.). — La resistenza dei Bresciani contro Enrico VII giudicata a Firenze . . . . . „ 310

Tip. Vincenzo Bona — Torino

THE NEW YORK

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX. Disp. 5ª. 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza dell'11 Gennaio 1914 . *Pag.* 315

Naccari (A.). — Relazione della seconda Giunta per il XVIII premio Bressa . . . . . » 317

De Sanctis (G.) e Ruffini (F.). — Relazione della Commissione dei Premi Gautieri, triennio 1910-1912 (Storia) . . . . » 327

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza dell'11 Gennaio 1914 . *Pag.* 332

Albenga (Giuseppe). — La cerchiatura delle condotte forzate . » 333

Vercelli (Francesco). — Sul gradiente termico alla superficie dei pianeti e sulla loro temperatura interna . . . . . » 342

Classi Unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 18 Gennaio 1914 . *Pag.* 370

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 18 Gennaio 1914 . *Pag.* 372

Rostagni (Augusto). — La vita e l'opera di Pitagora secondo Timeo » 373

Premi di fondazione Gautieri . . . . . » 397

Tip. Vincenzo Bona — Torino

THE NEW YORK
ACADEMY

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 6ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 25 Gennaio 1914 . *Pag.* 399

Guareschi (Icilio). — Sulla ricerca dei gas e dei vapori bromurati; Nota VII . . . . . „ 401

Gastaldi (Enrico). — Cenni sopra alcuni minerali e roccie della Cina . . . . . „ 415

Dezani (S.). — Ricerche sulla tossicità del succo spremuto da semi germinanti . . . . . „ 425

Salvadori (T.). — Intorno ad un lavoro del Principe Carlo Luciano Bonaparte . . . . . „ 447

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 1° Febbraio 1914 . *Pag.* 452

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 7ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza dell'8 Febbraio 1914 . *Pag.* 453

Guareschi (Icilio). — Ricerche sull'acqua di cristallizzazione. Composti con $2H^2O$; Nota I . . . . . „ 455

Chabrier (G.) e Casale (L.). — Sugli ortoossiazocomposti derivanti dall'α-naftol . . . . . „ 477

Ferreri (G.). — Su alcuni eteri di naftilen-n-ossifeniltriazoli . „ 497

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 15 Febbraio 1914 . *Pag.* 508

Buraggi (Gian Carlo). — I Giureconsulti dell'Università di Torino nel Quattrocento. — II. – Giacomino da San Giorgio . „ 510

Levi (Attilio). — Etimologie piemontesi . . . . . „ 532

Rostagni (Augusto). — Le vicende della scuola pitagorica secondo Timeo . . . . . „ 554

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 8ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 22 Febbraio 1914 . *Pag.* 575

Bottasso (Matteo). — Sopra alcune estensioni dei teoremi di Guldino . . . . . „ 576

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 1° Marzo 1914 . *Pag.* 599

Fraccaro (Plinio). — La procedura del voto nei comizi tributi romani . . . . . „ 600

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX. Disp. 9ª. 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza dell'8 Marzo 1914 . . *Pag.* 623
Colomba (Luigi). — Speziaite, nuovo anfibolo di Traversella . 625
Somigliana (C.). — Relazione sulla Memoria del Dott. Gustavo Sannia: *Caratteristiche multiple delle equazioni lineari alle derivate parziali in due variabili* . . . . . „ 635
Mattirolo (Oreste). — Relazione sulla Memoria presentata dal Professore Achille Terracciano dal titolo: *La "Flora Sardoa" di Michele Antonio Plazza redatta sui suoi manoscritti* . „ 637

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 15 Marzo 1914. . *Pag.* 640
Pozzi (Emilio). — Studi sulla guerra civile Sillana 641
De Sanctis (Gaetano). — Note di epigrafia ellenistica . . . „ 680
Manacorda (Giuseppe). — Un testo di grammatica latino-veneta del secolo XIII . . . . . „ 689

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX. Disp. 10ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 22 Marzo 1914 . *Pag.* 699

Camerano (Lorenzo). — Osservazioni intorno al lacrimale e al nasale bipartiti nel Camoscio . . . . . „ 700

Chierchino (Salvatore). — Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè e sui loro moduli algebrici „ 705

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 29 Marzo 1914 . *Pag.* 727

Albertario (Emilio). — Nuove osservazioni sulla trasmissibilità del " iudicium operarum „ all'erede estraneo . . . . . „ 728

Rp. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX. Disp. 11ª. 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori. 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 5 Aprile 1914 . . *Pag.* 755

Gola (Giuseppe). — Epatiche del Kashmir raccolte dalla Spedizione Piacenza (con una tavola) . . . . . „ 757

Ricci (Carlo Luigi) — Dell'attrito nei freni e nei perni (con figure nel testo . . . . . „ 762

Fubini (Guido). — Definizione proiettivo-differenziale di una superficie . . . . . „ 786

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 19 Aprile 1914 . *Pag.* 803

Cipolla (Carlo). — Sulle tradizioni anti-bonifaciane rispetto a Guido da Montefeltro e alla guerra dei Colonna . . . . . „ 805

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 12ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 26 Aprile 1914 . *Pag.* 823

Camerano (Lorenzo). — Alberto Günther – Commemorazione . . 825

Guareschi (I). — Nuove ricerche sui bromuri metallici – Nota VIII „ 834

Torelli (Ruggiero). — Un criterio d'equivalenza per le curve di una superficie algebrica . . . . . „ 845

Foà (Carlo). — Nuove ricerche sulla funzione della ghiandola pineale „ 859

Mattirolo (O.). — Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. Giuseppe Gola dal titolo: *Epatiche della Regione del Kenia* (Africa orientale) . . . . . „ 873

Mattirolo (O.). — Relazione sulla Memoria presentata dal Dott. Enrico Mussa dal titolo: *La Flora dell'Agro Torinese dopo i lavori di J. B. Balbis e di G. F. Re e considerazioni sull'indigenato di talune specie*. . . . . „ 875

Somigliana (C.). — Relazione sulla Memoria del Dott. Ernesto Laura: *Sul problema esterno della Dinamica dei mezzi elastici isotropi* „ 879

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 3 Maggio 1914. . *Pag.* 881

Merlo (Clemente). — Note di fonetica italiana meridionale . „ 883

Costanzi (Vincenzo). — *Ζεὺς Ἄφριος* e il nome *Ἀφροδίτη* . . „ 907

Passamonti (Eugenio). — Un memoriale inedito di Prospero Balbo nel dicembre del 1799 . . . . . „ 914

Einaudi (Luigi). — Relazione sulla Memoria del Prof. Giuseppe Prato: *Un capitolo della vita di Giovanni Law* 952

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX. Disp. 13ª. 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di C. Frati, A. Baudi di Vesme e C. Cipolla.

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di C. Cipolla, G. De Sanctis e P. Fedele.

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 10 Maggio 1914 . *Pag.* 957

Parona (C. F.). — Edoardo Suess. — Cenni commemorativi . „ 959

Ricci (Carlo Luigi). — Dell'attrito nei freni e nei perni: Nota II „ 967

Pensa (Angelo). — Sulla risoluzione di equazioni vettoriali ed omografiche . . . . . „ 987

Fusari (R.). — Relazione sulla Memoria del Dott. Mario Sapegno, *Contributo all'istologia normale e patologica del fegato* . „ 1013

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 17 Maggio 1914 . . *Pag.* 1016

Baudi di Vesme (Alessandro). — Baldassare Mathieu, pittore di Anversa (Con una tavola) . . . . . „ 1018

Vogliano (Achille). — Una iscrizione greca arcaica . . . . „ 1027

Cortese (Adele). — Le origini di Taranto . . . . . „ 1037

Ferrabino (Aldo). — Ancóra Cirene mitica . . . . . „ 1063

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 14ª. 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *L* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 24 Maggio 1914 . *Pag.* 1081

Guareschi (Icilio). — Cenni storici sulla scoperta della sensibilità dei sali d'argento alla luce . . . . . „ 1083

Negri (Giovanni). — Le unità ecologiche fondamentali in Fitogeografia: Nota I^a . . . . . „ 1089

Delgrosso (Mario). — Sopra alcuni carbonati di Traversella . „ 1106

Camerano (Lorenzo). — Osservazioni intorno alla mucosa palatina del Camoscio delle Alpi (Con una tavola) . . . . . „ 1118

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

THE NEW YORK
ACADEMY OF SCIENCES

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIX, Disp. 15ª, 1913-1914.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto 3
1914

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 14 Giugno 1914 . *Pag.* 1125

Perucca (E.). — Il potere rotatorio dei cristalli misti $NaClO_2$-$AgClO_3$ (con una tavola) . . . . . „ 1127

Pensa (Angelo). — Alcune applicazioni delle formole di Frenet „ 1135

Favaro (G. A.). — L'Istrumento dei passaggi " Heyde " del Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino (con una tavola) . . . . . „ 1162

Negri (Giovanni). — Le unità ecologiche fondamentali in Fitogeografia. — Nota IIª . . . . . „ 1174

Casale (L.) e Casale-Sacchi (Maria). — Su alcuni aminoazocomposti „ 1199

Classi unite.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 21 Giugno 1914 . *Pag.* 1210

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Sunto dell'Atto Verbale dell'Adunanza del 21 Giugno 1914 . *Pag.* 1212

Cipolla (Carlo). — La data della morte di Dante secondo Ferreto dei Ferreti . . . . . „ 1214

De Sanctis (Gaetano). — Contributi alla storia dell'impero seleucidico . . . . . „ 1220

Olivetti (Alberto). — I figli della imperatrice Fausta . . . „ 1242

Indice del volume XLIX . . . . . „ 1253

Tip. Vincenzo Bona - Torino

AMNH LIBRARY
100125212